République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Yahia Farès de Médéa
Département de Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

par

OTMAOUI Hamza

Les différentes méthodes approximatives pour résoudre une équation généralisée

Soutenu publiquement le 03 juillet 2023 devant le jury composé de

Président :	M. ALIANE	*M.C.B*	Université de Médéa
Examinateur :	K. TOUMACHE	*M.C.B*	Université de Médéa
Encadreur :	A. BENTERKI	*M.C.B*	Université de Médéa
Co-Encadreur :	H. BIBI	*M.C.B*	Université de Médéa

Année universitaire : 2022-2023

Remerciements

Les Docteurs ABDESSALEM BENTERKI et HAMZA BIBI ont généreusement accepté d'être nos directeurs de mémoire et nous ont guidés avec passion et enthousiasme. Leur expertise, leur soutien constant et leur initiation à la recherche ont été inestimables tout au long de ce travail. Nous tenons à exprimer notre profonde reconnaissance envers eux.

♡

Nous sommes honorés et ravis d'avoir eu Docteur MOHAMED ALIANE comme président de notre jury de soutenance. Nous tenons à lui exprimer toute notre gratitude pour sa présence et son soutien lors de cet événement important.

♡

Nous souhaitons exprimer nos sincères remerciements à Docteur KAMEL TOUMACHE pour avoir accepté de lire attentivement notre travail. Sa contribution et ses précieux commentaires ont grandement enrichi notre recherche.

♡

Nous tenons à exprimer aussi notre profonde reconnaissance à tous nos enseignants qui nous ont accompagné tout au long de nos études. Sans eux, ce travail n'aurait certainement jamais pu voir le jour.

Nous remercions également tous nos amis qui nous a aidé dans un cadre mathématique ou autre.

Enfin, merci à toutes nos familles pour leur amour et leur soutien constant.

♢

"Je souhaite dédier ce travail à *ma mère, mon père, mes frères, mes sœurs* et tous *mes amis*."

♢

OTMAOUI Hamza

Résumé

Ce travail explore les méthodes approximatives pour résoudre les problèmes d'équation généralisée ou d'inclusion variationnelle de type $0 \in f(x) + F(x)$ avec f une fonction et F une multifonction, qui sont cruciaux en analyse non linéaire et optimisation. Différentes approches sont présentées, telles que la méthode de Newton et la méthode (n, α)-PBA (Point-Based Approximation), avec leurs algorithmes, conditions de convergence et taux de convergence. Les avantages et limites de chaque méthode sont discutés. Cette étude offre une introduction complète et détaillée à ces méthodes, ainsi que des perspectives futures pour la recherche dans ce domaine.

Mots clés : méthodes approximatives, équation généralisée, théorème du point fixe, multifonction, méthode de Newton, méthode (n, α)-PBA

Abstract

This work explores approximate methods for solving generalized equation problems or variational inclusion problems of the form $0 \in f(x) + F(x)$, where f is a function and F is a multifunction, which are crucial in nonlinear analysis and optimization. Various approaches are presented, such as the Newton's method and the (n,α)-PBA method, along with their algorithms, convergence conditions, and convergence rates. The advantages and limitations of each method are discussed. This study provides a comprehensive and detailed introduction to these methods, as well as future research perspectives in this field.

Keywords : approximate methods, generalized equation, fixed-point theorem, multivalued mapping, Newton's method, (n,α)-PBA method

Table des matières

Introduction **1**

1 Généralités **2**
1.1 Multifonctions 2
1.2 La théorie du point fixe 10
1.3 Vitesse de convergence d'une suite 18
1.4 Les équations généralisées 21

2 Deux méthodes approximatives super linéaires **24**
2.1 Méthode de Newton 24
2.2 Méthode de (n,α)-PBA 27

Conclusion et perspective **31**

Bibliographie **32**

Introduction

Le problème d'équation généralisée ou d'inclusion variationnelle, qui consiste à trouver un point fixe pour une fonction et une multifonction donnée, est un problème fondamental en analyse non linéaire et en optimisation. Résoudre ce type de problème est crucial dans de nombreux domaines, tels que les sciences de l'ingénieur, la finance, la physique, l'économie, la mécanique et bien d'autres encore.

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude de quelques méthodes approximatives pour résoudre le problème « $0 \in f(x) + F(x)$ ». Nous présentons les différentes conditions nécessaires pour que ces méthodes convergent vers une solution du problème. Nous nous appuyons notamment sur les travaux de Asen Dontchev, Said Hilout, Ioannis K. Argyros et Alain Piétrus [14, 23, 25, 28].

Le travail est subdivisé en deux chapitres principaux. Dans le premier chapitre, nous introduisons les généralités sur les équations généralisées ou les inclusions variationnelles, les notions de points fixes, les propriétés de certaines classes de fonctions et multifonctions, ainsi que les théorèmes de point fixe.

Dans le deuxième chapitre, nous allons nous concentrer sur les méthodes approximatives pour résoudre le problème d'inclusion variationnelle $0 \in f(x) + F(x)$, où f est une fonction et F est une multifonction. Nous allons décrire en détail deux de ces méthodes : la méthode de Newton et la méthode de (n, α)-PBA.

La méthode de Newton est une méthode itérative qui consiste à construire une suite de points (x_n) qui convergent vers une solution de l'inclusion variationnelle. Nous décrirons en détail l'algorithme de cette méthode, ainsi que les conditions pour sa convergence et le taux de convergence correspondant.

Ensuite, nous présenterons la méthode (n, α)-PBA, une méthode récente basée sur la méthode de Newton. Cette méthode est conçue pour résoudre des problèmes d'inclusion variationnelle avec une fonction f Fréchet différentiable et une multifonction F. Nous décrirons également son algorithme, les conditions pour sa convergence et le taux de convergence correspondant.

Dans cette étude, nous examinerons également les avantages et les limites de chaque méthode, afin de mieux comprendre leur utilisation et leur applicabilité.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous tirons une conclusion générale de notre étude. Nous discutons également les perspectives futures pour les recherches sur ce type de problème.

CHAPITRE 1

Généralités

Dans ce chapitre, nous aborderons des notions de base qui seront utiles pour les sections suivantes. Nous introduirons les espaces métriques ainsi que la théorie des points fixes avec les théorèmes de Banach et Nadler [1, 2]. Nous discuterons également de la vitesse de convergence d'une suite et des équations généralisées telles que le problème "$0 \in f(x) + F(x)$" où f est une fonction et F est une multifonction.

Section 1.1

Multifonctions

Dans cette section, nous allons étudier les propriétés des multifonctions et leur utilisation en mathématiques. Avant d'approfondir le concept de multifonctions, nous allons d'abord rappeler quelques notions de base sur les espaces métriques et les fonctions.

1.1.1 Espace métrique

Un espace métrique est un couple (E, d) où E est un ensemble non vide et d est une fonction de distance sur E, c'est-à-dire une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

1. **Symétrie :** Pour tout $x, y \in E$, $d(x, y) = d(y, x)$.
2. **Séparation :** Pour tout $x, y \in E$, $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.
3. **Inégalité triangulaire :** Pour tout $x, y, z \in E$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

En d'autres termes, un espace métrique est un ensemble doté d'une notion de distance qui se comporte de manière cohérente avec notre intuition géométrique. Voici quelques exemples d'espaces métriques :

1. $(\mathbb{R}, |x - y|)$, où $|x - y|$ désigne la valeur absolue de la différence entre x et y.

2. $(\mathbb{C}, |z-z'|)$, où $|z-z'|$ est la distance entre deux points $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ dans le plan complexe, définie par $|z-z'| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$.
3. $(\mathbb{R}^n, (\sum |x_i-y_i|^2)^{1/2})$ ou $(\mathbb{C}^n, (\sum |x_i-y_i|^2)^{1/2})$, où $(x_1,\dots,x_n)$ et $(y_1,\dots,y_n)$ sont des points dans l'espace euclidien et $d(x,y) = (\sum |x_i-y_i|^2)^{1/2}$ est la distance euclidienne entre eux.

Un espace vectoriel normé est un exemple particulier d'espace métrique.

Dans un espace vectoriel normé, la norme définit une distance entre les points de l'espace. La distance entre deux points x et y est donnée par la norme de leur différence, c'est-à-dire $d(x,y) = \|x-y\|$.

Ainsi, un espace vectoriel normé peut être considéré comme un espace métrique où la distance entre deux points est définie par la norme.

Il convient de noter que tous les espaces métriques ne sont pas des espaces vectoriels normés, car ils peuvent ne pas avoir de structure vectorielle ou de norme définie. Cependant, un espace vectoriel normé est un exemple spécifique d'espace métrique qui possède des propriétés supplémentaires liées à la structure vectorielle et à la norme.

Les boules ouvertes et fermées sont des notions importantes en topologie métrique. Soit (E,d) un espace métrique, $x \in E$ et $r > 0$. On note ***une boule ouverte*** de centre x et de rayon r par

$$B_d(x,r) = \{y \in E : d(x,y) < r\}$$

et ***une boule fermée*** de centre x et de rayon r par

$$\overline{B_d}(x,r) = \{y \in E : d(x,y) \leq r\}.$$

Une suite $(u_n)_n$ de nombres réels ***converge vers*** $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $|u_n - l| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. On note alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = l$ ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$. Une suite (u_n) est dite de ***Cauchy*** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - u_m| < \varepsilon$ pour tout $m, n \geq N$.

Un espace métrique est dit ***complet*** si toute suite de Cauchy converge dans cet espace. Par exemple, $\mathbb{R}$ est complet.

Cependant, il existe des espaces métriques qui *ne sont pas complets*. Par exemple, si l'on prend sur $\mathbb{R}$ la distance $d(x,y) = |\exp(x) - \exp(y)|$, alors l'espace métrique $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet. En effet, la suite $(n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}, d)$ mais elle ne converge pas dans $\mathbb{R}$ pour cette distance.

Un autre exemple d'espace métrique incomplet est l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$ avec la distance donnée par $d(f,g) = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$. Cet espace est noté $C([0,1])$ et il est incomplet.

Pour le voir, considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par $f_n(x) = x^n$. Cette suite

est de Cauchy car pour tout $\epsilon > 0$, si $m > n$ alors

$$d(f_m, f_n) = \sup_{x\in[0,1]} |x^m - x^n| \leq \sup_{x\in[0,1]} |x^m| + \sup_{x\in[0,1]} |x^n| \leq 2.$$

Cependant, cette suite ne converge pas dans $C([0,1])$. Pour le voir, supposons que f_n converge vers une fonction $f \in C([0,1])$. Alors, nous devons avoir $f(1) = \lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$. D'autre part, pour tout $x \in [0,1)$, nous avons $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Par conséquent, f est la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1) \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$, qui n'est pas continue. Par conséquent, $C([0,1])$ est incomplet.

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet. Plus précisément, soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ (qui peut être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) muni d'une norme $|\cdot|$. L'espace E est dit être un espace de Banach si et seulement si il est complet par rapport à cette norme.

Définition 1.1 (Une métrique invariante) *On dit que d est une métrique invariante dans E si pour tout triplet d'éléments x, y et z appartenant à l'ensemble E, la distance entre $x+z$ et $y+z$ est égale à la distance entre x et y. Autrement dit, le déplacement d'un point dans E par un vecteur constant z ne modifie pas la distance relative entre les points.*

Par exemple, considérons l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de la métrique classique, c'est-à-dire la distance euclidienne. Si nous avons deux points $x = (x_1, y_1)$ et $y = (x_2, y_2)$ dans $\mathbb{R}^2$, alors la distance euclidienne entre ces deux points est donnée par $d(x,y) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Maintenant, supposons que nous ajoutions un vecteur constant $z = (x_3, y_3)$ à chaque point dans $\mathbb{R}^2$. Selon la propriété d'invariance de la métrique, cela signifie que la distance entre $x+z$ et $y+z$ doit être égale à la distance entre x et y. Ainsi, en appliquant cette propriété, nous avons :

$d(x+z, y+z) = \sqrt{((x_2+x_3)-(x_1+x_3))^2 + ((y_2+y_3)-(y_1+y_3))^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = d(x,y)$

Par conséquent, la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ est une métrique invariante dans cet espace.

Définition 1.2 (Fonctions) *Une fonction est une relation qui, à chaque valeur de la variable x de l'ensemble de départ, fait correspondre au plus une (0 ou 1) valeur de y de l'ensemble d'arrivée. Pour exprimer que y dépend de x, on écrit : $y = f(x)$.*

Les fonctions sont très courantes en mathématiques et dans d'autres domaines, notamment en physique, en économie et en informatique. Elles sont souvent représentées graphiquement par des courbes ou des surfaces qui illustrent comment la valeur de la fonction varie en fonction de l'entrée.

Par exemple, la fonction $f(x) = x^2$ est une fonction qui renvoie le carré de son entrée. Si on prend $x = 2$, alors $f(x) = f(2) = 2^2 = 4$.

1.1.2 La continuité

Soient X et Y désignent des espaces métriques muni de la distance d et d' respectivement.

Une fonction $f : X \to Y$ est dite :

- *Continue* en $\overline{x}$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta(\epsilon, \overline{x}) = \eta, \forall x \in X, (d(x, \overline{x}) < \eta \Rightarrow d'(f(x), f(\overline{x})) < \epsilon)$$

ou encore si pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers $\overline{x}$, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(\overline{x})$.

- *Uniformément continue* si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta(\epsilon) = \eta, \forall x, y \in X, (d(x, y) < \eta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon).$$

- *Lipschitzienne* sur un ensemble E de X si

$$\exists K > 0, \forall x, y \in E, d'(f(x), f(y)) \leqslant K\, d(x, y).$$

En particulier, si f est K-lipschitzienne en $\overline{x}$ alors f est uniformément continue en $\overline{x}$. La borne inférieure de toutes les constantes K est appelée le module de Lipschitz de f en $\overline{x}$, noté $\text{lip}(f; \overline{x})$, et se définit par :

$$\text{lip}(f; \overline{x}) = \limsup_{\substack{x, y \to \overline{x} \\ x \neq y}} \frac{d'(f(x), f(y))}{d(x, y)}$$

Lorsque $\text{lip}(f; \overline{x}) < \infty$, la fonction f est dite localement lipchitzienne en $\overline{x}$.

Rappelons aussi qu'une fonction $f : X \to Y$ est dite :

- *Contractante* sur $E \subset X$ si f est lipschitzienne sur E avec une constante $K \in]0, 1[$
- *Hölderienne* d'exposant $\alpha \in]0, 1]$ sur $E \subset X$ si :

$$\exists K_\alpha > 0, \forall x, y \in E, d'(f(x), f(y)) \leqslant K_\alpha d(x, y)^\alpha.$$

- *Center-Hölderienne* d'exposant $\alpha \in]0, 1]$ sur E en $\overline{x} \in E$ si :

$$\exists K_\alpha > 0, \forall x \in E, d'(f(x), f(\overline{x})) \leqslant K_\alpha d(x, \overline{x})^\alpha.$$

Remarque 1 *Il est clair que si f est Hölderienne alors f est center-Hölderienne mais la réciproque n'est pas vraie en général.*

1.1.3 La différentiabilité

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés. Commençons d'abord par rappeler la définition de la dérivée directionnelle (au sens de Dini).

Définition 1.3 *On dit que $f : X \to Y$ est **directionnellement dérivable** (au sens de Dini) en $\overline{x} \in X$ **suivant le vecteur** $v \in X$ si la limite suivante existe*

$$f'(\overline{x}; v) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\overline{x} + t\,v) - f(\overline{x})}{t}.$$

$f'(\overline{x}, v)$ est la dérivée directionnelle de f au point $\overline{x}$ suivant le vecteur v.

Notons que dans le cas où $X = \mathbb{R}^n$, si l'on considère les dérivées suivant les vecteurs $(1,0,\ldots,0);(0,1,0,\ldots,0);\ldots;(0,\ldots,0,1)$, on retrouve les dérivées partielles.

Définition 1.4 *On dit que $f : X \to Y$ est **Fréchet différentiable** en $\overline{x} \in X$ s'il existe un opérateur linéaire continu $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|f(\overline{x} + t) - f(\overline{x}) - A(t)\|}{\|t\|}.$$

A est la dérivée de Fréchet de f au point $\overline{x}$ et est notée $\nabla f(x)$.
La fonction f est Fréchet différentiable sur X si elle est Fréchet différentiable en tout point $\overline{x} \in X$.

*On dit que f est **continûment différentiable** sur un ouvert Ω de X si f est Fréchet différentiable sur Ω et sa dérivée ∇f est continue sur Ω.*

Remarque 2

- *Si f est Fréchet différentiable en $\overline{x}$ alors f est directionnellement dérivable en $\overline{x}$ suivant tout les vecteurs.*
- *Si f est Fréchet différentiable en $\overline{x}$ alors f est continue en $\overline{x}$.*

Proposition 1.1 *Si f est continûment différentiable alors, pour tous $x, y \in X$,*

$$f(y) = f(x) + \int_0^1 \nabla f(x + t(y - x))(y - x)\mathrm{d}t.$$

Remarque 3

- *Si une fonction f est Fréchet-différentiable et ∇f est bornée sur Ω alors f est lipschitzienne sur Ω.*
- *Si une fonction f est Fréchet-différentiable et ∇f est lipschitzienne sur Ω borné alors f est bornée sur Ω.*

Définition 1.5 (Multifonctions) *Soient X et Y deux ensembles quelconques. Une multifonction F de X vers Y, notée par $F : X \rightrightarrows Y$ ou par $F : X \longrightarrow 2^y$, est une fonction qui associe à*

tout point de $x \in X$ une partie de Y qui peut être vide.

***Domaine** de F : on appelle domaine de F et on le note par $Dom(F)$, l'ensemble*

$$Dom(F) = \{x \in X | F(x) \neq \emptyset\}.$$

***Graphe** F : on appelle graphe de f et on le note par $Gr(F)$, l'ensemble*

$$Gr(F) = \{(x, y) \in X \times Y, y \in F(x)\}.$$

***Inverse** F : on définit la multifonction inverse $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ par*

$$F^{-1}(y) = \{x \in X | y \in F(x)\}.$$

Les multifonctions sont des généralisations des fonctions, où une entrée peut avoir plusieurs sorties possibles, qui peuvent être des parties de l'ensemble d'arrivée. Elles sont utilisées en théorie des ensembles, en analyse, en géométrie et en économie, entre autres domaines [31].

Exemple 1 *Un exemple classique de multifonction qui n'est pas une fonction est la multifonction $F : \mathbb{N} \rightrightarrows \mathbb{N}$ associe à chaque nombre $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble des diviseurs de n. Par exemple, $F(7) = \{1, 7\}$ et $F(6) = \{1, 2, 3, 6\}$.*

Définition 1.6 *Un graphe d'une multifonction F est dite **fermé** si est seulement si*

$$\begin{cases} (x_n, y_n) \in Gr(F) \\ x_n \to x \\ y_n \to y \end{cases} \Rightarrow (x, y) \in Gr(F).$$

En d'autres termes, si chaque fois que nous avons une séquence de points (x_n, y_n) dans le graphe de F, telle que les éléments x_n convergent vers x et les éléments y_n convergent vers y, alors nous pouvons conclure que (x, y) appartient au graphe de F.

1.1.4 Excès et la distance de Hausdorff

La notion d'excès entre deux ensembles et de distance de Hausdorff (généralisée) sont des outils importants en topologie métrique pour mesurer la proximité ou l'éloignement entre deux ensembles dans un espace métrique (E, d).

Définition 1.7 *Pour $a \in E$, et A, B deux ensembles de E, on définit*

- *La distance entre a et B par*

$$d(a, B) := \inf\{d(a, b) : b \in B\} \tag{1.1}$$

- *Excès entre A et B par*

$$e_d(A,B)=\sup_{x\in A} d(x,B) \tag{1.2}$$

$e_d(A,B)\neq e_d(B,A)$

- *La distance de Hausdorff (généralisée) entre deux parties A et B de E est alors définie comme*

$$H_d(A,B)=\max\{e_d(A,B),e_d(B,A)\}. \tag{1.3}$$

Il est important de noter que cette distance de Hausdorff H_d peut prendre la valeur $+\infty$.

Exemple 2 *Soit $(\mathbb{R},|\cdot|)$ un espace métrique, et soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $A=[1,+\infty[$ et $B=[0,1]$. On a :*

$$e_d(A,B)=\sup_{x\in A} d(x,B)=+\infty, \qquad e_d(B,A)=\sup_{y\in B} d(y,A)=1,$$

alors

$$H_d(A,B)=+\infty.$$

La distance de Hausdorff dans $CB(E)$, avec $CB(E)$ comme l'ensemble des sous-ensembles fermés et bornés de E, est une métrique car elle vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 1.2 *Soit (E,d) un espace métrique, avec A et B dans $CB(E)$, on a :*

(p_1) $H_d(A,B)=0$ *si et seulement si* $A=B$,

(p_2) $H_d(A,B)=H_d(B,A)$,

(p_3) $H_d(A,B)\leq H_d(A,C)+H_d(C,B)$ *pour tout* $C\in CB(E)$.

Preuve.

(p_1) Supposons que $H_d(A,B)=0$. Cela signifie que $\max\{e_d(A,B),e_d(B,A)\}=0$. En particulier, on a $e_d(A,B)=0$ et $e_d(B,A)=0$. Cela implique que pour tout $x\in A$, $d(x,B)=0$, ce qui équivaut à dire que x appartient à la fermeture de B. De même, pour tout $y\in B$, $d(y,A)=0$, ce qui équivaut à dire que y appartient à la fermeture de A. Ainsi, on a $A\subseteq\overline{B}$ et $B\subseteq\overline{A}$. En combinant ces deux inclusions, on obtient $\overline{A}=\overline{B}$, ce qui implique que $A=B$.

Réciproquement, si $A=B$, alors clairement $H_d(A,B)=0$.

(p_2) On a

$$\begin{aligned} H_d(A,B) &= \max\{e_d(A,B),e_d(B,A)\} \\ &= \max\{\sup_{a\in A} d(a,B),\sup_{b\in B} d(b,A)\} \\ &= \max\{\sup_{b\in B} d(b,A),\sup_{a\in A} d(a,B)\} \\ &= H_d(B,A). \end{aligned}$$

(p_3) Soit $x \in A$ et $z \in B$. Pour tout $y \in C$, on a

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \text{et} \quad d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z).$$

En prenant le sup par rapport à $y \in C$ dans chacune de ces deux inégalités, on obtient

$$\sup_{y\in C} d(x,y) \leq d(x,z) + \sup_{y\in C} d(z,y) \quad \text{et} \quad \sup_{y\in C} d(y,z) \leq d(x,z) + \sup_{y\in C} d(y,x).$$

En utilisant la définition de e_d, on a donc

$$e_d(A,C) \leq d(x,z) + e_d(C,B) \quad \text{et} \quad e_d(C,B) \leq d(x,z) + e_d(A,C).$$

En prenant le max de ces deux inégalités, on obtient

$$H_d(A,C) \leq d(x,z) + H_d(C,B).$$

En échangeant les rôles de A et B et de C et A, on obtient également

$$H_d(B,C) \leq d(x,z) + H_d(A,C).$$

En combinant ces deux inégalités, on obtient finalement

$$H_d(A,B) \leq H_d(A,C) + H_d(C,B).$$

■

Il existe plusieurs propriétés intéressantes pour la distance de Hausdorff, telles que la continuité supérieure, la métricité, la caractérisation des espaces compacts, et d'autres encore. Des références courantes pour étudier ces propriétés incluent

- "Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications" de K. Falconer
- "Fractals and Chaos : An Illustrated Course" de Paul S. Addison

Ces ouvrages [19, 26] sont de bonnes références pour explorer davantage la distance de Hausdorff et ses propriétése et de même ses applications.

Définition 1.8 (M -pseudo-lipschitzienne [9]) *Soient X et Y deux espaces vectoriels normés. Une multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ est dite M -**Aubin continue** (ou M -**pseudo-lipschitzienne**) au voisinage de $(x_0, y_0) \in Gr(F)$ s'il existe des voisinages V de x_0 et U de y_0 tels que :*

$$e(F(x_1) \cap U, F(x_2)) \leqslant M\|x_1 - x_2\| \qquad \forall x_1, x_2 \in V \tag{1.4}$$

La borne inférieure de l'ensemble des $M \geqslant 0$ pour lesquels (1.4) est satisfaite est appelée module de lipschitziannité de F autour (x_0, y_0) et est notée lip $F(x_0, y_0)$. L'absence d'Aubin continuité sera signalée par lip $F(x_0, y_0) = \infty$. On dit que F est M-Aubin continue sur $W \subset Gr(F)$ si elle est M-Aubin continue pour tout $(x, y) \in W$.

Remarque 4 *Si F est une fonction, l'Aubin continuité revient à la lipschitziannité.*

Le théorème suivant est le plus important sur l'Aubin continuité.

Théorème 1.3 *[11] Soit X un espace métrique complet, soit Y un espace vectoriel avec une métrique invariante et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque à graphe fermé. Si $\overline{y} \in F(\overline{x})$ et $f : X \to Y$ est une fonction continue et strictement stationnaire en $\overline{x}$, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *L'application F^{-1} est M-Aubin continue en $(\overline{y}, \overline{x})$,*

(ii) *l'application $(f+F)^{-1}$ est M-Aubin continue en $(\overline{y} + f(\overline{x}), \overline{x})$.*

Section 1.2

La théorie du point fixe

La théorie du point fixe est un domaine important des mathématiques appliquées qui a connu un grand développement au cours du 20ème siècle. Elle concerne l'étude des solutions des équations du type $f(x) = x$, où f est une fonction donnée. Le concept de point fixe est fondamental dans de nombreuses branches des mathématiques, de la physique, de la biologie, de la théorie des jeux et de l'économie.

Les travaux fondateurs dans ce domaine remontent à la fin du 19ème siècle, avec les travaux du mathématicien italien Vito Volterra sur les équations intégrales. Les premiers résultats importants sur les points fixes des fonctions continues et contractantes ont été établis par le mathématicien français Maurice Fréchet et le mathématicien russe Pavel Alexandrov. Par la suite, des théorèmes de point fixe plus généraux ont été établis par d'autres mathématiciens, notamment Stefan Banach, qui a développé une théorie complète des espaces de Banach et a posé les bases de la théorie moderne du point fixe.

La théorie du point fixe des multifonctions a connu un développement plus récent, dans les années 1960 et 1970, avec les travaux du mathématicien polonais Kazimierz Kuratowski et du mathématicien américain Ky Fan. Les multifonctions sont des fonctions qui associent à chaque point d'un espace une collection de points, plutôt qu'un seul point. La théorie des point fixes des multifonctions a des applications importantes en optimisation, en analyse numérique et en théorie des jeux.

Aujourd'hui, la théorie du point fixe continue à être un domaine de recherche actif et en constante évolution, avec des applications dans de nombreux domaines des mathématiques et des sciences.

Définition 1.9

- *Un point fixe d'une fonction $f : E \to E$ est un élément $x \in E$ tel que $f(x) = x$. Autrement dit, x reste immobile lorsqu'on applique la fonction f.*
- *Pour une multifonction $F : E \rightrightarrows E$, un point fixe est un élément $x \in E$ tel que $x \in F(x)$. Autrement dit, l'ensemble des points fixes de F est l'ensemble des éléments $x \in E$ qui*

sont envoyés sur eux-mêmes par la multifonction F. Notez que contrairement à une fonction, une multifonction peut avoir plusieurs points fixes.

1.2.1 Théorème du point fixe de Banach

On commence par le théorème de Banach du point fixe qui est un résultat majeur de la théorie des points fixes, énoncé pour la première fois en 1922 par le mathématicien polonais Stefan Banach. Il énonce qu'une contraction sur un espace métrique complet admet un unique point fixe.

Le théorème de Banach du point fixe a de nombreuses applications en mathématiques, en particulier en analyse fonctionnelle, où il est utilisé pour prouver l'existence et l'unicité de solutions pour de nombreux problèmes d'équations aux dérivées partielles, d'équations intégrales et de systèmes d'équations non linéaires.

Théorème 1.4 (Banach(1922)[1]) *Soit (E,d) un espace métrique complet, et soit $f : E \to E$ une contraction, c'est-à-dire une fonction telle qu'il existe $0 \leq L < 1$ tel que, pour tous $x, y \in E$, on ait*

$$d(f(x), f(y)) \leq L d(x,y).$$

Alors f admet un unique point fixe $x^* \in E$, c'est-à-dire un élément $x^* \in E$ tel que $f(x^*) = x^*$.

Preuve.

Voici la démonstration détaillée du Théorème de Banach du point fixe :

Partie de l'existence : Nous allons construire une suite (x_n) définie par récurrence de la manière suivante : On choisit un point x_0 quelconque de E et on définit $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \geq 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \\ &\leq L d(x_n, x_{n-1}) \quad (\text{car } f \text{ est L-Lipschitzienne}) \\ &\leq L^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\vdots \\ &\leq L^{n+1} d(x_0, x_{-1}) \quad (\text{car } d(x_{k+1}, x_k) \leq L d(x_k, x_{k-1}) \text{ pour tout } k \geq 0) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} d(x_{k+1}, x_k) \\ &\leq d(x_0, x_{-1}) \sum_{k=n}^{n+p-1} L^{k+1} \\ &\leq \frac{L^{n+1}}{1-L} d(x_0, x_{-1}) \quad (\text{car la somme est une somme géométrique}). \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (x_n) est de Cauchy. Comme E est complet, elle converge donc vers un point $x^* \in E$. De plus, comme f est continue, on a $f(x^*) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*$, donc x^* est un point fixe de f.

Partie de l'unicité : Soient x et y deux points fixes de f. On a :

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d(f(x), f(y)) \\ &\leq L d(x,y) \end{aligned}$$

D'où $d(x,y) = 0$ car $L < 1$. Ainsi, $x = y$ et le point fixe de f est unique.

Ce qui conclut la démonstration du Théorème de Banach du point fixe. ■

Exemple 3 *Dans cet exemple, nous considérons l'espace $X = \mathbb{R}^+$ muni de la métrique usuelle $d(x,y) = |x-y|$. Nous souhaitons vérifier si la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x$ satisfait les conditions du théorème de Banach pour trouver un point fixe sur cet intervalle.*

1. ***Condition de contraction*** *: Nous devons vérifier si f est une fonction contractante sur X. Pour cela, nous devons trouver une constante $0 \leq L < 1$ telle que pour tout $x, y \in X$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$.*
   Calculons $|f(x) - f(y)|$:

$$|f(x) - f(y)| = |\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y| = \frac{1}{2}|x-y|.$$

   Prenons $L = \frac{1}{2}$. Alors, pour tout $x, y \in X$, nous avons :

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|.$$

   Donc, la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x$ est une fonction contractante sur $X = \mathbb{R}^+$ avec $L = \frac{1}{2}$.
2. ***Condition de l'intervalle*** *: Nous devons vérifier si l'image de f est contenue dans $X = \mathbb{R}^+$. En examinant la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x$, nous pouvons voir que pour tout $x \in X$, nous avons $f(x) = \frac{1}{2}x \in X$. Donc, l'image de f est effectivement contenue dans X.*
   En conclusion, la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x$ satisfait les conditions du théorème de Banach sur l'intervalle $X = \mathbb{R}^+$. Cela implique que la fonction f admet un unique point fixe sur cet intervalle.

Remarque 5 *Voici des exemples pour montrer l'importance de chaque condition dans le théorème de Banach :*

1. *Si la fonction f n'est pas une contraction, alors le théorème de Banach peut échouer. Par exemple, prenons l'espace métrique $(\mathbb{R}, d)$ où d est la distance usuelle. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x$ n'est pas une contraction, car $|f(x) - f(y)| = 2|x-y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et il n'existe pas de nombre $L < 1$ tel que $2|x-y| \leq L|x-y|$ pour tout*

$x, y \in \mathbb{R}$. Par conséquent, le théorème de Banach ne peut pas garantir l'existence d'un point fixe pour f dans $(\mathbb{R}, d)$.

2. *Si l'espace métrique E n'est pas complet, le théorème de Banach peut ne pas s'appliquer. Par exemple, prenons l'espace métrique $(\mathbb{Q}, d)$ où d est la distance usuelle. Soit $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$. Cette fonction est une contraction avec constante de Lipschitz $k = \frac{1}{2}$, mais $(\mathbb{Q}, d)$ n'est pas complet. Par conséquent, le théorème de Banach ne peut pas garantir l'existence d'un point fixe pour f dans $(\mathbb{Q}, d)$.*

1.2.2 La version locale du théorème de Banach

Dans la suite, nous introduirons une version locale du principe de contraction de Banach, qui constitue un outil puissant dans l'étude des équations différentielles et des problèmes d'optimisation. Cette version locale permet d'obtenir des résultats de convergence pour des applications qui ne sont pas nécessairement des contractions sur tout l'espace, mais seulement sur un voisinage restreint de leur point fixe. Le théorème suivant formalise cette version locale du principe de contraction de Banach et énonce les conditions nécessaires pour garantir la convergence des itérations vers le point fixe recherché.

Théorème 1.5 *Soit (E, d) un espace métrique complet, $\overline{x} \in E$, $r > 0$, et $0 \leq \lambda < 1$. Considérons une fonction f définie sur $\overline{B_d}(\overline{x}, r)$ vers E et vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $d(\overline{x}, f(\overline{x})) < r(1-\lambda)$.

(ii) *Pour tout $x_1, x_2 \in \overline{B_d}(\overline{x}, r)$, on a*

$$d(f(x_1), f(x_2) \leq \lambda d(x_1, x_2).$$

Alors, il existe un unique point fixe de f dans $\overline{B_d}(\overline{x}, r)$. En d'autres termes, il existe un élément $x^* \in \overline{B_d}(\overline{x}, r)$ tel que $f(x^*) = x^*$.

Preuve.

Étant donné que $d(f(x_0), x_0) < (1-\lambda)r$, nous pouvons choisir r_0 tel que $0 \leq r_0 < r$ et que $d(f(x_0), x_0) \leq (1-\lambda)r_0$.

Considérons maintenant x dans $\overline{B_d}(\overline{x}, r_0)$. Par définition de la fonction f, nous avons :

$$\begin{aligned} d(f(x), x_0) &\leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), x_0) \\ &\leq \lambda d(x, x_0) + (1-\lambda)r_0 \\ &\leq \lambda r_0 + (1-\lambda)r_0 \\ &\leq r_0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \overline{B_d}(\overline{x}, r_0)$, nous avons $d(f(x), x_0) \leq r_0$. Cela démontre que la fonction f est une contraction sur $\overline{B_d}(\overline{x}, r_0)$. Étant donné que $\overline{B_d}(\overline{x}, r_0)$ est un espace complet, nous pouvons appliquer le théorème de Banach pour affirmer que la fonction f possède un

unique point fixe dans $\overline{B_d}(\overline{x}, r_0) \subset \overline{B_d}(\overline{x}, r)$. ■

Exemple 4 *Soit $E = \mathbb{R}^+$ et soit $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une métrique sur E définie par $d(x,y) = |x-y|$, et f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x & si\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ x+1 & sinon \end{cases}$$

Nous souhaitons démontrer l'existence d'un point fixe de la fonction f sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Pour cela, nous allons appliquer le théorème 1.5.

Nous choisissons $\overline{x} = \frac{3}{16}$ et $r = \frac{5}{16}$, donc $\overline{B_d}(\overline{x}, r) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$. De plus, nous choisissons $\lambda = \frac{1}{4}$.
Vérifions les conditions du théorème 1.5 :

1. ***La condition (i) :*** $d(\overline{x}, f(\overline{x})) < r(1-\lambda)$
   Nous calculons $d(\overline{x}, f(\overline{x})) = \left|\frac{3}{16} - \frac{1}{4}\frac{3}{16}\right| = \frac{9}{64}$. *Puis,* $r(1-\lambda) = \frac{5}{16}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{64}$.
   Nous constatons que $\frac{9}{64} < \frac{15}{64}$, *donc la condition (i) est satisfaite.*
2. ***La condition (ii) :*** *Pour tout* $x, y \in \overline{B_d}(\overline{x}, r)$, *nous avons* $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y)$.
   Si $x, y \in \overline{B_d}(\overline{x}, r)$, *alors*
   $$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \left|\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y\right| \\ &= \frac{1}{4}\left|x-y\right| \\ &\leq \lambda\left|x-y\right| \end{aligned}$$
   Donc, la condition (ii) est également satisfaite.

En appliquant le théorème 1.5, nous pouvons conclure que la fonction f admet un unique point fixe dans $\overline{B_d}(\overline{x}, r)$. Dans cet exemple particulier, le point fixe est $x^* = 0$.

1.2.3 Théorme du point fixe de Nadler pour les multifonctions

Dans cette section sur les points fixes des multifonctions, nous étudions les théorèmes permettant d'établir l'existence de points fixes. Nous examinons en particulier le théorème du point fixe de Nadler, qui offre des conditions pour garantir l'existence d'un point fixe dans un espace métrique complet.

Théorème 1.6 (Nadler (1969)[2]) *Soit (E,d) un espace métrique complet et $F : E \to CB(E)$ une multifonction vérifiant la condition suivante :*
Il existe une constante $0 \leq \lambda < 1$ telle que pour tout $x, y \in E$, on ait

$$H_d(F(x), F(y)) \leq \lambda d(x,y).$$

Alors, la multifonction F admet un point fixe $x^* \in E$, c'est-à-dire $x^* \in F(x^*)$.

Preuve.

Considérons la suite récurrente définie par $x_0 \in E$ et $x_{n+1} \in F(x_n)$ pour tout $n \geq 0$. Montrons que cette suite est une suite de Cauchy.

Prenons $m > n$. Par la propriété de contractivité, on a

$$d(x_m, x_n) \leq H_d(F(x_m), F(x_n)) \leq \lambda d(x_{m-1}, x_{n-1}) \leq \lambda^{m-n} d(x_0, x_0).$$

Comme $0 \leq \lambda < 1$, on a $\lambda^{m-n} \to 0$ lorsque m tend vers l'infini. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq N$, on a $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Ainsi, la suite (x_n) est une suite de Cauchy dans l'espace métrique complet E. Par conséquent, elle converge vers un point fixe $x^* \in E$.

Montrons maintenant que $x^* \in F(x^*)$. Puisque F est une multifonction, on a $F(x^*) \subseteq CB(E)$. Par la continuité de la distance de Hausdorff, on a $H_d(F(x_n), F(x^*)) \to 0$ lorsque n tend vers l'infini.

En utilisant la propriété de contractivité, on obtient

$$d(x_{n+1}, x^*) \leq H_d(F(x_n), F(x^*)) \leq \lambda d(x_n, x^*).$$

Comme $\lambda < 1$ et la suite (x_n) converge vers x^*, on a $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x^*) = 0$. Par conséquent, $x^* \in F(x^*)$. ∎

Exemple 5 *Considérons la multifonction $F : [0,1] \to CB([0,1])$, définie par :*

$$F(x) = \begin{cases} \left\{\frac{x}{2}\right\} & si\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \left\{\frac{x}{2}, \frac{x+1}{2}\right\} & si\ \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Il est difficile de trouver directement un point fixe de cette multifonction, car elle est multivaluée et ne vérifie pas les conditions des théorèmes classiques du point fixe.

Cependant, grâce au Théorème de Nadler, nous pouvons prouver l'existence d'un point fixe. En effet, il est facile de vérifier que la condition de contractivité $H_d(F(x), F(y)) \leq \lambda d(x, y)$ est satisfaite pour $\lambda = \frac{1}{2}$.

Ainsi, d'après le Théorème de Nadler, il existe un point fixe pour la multifonction F. Dans cet exemple, les points fixes sont $x^* = 0$ et $x^{**} = 1$.

1.2.4 La version locale du théorème de Nadler

Nous abordons la version locale du théorème de Nadler, qui constitue une généralisation du théorème précédent en se concentrant sur une région restreinte de l'espace métrique. Cette version locale permet d'établir l'existence d'un point fixe pour une multifonction dans un voisinage donné d'un point donné. Cette généralisation offre une plus grande flexibilité et des résultats plus précis, notamment lorsqu'il s'agit d'étudier des fonctions ou

des multifonctions sur des ensembles restreints. Nous présentons ci-dessous le théorème de la version locale de Nadler.

Théorème 1.7 *[14] Soit (E,d) un espace métrique complet, $\overline{x}\in E$, $r>0$, et $0\leq\lambda<1$. Soit $F:\overline{B_d}(\overline{x},r)\to\mathcal{F}(E)$ une multifonction, où $\mathcal{F}(E)$ désigne l'ensemble des sous-ensembles fermés de E. Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) $d(\overline{x},F(\overline{x}))<r(1-\lambda)$,

(ii) $e_d(F(x_1)\cap\overline{B_d}(\overline{x},r),F(x_2))\leq\lambda d(x_1,x_2)$, *pour tout* $x_1,x_2\in\overline{B_d}(\overline{x},r)$.

Alors, il existe un point fixe $x^*\in\overline{B_d}(\overline{x},r)$ tel que $x^*\in F(x^*)$. Si F est une fonction, alors x^* est le point fixe unique de F dans $\overline{B_d}(\overline{x},r)$.

Preuve.

Soit $X=\overline{B_d}(\overline{x},r)$, l'ensemble fermé et borné défini dans l'énoncé. Considérons la suite (x_n) définie par récurrence comme suit :

- $x_0=\overline{x}$,
- $x_{n+1}\in F(x_n)$, pour tout $n\geq 0$.

Par la condition (i), il existe $x_1\in F(x_0)$ tel que $d(x_0,x_1)<r(1-\lambda)$. Nous allons montrer que (x_n) converge vers un point fixe de F. Pour cela, nous allons diviser la démonstration en plusieurs étapes.

- **Étape 1** : Montrons que (x_n) est une suite de Cauchy.

  Soient $n,m\geq 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}
d(x_n,x_m)&\leq d(x_n,x_{n-1})+d(x_{n-1},x_{n-2})+\ldots+d(x_{m+1},x_m)\\
&\leq\lambda^{n-1}d(x_1,x_0)+\lambda^{n-2}d(x_2,x_1)+\ldots+\lambda^m d(x_{m+1},x_m)\\
&\leq\sum_{k=m}^{n-1}\lambda^k d(x_{k+1},x_k)\\
&\leq\sum_{k=m}^{n-1}\lambda^k\cdot\lambda d(x_k,x_{k-1})\\
&\leq\lambda^m\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k d(x_{k+1},x_k).
\end{aligned}$$

  Puisque $\lambda<1$ et $d(x_{k+1},x_k)\leq d(F(x_k),x_k)$ pour tout k, nous avons :

$$d(x_n,x_m)\leq\lambda^m\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k d(F(x_k),x_k).$$

  Par les conditions (i) et (ii) du théorème, on a $d(F(x_k),x_k)\leq\lambda^{-1}d(\overline{x},F(\overline{x}))<r$, pour tout k. Ainsi :

$$d(x_n, x_m) \leq \lambda^m \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k r = \lambda^m r \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k = \frac{\lambda^m r}{1-\lambda}.$$

Puisque $\lambda^m \to 0$ lorsque $m \to \infty$, il en résulte que (x_n) est une suite de Cauchy.

- **Étape 2** : Montrons que (x_n) converge vers un point $x^* \in X$.

  Puisque (X, d) est un espace métrique complet, la suite de Cauchy (x_n) converge vers un point $x^* \in X$.

- **Étape 3** : Montrons que $x^* \in F(x^*)$.

  Puisque F est une multifonction, nous avons $F(x^*) \in \mathscr{F}(E)$, c'est-à-dire $F(x^*)$ est un sous-ensemble fermé de E. De plus, par la continuité de la distance, nous avons $d(x_n, x^*) \to d(x^*, x^*) = 0$ lorsque $n \to \infty$. Par conséquent, $x_n \to x^*$ lorsque $n \to \infty$.

  Comme F est une multifonction, cela implique que $x^* \in F(x^*)$.

- **Étape 4** : Montrons que x^* est le point fixe unique de F dans X lorsque F est une fonction.

  Supposons maintenant que F est une fonction. Supposons, par l'absurde, qu'il existe un autre point fixe $y^* \in X$ tel que $y^* = F(y^*)$. Alors, par la propriété de la distance, nous avons $d(x^*, y^*) = 0$, ce qui implique que $x^* = y^*$. Donc, x^* est le point fixe unique de F dans X.

Ainsi, nous avons prouvé que si les conditions (i) et (ii) du théorème sont satisfaites, alors F admet un point fixe dans X. De plus, si F est une fonction, ce point fixe est unique. ■

Exemple 6 *Considérons l'espace $E = \mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$. Définissons la multifonction $F : E \to \mathscr{F}(E)$ comme suit :*

$$F(x) = \begin{cases} \emptyset & si\ x < 0 \\ \{0, 1\} & si\ x = 0 \\ \{0\} & si\ 0 < x < 1 \\ \{1\} & si\ x = 1 \\ \{x\} & si\ x > 1 \end{cases}$$

Dans cet exemple, nous choisissons $\overline{x} = 0$, $r = 2$, et $\lambda = \frac{1}{3}$. Ainsi, $\overline{B_d}(\overline{x}, r) = [-2, 2]$.
Vérifions les conditions du théorème 1.7 :

(i) *On a $d(\overline{x}, F(\overline{x})) = d(0, \{0, 1\}) = 0 < 2(1 - \frac{1}{3}) = \frac{4}{3} = r(1 - \lambda)$, donc la condition (i) est satisfaite.*

(ii) *Pour tout $x_1, x_2 \in \overline{B_d}(\overline{x}, r) = [-2, 2]$, nous avons :*

$$\begin{aligned} e_d(F(x_1) \cap \overline{B_d}(\overline{x}, r), F(x_2)) &= e_d(F(x_1) \cap [-2, 2], F(x_2)) \\ &= e_d(F(x_1), F(x_2)) \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant énumérer les différents cas :

- *Si* $x_1, x_2 < 0$, *alors* $F(x_1) = F(x_2) = \emptyset$, *donc* $e_d(F(x_1), F(x_2)) = 0 \leq \frac{1}{3} d(x_1, x_2)$.
- *Si* $x_1, x_2 = 0$, *alors* $F(x_1) = F(x_2) = \{0,1\}$, *donc* $e_d(F(x_1), F(x_2)) = 0 \leq \frac{1}{3} d(x_1, x_2)$.
- *Si* $x_1 = 0$ *et* $x_2 > 0$, *alors* $F(x_1) = \{0,1\}$ *et* $F(x_2) = \{x_2\}$, *donc* $e_d(F(x_1), F(x_2)) = d(\{0,1\}, \{x_2\}) = |0 - x_2| = x_2 \leq \frac{1}{3} d(x_1, x_2)$.
- *Si* $x_1, x_2 \in (0,1)$, *alors* $F(x_1) = F(x_2) = \{0\}$, *donc* $e_d(F(x_1), F(x_2)) = 0 \leq \frac{1}{3} d(x_1, x_2)$.
- *Si* $x_1 = 0$ *et* $x_2 > 1$, *alors* $F(x_1) = \{0,1\}$ *et* $F(x_2) = \{x_2\}$, *donc* $e_d(F(x_1), F(x_2)) = d(\{0,1\}, \{x_2\}) = |0 - x_2| = x_2 \leq \frac{1}{3} d(x_1, x_2)$.
- *Si* $x_1, x_2 > 1$, *alors* $F(x_1) = F(x_2) = \{x_1, x_2\}$, *donc* $e_d(F(x_1), F(x_2)) = d(\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2\}) = 0 \leq \frac{1}{3} d(x_1, x_2)$.

Ainsi, la condition (ii) est satisfaite.

Cependant, dans cet exemple, la multifonction F *admet* $x = 0$ *et* $x^* = 1$ *comme des points fixes dans* $\overline{B_d}(\overline{x}, r) = [-2, 2]$.

Section 1.3

Vitesse de convergence d'une suite

La vitesse de convergence d'une suite est un concept important en analyse mathématique qui mesure la rapidité avec laquelle une suite converge vers sa limite. Plus précisément, la vitesse de convergence d'une suite (x_n) est définie comme le nombre de termes nécessaires pour que la suite soit suffisamment proche de sa limite, avec une précision donnée.

Il existe différents types de vitesses de convergence, notamment la convergence linéaire et la convergence super-linéaire. La convergence linéaire est considérée comme la plus lente, tandis que la convergence super-linéaire est la plus rapide.

La vitesse de convergence dépend de plusieurs facteurs, tels que la fonction elle-même, les conditions initiales, et les méthodes numériques utilisées pour calculer les termes de la suite. Elle est souvent utilisée dans l'analyse numérique pour évaluer l'efficacité d'un algorithme donné et pour comparer différents algorithmes entre eux.

En général, plus la vitesse de convergence est rapide, plus l'algorithme est considéré comme efficace. Toutefois, il est important de noter que la vitesse de convergence dépend également du coût computationnel de chaque itération de l'algorithme, ce qui peut rendre les algorithmes plus lents en pratique malgré une vitesse de convergence théoriquement plus rapide.

Définition 1.10 *Soit* $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ *et* $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$. *Supposons que la suite* (x_k) *converge vers* $\overline{x}$ *lorsque* k *tend vers l'infini. De plus, supposons que la suite* (x_k) *est non stationnaire*[1], *c'est-à-*

1. Une suite (x_k) est dite **non stationnaire** si tous ses termes sont distincts les uns des autres. Cela signifie qu'aucun terme de la suite ne se répète. Formellement, pour tout $k, j \in \mathbb{N}$ tels que $k \neq j$, on a $x_k \neq x_j$.

En d'autres termes, une suite non stationnaire ne présente pas de périodicité ou de répétition de termes. Chaque terme de la suite est unique et différent de tous les autres termes.

Par exemple, la suite $(1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$ est une suite non stationnaire, car chaque terme est distinct des autres

dire que $x_k \neq \overline{x}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Nous avons également l'information suivante :

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \frac{\|x_{k+1} - \overline{x}\|}{\|x_k - \overline{x}\|} = \beta \in [0,1] \tag{P}$$

Nous nous intéressons à la "vitesse de convergence" de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Voici les différentes classifications de la convergence :

1. *La convergence est dite **sous-linéaire** si $\beta = 1$. Par exemple, si nous avons une suite x_k qui converge vers $\overline{x}$ de telle manière que la norme de la différence entre chaque terme consécutif et $\overline{x}$ est proportionnelle à la norme de la différence précédente, alors la convergence est sous-linéaire.*
2. *La convergence est dite **super linéaire** si $\beta = 0$. Cela signifie que la suite converge plus rapidement que sous-linéairement. Par exemple, si la norme de la différence entre chaque terme consécutif et $\overline{x}$ est proportionnelle au carré de la norme de la différence précédente, alors la convergence est super linéaire.*
3. *La convergence est dite **linéaire** si $\beta \in]0,1[$. Cela signifie que la suite converge plus rapidement que sous-linéairement, mais moins rapidement que super linéairement. Par exemple, si la norme de la différence entre chaque terme consécutif et $\overline{x}$ est proportionnelle à la norme de la différence précédente élevée à une puissance strictement inférieure à 2, alors la convergence est linéaire.*

En utilisant les concepts de convergence super linéaire, nous pouvons définir les types de convergence suivants :

- *La convergence est dite **quadratique** si*

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \frac{\|x_{k+1} - \overline{x}\|}{\|x_k - \overline{x}\|^2} = \gamma > 0$$

  Cela signifie que la norme de la différence entre chaque terme consécutif et $\overline{x}$ décroît plus rapidement que la norme de la différence précédente élevée au carré.

- *La convergence est dite **cubique** si*

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \frac{\|x_{k+1} - \overline{x}\|}{\|x_k - \overline{x}\|^3} = \gamma > 0$$

  Cela signifie que la norme de la différence entre chaque terme consécutif et $\overline{x}$ décroît plus rapidement que la norme de la différence précédente élevée au cube.

De manière plus générale, nous pouvons définir les concepts suivants :

et il n'y a pas de répétition.

En revanche, la suite $(1,2,1,2,1,2,\ldots)$ est une suite stationnaire, car elle alterne entre les termes 1 et 2 de manière périodique.

Dans le contexte de la définition donnée précédemment, on suppose que la suite (x_k) converge vers $\overline{x}$. Il est stipulé que la suite est non stationnaire, c'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k \neq \overline{x}$. Cela signifie que la limite $\overline{x}$ n'est pas atteinte avant un nombre infini de termes de la suite.

- *La convergence est d'au moins d'ordre p s'il existe $\gamma \in \mathbb{R}^+$ et $k_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $k \geq k_0$:*

$$\|x_{k+1} - \overline{x}\| \leq \gamma \|x_k - \overline{x}\|^p$$

Cela signifie que la norme de la différence entre chaque terme consécutif et $\overline{x}$ est majorée par une constante fois la norme de la différence précédente élevée à la puissance p.

- *La convergence est d'ordre p si*

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \frac{\|x_{k+1} - \overline{x}\|}{\|x_k - \overline{x}\|^p} = \gamma > 0.$$

Cela signifie que la norme de la différence entre chaque terme consécutif et $\overline{x}$ décroît plus rapidement que la norme de la différence précédente élevée à la puissance p.

En résumé, les différentes classifications de la convergence permettent de décrire la vitesse à laquelle la suite (x_k) converge vers $\overline{x}$. Cela peut être utile pour analyser et comparer les performances des méthodes numériques utilisées pour résoudre des problèmes mathématiques.

Voici quelques exemples pour illustrer les différentes classifications de convergence :

Exemple 7

1. ***Sous-linéaire :*** *Supposons que nous avons une suite x_k définie par $x_k = \frac{1}{k}$. Cette suite converge vers zéro lorsque k tend vers l'infini. La convergence est sous-linéaire car la différence entre chaque terme consécutif et zéro est proportionnelle à la différence précédente, c'est-à-dire $\frac{1}{k+1} = \frac{1}{k} \cdot \frac{k}{k+1}$. Dans ce cas, $\beta = 1$.*
2. ***Linéaire :*** *Considérons une suite x_k définie par $x_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Cette suite converge également vers zéro lorsque k tend vers l'infini, mais elle converge plus rapidement que la convergence sous-linéaire. La différence entre chaque terme consécutif et zéro est proportionnelle à la différence précédente élevée à une puissance strictement inférieure à 2, c'est-à-dire $\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2}$. Dans ce cas, $0 < \beta < 1$.*
3. ***Super linéaire :*** *Prenons la suite de Fibonacci (F_k) définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ pour $k \geq 0$. Cette suite converge vers le nombre d'or $\phi \approx 1.618$ lorsque k tend vers l'infini. La différence entre chaque terme consécutif et ϕ décroît plus rapidement que la convergence linéaire, c'est-à-dire $F_{k+1} - \phi \approx \left(\frac{1}{\phi}\right)^k$. Dans ce cas, $\beta = 0$.*
4. ***Quadratique :*** *Considérons la suite x_k définie par $x_k = \frac{1}{k^2}$. Cette suite converge vers zéro lorsque k tend vers l'infini. La différence entre chaque terme consécutif et zéro décroît plus rapidement que la convergence super linéaire, c'est-à-dire $\frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^2$. Dans ce cas, $\gamma > 0$.*
5. ***Cubique :*** *Supposons que nous avons une suite x_k définie par $x_k = \frac{1}{k^3}$. Cette suite converge également vers zéro lorsque k tend vers l'infini. La différence entre chaque*

terme consécutif et zéro décroît plus rapidement que la convergence quadratique, c'est-à-dire $\frac{1}{(k+1)^3} = \frac{1}{k^3} \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^3$. *Dans ce cas,* $\gamma > 0$.

Ces exemples montrent différentes vitesses de convergence, allant de la convergence sous-linéaire à la convergence cubique. Il est important de noter que la convergence d'ordre supérieur implique une convergence plus rapide, ce qui est souvent souhaitable dans les méthodes numériques pour minimiser le temps de calcul et obtenir des résultats précis.

Section 1.4

Les équations généralisées

La terminologie « équation généralisée » est utilisée depuis peu pour décrire certains types de relations qui sont semblables aux équations à l'exception que l'un des côtés de la relation est une multifonction ; plus spécifiquement, l'expression de type multifonction implique souvent un opérateur de cône normal. Dans cette section, nous définirons les termes nécessaires pour décrire les équations généralisées et nous donnerons quelques exemples.

Une ***équation généralisée*** est un problème de la forme :

$$0 \in f(x) + F(x), \tag{1.5}$$

où $f : X \longrightarrow Y$ est une fonction entre les deux espaces vectoriels X et Y, et $F : X \rightrightarrows Y$ est une *multifonction* entre les mêmes espaces. Ce type de problème est également appelé *inclusion variationnelle*. Cela signifie que l'on cherche un point $x \in X$ tel que l'ensemble $f(x) + F(x)$ contienne l'élément nul de Y, ou encore que l'ensemble $F(x)$ contienne $-f(x)$.

- Si $F \equiv \{0\}$, on cherche à résoudre **une "simple" équation** $f(x) = 0$.
- Si $Y = \mathbb{R}^m$ et $F \equiv \mathbb{R}^m_+$, on cherche à résoudre **l'inéquation** $f(x) \leq 0_{\mathbb{R}^m_+}$.
- Supposons que $X = Y = H$ (espace de Hilbert) et que $F = \partial\varphi$, où $\varphi : H \to \mathbb{R}$ est une fonction propre, convexe et semi-continue inférieurement, et $\partial\varphi$ est le sous-différentiel[2] de φ. Dans ce cas, l'inclusion variationnelle (1.5) est équivalente au problème suivant : trouver $x \in H$ tel que

$$< f(x), y - x > + \varphi(y) - \varphi(x) \geqslant 0, \text{ pour tout } y \in H.$$

Ce problème est appelé l'**inégalité variationnelle mixte** [10, 20].

2. Le sous-différentiel de φ, où $\varphi : H \to \mathbb{R}$ est une fonction propre, convexe et semi-continue inférieurement, est défini comme suit : "Pour tout point $x \in H$, l'ensemble des sous-gradients de φ au point x, noté $\partial\varphi(x)$, est défini comme l'ensemble des vecteurs $v \in H$ tels que pour tout $y \in H$, on ait l'inégalité suivante :

$$\varphi(y) \geq \varphi(x) + \langle v, y - x \rangle.\text{"}$$

- Supposons que $X = Y = H$ (espace de Hilbert) et que $F = \partial \delta_C$, où C est un ensemble convexe fermé non vide dans H et $\delta_C : H \to [0, +\infty]$ est la fonction indicatrice de C, définie par

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in C, \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

alors l'inclusion variationnelle (1.5) est équivalente au problème suivant : chercher $x \in H$ tel que

$$< f(x), y - x > \geqslant 0, \quad \text{pour tout} \quad y \in H.$$

qui est appelé l'**inégalité variationnelle de Hartman-Stampacchia**.

- Si $X = Y = \mathbb{R}^m$, alors le problème (1.5) correspond à l'équation généralisée introduite par Robinson dans [6, 7, 8].
- Si $f = 0$, alors le problème (1.5) correspond au problème d'inclusion introduit par Rockafellar dans [4].
- Considérons tout d'abord le problème de **programmation mathématique** suivant :

$$\begin{aligned} \text{minimiser} \quad & f(y) && (1.6) \\ \text{avec} \quad & g(y) \in K^0 && (1.7) \\ & y \in L && (1.8) \end{aligned}$$

où f et g sont des fonctions définies sur un sous-ensemble ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement, L est un ensemble convexe fermé dans $\mathbb{R}^n$, K est un cône convexe fermé dans $\mathbb{R}^m$ et K^0 désigne le cône polaire de K, défini par :

$$K^0 = \{ y \in \mathbb{R}^m \,|\, (y,k) \geq 0 \text{ pour tout } k \in K \}$$

La formulation en (1.6) est suffisamment générale pour exprimer un grand nombre de problèmes d'optimisation spécifiques que l'on rencontre dans la pratique. Par exemple, si les contraintes du problème auquel on s'intéresse sont de la forme :

$$g_1(y) \geq 0, \ldots, g_k(y) \geq 0; g_{k+1}(y) = 0 \ldots, g_{k+l}(y) = 0$$

alors il suffit de poser $K = \mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^l$ (de sorte que $K^0 = \mathbb{R}^k_- \times \{0\}^l$) et $L = \mathbb{R}^p$.
Si l'on définit le lagrangien standard associé à (1.6) comme suit :

$$\mathscr{L}(y,u) = f(y) + \langle u, g(y) \rangle \quad \text{pour } y \in U \text{ et } u \in \mathbb{R}^m$$

alors si y est un optimizeur local de (1.6) pour lequel une qualification de contrainte appropriée est vérifiée, il existe $u \in \mathbb{R}^m$ tel que, avec y, les conditions d'optimalité

nécessaires soient satisfaites :

$$0 \in \frac{\partial}{\partial y}\mathscr{L}(y,u) + \partial\psi_L(y) \tag{1.9}$$

$$0 \in -\frac{\partial}{\partial u}\mathscr{L}(y,u) + \partial\psi_K(y) \tag{1.10}$$

avec $\partial\psi_C(x)$ est le cône normal à C en un point $x \in \mathbb{R}^n$ est défini comme l'ensemble des vecteurs $v \in \mathbb{R}^n$ tels que pour tout vecteur $d \in C$, le produit scalaire $\langle v, d-x\rangle$ est inférieur ou égal à zéro :

$$\partial\psi_C(x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, d-x\rangle \leq 0, \text{ pour tout } d \in C\}$$

Référez-vous à Robinson [6, 7, 8] pour plus de détails sur la dérivation et les types de qualifications de contrainte pour lesquels (1.9) peut être attendu.

Pour exprimer (1.6) comme une équation généralisée, il suffit de poser $x = (y,u)$,

$$F(x) = \left[\frac{\partial}{\partial y}\mathscr{L}(y,u), -\frac{\partial}{\partial u}\mathscr{L}(y,u)\right],$$

et $C = L \times K$. Notant que

$$\partial\psi_{L\times K} = \partial\psi_L(y) \times \partial\psi_K(y),$$

nous voyons alors que (1.6) est équivalent à

$$0 \in F(x) + \partial\psi_{L\times K}(x).$$

CHAPITRE 2

Deux méthodes approximatives super linéaires

Dans ce chapitre, nous explorons deux approches d'approximation pour résoudre des équations généralisées de la forme $0 \in f(x) + F(x)$. La première méthode est la méthode de Newton, un algorithme itératif qui repose sur des approximations successives et l'utilisation de la dérivée de la fonction f. La deuxième méthode est la méthode (n,a)-PBA (Point-Based Approximation), qui se fonde sur l'approximation de la fonction f. Nous analysons en détail ces deux approches et discutons de leurs propriétés respectives.

Section 2.1

Méthode de Newton

Dans cette section, nous examinons la méthode de type Newton, qui est définie par l'équation

$$0 \in f(x_k) + \nabla f(x_k)(x_{k+1} - x_k) + F(x_{k+1}). \tag{2.1}$$

Ici, f est une fonction qui possède une dérivée de Fréchet, tandis que $F : X \rightrightarrows Y$ est une multifonction établie entre deux espaces de Banach, X et Y.

L'objet principal de notre étude est la convergence locale quadratique de cette méthode vers x^*. Pour atteindre cette convergence, une condition essentielle doit être remplie. Nous exigeons que la multifonction $(f(x^*) + \nabla f(x^*)(\cdot - x^*) + F(.))^{-1}$ soit M-pseudo-lipschitzienne en $(0, x^*)$.

Cette propriété de pseudo-lipschitzianité joue un rôle crucial dans la garantie de la convergence. Elle assure que, localement autour de x^*, la méthode de Newton converge de manière quadratique vers la solution x^*. En d'autres termes, à mesure que les itérations progressent, la méthode se rapproche rapidement de la valeur de x^*.

Soient X et Y deux espaces de Banach. On considère une équation généralisée de forme (2.2) :

$$0 \in f(x) + F(x) \tag{2.2}$$

où $f : X \longrightarrow Y$ est une fonction Fréchet différentielle et F est une multifonction de X à valeurs dans les sous-ensembles de Y . On a le théorème suivant :

Théorème 2.1 *[17] Soit x^* une solution de (2.2) On suppose que :*

1. *f une fonction Fréchet différentiable au dans voisinage ouvert O de x^*,*
2. *La dérivée ∇f de f est L-Lipschitzienne sur O,*
3. *F est une multifonction de graphe fermé et la multifonction*

$$(f(x^*) + \nabla f(x^*)(\cdot - x^*) + F(.))^{-1}$$

est M-pseudo -lipschitzenne en (0,x^*),

alors, pour tout $c > (\frac{1}{2})ML$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour point de départ $x_0 \in B(x^*, \delta)$, il existe une suit de Newton $\{x_k\}$ vérifiant (2.1) qui converge quadratiquement vers x^* :

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq c\|x_k - x^*\|^2 \tag{2.3}$$

Preuve.

On note $p(x) = f(x^*) + \nabla f(x^*)(x - x^*) + F(x)$, où $c > \left(\frac{1}{2}\right)ML$, et a et b sont des constantes positives telles que :

$$e\left(p^{-1}(y') \cap B(x^*, a), p^{-1}(y'')\right) \leq M\|y' - y''\| \quad \text{pour tout } y', y'' \in B(0, b), \tag{2.4}$$

Choisissez $\delta > 0$ tel que $B(x^*, \delta) \subset O$ et :

$$\delta < \min\left\{a, \sqrt{\frac{2b}{3L}}, \frac{1}{c}, \frac{1}{ML} - \frac{1}{2c}\right\}. \tag{2.5}$$

Soit $x_0 \in B(x^*, \delta)$, $x_0 \neq x^*$ et considérons la multifonction

$$x \longrightarrow \Phi_0(x) = p^{-1}\left[f(x^*) + \nabla f(x^*)(x - x^*) - f(x_0) - \nabla f(x_0)(x - x_0)\right].$$

de X aux sous-ensembles fermés de X, nous appliquons le théorème (1.7) à cette multifonction avec les spécifications suivantes :

$$\overline{x} = x^*, \qquad \lambda = ML\delta, \qquad r = r_0 := c\|x_0 - x^*\|^2.$$

Tout d'abord, observez que d'après (2.5), on a $r_0 \leq \delta \leq a$ et $\lambda < 1$. En utilisant les équations (2.4) et (2.5), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
d(x^*,\Phi_0(x^*)) &\le e\left(p^{-1}(0)\cap B(x^*,\delta), p^{-1}\left[f(x^*)-f(x_0)-\nabla f(x_0)(x^*-x_0)\right]\right)\\
&\le M\left\|f(x^*)-f(x_0)-\nabla f(x_0)(x^*-x_0)\right\|\\
&= M\left\|\int_0^1 \nabla f(x_0+t(x^*-x_0))(x^*-x_0)dt-\int_0^1 \nabla f(x_0)(x^*-x_0)dt\right\|\\
&\le M\|x^*-x_0\|\int_0^1 (\nabla f(x_0+t(x^*-x_0))-\nabla f(x_0))dt\\
&\le M\|x^*-x_0\|\int tL\|x^*-x_0\|dt\\
&\le \frac{1}{2}ML\|x_0-x^*\|^2\\
&\le c\|x^*-x_0\|^2(1-ML\delta),
\end{aligned}$$

Ce qui signifie que la condition (a) du théorème (1.7) est vérifiée.

Pour tout $x\in B(x^*,\delta)$, en utilisant (2.4), on a :

$$\begin{aligned}
\left\|f(x^*)+\nabla f(x^*)(x-x^*)-f(x_0)-\nabla f(x_0)(x-x_0)\right\| &\le \left\|f(x^*)-f(x_0)-\nabla f(x_0)(x^*-x_0)\right\|\\
&\quad+\left\|(\nabla f(x^*)-\nabla f(x_0))(x-x^*)\right\|\\
&\le \frac{3}{2}L\delta^2\le b.
\end{aligned}$$

De plus, en utilisant (2.5), pour tout $x',x''\in B(x^*,r_0)$ on a :

$$\begin{aligned}
e(\Phi_0(x')\cap B(x^*,r_0),\Phi_0(x'')) &\le e\left(p^{-1}\left[f(x^*)+\nabla f(x^*)(x'-x^*)-f(x_0)-\nabla f(x_0)(x'-x_0)\right]\cap B(x^*,\delta),\Phi_0(x'')\right)\\
&\le M\left\|(\nabla f(x^*)-\nabla f(x_0))(x'-x'')\right\|\\
&\le ML\delta\left\|x'-x''\right\|.
\end{aligned}$$

Ce qui signifie que la condition (b) du théorème (1.7) est remplie.

Par conséquent , Φ_0 a un point fixe dans $x_1\in B(x^*,r_0)$, i.e.

$$\|x_1-x^*\|\le c\|x_0-x^*\|^2$$

et

$$x_1\in\Phi_0(x_1)=p^{-1}\left[f(x^*)+\nabla f(x^*)(x_1-x^*)-f(x_0)-\nabla f(x_0)(x_1-x_0)\right].$$

En procédant par récurrence, et en appliquant le théorème (1.7) avec

$$\overline{x}=x^*,\quad \lambda=ML\delta\quad\text{et } r=r_k:=c\|x_k-x^*\|^2$$

pour la multifonction

$$\Phi_k(x) = p^{-1}\big[f(x^*)+\nabla f(x^*)(x-x^*)-f(x_k)-\nabla f(x_k)(x-x_k)\big],$$

nous obtenons que pour tout k et $x_k \in B(x^*,\delta)$, il existe un point fixe $x_{k+1} \in B(x^*,\delta)$ satisfaisant (2.1) et (2.3). ■

Section 2.2

Méthode de (n,α)-PBA

Dans cette section, nous introduisons la notion d'approximation (n,α)-PBA (Point-Based Approximation) et présentons des exemples de fonctions lisses et qui admettent une telle approximation. Cette méthode itérative est utilisée pour résoudre des inclusions variationnelles de la forme $0 \in f(x)+F(x)$, où $f : X \to Y$ est une fonction Fréchet différentiable et $F : X \rightrightarrows Y$ est une application multivoque à graphe fermé. Cette définition, généralisée par Robinson, permet une approche plus large.

Définition 2.1 *Considérons une fonction f définie sur un sous-ensemble Ω d'un espace métrique (E,d) vers un espace linéaire Y, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 0$ sont des constantes fixées. Nous examinons une fonction $A : \Omega \times \Omega \longrightarrow Y$ et un scalaire k, tels que pour tout u et v dans Ω, les conditions suivantes sont satisfaites :*

(a) $\|f(v)-A(u,v)\| \le \dfrac{k}{\pi_{n,\alpha}} d(u,v)^{n+\alpha}$, *où* $\pi_{n,\alpha} = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(\alpha+i)$,

(b) *la fonction $A(u,.)-A(v,.)$ est Lipschitzienne sur Ω avec un module $\kappa(k)d(u,v)^{\alpha}$, où κ est une fonction positive de k.*

Dans ce cas, on dit que A est une approximation basée sur les points (n,α) (ou (n,α)-PBA pour Point-Based Approximation) sur Ω pour la fonction f, avec un module de k.

Exemple 8

- *Soit X un espace vectoriel normé et Ω un sous-ensemble ouvert de X. Alors toute fonction f, différentiable de Fréchet sur Ω avec une dérivée lipschitzienne de constante k sur Ω, admet un $(1,1)$-PBA. Lorsque la dérivée de Fréchet de f n'est plus lipschitzienne mais est Holderienne sur Ω avec un exposant α et une constante k, la fonction*

$$A(u,v) = f(u)+\nabla f(u)(v-u)$$

est un $(1,\alpha)$-PBA pour f sur Ω.

- *Un autre exemple de fonction régulière admettant un (n,α)-PBA est toute fonction f deux fois différentiable de Fréchet sur Ω telle que $\nabla^2 f$ est Holderienne avec un exposant $\alpha \in (0,1)$ et une constante k sur Ω. En effet, on peut définir*

$$A(u,v) = f(u)+\nabla f(u)(v-u)+\frac{1}{2}\nabla^2 f(u)(v-u)^2.$$

Dans ce cas, pour tout sous-ensemble convexe borné approprié Ω' dans Ω, A est un $(2,\alpha)$-PBA pour f sur Ω'.

Grâce à ce concept de (n,α)-PBA, pour résoudre (1.5), les auteurs ont proposé dans [27] la méthode qui suit :

$$0 \in A(x_k, x_{k+1}) + F(x_{k+1}). \tag{2.6}$$

où A est une (n,α)-PBA de f.

Remarquons que :

- pour $n=1$, (2.6) réduit à

$$0 \in f(x_k) + \nabla f(x_k)(x_{k+1}-x_k) + F(x_{k+1}). \tag{2.7}$$

  Cette méthode iterative s'appelle méthode de Newton qui est introduite par Dontchev dans [16, 17].

- Pour $n=2$, (2.6) réduit à

$$0 \in f(x_k) + \nabla f(x_k)(x_{k+1}-x_k) + \frac{1}{2}\nabla^2 f(x_k)(x_{k+1}-x_k)^2 + F(x_{k+1}). \tag{2.8}$$

  Cette méthode est proposée par Geoffroy et al. dans [25].

Nous avons besoin la proposition suivante :

Proposition 2.2 [30, Pro. 3.4] *Soit $f : X \to Y$ une fonction admet (n,α)-PBA avec module de k sur quelque voisinage ouvert d'un point $\overline{x} \in X$. Considérons aussi une multifonction $F : X \rightrightarrows Y$, alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *La multifonction $(f+F)^{-1}$ est M-Aubin continue au voisinage de $(\overline{y},\overline{x})$,*
2. *La multifonction $[A(\overline{x},.)+F(.)]^{-1}$ est M-Aubin continue au voisinage de $(\overline{y},\overline{x})$.*

La démonstration de cette proposition est basée sur Théorème 1.3.

Alors, pour énoncer le théorème dans [27], on considère les assertions suivantes :

(H1) F admet un graphe fermé,

(H2) f admet un (n,α)-PBA de module k, noté par A, sur quelque voisinage ouvert Ω de $\overline{x}$;

(H3) La multifonction $(f+F)^{-1}$ est M-Aubin continue au voisinage de $(0,\overline{x})$.

On a le théorème suivant :

Théorème 2.3 *[27] Soit $\overline{x}$ une solution de (2.2) et supposons que les assertions (H1)-(H3) sont vérifiées. Alors pour chaque $C > \frac{Mk}{\pi_{n,\alpha}}$ on peut trouver un $\delta > 0$ tel que pour tout point*

de départ $x_0 \in B(\overline{x},\delta)$ il existe une suite (x_k), définit par (2.6), qui vérifié

$$\|x_{k+1}-\overline{x}\| \leqslant C\|x_k-\overline{x}\|^{n+\alpha} \tag{2.9}$$

La démonstration de ce théorème est utilisé la proposition (2.2), la proposition (2.4) et le Théorème 1.7

Avant de prouver le théorème (2.3), nous devons introduire quelques notations. Tout d'abord, définissons la multifonction p de X dans les sous-ensembles de Y par :

$$p(x) = A(x^*,x^*) + F(x)$$

Ensuite, pour $k \in \mathbb{N}$ et $x_k \in X$, posons :

$$Z_k = A(x^*,x) - A(x_k,x)$$

et définissons

$$\varphi_k(x) = p^{-1}[Z_k(x)].$$

On peut remarquer que $x_1 \in X$ est un point fixe de φ_0 si et seulement si $Z_0(x_1) \in p(x_1)$, c'est-à-dire si et seulement si :

$$0 \in A(x_0,x_1) + F(x_1). \tag{2.10}$$

Une fois x_k calculé, on démontre que la fonction φ_k possède un point fixe x_{k+1} dans X. Ce processus permet de démontrer l'existence d'une suite (x_k) vérifiant (2.6).

Le résultat suivant est un outil efficace pour démontrer le théorème (2.3), et en fait, il constitue le point de départ de notre algorithme.

Proposition 2.4 *Sous les hypothèses du théorème (2.3), il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x_0 \in B(x^*,\delta)$ (avec $x_0 \neq x^*$), la multifonction φ_0 admet un point fixe x_1 dans $B(x^*,\delta)$ vérifiant l'inégalité*

$$\|x_1-x^*\| \leq C\|x_0-x^*\|^{n+\alpha}.$$

Preuve.

Par hypothèse **H3**, il existe deux nombres positifs a et b tels que :

$$e\left(p^{-1}(y') \cap B(x^*,a), p^{-1}(y'')\right) \leq M\|y'-y''\|, \quad \forall y', y'' \in B(0,b) \tag{2.11}$$

Fixons $\delta > 0$ tel que :

$$\delta < \min\left\{a, \left(\frac{\pi_{n,\alpha} b}{(1+2^{n+\alpha})k}\right)^{\frac{1}{n+\alpha-1}}, \frac{1}{c^{\frac{1}{n+\alpha-1}}}\right\} \tag{2.12}$$

Pour démontrer la proposition (2.4), notre intention est de montrer que les deux affirmations (a) et (b) du Théorème 1.7 sont vraies, où $\overline{x} := x^*$ et la multifonction est φ_0 définie ci-dessus. Nous devrons également déterminer les valeurs de r et λ.

Selon la définition de l'excès e, nous avons que

$$d(x^*,\varphi_0(x^*)) \leq d(p^{-1}(0)\cap B(x^*,\delta),\varphi_0(x^*)) \tag{2.13}$$

De plus, pour tout $x_0 \in B(x^*,\delta)$ tel que $x_0 \neq x^*$, nous avons :

$$||Z_0(x^*)|| = ||f(x^*) - A(x_0,x^*)||,$$

Alors,

$$||Z_0(x^*)|| \leq \frac{K}{\pi_{n,\alpha}}||x_0 - x^*||^{n+\alpha}.$$

Ainsi, à partir de l'équation (2.12), nous obtenons $||Z_0(x^*)|| < b$. En utilisant l'équation (2.11), nous pouvons dire que :

$$d(p^{-1}(0)\cap B(x^*,\delta),\varphi_0(x)) = d(p^{-1}(0)\cap B(x^*,\delta),p^{-1}[Z_0(x^*)]) \leq \frac{MK}{\pi_{n,\alpha}}||x_0 - x^*||^{n+\alpha}$$

En utilisant l'équation (2.13), nous obtenons :

$$d(x^*,\varphi_0(x^*)) \leq \frac{MK}{\pi_{n,\alpha}}||x_0 - x^*||^{n+\alpha} \tag{2.14}$$

Lorsque $C > \frac{MK}{\pi_{n,\alpha}}$, il existe $\lambda \in]0,1]$ tel que $c(1-\lambda) \geq \frac{MK}{\pi_{n,\alpha}}$. Ainsi

$$d(x^*,\phi_0(x^*)) \leq c(1-\lambda)||x_0 - x^*||^{n+\alpha} \tag{2.15}$$

Nous pouvons déduire des dernières inégalités que l'affirmation (a) du Théorème 1.7 est satisfaite.

Montrons maintenant que la condition (b) du Théorème 1.7 est satisfaite. Puisque $\delta C^{\frac{1}{n+\alpha-1}} < 1$ et $||x^* - x_0|| \leq \delta$, nous avons $r_0 \leq \delta < a$.

De plus, pour $x \in B(x^*,\delta)$, on a :

$$||Z_0(x)|| \leq ||A(x^*,x) - f(x)|| + ||f(x) - A(x_0,x)||.$$

Cela nous donne :

$$||Z_0(x)|| \leq \frac{k}{\pi_{n,\alpha}}(||x - x^*||)^{n+\alpha} + ||x_0 - x||^{n+\alpha}).$$

Donc, nous avons :

$$||Z_0(x)|| \leq \frac{k}{\pi_{n,\alpha}}(\delta^{n+\alpha}(2\delta)^{n+\alpha}).$$

Ainsi, d'après (2.12), on peut en déduire que pour tout $x \in B(x^*,\delta)$, $Z_0(x) \in B(0,b)$. Par

conséquent, pour tous $x', x'' \in B(x^*, r_0)$, on a :

$$e(\varphi_0(x') \cap B(x^*, r_0), \varphi_0(x^*)) \leq e(\varphi_0(x') \cap B(x^*, \delta), \varphi_0(x''))$$

Ce qui donne, par (2.15) :

$$\begin{aligned} e(\varphi_0(x') \cap B(x^*, r_0), \varphi_0(x'')) &\leq M\|Z_0(x') - Z_0(x'')\| \\ &\leq M\left|\left|\left|A(x^*, x') - A(x_0, x')\right|\right| - \left|\left|A(x^*, x'') - A(x_0, x'')\right|\right|\right| \\ &\leq M\,k(K)\|x_0 - x^*\|^{\alpha}\|x' - x''\| \\ &\leq M\,k(K)\delta^{\alpha}\|x' - x''\|. \end{aligned}$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\delta < \frac{\lambda}{Mk(k)}$ pour que la condition (b) du Théorème 1.7 soit satisfaite. Puisque les deux conditions du Théorème 1.7 sont remplies, on peut en déduire l'existence d'un point fixe $x_1 \in B(x^*, r_0)$ pour l'application φ_0. Ainsi, la proposition 2.4 est prouvée. ∎

La preuve du Théorème (2.3) est simple comme indiqué ci-dessous :

Preuve.

En procédant par récurrence, en gardant $\overline{x} = x^*$ et posant $r_k = C\|x_k - x^*\|^{n+\alpha}$, l'application de la proposition (2.4) à la multifonction φ_k donne l'existence d'un point fixe x_{k+1} pour φ_k, qui est un élément de $B(x^*, r_k)$.

Ce dernier fait implique que :

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq C\|x_k - x^*\|^{n+\alpha} \tag{2.16}$$

et la preuve est complète. ∎

Conclusion et Perspective

Durant ce mémoire, nous avons examiné deux approches d'approximation pour résoudre des équations généralisées de la forme $0 \in f(x) + F(x)$. La méthode de Newton, une méthode basé sur des approximations successives et l'utilisation de la dérivée de la fonction f, a été étudiée en détail. Nous avons également exploré la méthode (n, α)-PBA (Point-Based Approximation), qui repose sur l'approximation de la fonction f à l'aide de points spécifiques (n, α).

Cependant, il est important de noter que notre exploration des méthodes approximatives ne s'arrête pas là. D'autres méthodes intéressantes peuvent être envisagées pour résoudre le problème de l'équation généralisée ou de l'inclusion variationnelle $0 \in f(x) + F(x)$, telles que celles présentées par Asen Dontchev, Said Hilout, Ioannis K. Argyros et Alain Piétrus. Ces méthodes offrent différentes conditions et vitesses de convergence, constituant ainsi des perspectives prometteuses pour des recherches ultérieures.

Cependant, il reste encore beaucoup à faire pour explorer d'autres approches et étudier les conditions et les performances de ces méthodes. Ces perspectives ouvrent la voie à de futures recherches visant à améliorer l'efficacité et la précision des techniques d'approximation dans la résolution de problèmes d'équations généralisées et d'inclusions variationnelles.

Bibliographie

[1] S. BANACH. “Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales”. In : *Fundamenta mathematicae* 3.1 (1922), p. 133-181.

[2] S. B. NADLER JR. “Multi-valued contraction mappings”. In : *Pacific J. Math.* 30 (1969), p. 475-488.

[3] S. M. ROBINSON. “An inverse-function theorem for a class of multivalued functions”. In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 41 (1973), p. 211-218.

[4] Rockafellar R.T. “Monotone operators and the proximal point algorithm.” In : *SIAM J. Control Optim.* 14 (1976), p. 877-898. ISSN : 0363-0129; 1095-7138/e. DOI : 10.1137/0314056.

[5] A. D. IOFFE et V. M. TIHOMIROV. *Theory of extremal problems.* T. 6. Studies in Mathematics and its Applications. Translated from the Russian by Karol Makowski. Amsterdam : North-Holland Publishing Co., 1979.

[6] S. M. ROBINSON. “Generalized equations and their solutions, part I : basic theory”. In : *Math. Program. Study* 10 (1979), p. 128-141.

[7] S. M. ROBINSON. “Generalized equations and their solutions, part II : applications to nonlinear programming”. In : *Math. Program. Study* 19 (1982), p. 200-221.

[8] S. M. ROBINSON. “Generalized equations”. In : *Mathematical Programming The State of the Art.* Sous la dir. d’A. BACHEM, B. KORTE et M. GRÖTSCHEL. Springer Berlin Heidelberg, 1983, p. 346-367.

[9] Jean-Pierre AUBIN. “Lipschitz behavior of solutions to convex minimization problems”. In : *Mathematics of Operations Research* 9.1 (1984), p. 87-111.

[10] C. BAIOCCHI et A. CAPELO. *Variational and quasivariational inequalities. Applications to free boundary problems. Transl. from the Italian by Lakshmi Jayakar.* English. A Wiley-Interscience Publication. Chichester etc. : John Wiley and Sons. IX, 452 p. 29.50 (1984). 1984.

[11] R. T. ROCKAFELLAR. “Lipschitz properties of multifunctions”. In : *Nonlinear Anal.* 9.8 (1985), p. 867-885.

[12] G. BEER. *Topologies on closed and closed convex sets.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1993, p. xi + 340. ISBN : 0-7923-2531-1/hbk.

[13] B. S. MORDUKHOVICH. “Complete characterization of openness, metric regularity, and Lipschitzian properties of multifunctions”. In : *Trans. Am. Math. Soc.* 94.1 (1993), p. 15-18.

[14] A. L. DONTCHEV et W. W. HAGER. “An inverse mapping theorem for set-valued maps”. In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 121.2 (1994), p. 481-489.

[15] S. M. ROBINSON. “Newton’s method for a class of nonsmooth functions”. In : *Set-Valued Anal.* 2 (1994), p. 291-305.

[16] A. L. DONTCHEV. “Local analysis of a Newton type method based on partial linearization”. In : *The mathematics of numerical analysis (Park City, UT, 1995)*. Sous la dir. de J. RENEGAR, M. SHUB et S. SMALE. T. 32. American Mathematical Society, 1996, p. 295-306.

[17] A. L. DONTCHEV. “Local convergence of the Newton method for generalized equations”. In : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1 Math.* 322.4 (1996), p. 327-331.

[18] A. L. DONTCHEV. “Uniform convergence of the Newton method for Aubin continuous maps”. In : *Serdica Math. J.* 22.3 (1996), p. 385-398.

[19] Paul S ADDISON. *Fractals and chaos : an illustrated course*. CRC Press, 1997.

[20] M. A. NOOR. “Generalized set-valued variational inclusions and resolvent equations.” In : *J. Math. Anal. Appl.* 228.1 (1998), p. 206-220. ISSN : 0022-247X. DOI : 10.1006/jmaa.1998.6127.

[21] R. T. ROCKAFELLAR et R. J.-B. WETS. *Variational analysis*. T. 317. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 1998.

[22] A. D. IOFFE. “Metric regularity and subdifferential calculus”. In : *Russian Math. Surveys* 55.3 (2000), p. 501-558.

[23] A. PIETRUS. “Does Newton’s method for set-valued maps converges uniformly in mild differentiability context?” In : *Rev. Colombiana Mat.* 34.2 (2000), p. 49-56.

[24] A. PIETRUS. “Generalized equation under mild differentiability conditions”. In : *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. (Esp.)* 94.1 (2000), p. 15-18.

[25] M. H. GEOFFROY, S. HILOUT et A. PIETRUS. “Acceleration of convergence in Dontchev’s iterative method for solving variational inclusions”. In : *Serdica Math. J.* 29 (2003), p. 45-54.

[26] Kenneth FALCONER. *Fractal geometry : mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons, 2004.

[27] M. H GEOFFROY et A. PIETRUS. “A general iterative procedure for solving nonsmooth generalized equations”. In : *Computational Optimization and Applications* 31 (2005), p. 57-67.

[28] I. K. ARGYROS. “An improved convergence analysis of a superquadratic method for solving generalized equations”. In : *Rev. Colombiana Mat.* 40.1 (2006), p. 65-73.

[29] A. L. DONTCHEV, M. QUINCAMPOIX et N. ZLATEVA. “Aubin criterion for metric regularity”. In : *J. Convex Anal.* 13 (2006), p. 281-297.

[30] M. H GEOFFROY, C. JEAN-ALEXIS et A. PIÉTRUS. “Iterative solving of variational inclusions under Wijsman perturbations”. In : *Journal of Global Optimization* 42.1 (2008), p. 111-120.

[31] J. P. AUBIN et H. FRANKOWSKA. *Set-Valued Analysis*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser, Boston, 2009.

[32] S. BURNET. “Méthodes de résolution d’inclusions variationnelles sous hypothèses de stabilité”. Thèse de doct. Université des Antilles et de la Guyane, 2012.