Republique Algerienne Democratique et Populaire
Ministere de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique
Universite Yahia Fares de Medea
Faculte des Sciences
Departement des Mathematiques et de l'Informatique



MEMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLOME DE MASTER EN MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématiques et Applications

par

ALIANE Samia

QUELQUES PROPRIETES DE SUITES RECURRENTES LINEAIRES

Soutenu publiquement le 18 Juin 2018 devant le jury composé de

Président :	LEGHMIZI Lamine	*M.C.A*	Université de Médéa
Examinatrice :	GUETTAI Ghania	*M.A.A*	Université de Médéa
Examinatrice :	BOULARIAH Fatiha	*M.A.A*	Université de Médéa
Promotrice :	AIT AMRANE Nacima Rosa	*M.A.A*	Université de Médéa

ANNEE UNIVERSITAIRE : 2017 – 2018

REMERCIEMENT

Arrivant à faire ce mémoire je dit "el hamde Li Allah" d'avoir accomplir ce modeste travail.

Je tient à remercier ma famille et particulèrement mes très chèrs parents, par leurs soutients, encourragements et leurs prières.

J'exprime ma gratitude la plus sincère à madame ***AIT AMRANE*** qui m'a fait l'honneur d'accepter la tâche d'être ma promotrice par son sérieux, sa disponibilité et ses encouragements. J'en suis honorée.

Je remercie sincèrement ***M. LEGHMIZI***,***Mme.GUETTAI***et ***Mme.BOULARIAH*** d'avoir accépter de faire partie du jury ainsi que pour leurs conseils judicieux.

Qu'il me soit permis de remercier tout les **enseignants** du département de mathématiques de l'unvercité de Dr. Yahia Fares de Medea, et de saluer ici mes proches et mes amis qui m'ont beaucoup soutenu et encourager.

Merci à ***Djamila*** qui m'a beaucoup aidé avec beaucoup de patience et de courage.

Merci beaucoup.

DEDICACES

Je dédie cette thèse à l'âme de celui qui a fait de moi une femme très forte et courageuse, à l'homme de ma vie, mon nom, mon identité, le grandiose qui m'a toujours pardonné toutes les fautes que j'ai commises avec un immense amour et tendresse, et m'a toujours offert sa confiance aveugle Je serai toujours fière d'être la fille de ALIANE AHMED paix à son âme.

A mon diamant, celle qui ne s'intéresse qu'à ma joie et sacrifie tout pour que je sois heureuse, la femme qui m'accueille par son sourire et ses embrasses tendres ma chère maman qui me donne continue à animer mon quotidien et m'aider à mener de défi de la vie.

A mes très chèrs frères que j'aime énormément Rachid, Rabah,Nacer Eddine et Mohammed

A mes princesses, mes intimes, mes sœurs Nacira, Fatma, Malika, Djahida, Khadidja et mon bijoux djamila ainsi que mon ange Hicham et ma poupée Imane.

A ma très chère promotrice Madame Ait Amrane.

A touts mes amies; tout particulièrement; Aicha, Amel, Fahima, Radhia, Salima et mon trésor Amina.

Table des matières

Résumé **6**

Introduction **7**

1 Suites récurrentes linéaires **9**

1.1 Suites récurrentes linéaires d'ordre k 10

1.1.1 Définition 10

1.1.2 Formule de Binet 11

1.1.3 Fonction génératrice 12

1.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 14

1.2.1 Définition 14

1.2.2 Quelques propriétées 14

1.3 Forme explicite d'une suite récurrente linéaire 15

1.3.1 Formule de Binet 15

1.3.2 Fonction génératrice 18

2 Généralisées des suites de Fibonacci et leurs propriétés **20**

2.1 Généralisés des suites de Fibonacci 22

2.2 Quelques identités des suites de Fibonacci 22

2.2.1 La formule de Binet 23

2.2.2 L'identité de Catalan 25

2.2.3 L'identité de Cassini 27

2.2.4 Lidentité d'Ocagne 29

2.3 La limite du quotient de deux tèrmes successifs 31

3 Etude de la suite de Pell **33**

3.1 Formule de Binet 33

3.2 Fonction génératrice 35

3.3 Quelques identités de la suite de Pell 36

3.3.1 L'identité de Catalan 36

3.3.2 L'identité de Cassini 36

3.3.3 L'identité d'Ocagne 37

3.3.4 Limite du quotient de deux termes successifs 37

Conclusion **39**

Bibliographie **40**

Résumé

La première partie de ce travail est consacré à l'étude de certaines propriétés algébriques des suites récurrentes linéaires à coefficients constants sur anneaux commutatif unitaire. On donne des définition et quelques propriétés des suites récurrentes linéaires d'ordre k puis celles d'ordre 2. On établie dans cette partie l'expression du terme général par deux méthodes ; par la formule de Binet et par la fonction génératrice.

La deuxième partie de ce mémoire a pour objet l'étude des propriétés de suite de Fibonacci et ses quelques généralisés en donnant leurs formes explicites et présenter quelques identités comme : l'identité de Catalan, l'identité de Cassini et l'identité d'Ocagne.

La troisième partie est consacrée à l'application à la suite de Pell, généralisée de Fibonacci.

Introduction

Leur âge, leur richesse ainsi que la diversité de leurs champs d'application font des suites récurrentes linéaires un sujet tellement vaste et si riche en résultat qu'il faudrait plusieurs ouvrages afin de faire le tour de toutes leurs propriétés. L'intérêt principal de ce mémoire est étudier et établir quelques propriétés des suites récurrentes linéaires.
La première partie de ce travail (chapitre 1) est consacrée à l'étude de quelques propriétés algébriques des suites récurrentes linéaires à coefficients constants sur des modules sur un anneau commutatif unitaire.
La seconde partie (chapitre 2 et 3) établie quelques généralisées de suite de Fibonacci en présentant certaines propriétés et identités liées à elles en terminant par une application sur une suite particulière dite suite de Pell.

chapitre 1

Au premier chapitre. On étudie quelques propriétés des suites récurrentes linéaires d'ordre k à coefficients constants et celles d'ordre 2 en donnant deux méthodes pour calculer leurs termes explicites, il s'agit de la formule de Binet et la fonction génératrice.

chapitre 2

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des propriétés de suite de Fibonacci

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

et ses généralisés comme la suite de Lucas, Jacobsthal et Jaconsthal-Lucas. On s'intéresse dans ce chapitre aux deux généralisés de la suite de Fibonacci $V_k,\ U_k\ avec\ n \in \mathbb{N}$ pour l'étude de certaines propriétés qu'elle vérifie comme la formule de Binet , la fonction génératrice, l'identité de Catalan, l'identité de Cassini, l'identité d'Ocagne, ainsi que la limite de deux

termes successifs.

Le dernier chapitre 3 est une application de notre travail sur une suite particulière c'est l'une des généralisés de la suite de Fibonacci la plus connue c'est la suite de Pell $P_n = 2P_{n-1}+P_{n-2}$.

Chapitre 1

Suites récurrentes linéaires

Définition 1.0.1. *Une suite est une séquence infinie de nombres réels. Un élément de cette suite est appelé un terme de la suite. En fait, il est noté que telle suite est une application de* $\mathbb{N}$ *vers* $\mathbb{R}$*, on peut donc la représenter par :*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

Exemple 1. $\{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8, \dots\}$ *est la représentation en extension de suite des entiers naturels pairs ou encore* $\{1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8, \dots\}$ *connu sous le nom suite de Fibonacci. De façon générale,* $\{u_0,\ u_1,\ u_2, \dots\}$ *se note* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Définition 1.0.2. *Une suite* u_n *ne commence pas nécessairement par l'indice 0, elle peut commencer par n'importe quel* $n_0 \in \mathbb{N}$*.*
Donc $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sera* $\{u_{n_0},\ u_{n_0+1},\ u_{n_0+2}, \dots\}$ *et se noterait* $\{u_n\}_{n\geq n_0}$*. Dans ce cas* u_n *sera notée par :*

$$\begin{array}{rcl} f : \{n \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

Définition 1.0.3 (**Suite définie par terme général**)**.** *Une suite peut être définie par le terme général en donnant simplement la formule générique en fonction de n qui permet de calculer n'importe quel terme de la suite d'une façon directe, ainsi que l'ensemble des indices pour lesquels la formule est valide.*

Exemple 2. *la suite* $\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$ *des entiers naturels pairs est définie par son terme général* $u_n = 2n\ ,\ n \geq 0$

Définition par récurrence

Définition 1.0.4. *La définition par récurrence consiste à donner les valeur initiales de la suite, et une formule de récurrence qui relie les termes successifs de la suite. c'est une méthode pour calculer la valeur de n'importe quel terme de la suite en fonction de ses prédécesseurs.*

Exemple 3. *On reprend la suite des entiers pairs, on la définit récursivement par :*

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \\ u_n = u_{n-1} + 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \tag{1.1}$$

Dans ce travail on s'intéresse aux suites récurrentes linéaires.

1.1 Suites récurrentes linéaires d'ordre k

1.1.1 Définition

Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que u_n est une suite récurrente linéaire sur $\mathbb{K}$. Si elle est définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_n = \begin{cases} u_0 & = & \lambda_0 \\ u_1 & = & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{k-1} & = & \lambda_{k-1} \\ u_n & = & \sum_{i\leq k} a_i u_{n-i} \; avec \; n, i, k \in \mathbb{N} \; et \; i \leq k \leq n. \end{cases} \tag{1.2}$$

Définition 1.1.1. *u_n est une suite récurrente linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}(\mathbb{R}ou\mathbb{C})$ d'ordre k si,*

$$u_n = \sum_{i\leq k} a_i u_{n-i} \qquad avec \qquad n, i, k \in \mathbb{N} \; et \; i \leq k \leq n.$$

Définition 1.1.2. *Si u, v sont deux suites recurrentes linéaires et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a alors,*

— *$u + v$, $-v$, λu sont des suites récurrentes linéaire.*

— *$u.v$ est une suite récurrente linéaire.*

1.1.2 Formule de Binet

On considère l'équation homogène d'ordre k à coefficients constants, réels ou complexes suivante :

$$u_{n+k} + a_{k-1}u_{n+k-1} + \cdots + a_0 u_n = 0 \quad n \geq k \tag{1.3}$$

avec $u_0, u_1, .., u_{k-1}$ les conditions initiales

Définition 1.1.3. *Dans $\mathbb{K}[X]$, le polynôme caractéristique $\Pi \in \mathbb{P}_k$ associé à 1.3 est défini par*

$$\Pi(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + \alpha_0,\ k = 0, 1... \tag{1.4}$$

Pour poser la forme explicite de u_n on distingue deux cas.
Si on note ses racines distinctes $\alpha_j, j = 1 \ldots d \quad d \leq k$. La solution dans le cas des racines toutes simples est donnée par le théorème suivant ;

Théorème 1.1.4. *On prend le polynôme 1.4 Si toutes les racines de Π sont simples, alors toutes les solutions de 1.3 peuvent être mises sous la forme*

$$u_n = \sum_{1 \leq i \leq k} \lambda_i \alpha_i^n,\ n = 0, 1 \ldots \tag{1.5}$$

est aussi solution de l'équation 1.3 c'est la forme explicite de la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, On peut déterminer les coefficients $\lambda_1, ..., \lambda_{k-1}$ en imposant les k conditions initiales $u_0, ..., u_{k-1}$

Preuve 1. *On reprend l'équation 1.3 son polynôme caractéristique associé défini par,*

$$\Pi(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Toutes ses racines sont simples, donc toutes les solutions de 1.3 s'écrivent,
$u_n = \lambda_1 \alpha_1^n + \lambda_2 \alpha_2^n + \cdots + \lambda_{k-1}\alpha_{k-1}^n$

$$\begin{cases} u_0 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{k-1} \\ u_1 &= \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_{k-1}\alpha_{k-1} \\ u_2 &= \lambda_1\alpha_1^2 + \lambda_2\alpha_2^2 + \cdots + \lambda_{k-1}\alpha_{k-1}^2 \\ \vdots &\ \vdots\ \vdots \\ u_{k-1} &= \lambda_1\alpha_1^{k-1} + \lambda_2\alpha_2^{k-1} + \cdots + \lambda_{k-1}\alpha_{k-1}^{k-1} \end{cases} \tag{1.6}$$

l'écriture matricielle correspondante de 1.6

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{k-1} \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_{k-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \dots & \alpha_{k-1}^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_{k-1} \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

On aura donc le système $AV_k = U_k$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{k-1} \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_{k-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \dots & \alpha_{k-1}^{k-1} \end{pmatrix}$ $V_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_{k-1} \end{pmatrix}$ $U_k = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{k-1} \end{pmatrix}$

puisque les k-racines sont simples donc la matrice A dite de Vandermonde, est inversible donc la solution théorique de 1.7 c'est $V_k = A^{-1}U_k$

L'expression de u_n dans le cas des racines multiples est donné par le théorème suivant ;

Théorème 1.1.5. *Si* $\Pi(x)$ *admet des racines* α_j $(j = 1,\ 2,\ \dots p$ *avec* $p < k)$ *ayant par ordre de multiplicité* $m_j \geq 2$ *tel que* $\sum_{j=1}^{p} m_j = k$. *alors les k suites,*

$$\left\{ \left(\alpha_j^n\right),\ \left(n\alpha_j^n\right), \dots, \left(n^{m_j-1}\alpha_j^n\right) | j = 1, \dots, p\ , n \in \mathbb{N} \right\}.$$

forment une base de l'éspace vectoriel des solutions de 1.3, la solution unique de 1.3 est donc de la forme

$$u_n = \sum_{1 \leq j \leq p} Q_j(n)\alpha_j^n, \tag{1.8}$$

Où $Q_j(n)$ *est un polynômeôme en n de degréé* $\leq m_j - 1$.

Preuve 2. *La démonstration de ce théorème est en détail dans [1]*

1.1.3 Fonction génératrice

Dans cette section on développe une méthode de résolution des récurrences par séries génératrices.

Les fonctions génératrices sont des séries formelles utilisées pour résoudre une relation de récurrence linéaire homogène à coéfficients constants. En 1718 le mathématicien français Abraham De Moivre (1667-1754) posa les fonctions génératrices afin de résoudre la relation de récurrence de Fibonacci [9].

Définition 1.1.6. *Soit $\{u_n\}_{n\geq 0}$ une suite récurrente linéaire homogène à coefficients constants de la forme générale*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + \cdots + a_{n-k} u_{n-k}, \quad n \geq k$$

la fonction génératrice associée est définie par

$$g(x) = \sum_{n\geq 0} u_n x^n$$

Proposition 1.1.7. *Soit l'équation de récurrence linéaire homogène à coéfficients constants suivante :*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + \cdots + a_{n-k} u_{n-k} \quad \forall n \geq k$$

$G(x) = \sum_{n\geq 0} u_n x^n$ *sa fonction génératrice associée. On a* $G(x) = \dfrac{U(x)}{V(x)}$

où

$$\begin{aligned} U(x) &= P_{k-1}(x) - a_1 x P_{k-2}(x) - \cdots - a_{k-1} x^{k-1} P_0(x) \\ V(x) &= 1 - a_1 x - a_2 x^2 - \cdots - a_k x^k \\ P_i &= u_0 + u_1 x + \cdots + u_i x^i \quad avec\ i = 0, 1, ..., k-1 \end{aligned}$$

Proposition 1.1.8. *Soit u_n une suite récurrente linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *la suite u_n est une suite récurrente linéaire.*
2. *Il existe un polynôme q de degré k dans $A[X]$ tel que : $q(0) = 1$ et $q(x)G(x)$ soit un polynôme de $M[x]$ de degré inférieur ou égal à $k-1$.*

Preuve 3. *Soit u_n une suite récurrente linéaire de polynôme caractéristique*

$$P(X) = X^k - a_1 X^{k-1} - \cdots - a_k$$

Soit $q(X) = 1 - a_1 X^{k-1} - \cdots - a_k X^k$. On a alors : $q(X)G(X) = p(X)$ ou,

$$p(X) = u(0) + (u(1) - a_1 u(0))\, X + \cdots + (u(k-1) - a_1 u(k-2) - \cdots - a_{k-1} u(k-1))\, X^{k-1}$$

Inversement, si pour u_n une suite récurrente linéaire, il existe un polynôme dans $A[X]$ de degré k tel que,

$$q(X) = 1 - q_1X - \cdots - q_kX^k \quad et\ \omega(q(X)G(X)) \leq k - 1$$

alors, par identification, on voit que le polynôme $1 - q_1X - \cdots - q_kX^k$ est un polynôme caractéristique de la suite u_n.

1.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Dans toute la suite $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. $\mathbb{U}$ l'ensemble de suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

1.2.1 Définition

Soit $a, b \in \mathbb{K}^*$.

Une suite u est dite récurrente linéaire d'ordre 2 à coéfficients constants, si elle satisfait la relation de récurrence suivante :

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}. \qquad n \geq 2. \tag{1.9}$$

1.2.2 Quelques propriétées

Etant donné un couple$(a, b) \in \mathbb{K}^2$,

1. $\mathbb{U}$ n'est pas vide, car : la suite nulle appartient à $\mathbb{U}$.
2. La donné des deux premiers termes u_0 *et* u_1 définit une unique suite de $\mathbb{U}$.
3. $\mathbb{U}$ est stable par combainisons linéaires :

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2\ (u, v) \in \mathbb{U}\ \Rightarrow \alpha u + \beta v \in \mathbb{U}.$$

4. Une suite géométrique de raison q non nul appartient à $\mathbb{U}$ si et seulement si q est solution de l'équation $x^2 = ax + b$ car : d'après la propriété 3, on peut poser $u_0 = 1\ \forall n \in \mathbb{N}\ q^{n+2} = aq^{n+1} + bq^n \Leftrightarrow q^n(q^2 - aq - b) = 0\ avec\ q^n \neq 0$.

Définition 1.2.1. *L'équation $x^2 = ax + b$ s'appelle* ***équation caracteristique*** *associée à la suite définie en 1.9.*

Exemple 4. *La suite récurrente de Fibonacci d'ordre 2 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie récursivement par :*

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{cases} \tag{1.10}$$

est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Il est très important de marquer que quoique la définition par récurrence soit une définition tout à fait rigoureuse, mais elle n'est pas très pratique. En effet, pour calculer u_{100}, il faut d'abord calculer u_{99} et pour calculer u_{99} on a besoin de connaître u_{98},etc. Donc si on souhaite calculer tout les termes de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ il est préférable de travailler avec la définition par terme général de la suite au lieu de celle par récurrence.

1.3 Forme explicite d'une suite récurrente linéaire

On présente quelques outils permettant de trouver la définition par terme général d'une suite récurrente linéaire donnée.

1.3.1 Formule de Binet

La première façon de donner la forme explicite est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.3.1. *Soit Δ le discriminant de l'équation $x^2 - ax - b = 0$. Trois cas sont à distinguer : On a $\Delta = a^2 + 4b$ donc,*

1. *$\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède dans ce cas deux racines réelles distinctes α_1 et α_2, dans ce cas $u_n \in \mathbb{U}$ si et seulement si s'il éxiste $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = \lambda_1(\alpha_1)^n + \lambda_2(\alpha_2)^n.$$

2. $\Delta = 0$, *dans ce cas l'équation caractéristique possède une racine doubles notée* α. *Dans ce cas* $u_n \in \mathbb{U}$ *si et seulement si s'il éxiste* $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ *et tel que :*

$$u_n = (\lambda_1 n + \lambda_2)\alpha^n.$$

3. $\Delta < 0$, *dans ce cas l'équation caractéristique possède deux racines cmplexes conjuguées* ω *et* $\overline{\omega}$.
Dans ce cas $u_n \in \mathbb{U}$ *si et seulement si s'il éxiste* $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ *et tel que :*

$$u_n = \lambda_1 l^n \cos(n\theta) + \lambda_2 l^n \sin(n\theta).$$

Où $l = |\omega|$ *et* $\theta = arg(\omega)$.

Remarque 1.3.2. *Dans les trois cas le coulpe*(λ, μ) *est détèrminé à partir des valeurs initiales de la suite* u_n.

Proposition 1.3.3. *Soit* $p(x) = ax^2 + bx + c$ *un polynôme de degré deux.*

1. *On note* α, β *ses deux racines tel que* $\alpha = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $\beta = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ *car*
$$\begin{cases} p(\alpha) = 0 \text{ et } p(\beta) = 0 \\ \text{mais } p(x) \neq 0 \quad \forall x \neq \alpha,\ \beta. \end{cases} \tag{1.11}$$
2. *Le polynôme* p *se factorise toujours ainsi* $p(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$.

3. *Si le polynôme est unitaire ie* $a = 1$ *on a ;*
$$\begin{cases} \alpha + \beta = -b \\ \alpha\beta = c \end{cases} \tag{1.12}$$

On donne un exemple où on illustre comment les déterminer.

Exemple 5. 1. *La suite de Fibonacci est une suite récurrente linéaire définie par :*

$$\begin{cases} F_0 = 0,\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad n \geq 2 \end{cases} \tag{1.13}$$

son polynôme caractéristique associé est $\Pi(x) = x^2 - x - 1$.

Comme $\Delta = \sqrt{5} \neq 0$ *donc cette équation admet deux racines distinctes* $\alpha,\ \beta$ *tel que* $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *et* $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, *le théorème (1.6.1) donne* $\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}$ *tel que*

$$F_n = \lambda_1 \alpha^n + \lambda_2 \beta^n$$

Déterminons les λ_1, λ_2 *par les valeurs initiales ;*

$$\begin{cases} F_0 &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ F_1 &= \lambda_1\alpha + \lambda_2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1\alpha + \lambda_2\beta &= 1 \end{cases} \tag{1.14}$$

l'écriture matricielle associée est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

alors,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

D'où

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

Donc la forme explicite de $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

2. *On prend la suite* $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n,\ u_0 = 5,\ u_1 = 6,$

son équation caractéristique associée est

$$x^2 - 6x + 9 = 0,$$

Comme $\Delta = 0$, *donc cet équation possède une racine double* $\alpha = 3$ *le théorème [1.6.1] donne l'existence de* $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ *tel que*

$$u_n = (\lambda_1 + n\lambda_2)3^n$$

sachant que $u_0 = 5$ *et* $u_1 = 6$ *par convention on aura donc,* $\lambda_1 = 5$ *et* $\lambda_2 = -3$.

D'où le terme général de la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est :*

$$u_n = (5 - 3n)3^n \quad n \geq 0$$

La deuxième manière de trouver la formule de Binet en utilisant la fonction génératrice. Ce qui repose sur deux étapes :

1. Retrouver la fonction génératrice ;
2. Utiliser la formule de Taylor.

1.3.2 Fonction génératrice

Pour le calcul qu'on aura à faire dans cette partie, la proposition suivante, qui découle de (1.6.3), on sera très utile.

Proposition 1.3.4. *Soit $p(x) = x^2 - rx - s$ un polynôme de degré deux avec s et r des entiers positifs non nuls. Et soient α, β ses deux racines (non nécessairement distinctes). Alors le polynôme $q(x) = 1 - rx - sx^2$ se factorise ainsi :*

$$q(x) = (1 - \alpha x)(1 - \beta x).$$

Utilisation de la fonction génératrice ;

Exemple 6. *On prend la suite de Fibonacci citée dans l'éxemple (2.3.3) on a,*

$$\begin{cases} F_0 = 0,\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad n \geq 2 \end{cases} \tag{1.18}$$

sa fonction génératrice associé est $\dfrac{x}{1 - x - x^2}$

En effet comme

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

On a donc

$$\begin{aligned} xg(x) &= F_0 + F_1x^2 + F_2x^3 + F_3x^4 + \cdots + F_{n-1}x^n \\ x^2g(x) &= F_0 + F_1x^3 + F_2x^4 + \cdots + F_{n-2}x^n \\ g(x) - xg(x) - x^2g(x) &= F_1x + (F_2 - F_1)x^2 + (F_3 - F_2 - F_1)x^3 + \cdots + (F_n - F_{n-1} - F_{n-2})x^n + \ldots \end{aligned}$$

puisque $F_0 = 0,\ F_1 = F_2 = 1$ et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ alors

$$\begin{aligned} (1 - x - x^2)g(x) &= x \\ alors\ g(x) &= \frac{x}{1 - x - x^2}. \end{aligned}$$

Maintenant on cherche une formulation analytique pour le coéfficient de x^n dans la série génératrice $\dfrac{x}{1-x-x^2}$.
Calculons la décomposition en éléments simples de $g(x)$

$$(1-x-x^2) = (1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)$$

où $\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *et* $\alpha_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
trouvons A_1 *et* A_2 *tel que*

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{A_1}{1-\alpha_1 x} + \frac{A_2}{1-\alpha_2 x}$$

on a par identification $A_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ *et* $A_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ *et donc*

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha_1 x} - \frac{1}{1-\alpha_2 x}\right)$$

comme le développement en série donne ;

$$\frac{1}{1-\alpha x} = 1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \dots$$

on aura donc

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((1+\alpha_1 x + \alpha_1^2 x^2 + \dots) - (1+\alpha_2 x + \alpha_2^2 x^2 + \dots)\right)$$

Par identification on a,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) x^n$$

D'après la définition (1.4.7) on a

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Et c'est exactement la formule de Binet de la suite de Fibonacci $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ *déjà retrouvé dans l'exemple (5) par le théorème (1.6.1).*

Chapitre 2

Généralisées des suites de Fibonacci et leurs propriétés

Ce chapitre est consacré à l'étude des généralisées des suites de Fibonacci et certaines de leurs propriétés. La suite de Fibonacci permet de développer plusieurs travaux (....) et possède étonnement des propriétés. Dans son ouvrage le plus célèbre "Liber Abaci" publié en 1202, Fibonacci s'intéressa au problème de croissance d'une population de lapin dans des circonstances idéales. Plusieurs généralisés de la suite de Fibonacci ,comme la suite de Lucas, la suite de Jacobsthal, la suite de Jacobsthal-Lucas et la suite de Pell sont des exemples les plus importants des suites récursives.

Définition 2.0.1. *La généralisé de Fibonacci est définie par la relation de récurrence*

$$\begin{cases} F_k = pF_{k-1} + qF_{k-2} & k \geq 2 \\ F_0 = a,\ F_1 = b \end{cases} \tag{2.1}$$

où p, q, a et b sont des entiers positifs non nuls.

la suite des entiers de Fibonacci peut s'écrit :

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...$$

Cette suite dans laquelle les deux premiers tèrmes sont égaux à 1 et chaque tèrme (à partir du troisième) est la somme des deux tèrmes précédents ie $0 + 1 = 1,\ 1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$, $2 + 3 = 5$, $3 + 5 = 8$, $5 + 8 = 13$ ...

La suite de Fibonacci est définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} F_k = F_{k-1} + F_{k-2} & k \geq 2 \\ F_0 = 0 \; F_1 = 1 \end{cases} \tag{2.2}$$

L'interpolation matricielle de la relation de récurrence 2.2 nous conduit à la relation

$$C^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \quad avec \quad C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

où $F_1 = 1$ *et* $F_0 = 0$. Donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$$

et aussi,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{pmatrix}$$

$$C^{n+1} = \begin{pmatrix} F_n & F_n + F_{n-1} \\ F_n + F_{n-1} & F_{n+1} + F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}$$

La suite de Lucas est définie par la relation de récurrence suivante

$$\begin{cases} L_k = L_{k-1} + L_{k-2} & k \geq 2 \\ L_0 = 2, L_1 = 1 \end{cases} \tag{2.4}$$

On peut même la trouver en prenant la trace de la matrice C^n,

$$Tr(C^n) = F_{n+1} + F_{n-1} = F_n + 2F_{n-1}$$

La suite récurrente de second ordre est généralisée principalement en deux manières, la première conservant les conditions initiales et la deuxième conservant la relation de récurrence. Kalman et Mena [6] généralisent la suite de Fibonacci par :

$$\begin{cases} F_n = aF_{n-1} + bF_{n-2} & n \geq 2 \\ F_0 = 0, \; F_1 = 1 \end{cases} \tag{2.5}$$

avec a et b sont des entiers positifs non nuls.

Horadam [2] définit la suite de Fibonacci H_n par :

$$\begin{cases} H_n = H_{n-1} + H_{n-2} & n \geq 3 \\ H_1 = p, H_2 = p + q \end{cases} \tag{2.6}$$

où p et q sont des entiers.

2.1 Généralisés des suites de Fibonacci

La généralisée de la suite de Fibonacci [10] est définit comme

$$\begin{cases} F_k = pF_{k-1} + qF_{k-2} & k \geq 2 \\ F_0 = a,\ F_1 = b \end{cases} \tag{2.7}$$

où p, q, a et b des entiers positifs.

Pour differentes valeurs de $p,\ q,\ a\ et\ b$ beaucoup de suites peuvent être déterminées.

On s'intéresse aux deux cas des suites $\{V_k\}_{k\geq 0}$ et $\{U_k\}_{k\geq 0}$ que sont généralisées de Fibonacci.

1. Si $p = 1,\ q = a = b = 2$, donc on obtient

$$\begin{cases} V_k = V_{k-1} + 2V_{k-2} & k \geq 2 \\ V_0 = 2,\ V_1 = 2 \end{cases} \tag{2.8}$$

   qui donnent les premiers termes de $\{V_k\}_{k\geq 0}$ sont $2, 2, 6, 10, 22, 42, \ldots$

2. Si $p = 1,\ q = a = 2,\ b = 0$,on obtient donc

$$\begin{cases} U_k = U_{k-1} + 2U_{k-2} & k \geq 2 \\ U_0 = 2,\ U_1 = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

   qui donnent les premiers termes de $\{U_k\}_{k\geq 0}$ sont $2, 0, 4, 4, 12, 20, \ldots$

Les suites de Fibonacci verifient des propriétés remarquables comme l'identité de Catalan, l'identité de Cassini et l'identité d'Ocagne.

2.2 Quelques identités des suites de Fibonacci

Voici des outils importants pour l'établissement des propriétés.

2.2.1 La formule de Binet

En 19^{me} siècle le mathématicien fraçais Binet posa deux formules analytiques remarquables pour les nombres de Fibonacci et Lucas. La formule de Binet est donc la forme explicite de la suite récurrente linéaire ie : la suite de Fibonacci en fonction de n, c'est aussi le terme général de la suite récurrente utilisée pour l'établissement des identités que vérifie une suite donnée.

La formule de Binet est obtenue en diagonalisant [5] la matrice C associée à 2.2, ie $X_n = CX_{n-1}$ tel que

$$X = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc pour avoir X_n afin d'obtenir F_n, il nous faut d'expliciter la matrice C^n en fonction de n, et pour cela il suffit de diagonaliser la matrice C. Puisque C est symétrique car $C = C^t$ donc elle est diagonalisable et son polynôme caractéristique donné par $x^2 - X - 1$.

On a $\Delta = 5$ donc il admet deux racines distinctes $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

D''où la matrice diagonale est

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

On a donc $C = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

P la matrice de passage formée des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

On obtient finalement

$$C^n = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} \beta^{n-1} - \alpha^{n-1} & \beta^n - \alpha^n \\ \beta^n - \alpha^n & \beta^{n+1} - \alpha^{n+1} \end{pmatrix}$$

Car D^n reste diagonale de termes diagonaux α^n *et* β^n. Et comme $X_n = C^n X_0$ ce qui donne $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$

Proposition 2.2.1. *Le k-ème terme des deux généralisées de la suite de Fibonacci* $\{V_k\}_{k\geq 0}$ *et* $\{U_k\}_{k\geq 0}$ *donnés par*

1. $V_k = 2\,\dfrac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha - \beta}$
2. $U_k = 4\,\dfrac{\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}}{\alpha - \beta}$

Preuve 4. *l'équation caractéristique associée à 2.8 est* $x^2 - x - 2 = 0$. *La solution de la récurrence 2.8 s'écrit comme suit :*

$$V_k = \lambda_1(\alpha)^k + \lambda_2(\beta)^k$$

où α, β *les racines de l'équation caractéristique associée à 2.8*

On a :

$$\begin{cases} V_0 = \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ V_1 = 2\lambda_1 - \lambda_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{4}{3}\,, \lambda_2 = \frac{2}{3}$$

On aura donc :

$$\begin{aligned} V_k &= \frac{4}{3}(2)^k + \frac{2}{3}(-1)^k \\ &= \frac{2}{3}\left(2(2)^k + (-1)^k\right) \quad avec \quad \frac{1}{3} = \frac{1}{\alpha - \beta} \\ &= 2\left(\frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha - \beta}\right) \end{aligned}$$

□

On démontre maintenant la formule de Binet en utilisant le principe d'induction mathématique(PMI) on n. Il est claire que le résultat est vrai pour $n = 0$ *et* $n = 1$ *par hypothèseèse. Supposons qu'il est vrai pour r tel que* $0 \leq r \leq s + 1$ *alors*

$$V_r = 2\,\frac{\alpha^{r+1} - \beta^{r+1}}{\alpha - \beta}$$

Il s'ensuit de la définition de généralisé des nombres de Fibonacci et l'équation

$$V_{r+2} = V_{r+1} + 2V_r = 2\,\frac{\alpha^{r+3} - \beta^{r+3}}{\alpha - \beta}$$

Donc la formule est vraie pour tout entier positif k. □

Formule de Binet de quelques suites particulières

1. La suite de Lucas définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \qquad n \geq 2 \\ L_0 = 2,\ L_1 = 1 \end{cases} \tag{2.10}$$

son polynôme caractéristique associé est $x^2 - x - 1$ et $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ses deux racines distinctes.

D'après le théorème (1.6.1) la forme explicite s'écrit $L_n = a\alpha^n + b\beta^n$

$a = 1,\ b = 1$ obtenus à partir des conditions initiales et donc

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

2. La suite de Jacobsthal définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2} & n \geq 2 \\ J_0 = 0,\ J_1 = 1 \end{cases} \tag{2.11}$$

son polynôme caractéristique associé est $x^2 - x - 2$ et $\alpha = 2,\ \beta = -1$ ses deux racines distinctes. D'après le théorème (1.6.1) la forme explicite s'écrit $J_n = a\alpha^n + b\beta^n$
$a = \dfrac{1}{\alpha - \beta},\ b = \dfrac{-1}{\alpha - \beta}$ obtenus à partir des conditions initiales et donc

$$J_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

3. Jacobsthal-Lucas définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2} & n \geq 2 \\ J_0 = 2,\ J_1 = 1 \end{cases} \tag{2.12}$$

son polynôme caractéristique associé est $x^2 - x - 2$ et $\alpha = 2,\ \beta = -1$ ses deux racines distinctes. D'après le théorème (1.6.1) la forme explicite s'écrit $J_n = a\alpha^n + b\beta^n$
$a = 1,\ b = 1$ obtenus à partir des conditions initiales et donc

$$J_n = \alpha^n + \beta^n$$

2.2.2 L'identité de Catalan

L'identité de Catalan pour les nombres de Fibonacci a été établie en 1879 par le mathématicien belge Eugene Charles Catalan qui a travaillé à l'accademie belge des sciences dans le domaine de théorie des nombres [4].

Théorème 2.2.2. *Pour tout n et r tel que $n > r$ on a :*

$$F_{n+r}F_{n-r} - F_n^2 = (-1)^{n-r+1}F_r^2$$

Preuve 5. *En utilisant la formule de Binet de la suite de Fibonacci, on* $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$

$$\begin{aligned}
F_{n+r}F_{n-r} - F_n^2 &= \left(\frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}}{\alpha - \beta}\right) - \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2 \\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[\alpha^{2n} + \beta^{2n} - (\alpha\beta)^n(\frac{\alpha}{\beta})^r - (\alpha\beta)^n(\frac{\beta}{\alpha})^r - \alpha^{2n} - \beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^n\right] \\
&= \frac{-1}{(\alpha-\beta)^2}(\alpha\beta)^n\left((\frac{\alpha}{\beta})^r + (\frac{\beta}{\alpha})^r - 2\right) \\
&= -(\alpha\beta)^n F_r^2 \\
&= (-1)^{n-r+1}F_r^2 \qquad \square
\end{aligned}$$

Les deux duites V_k et U_k verifient l'identité de Catalan danné par le théorème suivant.

Théorème 2.2.3. *Pour tout n et r tel que $n > r$ on a :*

1. $V_{n-r-1}V_{n+r+1} - V_{n-1}^2 = (-1)^{n-r+1}2^{n-r}V_{r-1}^2$
2. $U_{n-r+1}U_{n+r+1} - U_{n+1}^2 = (-1)^{n-r+1}2^{n-r}U_{r+1}^2$

Preuve 6. *1/ On utilise la formule de Binet pour la suite V_k, on a* $V_n = 2\dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$

$$\begin{aligned}
V_{n-r-1}V_{n+r-1} - V_{n-1}^2 &= 2\left(\frac{\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}}{\alpha - \beta}\right)2\left(\frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha - \beta}\right) - 4\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2 \\
&= -\frac{4}{(\alpha-\beta)^2}(\alpha\beta)^n\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^r - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r - 2\right) \\
&= -4(\alpha\beta)^{n-r}\left(\frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta}\right)^2 \\
&= (-1)^{n-r+1}(-2)^{n-r}\left(2\frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta}\right)^2 \\
&= (-1)^{n-r+1}(-2)^{n-r}V_{r-1}^2
\end{aligned}$$

D'où le résultat $V_{n-r-1}V_{n+r-1} - V_{n-1}^2 = (-1)^{n-r+1}(-2)^{n-r}V_{r-1}^2$ □

2/ On utilise la formule de Binet pour la suite U_k *on a* $U_k = 4\dfrac{\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}}{\alpha - \beta}$;

$$\begin{aligned}
U_{n-r+1}U_{n+r+1} - U_{n+1}^2 &= 16\left(\frac{\alpha^{k-r} - \beta^{k-r}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{k+r} - \beta^{k+r}}{\alpha - \beta}\right) - 16\left(\frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta}\right)^2 \\
&= \frac{16}{(\alpha - \beta)^2}\left((\alpha^{k-r} - \beta^{k-r})(\alpha^{k+r} - \beta^{k+r}) - (\alpha^r - \beta^r)^2\right) \\
&= -\frac{16}{9}(\alpha\beta)^k\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^r + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r - 2\right) \\
&= (-1)^{k-r+1}\frac{(\alpha\beta)^k}{(\alpha\beta)^r}\left(4\frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta}\right)^2 \\
&= (-1)^{k-r+1}2^{k-r}\left(4\frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta}\right)^2
\end{aligned}$$

D'où le résultat $U_{n-r+1}U_{n+r+1} - U_{n+1}^2 = (-1)^{n-r+1}2^{n-r}U_{r+1}^2$ □

2.2.3 L'identité de Cassini

C'est une parmi les grandes identités impliquant les nombres de Fibonacci, elle a été établie en 1680 par l'astronome français Jean-Dominique-Cassini.
En calculons le determinant de la matrice C^n définie par 2.3on obtient l'identité de Cassini [5]

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

Ce qui fait l'inversibilité de la matrice C^n (.) d'où la suite de Fibonacci admet une unique forme explicite et c'est celle donnée par la formule de Binet.

Corollaire 2.2.4. *Pour tout entiers* n *on a :*

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

Preuve 7. *Utilisons la formule de Binet de la suite de Fibonacci, on a* $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$

$$\begin{aligned}
F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 &= \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}\right) - \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2 \\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[\alpha^{2n} + \beta^{2n} - (\alpha\beta)^n\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - (\alpha\beta)^n\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) - \alpha^{2n} - \beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^n\right] \\
&= \frac{-1}{(\alpha-\beta)^2}(\alpha\beta)^n\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 2\right) \\
&= -(\alpha\beta)^{n-1} \\
&= (-1)^n \qquad \square
\end{aligned}$$

Théorème 2.2.5. *Les deux suites V_k et U_k verifient l'identité de Cassini pour $n \geq 2$*

1. $V_{n-2}V_n - V_{n-1}^2 = (-1)^n 2^{n+1}$
2. $U_{n+2}U_n - U_{n+1}^2 = (-1)^n 2^{n+3}$

Preuve 8. *1/ On utilise la formule de Binet pour la suite V_k, on a $V_n = 2\dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$:*

$$\begin{aligned}
V_{n-2}V_n - V_{n-1}^2 &= 2\left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}\right)2\left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\right) - 4\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2 \\
&= -\frac{4}{(\alpha-\beta)^2}(\alpha\beta)^n\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} - 2\right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(2)^{n+2}}{2}\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta}\right)^2 \\
&= (-1)^n 2^{n+1}
\end{aligned}$$

D'où le résultat $V_{n-2}V_n - V_{n-1}^2 = (-1)^n 2^{n+1}$ $\square$

2/ En utilisant la formule de Binet pour la suite U_k on a $U_k = 4\dfrac{\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}}{\alpha - \beta}$:

$$\begin{aligned}
U_{n+2}U_n - U_{n+1}^2 &= 16\left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}\right) - 16\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2 \\
&= \frac{16}{(\alpha-\beta)^2}\left((\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) - (\alpha^n - \beta^n)^2\right) \\
&= -\frac{16}{9}\frac{(\alpha\beta)^n}{\alpha\beta}(\alpha - \beta)^2 \\
&= (-1)^n 2^{n+3}
\end{aligned}$$

D'où le résultat $U_{n+2}U_n - U_{n+1}^2 = (-1)^n 2^{n+3}$ □

2.2.4 Lidentité d'Ocagne

La suite de Fibonacci vérifie l'identité d'Ocagne donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.2.6. *Pour tout entiers n et m telque* $m > n$ *on a :*

$$F_m F_{n+1} - F_n F_{m+1} = (\alpha\beta)^n F_{m-n}.$$

Preuve 9. *En utilisant la formule de Binet pour la suite de Fibonacci on a* $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$

$$\begin{aligned}
F_m F_{n+1} - F_n F_{m+1} &= \left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\right) - \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha - \beta}\right) \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2}\left(-\alpha^m\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}\beta^m + \alpha^{m+1}\beta^n + \alpha^m\beta^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2}(\alpha\beta)^n\left(\beta^{m-n}(\beta - \alpha) + \alpha^{m-n}(\alpha - \beta)\right) \\
&= (\alpha\beta)^n\left(\frac{\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}}{\alpha - \beta}\right) \\
&= (\alpha\beta)^n F_{m-n} \\
&= (-1)^n F_{m-n} \qquad \square
\end{aligned}$$

Théorème 2.2.7. *Les deux suites* V_k *et* U_k *verifient l'identité d'Ocagne.*

1. $U_{m+1}U_n - U_m U_{n+1} = \begin{cases} \frac{8}{3}(\alpha^n + \alpha^m) & n \text{ pair,} m \text{ impair} \\ -\frac{8}{3}(\alpha^n + \alpha^m) & n \text{ impair, } m \text{ pair} \end{cases}$

2. $V_m V_{n-1} - V_{m-1}V_n = \begin{cases} -\frac{4}{3}(\alpha^n + \alpha^m) & n \text{ pair,} m \text{ impair} \\ \frac{4}{3}(\alpha^n + \alpha^m) & n \text{ impair, } m \text{ pair} \end{cases}$

Preuve 10. *1/ On utilise la formule de Binet pour la suite* V_k*, on a* $V_n = 2\dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$ *:*

$$\begin{aligned}
U_{m+1}U_n - U_mU_{n+1} &= 16\left(\frac{\alpha^m-\beta^m}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right) - 16\left(\frac{\alpha^{m-1}-\beta^{m-1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)\\
&= \frac{16}{9}\left((\alpha^m-\beta^m)(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}) - (\alpha^{m-1}-\beta^{m-1})(\alpha^n-\beta^n)\right)\\
&= \frac{16}{9}\left(-\frac{1}{\alpha}(\alpha^n\beta^m-\alpha^m\beta^n) + \frac{1}{\beta}(\alpha^n\beta^m-\alpha^m\beta^n)\right)\\
&= \frac{16}{9}\left(\alpha^n\beta^m-\alpha^m\beta^n\right)\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)\\
&= -\frac{8}{3}\left(\alpha^n\beta^m-\alpha^m\beta^n\right)
\end{aligned}$$

On a le résultat avec $\alpha = 2,\ \beta = -1$

$$U_{m+1}U_n - U_mU_{n+1} = \begin{cases} \frac{8}{3}(\alpha^n+\alpha^m) & n \text{ pair,} m \text{ impair} \\ -\frac{8}{3}(\alpha^n+\alpha^m) & n \text{ impair, } m \text{ pair} \end{cases}$$

2/ Par la formule de Binet pour la suite U_k *on a* $U_k = 4\dfrac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\alpha-\beta}$ *:*

$$\begin{aligned}
V_mV_{n-1} - V_{m-1}V_n &= 4\left(\frac{\alpha^{m+1}-\beta^{m+1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right) - 4\left(\frac{\alpha^m-\beta^m}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right)\\
&= \frac{4}{9}\left((\alpha^{m+1}-\beta^{m+1})(\alpha^n-\beta^n) - (\alpha^m-\beta^m)(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})\right)\\
&= \frac{4}{9}\left(\alpha-\beta\right)\left(\alpha^n\beta^m-\alpha^m\beta^n\right)\\
&= \frac{4}{3}\left(\alpha^n\beta^m-\alpha^m\beta^n\right)
\end{aligned}$$

D'où le résultat avec $\alpha = 2,\ \beta = -1$

$$V_mV_{n-1} - V_{m-1}V_n = \begin{cases} -\frac{4}{3}(\alpha^n+\alpha^m) & n \text{ pair,} m \text{ impair} \\ \frac{4}{3}(\alpha^n+\alpha^m) & n \text{ impair, } m \text{ pair} \end{cases}$$

2.3 La limite du quotient de deux tèrmes successifs

Les propriétés utiles dans ces suites est celle la limite du quotient des deux tèrmes successifs qui est égale à la racine positive de l'équation caractéristique correspendente [4].

Théorème 2.3.1. *considérons* $\{V_k\}_{k\geq 0}$ *et* $\{U_k\}_{k\geq 0}$ *les deux suites généralisées de Fibonacci définies en (.), on a les résultats suivants :*

1. $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{V_{k-1}}{V_{k-2}} = \alpha$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{U_{k+1}}{U_k} = \alpha$

Preuve 11. *En utilisant la formule de Binet pour la suite* V_k*, on a* $|\beta| < \alpha$

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \frac{V_{k-1}}{V_{k-2}} &= \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k}{\frac{1}{\alpha} - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k \frac{1}{\beta}} \\ &= \alpha\end{aligned}$$

En prennant en considération $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^k = 0.$ □

Théorème 2.3.2. *La suite* $\{V_k\}_{k\geq 0}$ *une généralisée de Fibonacci verifie les identités suivantes :*

1. $V_{2k}^2 + V_{2k+2}^2 = \frac{8}{9}\left[34(16)^k + 10(4)^k + 1\right]$
2. $V_{2k}^2 - V_{2k+2}^2 = -\frac{16}{9}\left[12(16)^k + (4)^k\right]$

Preuve 12. *En utilisant la formule de Binet, on obtient :*

1.

$$\begin{aligned}
V_{2k}^2 + V_{2k+2}^2 &= 4\left(\frac{\alpha^{2k+1} - \beta^{2k+1}}{\alpha - \beta}\right)^2 + 4\left(\frac{\alpha^{2k+3} - \beta^{2k+3}}{\alpha - \beta}\right)^2 \\
&= \frac{4}{(\alpha-\beta)^2}\left[\left(\alpha^{2k+1} - \beta^{2k+1}\right)^2 + \left(\alpha^{2k+3} - \beta^{2k+3}\right)^2\right] \\
&= \frac{4}{(\alpha-\beta)^2}\left[\alpha^{4k+2} + \beta^{4k+2} - 2(\alpha\beta)^{2k+1} + \alpha^{4k+6} + \beta^{4k+6} - 2(\alpha\beta)^{2k+3}\right] \\
&= \frac{4}{(\alpha-\beta)^2}\left[\alpha^{4k+2}(1+\alpha^4) + \beta^{4k+2}(1+\beta^4) - 2(\alpha\beta)^{2k+1}(1+(\alpha\beta)^2)\right] \\
&= \frac{4}{9}\left(17\alpha^{4k+2} + 2\beta^{4k+2} - 10(\alpha\beta)^{2k+1}\right) \\
&= \frac{4}{9}\left(68\alpha^{4k} + 2 + 20(\alpha\beta)^{2k}\right) \\
&= \frac{8}{9}(34(16)^k + 10(4)^k + 1) \qquad \square
\end{aligned}$$

2. se fait de la même manière.

Théorème 2.3.3. *La suite $\{U_k\}_{k\geq 0}$ une généralisé de Fibonacci verifie les identités suivantes :*

1. $U_{2k}^2 + U_{2k+2}^2 = \frac{16}{9}\left[\frac{17}{4}(16)^k + 5(4)^k\right]$
2. $U_{2k}^2 - U_{2k+2}^2 = -\frac{48}{9}\left[5(4)^{2k-1} + (4)^k\right]$

Preuve 13. *La demonstration se fait en utilisant la formule de Binetde la suite U_k*

Chapitre 3

Etude de la suite de Pell

Considérons une nouvelle généralisée de la suite de Fibonacci dite suite de Pell qu'on va l'établir dans ce chapitre comme application de notre travail. Cette suite a été étudiée et certaines de ses propriétés fondamentales dans [3]

Définition 3.0.1. *La suite de Pell est définie par le relation de récurrence :*

$$\begin{cases} P_0 = 0,\ P_1 = 1 \\ P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \qquad n \geq 2 \end{cases} \tag{3.1}$$

3.1 Formule de Binet

1. **Formule de récurrence**

   La suite de Pell vérifie la relation de récurrence suivante

   $$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \qquad n \geq 2$$

   avec $P_0 = 0,\ P_1 = 1$.

2. **Polynôme caractéristique**

   Le polynôme caractéristique associé à la suite de Pell est

   $$x^2 - 2x - 1$$

3. **Les racines du polynôme caractéristique**

   Comme $\Delta = 8 \neq 0$, ce polynôme caractéristique admet deux racines distinctes,

$\alpha = 1 + \sqrt{2},\ \beta = 1 - \sqrt{2}.$

On a $\beta \leq 0 \leq \alpha$. En utilisant les fonctions élémentaires on a ces relation entre les racines du polynôme caractéristique

$$\alpha + \beta = 2,\ \alpha - \beta = 2\sqrt{2}\ \ et\ \ \alpha\beta = -1$$

4. **La formule de Binet**

   Le théorème (1.6.1) donne la forme explicite de la suite de Pell en fonction des racines de son polynôme caractéristique associé d'où,

$$P_n = \lambda_1(\alpha)^n + \lambda_2(\beta)^n$$

5. **La recherche de** λ_1 *et* λ_2

   On cherche maintenant les scalaires λ_1 *et* λ_2 qui dépendent des valeurs initiales, on a

$$\begin{cases} P_0 &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ P_1 &= \lambda_1\alpha + \lambda_2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1\alpha + \lambda_2\beta &= 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

   ce qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

   alors,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

   puisque $\alpha \neq \beta$, d'où

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

   Donc la formule de Binet qui donne la forme explicite de $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est

$$P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1 - \sqrt{2}\right)^n - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1 - 2\sqrt{2}\right)^n$$

   comme $\alpha - \beta = 2\sqrt{2}$

   Donc la formule de Binet devient ,

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

3.2 Fonction génératrice

On la forme explicite de la suite de Pell par la fonction génératrice. Il s'agit d'écrire la suite de Pell en série de puissance dans laquelle chaque terme de la suite correspond au coefficient de cette série. Considérons la suite de Pell $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout entier positif n, définie par le relation de récurrence $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ avec $P_0 = 0$ *et* $P_1 = 1$, sa fonction génératrice associée est :

$$g(x) = \sum_{n\geq 0} P_n x^n$$

On a donc,

$$\begin{aligned} g(x) &= P_1x + P_2x^2 + \cdots + P_nx^n \\ 2xg(x) &= 2P_1x^2 + 2P_2x^4 + \cdots + 2P_{n-1}x^n \\ x^2g(x) &= P_1x^2 + P_2x^4 + \cdots + P_{n-2}x^n \\ g(x) - 2xg(x) - x^2g(x) &= xP_1 + (P_2 - 2P_1)x^2 + (P_3 - 2P_2 - P_1)x^3 + \cdots + (P_n - 2P_{n-1} - P_{n-2})x^n \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} (1 - 2x - x^2)g(x) &= x \\ g(x) &= \frac{x}{1 - 2x - x^2} \end{aligned}$$

Factorisons le dénominateur :

$$1 - 2x - x^2 = (1 - \alpha_1 x)(1 - \alpha_2 x)$$

où $\alpha_1 = 1 + \sqrt{2}$ et $\alpha_2 = 1 - \sqrt{2}$

trouvons A_1 et A_2 tel que

$$\frac{x}{1 - 2x - x^2} = \frac{A_1}{1 - \alpha_1 x} + \frac{A_2}{1 - \alpha_2 x}$$

on a par identification $A_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $A_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ et donc

$$\frac{x}{1 - 2x - x^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{1 - \alpha_1 x} - \frac{1}{1 - \alpha_2 x}\right)$$

comme

$$\frac{1}{1 - \alpha x} = 1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \ldots$$

on aura donc

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left((1 + \alpha_1 x + \alpha_1^2 x^2 + \dots) - (1 + \alpha_2 x + \alpha_2^2 x^2 + \dots)\right)$$

Par identification on a,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right) x^n$$

Donc

$$P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right)$$

3.3 Quelques identités de la suite de Pell

3.3.1 L'identité de Catalan

La suite de Pell généralisée de Fibonacci vérifie l'identité de Catalan donnée par le théorème suivant

Théorème 3.3.1. *Pour tout n et r des entiers positifs non nuls tel que $0 \leq r \leq n$ on a :*

$$P_{n-r}P_{n+r} - P_n^2 = (-1)^{n-r+1}P_r^2$$

Preuve 14. *En utilisant la formule de Binet on trouve :*

$$\begin{aligned} P_{n-r}P_{n+r} - P_n^2 &= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[(\alpha^{n-r} - \beta^{n-r})(\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}) - (\alpha^n - \beta^n)^2\right] \\ &= \frac{-1}{(\alpha-\beta)^2}(\alpha\beta)^n\left(\frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(\alpha\beta)^r}{(\alpha\beta)^r}\right) \\ &= (-1)^{n-r+1}P_n^2 \qquad \square \end{aligned}$$

D'où le résultat

$$P_{n-r}P_{n+r} - P_n^2 = (-1)^{n-r+1}P_r^2$$

3.3.2 L'identité de Cassini

La suite de Pell vérifie l'identité de Cassini

Théorème 3.3.2. *Pour tout n entier positif on a,*

$$P_{n-1}P_{n+1} - P_n^2 = (-1)^n$$

Preuve 15. *En utilisant la formule de Binet :*

$$\begin{aligned} P_{n-1}P_{n+1} - P_n^2 &= \frac{1}{(\alpha-\alpha)^2}\left[(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}) - (\alpha^n-\beta^n)^2\right] \\ &= \frac{-1}{(\alpha-\beta)^2}(\alpha\beta)^n\left(\frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}\right) \\ &= -(\alpha\beta)^{n-1} \\ &= (-1)^n \qquad \square \end{aligned}$$

D'où le résultat du théoreme.

3.3.3 L'identité d'Ocagne

Théorème 3.3.3. *Pour tout n et m tel que $m > n$ on a :*

$$P_mP_{n+1} - P_{m+1}P_n = (-1)^nP_{m-n}$$

Preuve 16. *Utilisons la formule de Binet on a :*

$$\begin{aligned} P_mP_{n+1} - P_{m+1}P_n &= \left(\frac{\alpha^m-\beta^m}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right) - \left(\frac{\alpha^{m+1}-\beta^{m+1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right) \\ &= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}(\alpha\beta)^n\left(\alpha^{m-n+1}+\beta^{m-n+1}-\alpha\beta^{m-n}-\alpha^{m-n}\beta\right) \\ &= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}(\alpha\beta)^n(\alpha-\beta)\left(\alpha^{m-n}-\beta^{m-n}\right) \\ &= (-1)^nP_{m-n} \qquad \square \end{aligned}$$

3.3.4 Limite du quotient de deux termes successifs

Proposition 3.3.4. *Pour tout entier positif n on a :*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{P_n}{P_{n-1}} = \alpha$$

Preuve 17. *En utilisant la formule de Binet*

$$\begin{aligned} \frac{P_n}{P_{n-1}} &= \left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}\right) \\ &= \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}} \\ &= \left(\frac{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{\frac{1}{\alpha}-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\frac{1}{\beta}}\right) \end{aligned}$$

Le passage à la limite donne

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{P_n}{P_{n-1}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{\frac{1}{\alpha}-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\frac{1}{\beta}}\right)=\alpha$$

Car on a posé $|\beta|<|\alpha|$ *alors* $|\frac{\beta}{\alpha}|<1$ *d'où* $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n=0.$ □

Conclusion

Les suites récurrentes linéaires à coefficients constants possèdent des propriétés algébriques et arithmétiques. On a établi explicitement les suites récurrentes linéaires par deux méthodes ; la première consiste à poser la formule de Binet après avoir trouvé son équation caractéristique et ses racines puis définit la suite récurrente en fonction de n. La deuxième consiste à trouver sa fonction génératrice et l'écrire en série de puissance dans laquelle les coefficients de cette série sont les termes de la suite .

La suite de Fibonacci la plus célèbre est liée à la puissance n-ème d'une matrice.

La suite de Fibonacci admet une forme explicite dite formule de Binet qui peut être aussi obtenue par sa fonction génératrice, de même pour ses généralisés ; la suite de Lucas, Jacobsthal et Jacobsthal-Lucas.

La suite de Fibonacci vérifies certaines identités remarquables comme l'identité de Catalan, l'identité de Cassini et l'identité d'Ocagne.

La limite du quotient de deux termes successifs de la suite de Fibonacci est la racine positive de son équation caractéristique.

Application à la suite de Pell, une généralisée de la suite récurrente de Fibonacci.

Bibliographie

[1] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri. *Méthodes Numériques*, .

[2] A. F. Horadam, *The Généralized Fibonacci Sequences*, The American Math. Monthly, **68**, No. 5(1961), 455-459.

[3] A. F. Horadam, *"Pell identities"*, The Fibonacci Quarterly, 9(3), (1971) 245-252, 263.

[4] B. AYMAN.*Generalized Fibonacci Sequences and Its Properties*, Palestine Polytechnic Univercity-PPU 2014.

[5] B. Athmane. *Le q-analogue des suites de Fibonacci et de Lucas*, Thèse de Doctorat.Univercité d'Oran, 2016.

[6] D. Kalaman and R. Mena, *The Fibonacci Number. Exposed, The Mathematical Magazine*, 2(2002).

[7] N. Abdelkader. *Suites récurrentes linéaires et séries formelles en plusieurs variables*, Thèse de Doctorat.Univercité de Limoges, 1998.

[8] P. Catarino.*On Some Identites and Generating Functions for K-Pell Numbers*,Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 7,2013,no. 38, 1877-1884

[9] T. koshy.*Fibonacci and Lucas Numbers and Applications*,A Wiley-Interscience Publication, New York,(2001),215-221.

[10] V. K. Gupta, Y. K. Panawar and O. Sikhwal.*Generalized Fibonacci Sequences.* Theorical Mathematics & Applications, 2. No. 2(2012), 115-124.