REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ YAHIA FARES, MÉDÉA

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



MÉMOIRE DE FIN D'ETUDES EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : **ANALYSE MATHÉMATIQUES ET APPLICATION**

Présenté par

MEHENNI Fatiha

Thème :

CONTROLE DE LA CONTREMARCHE PAR LA DYNAMIQUE DU NAVIRE

Evalué par le jury composé de :

promotrice	F. BOULARIAH	MAA, Université de Médéa
Examinatrice	N.R AIT AMRANE	MAA, Université de Médéa
Examinatrice	G. GUETTAI	MAA, Université de Médéa

Année universitaire 2019/2020

Dédicace

*A ma chères mère : **Messaouda** et mon chères père **Ahmed** ;*

A mes chèrs sœurs : Soumia, Leila ;

A mes chèrs frères : Ali, Billal ;

*A toute la famille **MEHENNI** ;*

A mes chères amies : Kamilia,Fella,Ratiba,Amal,Amina,Soumia,
Fadhila,Houria,Linda,Meryem,Razika,Yasmine,
Chafia,Nour,Sara,Fouzia,Asma,Nadjet,
Rekia,Rima,Malika,Aicha,Naima,Imene ;

*A mes honorables **professeurs** ;*

*A tous mes amies de la promotion **2020** ;*

Je dédié cet humble travail.

MEHENNI Fatiha

Remerciements

Je remercie en premier lieu ALLAH le tout-puissant de nous avoir accordé la puissance et la volonté, la chance pour suivre pour terminer ce travail.

Je tiens vivement à exprimer ma profonde reconnaissance à Madame F.BOULARIAH, maître de conférences assistante ***MAA*** *à l'université de Médéa, d'avoir veillé et assurer l'encadrement de ce travail.*

Mes remerciements vont également à N.R AIT AMRANE et G. GUETTAI, enseignantes à l'université de médéa, d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury, et je les en remercie sincèrement.

Sans oublier de remercier tous nos enseignants pendant tous les paliers de notre parcours, et exceptionnellement aux enseignants qui ont enrichi nos connaissances.

Enfin, J'adresse mes vifs remerciements à ma famille et mes relatives pour son soutien moral et son encouragement ainsi à toutes mes amies pour leur présence et leur aide.

Résumé

Le but de notre travail est de prouver le résultat de la décroissance exponentielle de l'énergie associée à une colonne montante marine flexible avec la dynamiques des navires. La contremarche est modélisée comme une poutre viscoélastique avec un noyau de relaxation standard h.
En appliquant un contrôle sur le bord supérieur de la contremarche, nous réduirons sa vibration de manière rapide. Notre méthode est principalement basée sur la technique des multiplicateurs.

Mots-Clés : Décroissance exponentielle, contrôle des vibrations, terme mémoire, fonction de relaxation, viscoélasticité, la technique du multiplicateur, contrôle frontière.

Abstract

The purpose of our work is to prove the exponential decay result for the energy associated to a flexible marine riser with vessel dynamics . The riser is modeled as a viscoelastic beam with a standard relaxation kernel h.
By applying a control at the top boundary of the riser we shall attenuate its vibration in a fast manner. Our method is mainly based on the multiplier technique.

Keywords : Exponential decay, vibration control, memory term, relaxation function, viscoelasticity, multiplier technique, boundary control.

ملخص

الغرض من عملنا هو اثبات نتيجة الاضمحلال الاسي للطاقة المرتبطة بالرافعة البحرية المرنة بديناميات السفينة. تم تصميم الناهض على شكل شعاع لزج مطاطي مع نواة استرخاء قياسية h .
من خلال تطبيق عنصر تحكم على الحد العلوي للناهض، سنخفف من اهتزازه بطريقة سريعة.
تعتمد طريقتنا بشكل اساسي على تقنية المضاعفات.

كلمات مفتاحية : تناقص اسي، التحكم في الاهتزاز، مصطلح الذاكرة، وظيفة الاسترخاء، لزوجة مطاطية، تقنية المضاعف، تحكم حدودي.

Table des matières

Dédicace ii

Remerciements iii

Résumé iv

Abstract v

Résumé en arabe vi

Table des matières viii

Table des figures viii

Introduction générale 1

1 Rappels 4

1.1 Rappels et prérequis 4

1.1.1 Espace $L^p(\Omega)$ 4

1.1.2 Espaces de Sobolev 5

1.1.3 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles 6

1.1.4 Quelques Inégalités 7

1.1.5 Formule de Leibniz 9

1.1.6 Stabilité de l'énergie 9

1.1.7 Quelques définitions 9

2 Position du problème **11**

2.1 Equation du mouvement 11

2.2 Les différents problèmes étudier 12

2.2.1 Facteur d'amortissement et son effet sur la contremarche flexible 13

2.2.2 Contrôle aux frontière de la contremarche par la dynamique du navire . . 14

3 Stabilisation exponentielle **17**

3.1 Préliminaires 17

3.2 Comportement asymptotique 23

Conclusion et perspectives **34**

Bibliographie **36**

Table des figures

1 Système de contremarche marin 1

2.1 Un système de contremarche marin flexible typique 11

2.2 Système d'installation de colonne montante marin de type poutre typique 15

Introduction générale

Le phénomène des vibrations apparaît pratiquement dans toutes les structures mécaniques. Plusieurs types de vibrations sont indésirables car ils ont une influence considérable sur le fonctionnement et la durée de vie de ces structures. A noter que plusieurs structures industrielles, notamment celles qui sont largement utilisées dans la chaîne pétrolière et gazière du pétrole, du gisement au consommateur, sont de type élancé (poutre ou arc) comme indiqué dans la figure suivante :

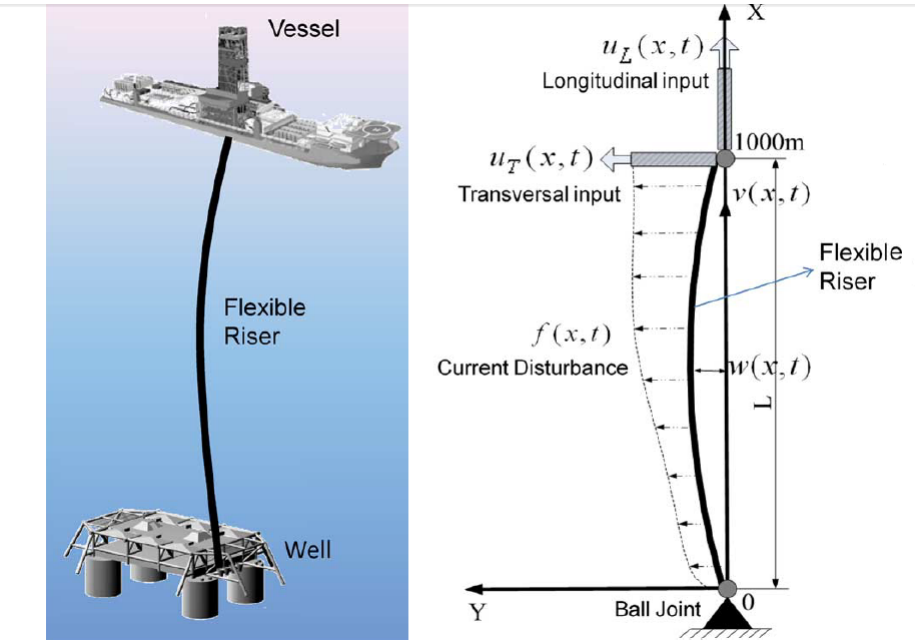


FIGURE 1 – Système de contremarche marin

Les techniques d'exploration et d'exploitation pétrolières en haute mer nécessitent l'utilisation de longs tubes flexibles appelés Risers. Dans la figure 1, la contremarche doit être verticale de bas en haut. Malheureusement, il est constamment soumis à des pressions hydrostatiques internes et externes différentes entraînant des vibrations indésirables. Les vibrations induites par les vortex sont les vibrations les plus sévères auxquelles une colonne montante est confrontée car elles entraînent une réduction prématurée de la durée de vie. D'autres perturbations proviennent des mouvements sismiques du sol, de l'écoulement irrégulier des fluides, des turbulences de courant, de la transmission des vagues, etc.

D'un point de vue mathématique, une colonne montante peut être modélisée par une poutre Euler-Bernoulli (voir [5, 6, 7], par exemple), car le diamètre de la colonne montante est beaucoup plus petit que sa longueur. Ces « Risers » relient généralement un système flottant au fond marin. notre système est également modélisé comme une structure de poutre Euler-Bernoulli

$$\begin{cases} \rho w_{tt} + EI\left(w_{xxxx} - \displaystyle\int_0^t h(t-s)w_{xxxx}(s)\,ds\right) - Tw_{xx} = 0, \\ \forall\,(x,t)\ \in (0,L)\times[0,\infty), \\ w(0,t) = w_x(0,t) = w_{xx}(L,t) = 0, \\ EI\left(-w_{xxx}(L,t) + \displaystyle\int_0^t h(t-s)w_{xxx}(L,s)\,ds\right) + Tw_x(L,t) \\ = u(t) - d_s w_t(L,t) - M_s w_{tt}(L,t),\ \ \forall\, t\ \in [0,\infty), \end{cases}$$

Notation :

x désigne la position et t désigne le temps.

$f(x,t)$: est la charge transversale répartie sur la colonne montante.

$d(t)$: indique les perturbations environnementales possibles sur le navire.

$u(t)$: est la force extérieure agissant sur la base.

M_s : indique la masse du vaisseau de surface.

$w(L,t)$: est la position du navire.

$w_t(L,t)$: est la vitesse du navire.

$w(x,t)$: représente le déplacement de la colonne montante à la position x au temps t.

ρ : est la masse uniforme par unité de longueur de la colonne montante.

EI : est la rigidité en flexion de la contremarche.

L : indique la longueur de la contremarche.

d_s : est l'amortissement du navire.

T : est la tension de la colonne montante.

La stabilisation a pour but d'atténuer les vibrations par rétro-action (feed-back) ; elle consiste donc à garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers 0 de façon plus ou moins rapide par un mécanisme de dissipation.

Plus précisément, le problème de stabilisation auquel on s'intéresse revient à déterminer le comportement asymptotique de l'énergie que l'on note $E(t)$, à étudier sa limite afin de déterminer si cette limite est nulle ou pas.

Ce problème à été étudié en [22] et nous avons essayé de prouver la stabilité exponentielle. En utilisant la méthode de Lyapunov.

La mémoire est organisée en trois chapitres :

- Dans **le premier chapitre**, nous rappelons les outils nécessaires qui sont utiles dans le dernier chapitre.
- **Le deuxième chapitre** est consacré à étudier la position du problème.
- **Le dernier chapitre** comprend deux sections.

  Dans la première section, nous introduisons tout d'abord quelques notations, lemmes, définitions ..., nécessaires à la preuve de notre résultat. Ensuite, nous présentons les différentes fonctionnelles utilisées pour modifier l'énergie classique afin d'obtenir un résultat d'équivalence.

  Dans la dernière section, nous formulons les hypothèses sur la fonction de relaxation et nous présentons notre résultat de stabilisation avec la base de preuves sur la technique du multiplicateur.

Chapitre 1

Rappels

1.1 Rappels et prérequis

Notons par $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ le point générique d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Soit u une fonction définie de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, on désigne par $D^i u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$ la dérivée partielle de la fonction u par rapport a x_i. Définissons aussi le gradient de u, comme suit

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

On notera par :

$C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$(C(\Omega))^m$ l'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

Pour $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, on définit alors :

$C^k(\Omega)$ l'espace des fonctions u qui sont k fois dérivables et dont la dérivée d'ordre k est continue sur Ω.

$C_0^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à supports compacts qu'on appelle espace des fonctions test.

1.1.1 Espace $L^p(\Omega)$

On rappelle ici quelques définitions et propriétés élémentaires :

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et Ω un ensemble au sens de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$,

On définit

$$L^p(\Omega) = \left\{ (classe\ de\ fonctions)\ u : \Omega \to \mathbb{R} : u\ mesurable\ et\ \int_\Omega |u(x)|^p\ dx < \infty \right\}.$$

On note

$$\|u\|_p = \left[\int_\Omega |u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Si $p = 1$ on note $L^1(\Omega)$ l'espace des classes des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, on le munit de la norme

$$\|u\|_{L^1} = \int_\Omega |u(x)|\ dx$$

Et si $p = \infty$ on note $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur Ω

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} u : \Omega \to \mathbb{R} : u\ mesurable\ et\ il\ existe\ une\ constante\ C \\ telle\ que\ |u(x)| \leq C\ p.p\ sur\ \Omega \end{array} \right\}.$$

On note

$$\|u\|_\infty = inf \left\{ C > 0, |u(x)| \leq C\ p.p\ sur\ \Omega \right\} = \sup_\Omega ess\ |u|$$

Remarque 1.1 l'espace L^2 muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega uv\ dx,\ u, v \in L^2(\Omega)$$

est un espace de Hilbert et l'espace $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach.

1.1.2 Espaces de Sobolev

Dérivée faible

Définition 1.1 *On dit que u est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$, s'il existe une fonction $w \in L^2(\Omega)$, telle que pour toute $v \in C_0^\infty(\Omega)$ on ait*

$$\int_\Omega u(x) \frac{dv(x)}{dx} dx = -\int_\Omega v(x) w(x) dx.$$

Cela revient à dire que $\frac{du(x)}{dx} = w(x)$ au sens des distributions.

Espace $W^{1,p}(\Omega)$

Soit $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'espace vectoriel $W^{1,p}(\Omega)$ par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), telle\ que : \frac{du(x)}{dx} \in L^p(\Omega) \right\},$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \left\|\frac{du(x)}{dx}\right\|_{L^p(\Omega)}$$

est un espace de Banach. On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Espace $W^{m,p}(\Omega)$

Pour $m \geq 2$, $1 \leq p \leq \infty$, on définit $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega), \textit{telle que} : \frac{d^k u}{dx^k} \in L^p(\Omega), k \leq m \right\}$$

où $k \in \mathbb{N}$ et $\frac{d^k u}{dx^k}$ est la dérivée faible d'ordre k de u au sens de la Définition 1.1. C'est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{k \leq m} \left\|\frac{d^k u}{dx^k}\right\|_{L^p(\Omega)}.$$

On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Remarque 1.2 Les espaces $H^m(\Omega)$, sont des espaces de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{k \leq m} \left(\frac{d^k u}{dx^k}, \frac{d^k v}{dx^k}\right)_{L^2(\Omega)}, \ u, v \in H^m(\Omega).$$

On introduit ensuite :

L'espace $H_0^1(\Omega)$ désigne la fermeture de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans la norme $H^1(\Omega)$.

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}.$$

1.1.3 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Définition 1.2 *Soient $1 \leq p < \infty$ et X un espace de Banach, si p est fini on définit $L^p(0,T;X)$ par :*

$$L^p(0,T;X) = \left\{ u : [0,T] \to X \ \textit{mesurable}, \textit{telle que} \ \int_0^T \|u\|_X^p \, dt < \infty \right\}$$

où $[0,T]$ *est un intervalle de* $\mathbb{R}$*. On munit cet espace de la norme :*

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

Si p *est infini, alors on définit*

$$L^\infty(0,T;X) = \left\{ u : [0,T] \to X \; mesurable, telle \; que \sup_{t\in[0,T]} ess\|u\|_X < \infty \right\}.$$

On le munit de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in[0,T]} ess\|u(t)\|_X.$$

Proposition 1.1 *$L^p(0,T;X)$ muni de la norme $\|u\|_{L^p(0,T;X)}$ est un espace de Banach pour $p \in [1,\infty]$.*

1.1.4 Quelques Inégalités

Notation : Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On note par q l'exposant conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Lemme 1.2 *(Inégalité de Hôlder)*

Soit $1 \leq p \leq \infty$*; on désigne par* q *l'exposant conjugué de* p *définie par*

$$q = \frac{p}{p-1} \;\; c'est - à - dire \;\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Si $u \in L^p(\Omega)$ *et* $v \in L^q(\Omega)$*, alors* $uv \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Preuve.

On a d'après l'inégalité de Young

$$\forall a, b \geq 0, \forall p, q > 0, ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

prenons $a = \frac{|u(x)|}{\|u(x)\|_{L^p(\Omega)}}, b = \frac{|v(x)|}{\|v(x)\|_{L^q(\Omega)}}$, on obtient

$$\int_\Omega \frac{|u(x)|}{\|u(x)\|_{L^p(\Omega)}} \frac{|v(x)|}{\|v(x)\|_{L^q(\Omega)}} dx \leq \int_\Omega \frac{1}{p} \frac{|u(x)|^p}{\|u(x)\|^p_{L^p(\Omega)}} dx + \int_\Omega \frac{1}{q} \frac{|v(x)|^q}{\|v(x)\|^q_{L^q(\Omega)}} dx \; ;$$

alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(x)v(x)|dx &\leq \frac{1}{p}\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}}\|v(x)\|_{L^q(\Omega)}\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega \frac{|v(x)|^q}{\|v\|_{L^q(\Omega)}^{q-1}}\|u(x)\|_{L^p(\Omega)}\,dx \\ &\leq \frac{\|v\|_{L^q(\Omega)}}{p\|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}}\|u(x)\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{\|u\|_{L^p(\Omega)}}{q\|v\|_{L^q(\Omega)}^{q-1}}\|v(x)\|_{L^q(\Omega)}^q \\ &\leq \|v\|_{L^q(\Omega)}\|u\|_{L^p(\Omega)}\underbrace{\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}_{=1},\end{aligned}$$

donc

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

■

Corollaire 1.2 Si $p = q = 2$ on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Lemme 1.3 *(Inégalité de Young)*

Soient $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ *et* $a, b \geq 0$. *Alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Preuve.

Cette inégalité provient facilement du fait que la fonction logarithme est concave. En effet, cette dernière propriété, et les propriétés fonctionnelles du logarithme, entrainent que

$$ln(ab) = \frac{1}{p}ln(a^p) + \frac{1}{q}ln(b^q) \leq \left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right).$$

Il suffit ensuite d'appliquer la fonction exponentielle à l'inégalité précédente pour obtenir le résultat voulu. ■

Lemme 1.4 *(Inégalité de Poincaré). Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *de frontière assez régulière. Alors*

$$\|u\|_2 \leq B\|\nabla u\|_2, \quad pour \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

où $B^{-1} = \inf_{\|u\|\neq 0} \frac{\|\nabla u\|_2}{\|u\|_2}$.

1.1.5 Formule de Leibniz

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$, telle que f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ soient continues sur $\mathbb{R}^2$, et soient a et b deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Alors l'intégrale paramétrique (généralisée) F défini sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y)dy,$$

est dérivable et

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x, b(x))\frac{d}{dx}b(x) - f(x, a(x))\frac{d}{dx}a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}dy.$$

1.1.6 Stabilité de l'énergie

Il existe plusieurs degrés de stabilité que l'on peut étudier. Le premier degré consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, i.e

$$E(t) \to 0 \ \ lorsque \ \ t \to \infty,$$

c'est ce que l'on appelle la stabilisation forte.
Pour le second, on s'intéresse à la décroissance de l'énergie la plus rapide, c'est-à-dire lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle, i.e

$$E(t) \leq Ce^{-\beta t}, \forall t > 0,$$

où C et β sont deux constantes positives avec C qui dépend des données initiales. Quant au troisième, il étudie des situations intermédiaires, dans lesquelles la décroissance des solutions n'est pas exponentielle, mais du type polynomial par exemple :

$$E(t) \leq \frac{C}{t^\alpha}, \forall t > 0,$$

où C et α sont deux constantes positives avec C qui dépend des données initiales.

1.1.7 Quelques définitions

Intégration par partie

Définition 1.3 *soit I un intervalle ouvert ; $a, b \in I$ et f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors :*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x)\ \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx$$

la contremarche (la colonne montante)

Définition 1.4 *c'est un pipeline spécial qui transporte du pétrole ou du gaz d'un puits au fond de la mer jusqu'à la plate-forme flottante à la surface de la mer.*

Matériau viscoélastique

Définition 1.5 *on appelle matériau viscoélastique, un matériau dont une partie de l'énergie stockée dans le système est récupérée lors de la suppression de la charge, et l'autre partie se dissipe sous forme de chaleur.*

Chapitre 2

Position du problème

2.1 Equation du mouvement

La figure 2.1 illustre une représentation schématique d'une colonne montante se déplaçant axialement dans le but d'effectuer la commande du moteur dans le bol c'est-à-dire la limite supérieure du la contremarche. Nous supposons que la position d'origine du navire est située directe-

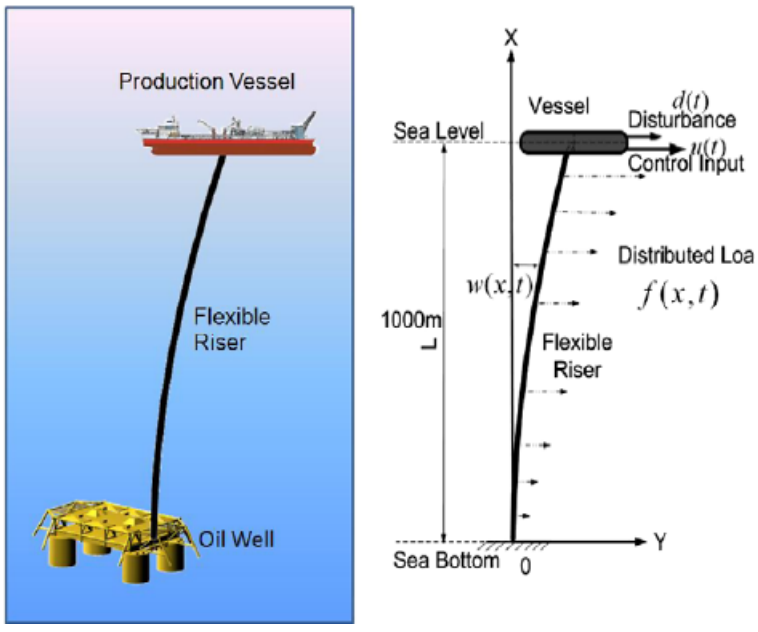


FIGURE 2.1 – Un système de contremarche marin flexible typique

ment au-dessus de la tête de puits sous la mer sans déplacement horizontal et la colonne montante est remplier d'eau de mer. On note que la colonne montante fait face aux vibrations les plus dange-

reuses provoquées par le vortex. Ce dernier réduit la durée de vie pour la contremarche(la colonne montante).

Notre problème suivant est un modèle de déplacement de la contremarche avec une tension non négligeable bas et contrôlée par le haut :

$$\begin{cases} \rho w_{tt} + EIw_{xxxx} - Tw_{xx} - f(x,t) + cw_t(x,t) = 0, \\ \forall\ (x,t)\ \in (0,L) \times [0,\infty), \\ w(0,t) = w_x(0,t) = w_{xx}(L,t) = 0, \\ -EIw_{xxx}(L,t) + Tw_x(L,t) = u(t) + d(t) - d_s w_t(L,t) - M_s w_{tt}(L,t),\ \ \forall\ t\ \in [0,\infty), \end{cases}$$

Notation :

$f(x,t)$	est la charge transversale répartie sur la colonne montante.
$d(t)$	indique les perturbations environnementales possibles sur le navire.
$u(t)$	est la force extérieure agissant sur la base.
M_s	indique la masse du vaisseau de surface.
$w(L,t)$	est la position du navire.
$w_t(L,t)$	est la vitesse du navire.
$w(x,t)$	représente le déplacement de la colonne montante à la position x au temps t.
ρ	est la masse uniforme par unité de longueur de la colonne montante.
EI	est la rigidité en flexion de la contremarche.
L	indique la longueur de la contremarche.
d_s	est l'amortissement du navire.
T	est la tension de la colonne montante.

Ce modèle a été dérivé et analysé dans [1]. Les auteurs ont établi un contrôle robuste capable de conduire le système à l'état d'équilibre exponentiel (pour f=0).

2.2 Les différents problèmes étudier

Beaucoup d'efforts sont consacrés à réduire les vibrations de la contremarche. Dans [8] il y a un autre problème les auteurs ont démontré un résultat de stabilité exponentielle pour un problème similaire sans tension ni perturbation sur la plate-forme.

Une autre résultat de décroissance exponentielle est montrée dans [2] pour un problème similaire à celui dans [3]. Les auteurs de [4] ont prouvé (une autre résultat) une décroissance exponentielle des solutions au problème

$$\begin{cases} \rho(x)w_{tt} + (EI(x)w_{xx})_{xx}(x,t) = 0, 0 < x < l, t > 0, \\ w(0,t) = w_x(0,t) = 0, \qquad\qquad t > 0, \\ mw_{tt}(l,t) - (EI(x)w_{xx})_x(l,t) = 0 \quad t > 0, \\ EI(l)w_{xx}(l,t) = \Gamma(t), \qquad\qquad t > 0, \end{cases}$$

Avec $\Gamma(t) = -\alpha w_{xt}(l,t)$.

Où x désigne la position et t désigne le temps.

$w(x,t)$ représente le déplacement transversal du faisceau.

l est la longueur du faisceau.

les coefficients $\rho(x)$ et $EI(x)$ sont respectivement la distribution de masse et la rigidité en flexion de la poutre le long de la variable spatial x satisfaisant aux conditions

$0 < \rho_0 < \rho(x) \ \in \mathcal{C}^4[0,l], \ \ 0 < EI_0 < EI(x) \ \in \mathcal{C}^4[0,l]$.

De plus, $m > 0$ est la masse du corps rigide attaché à la poutre $\Gamma(t)$ est le contrôle le moment de flexion appliqué à l'extrémité libre de la poutre,

où $\alpha > 0$ est un gain de rétroaction qui peut être réglé en pratique, c'est important parce que la stabilité exponentielle est une propriété très souhaitable pour de tels systèmes élastiques et le schéma de rétroaction utilisant uniquement le moment de flexion est simple et attrayant.

2.2.1 Facteur d'amortissement et son effet sur la contremarche flexible

En savoir plus sur la stabilité des problème de contremarches flexibles dans [5, 6, 7].

Considérez la présence d'un ascenseur visqueux flexible c'est un pipeline collant en caoutchouc, ceci est dû au fait que les substances visqueuses flexibles présentent des propriété visqueuses et flexibles, les deux leur permettant de stocker de l'énergie. Ils sont bien connus comme amortisseurs efficaces. Le caoutchouc est un bon exemple.

Les auteurs ont observé une nette amélioration du facteur d'amortissement, ceci est attendu car les matériaux visqueux flexibles ont une grande capacité d'étirement et de déformation qui entraine une extension considérable de la durée de vie de la contremarche.

Comme le rapport longueur / diamètre est important et que l'inertie en rotation est ignorée, notre

système est également modélisé comme une structure de poutre Euler-Bernoulli :

$$\begin{cases} \rho w_{tt} + EI\left(w_{xxxx} - \displaystyle\int_0^t h(t-s)w_{xxxx}(s)\,ds\right) - Tw_{xx} = 0, \\ \forall\,(x,t)\ \in (0,L)\times[0,\infty), \\ w(0,t) = w_x(0,t) = w_{xx}(L,t) = 0, \\ EI\left(-w_{xxx}(L,t) + \displaystyle\int_0^t h(t-s)w_{xxx}(L,s)\,ds\right) + Tw_x(L,t) \\ = u(t) - d_s w_t(L,t) - M_s w_{tt}(L,t),\ \ \forall\, t\ \in [0,\infty), \end{cases}$$

Avec $h(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)},\ 0 < \alpha < 1.$

Où h fonction de relaxation.

Observez que le terme d'amortissement interne (l'amortissement du navire ou de la plate-forme) $cw_t(x,t)$ considéré dans [1] est supprimé et remplacé par un terme viscoélastique. Ce terme apparaît dans la relation constitutive entre la contrainte et la déformation selon le principe de Boltzmann et est appelé terme mémoire .

2.2.2 Contrôle aux frontière de la contremarche par la dynamique du navire

Dans notre cas un capteur et un actionneur sont placés au-dessus de la contremarche. C'est sur la plate-forme elle-même, ce qui est relativement facile.

Dans [1], les auteurs insèrent le contrôle des limites U du moteur dans la navire i.e la limite supérieure de la contremarche, pour produire une force transversale pour la suppression des vibrations.

Dans [7], sur la base de la méthode directe de Lyapunov, un contrôle adaptatif des limites est proposé aux limites supérieure et inférieure de la contremarche étudié dans la figure 2.2 pour mettre la charge utile en dessous du niveau de la mer au point de consigne requis et supprimer les vibrations de la colonne montante. Avec la commande proposée, la délimitation uniforme de l'erreur d'état constant entre la charge utile limite et la position requise en testant correctement les paramètres de conception. Des simulations numériques sont présentées pour démontré l'efficacité du contrôle proposé.

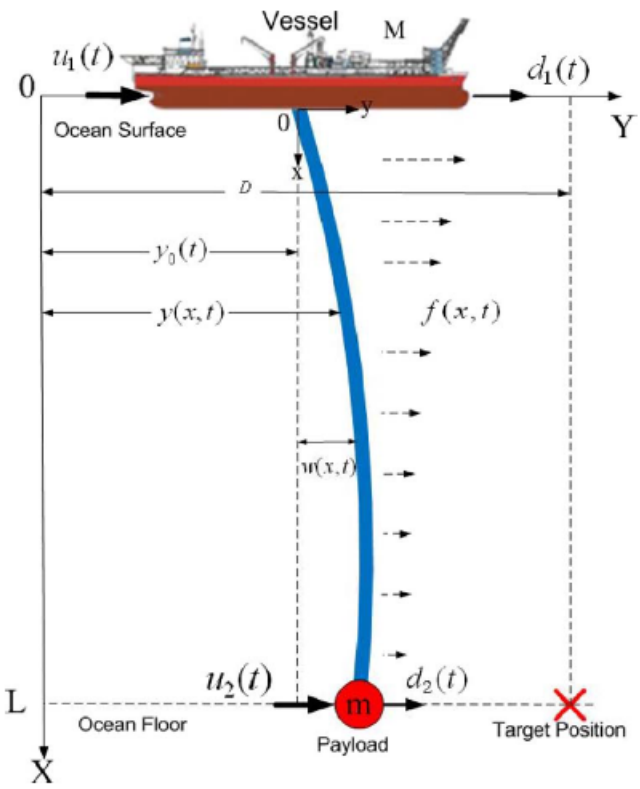


FIGURE 2.2 – Système d'installation de colonne montante marin de type poutre typique

Dans [6], la commande de limite pour une colonne montante marin flexible non linéaire couplée avec deux actionneurs dans les directions transversale et longitudinale a été conçu pour supprimer les vibration de la contremarche. Les auteurs ont traité avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} w_{xx}(0,t) = w_{xx}(L,t) = w(0,t) = v(0,t) = 0, \\ -EIw_{xxx}(L,t) - [T_0 + \frac{EA}{2}(w_x^2 + v_x)]w_x(L,t) = U_T(t), \\ \frac{1}{2}EAw_x^2(L,t) + EAv_x(L,t) = U_L(t), \quad \forall t \in [0,\infty), \end{cases}$$

où u_T et u_L sont respectivement, les contrôles frontières transversal et longitudinal appliqués à l'extrémité supérieure du contremarche, donner par

$$\begin{cases} u_T(t) = -k_1 w_t(L,t) - k_2 w(L,t), \\ u_L(t) = -k_3 v_t(L,t) - k_4 v(L,t), \end{cases}$$

où $k_i, i = 1,2,3,4$, sont des constantes positives.

Dans [9], les auteurs ont obtenu un résultat de stabilité pour le problème suivant :

$$\begin{cases} w_{tt} + w_{xxxx} = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ w(0,t) = w_x(0,t) = w_{xx}(1,t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

et la condition à la frontière dynamique est :

$$u_{xxx}(L,t) = \gamma_0 u_t(L,t) + \int_0^\infty \lambda(s) u_t(L,t-s)ds, \quad t > 0. \tag{2.1}$$

Dans le cas où le noyau est une fonction exponentielle, une dérivation de (2.1) donne l'expression familière :

$$u_{xxx}(L,t) - m u_{tt}(L,t) = \alpha u_t(L,t) - \beta u_{xxxt}(L,t).$$

Pour d'autres travaux utilisant des conditions aux limites de type mémoire, nous renvoyons les lecteurs aux articles [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18].

Ici [19], nous considérons la classe de noyaux h satisfaisant à la condition

$$0 < \frac{d}{dt}h(t) + \gamma h(t) \leq \xi(t).$$

pour presque tout $t > 0$ où γ est une constante positive et $\xi(t)$ est une fonction non-négative, et dans [20, 21] a traité le cas où le noyau h vérifie l'inégalité suivante :

$$\frac{d}{dt}h(t) \leq -\xi(t)h(t), \quad t \geq 0.$$

Chapitre 3

Stabilisation exponentielle

3.1 Préliminaires

On définit l'énergie classique associée au système

$$\begin{cases} \rho w_{tt} + EI\left(w_{xxxx} - \displaystyle\int_0^t h(t-s)w_{xxxx}(s)\,ds\right) - Tw_{xx} = 0, \\ \forall\,(x,t)\ \in (0,L)\times[0,\infty), \\ w(0,t) = w_x(0,t) = w_{xx}(L,t) = 0, \\ EI\left(-w_{xxx}(L,t) + \displaystyle\int_0^t h(t-s)w_{xxx}(L,s)\,ds\right) + Tw_x(L,t) \\ = u(t) - d_s w_t(L,t) - M_s w_{tt}(L,t),\ \ \forall\, t\ \in [0,\infty), \end{cases} \tag{3.1}$$

par :

$$E(t) = E_k(t) + E_p(t),\ \ t \geq 0$$

où $E_k(t)$ est l'énergie cinétique définie par

$$E_k(t) = \frac{M_s}{2}[w_t(L,t)]^2 + \frac{\rho}{2}\int_0^L |w_t|^2 dx,\ \ t \geq 0$$

et $E_p(t)$ représente l'énergie potentielle donnée par

$$E_p(t) = \frac{EI}{2}\int_0^L |w_{xx}|^2 dx + \frac{T}{2}\int_0^L |w_x|^2 dx,\ \ t \geq 0$$

L'énergie classique totale associée au système (3.1) est définie par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\left\{ M_s[w_t(L,t)]^2 + \rho\int_0^L |w_t|^2 dx + EI\int_0^L |w_{xx}|^2 dx + T\int_0^L |w_x|^2 dx \right\},\ \ t \geq 0$$

Par différentiation, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}E(t) = M_s(w_{tt}w_t) + \rho\int_0^L |w_{tt}w_t|\,dx + EI\int_0^L |w_{xxt}w_{xx}|\,dx + T\int_0^L |w_{xt}w_x|\,dx \tag{3.2}$$

D'après l'équation (3.1) on a

$$\rho w_{tt} = -EI(w_{xxxx} - \int_0^t h(t-s)w_{xxxx}\,(s)ds) + Tw_{xx} \tag{3.3}$$

remplacement (3.3) dans (3.2) on obtient :

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}E(t) = M_s(w_{tt}w_t) &+ EI\int_0^L (w_{xxt}w_{xx} - w_{xxxx}w_t)\,dx + T\int_0^L |w_{xt}w_x + w_{xx}|\,dx\\ &+EI\int_0^L\int_0^t h(t-s)w_{xxxx}w_t\,dsdx\end{aligned}$$

Posons

$$(h\Box w_{xx})(t) = \int_0^L\int_0^t h(t-s)|w_{xx}(s) - w_{xx}(t)|^2 dsdx,\quad t\geq 0,$$

en dérivant $(h\Box w_{xx})$ par rapport à t, et en utilisant la formule de Leibniz

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}(h\Box w_{xx})(t) &= \int_0^L\int_0^t h'(t-s)|w_{xx}(s) - w_{xx}(t)|^2 dsdx\\ &\quad + \int_0^L\int_0^t 2h(t-s)w_{xxt}(s)|w_{xx}(s) - w_{xx}(t)|dsdx,\\ &= (h'\Box w_{xx})(t) + 2\int_0^L\int_0^t h(t-s)w_{xxt}(s)w_{xx}(s)dsdx\\ &\quad -2\int_0^L w_{xxt}\int_0^t h(t-s)w_{xx}(t)dsdx + h(t)\int_0^L |w_{xx}|^2dx\\ &\quad -h(t)\int_0^L |w_{xx}|^2dx,\\ &= (h'\Box w_{xx})(t) - 2\int_0^L w_{xxt}\int_0^t h(t-s)w_{xx}(t)dsdx\\ &\quad +\tfrac{d}{dt}\left\{\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_0^L |w_{xx}|^2dx\right\} - h(t)\int_0^L |w_{xx}|^2dx,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}(h\Box w_{xx})(t) &= -2\int_0^L w_{xxt}\int_0^t h(t-s)w_{xx}(t)dsdx + (h'\Box w_{xx})(t)\\ &\quad +\tfrac{d}{dt}\left\{\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_0^L |w_{xx}|^2dx\right\} - h(t)\int_0^L |w_{xx}|^2dx.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Nous définissons l'énergie "modifiée" par :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) = \tfrac{1}{2}\Bigg\{&EI\left(1 - \int_0^t h(s)ds\right)\int_0^L |w_{xx}|^2dx + T\int_0^L |w_x|^2dx + EI(h\Box w_{xx})(t)\\ &+M_s[w_t(L,t)]^2 + \rho\int_0^L |w_t|^2dx\Bigg\},\quad t\geq 0.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Il est clair que

$$\mathcal{E}(t) = E(t) - \frac{EI}{2}\int_0^L \int_0^t h(s)|w_{xx}|^2 ds dx + \frac{EI}{2}(h\Box w_{xx})(t), \quad t \geq 0.$$

Il s'ensuit que

$$E(t) \leq \mathcal{E}(t), \ t \geq 0.$$

D'après (3.4) et (3.5), on obtient

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = -\tfrac{EI}{2}h(t)\int_0^L |w_{xx}|^2 dx + \frac{EI}{2}(h'\Box w_{xx})(t) - d_s[w_t(L,t)]^2 + u(t)w_t(L,t), \quad t \geq 0. \\ \left(Avec u(t) = \tfrac{-K}{w_t(L,t)} \left(w_{xxx}^2(L,t) + w^2(L,t) + \left(\int_0^t h(t-s) w_{xxx}(L,s)\, ds \right)^2 \right) \right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Supposons que le noyau $h(t)$ est une fonction de $\mathbb{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ qui satisfait à :

$$\frac{d}{dt}h(t) \leq 0, \ pour\ tout \ \ t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.7}$$

et donc, d'après (3.6) et (3.7) on remarque

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) \leq 0 \ \ , t \geq 0.$$

Remarque 3.1 La dérivée de l'énergie totale n'a pas un signe explicite clair. On construit une fonction de Lyapunov L qui doit vérifier une inégalité de la forme :

$$\frac{d}{dt}L(t) \leq -CL(t), \quad t \geq 0$$

où C est une constante positive. Cette inégalité donne le taux de décroissance exponentielle de L et pour obtenir la décroissance de $\mathcal{E}(t)$ nous aurons besoin d'une relation d'équivalence entre $\mathcal{E}(t)$ et $L(t)$. Nous considérons la fonction

$$L(t) = \mathcal{E}(t) + \lambda_1\phi_1(t) + \lambda_2\phi_2(t) + \lambda_3\phi_3(t) + \lambda_4\phi_4(t) + \lambda_5\phi_5(t), \quad t \geq 0$$

Nous présentons les fonctions

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= \rho\int_0^L w_t w\, dx, \quad t \geq 0, \\ \phi_2(t) &= \rho\int_0^L w_t \int_0^t h(t-s)(w(s) - w(t))\, ds dx, \quad t \geq 0, \\ \phi_3(t) &= \int_0^L \int_0^t H_\sigma(t-s)|w_{xx}(s)|^2\, ds dx, \quad t \geq 0, \\ \phi_4(t) &= \int_0^t H_\sigma(t-s)|w(L,s) - w(L,t)|^2\, ds, \quad t \geq 0, \\ \phi_5(t) &= \int_0^L \int_0^t \psi_\sigma(t-s)|w_{xx}(s)|^2\, ds dx, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

avec

$$\psi_\sigma(t) = e^{-\sigma t}\int_t^{+\infty} \xi(s)e^{\sigma s}\, ds, \quad t \geq 0,$$
$$H_\sigma(t) = e^{-\sigma t}\int_t^{+\infty} h(s)e^{\sigma s}\, ds, \quad t \geq 0,$$

et σ est une constante positive.

Le premier résultat donne une équivalence entre $\mathcal{E}(t) + \phi_3(t) + \phi_4(t) + \phi_5(t)$ et $L(t)$. Dans la suite, nous utilisons la fonction de Lyapunov pour obtenir le résultat d'une stabilité asymptotique et exponentielle de l'énergie.

Proposition 3.1 *Il existe* $\rho_i > 0, i = 1, 2$ *tels que*

$$\rho_1[\mathcal{E}(t) + \phi_3(t) + \phi_4(t) + \phi_5(t)] \leq L(t) \leq \rho_2[\mathcal{E}(t)) + \phi_3(t) + \phi_4(t) + \phi_5(t)] \tag{3.8}$$

Pour tous $t \geq 0$.

Preuve.

Nous commençons par montrer le coté droit de l'inégalité (3.8). Pour la fonction $\phi_1(t)$, il est clair que :

$$\phi_1(t) \leq \frac{\rho}{2}\int_0^L |w_t|^2\, dx + \frac{\rho L^4}{2}\int_0^L |w_{xx}|^2\, dx, \quad t \geq 0$$

En appliquant l'inégalité de Young, on obtient

$$\phi_1(t) \leq \frac{\rho}{2}\int_0^L w_t^2\, dx + \frac{\rho}{2}\int_0^L w^2\, dx,$$

puis le Lemme 1.2 et 1.4 :

on a

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \int_0^x w_x(s,t)ds \\ &\leq \left(\int_0^x |w_x|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x 1 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_0^L |w_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L 1 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|w_x\|_{L^2}\sqrt{L}. \end{aligned}$$

Alors

$$\int_0^L |w(x,t)|^2 dx \leq \int_0^L \|w_x\|_2^2 (\sqrt{L})^2 dx$$
$$\|w\|_2^2 \leq L\|w_x\|_2^2 \int_0^L 1 dx = L^2\|w_x\|_2^2,$$

et $\|.\|_2$ est la norme dans $L^2(0,L)$.

on a aussi :

$$\begin{aligned} w_x(x,t) &= \int_0^x w_{xx}(s,t)ds \\ &\leq \|w_{xx}\|_{L^2} \sqrt{L}. \end{aligned}$$

Alors

$$\int_0^L |w_x(x,t)|^2 dx \leq L \int_0^L \|w_{xx}\|_2^2 \, dx = L^2 \|w_{xx}\|_2^2 .$$

$$\|w_x\|_2^2 \leq L^2 \|w_{xx}\|_2^2$$

$$L^2 \|w_x\|_2^2 \leq L^4 \|w_{xx}\|_2^2$$

donc

$$\|w\|_2^2 \leq L^4 \|w_{xx}\|_2^2$$

et donc, le résultat suivant :

$$\phi_1(t) \leq \frac{\rho}{2} \|w_t\|_2^2 \, dx + \frac{\rho L^4}{2} \|w_{xx}\|_2^2 , \quad t \geq 0. \tag{3.9}$$

Maintenant, pour la fonction $\phi_2(t)$, on a

$$\phi_2(t) \leq \frac{\rho}{2} \|w_t\|_2^2 + \frac{\rho}{2} \int_0^L \left(\int_0^t h(t-s)|w(s)-w(t)|dsdx \right)^2$$

d'après inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} \left(\int_0^t h(t-s)|w(s)-w(t)|ds \right)^2 &= \left(\int_0^t \sqrt{h(t-s)}\sqrt{h(t-s)}|w(s)-w(t)|ds \right)^2 \\ &\leq \underbrace{\left(\int_0^\infty h(s)ds \right)}_{=\bar{\mathrm{h}}} \int_0^t h(t-s)|w(s)-w(t)|^2 ds, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

et on a :

$w(x,t) = \int_0^x w_x(y,t)dy$

$w(x,s) = \int_0^x w_x(y,s)dy$

on a aussi :

d'après inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} |w(s)-w(t)| &= \int_0^x w_x(s) - w_x(t)dy \\ &\leq \left(\int_0^x |w_x(s)-w_x(t)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x 1dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_0^L |w_x(s)-w_x(t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L 1dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|w_x(s)-w_x(t)\|_{L^2} \sqrt{L} \end{aligned}$$

et on a

$$\int_0^L |w(s)-w(t)|^2 dx \leq \|w_x(s)-w_x(t)\|_{L^2}^2 \, L \int_0^L 1 dx$$
$$= L^2 \|w_x(s)-w_x(t)\|_2^2$$

donc

$$\|w(s)-w(t)\|_2^2 \leq L^4 \|w_{xx}(s)-w_{xx}(t)\|_2^2$$

alors

$$\begin{aligned}\phi_2(t) &\leq \tfrac{\rho}{2}\|w_t\|_2^2 + \tfrac{\rho}{2}\int_0^L \left(\int_0^\infty h(s)ds\right)\left(L^4\int_0^t h(t-s)|w_{xx}(s)-w_{xx}(t)|^2\right) \\ &\leq \tfrac{\rho}{2}\|w_t\|_2^2 + \tfrac{\rho L^4 \bar{h}}{2}(h\Box w_{xx})(t), \quad t\geq 0.\end{aligned} \tag{3.10}$$

En utilisant la définition (3.6) de $\mathcal{E}(t)$, (3.9) et (3.10), nous obtenons

$$\begin{aligned}L(t) \leq\ & \tfrac{\rho}{2}(1+\lambda_1+\lambda_2)\int_0^L |w_t|^2\, dx + \frac{1}{2}\left(EI+\lambda_2\rho L^4\bar{h}\right)(h\Box w_{xx})(t) \\ &+\tfrac{1}{2}\left(EI\left(1-\int_0^t h(s)\, ds\right)+\lambda_1\rho L^4\right)\int_0^L |w_{xx}|^2\, dx + \frac{T}{2}\int_0^L |w_x|^2\, dx \\ &+\tfrac{M_s}{2}[w_t(L,t)]^2 + \lambda_3\phi_3(t)+\lambda_4\phi_4(t)+\lambda_5\phi_5(t), \quad t\geq 0.\end{aligned}$$

D'autre part, en tenant compte de (3.6), (3.9) et (3.10) et le fait que
$1-\int_0^\infty h(s)ds = 1-\bar{h} > 0$, on trouve

$$\begin{aligned}2L(t) \geq\ & \rho(1-\lambda_1-\lambda_2)\int_0^L |w_t|^2\, dx + \left(EI-\lambda_2\rho L^4\bar{h}\right)(h\Box w_{xx})(t) \\ &+\left(EI(1-\bar{h})-\lambda_1\rho L^4\right)\int_0^L |w_{xx}|^2\, dx + T\int_0^L |w_x|^2\, dx + M(s)[w_t(L,t)]^2 \\ &+2\lambda_3\phi_3(t)+2\lambda_4\phi_4(t)+2\lambda_5\phi_5(t), \quad t\geq 0.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\rho_1[\mathcal{E}(t)+\phi_3(t)+\phi_4(t)+\phi_5(t)] \leq L(t) \leq \rho_2[\mathcal{E}(t)+\phi_3(t)+\phi_4(t)+\phi_5(t)]$$

pour certaines constantes positives ρ_1 et ρ_2, sachant que

$$\lambda_1 < min\left(1, \frac{EI(1-\bar{h})}{\rho L^4}\right)$$

et

$$\lambda_2 < min\left(\frac{EI}{\rho L^4\bar{h}}, 1-\lambda_1\right)$$

et cela achève la preuve. ■

Dans la suite, nous notons par $\bar{\xi}$, $\bar{\xi}_\sigma$, $\overline{h_\sigma}$ et $\overline{H_\sigma}$ les expressions suivantes :

$$\bar{\xi} = \int_0^{+\infty} \xi(s)\, ds$$

$$\bar{\xi}_\sigma = \int_0^{\infty} e^{\beta s}\xi(s)\, ds$$

$$\overline{h_\sigma} = \int_0^{\infty} e^{\sigma s}h(s)\, ds$$

et

$$\overline{H_\sigma} = \int_0^{\infty} H(s)\, ds.$$

3.2 Comportement asymptotique

Notre objectif dans cette partie est de montrer que l'énergie associée au système (3.1) décroît de manière exponentielle vers zéro quant $t \to +\infty$. Nous supposons que le noyau $h :]0, \infty[\to \mathbb{R}^+$ vérifie les hypothèses suivantes :

$(H1)$ h est une fonction de $C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ qui satisfait l'hypothèse suivante :

$$0 < \bar{h} = \int_0^{+\infty} h(s)ds < 1;$$

$(H2)$ $0 < \frac{d}{dt}h(t) + \gamma h(t) \leq \xi(t)$ pour presque tout $t > 0$ où γ est une constante positive et $\xi(t)$ est une fonction non-négative.

Pour stabiliser le système (3.1), Nous proposons la loi de contrôle des limites suivante, pour $t \geq 0$

$$u(t) = \frac{-K}{w_t(L,t)} \left(w_{xxx}^2(L,t) + w^2(L,t) + \left(\int_0^t h(t-s) w_{xxx}(L,s)\, ds \right)^2 \right), \tag{3.11}$$

où K est une constante positive. La vitesse du déplacement est supposée non nulle sinon il n'y a pas besoin de contrôle.

Théorème 3.1 *Sous les hypothèses $(H1)$, $(H2)$, le contrôle (3.11), et la condition*

$$\int_0^{\infty} e^{\beta s}\xi(s)\, ds < \infty.$$

pour certains $\beta > 0$, l'énergie de système : (3.1) décroit exponentiellement vers zéro, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes positives c et b telles que

$$E(t) \leq Ce^{-bt}, t \geq 0$$

à condition que $\bar{\xi}_\sigma = \int_0^\infty e^{\beta s}\xi(s)ds$ soit assez petite.

Nous donnons d'abord quelques lemmes qui seront un support à la preuve de ce théorème.

Lemme 3.2 *La dérivée de la fonction $\phi_1(t)$ vérifie, le long de la solution (3.1) :*

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\phi_1(t) \leq\ & 2EI\delta_1 w^2(L,t) + EI(\delta_1 + \bar{h} - 1)\int_0^L |w_{xx}|^2\, dx \\ & + \rho\int_0^L w_t^2\, dx + \frac{EI}{4\delta_1}\left(\int_0^t h(t-s)w_{xxx}(L,s)\, ds\right)^2 + \frac{EI}{4\delta_1}w_{xxx}^2(L,t) \\ & + \tfrac{EI\bar{h}}{4\delta_1}(h\Box w_{xx})(t) + Tw(L,t)w_x(L,t) - T\int_0^L |w_x|^2\, dx, \quad t \geq 0.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Preuve.

La différentiation de la fonction $\phi_1(t)$ par rapport au temps t donne

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\phi_1(t) &= \rho\int_0^L \left(w_{tt}w + w_t^2\right) dx \\ &= \int_0^L w\left(-EIw_{xxxx} + EI\int_0^t h(t-s)w_{xxxx}(s)\, ds + Tw_{xx}\right) dx + \rho\int_0^L w_t^2\, dx,\ t \geq 0.\end{aligned}$$

Nous fixons

$$\frac{d}{dt}\phi_1(t) = B_1 + B_2 + \rho\int_0^L w_t^2\, dx, \tag{3.13}$$

pour tout $t \geq 0$ où

$$B_1 = \int_0^L (-EIww_{xxxx} + Tww_{xx})\, dx \tag{3.14}$$

et

$$B_2 = EI\int_0^L w(t)\int_0^t h(t-s)w_{xxxx}(s)\, dsdx. \tag{3.15}$$

En utilisant l'intégrale par parties deux fois en (3.14),

on a

$$\begin{aligned}B_1 &= -EIw(L,t)w_{xxx}(L,t) + EI\int_0^L w_xw_{xxx}(L,t) + Tw(L,t)w_x(L,t) - T\int_0^L w_x^2dx \\ &= -EIw(L,t)w_{xxx}(L,t) + EIw_x(L,t)w_{xx}(L,t) - EI\int_0^L w_{xx}^2dx + Tw(L,t)w_x(L,t) \\ &\quad -T\int_0^L w_x^2dx,\end{aligned}$$

De les condition aux limites en (3.1) on a : $w_{xx}(L,t)=0$,

et donc, le résultat suivante

$$B_1=-EIw(L,t)w_{xxx}(L,t)-EI\int_0^L w_{xx}^2dx+Tw(L,t)w_x(L,t)-T\int_0^L w_x^2dx,\ t\geq 0. \quad (3.16)$$

On a aussi :

En utilisant l'intégrale par parties deux fois en (3.15),

on a

$$\begin{aligned}B_2&=EIw(L,t)\int_0^t h(t-s)w_{xxx}(L,s)ds-EI\int_0^L w_x\int_0^t h(t-s)w_{xxx}(s)dsdx\\&=EIw(L,t)\int_0^t h(t-s)w_{xxx}(L,s)ds-EIw_x(L,t)\int_0^t h(t-s)w_{xx}(L,s)ds\\&\quad+EI\int_0^L w_{xx}\int_0^t h(t-s)w_{xx}(s)dsdx,\end{aligned}$$

De les condition aux limites en (3.1) on a : $w_{xx}(L,s)=0$,

et donc, nous obtenons

$$B_2=EI\left[w(L,t)\int_0^t h(t-s)w_{xxx}(L,s)\ ds+\int_0^L w_{xx}\int_0^t h(t-s)w_{xx}(s)\ dsdx\right], \quad (3.17)$$

pour tout $t\geq 0$.

De toute évidence, en ajoutant et en soustrayant $w_{xx}(t)$ à l'intérieur de l'intégrale intérieure, on obtient

$$\int_0^L w_{xx}\int_0^t h(t-s)w_{xx}(s)\ dsdx\leq(\delta_1+\bar{h})\int_0^L|w_{xx}|^2\ dx+\frac{1}{4\delta_1}\bar{h}(h\Box w_{xx})(t),\ \delta_1>0,\ \ t\geq 0. \quad (3.18)$$

Les relations (3.17) et (3.18) impliquent que

$$\begin{aligned}B_2\leq EI&\left(\delta_1w^2(L,t)+\tfrac{1}{4\delta_1}\left(\int_0^t h(t-s)w_{xxx}(L,s)\ ds\right)^2\right)\\&+EI(\delta_1+\bar{h})\int_0^L|w_{xx}|^2\ dx+\frac{EI\bar{h}}{4\delta_1}(h\Box w_{xx})(t),\ \ t\geq 0.\end{aligned} \quad (3.19)$$

Revenons maintenant à (3.13), par (3.16) et (3.19) nous voyons que

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\phi_1(t)\leq\ &2EI\delta_1w^2(L,t)+EI(\delta_1+\bar{h}-1)\int_0^L|w_{xx}|^2\ dx\\&+\rho\int_0^L w_t^2\ dx+\frac{EI}{4\delta_1}\left(\int_0^t h(t-s)w_{xxx}(L,s)\ ds\right)^2+\frac{EI}{4\delta_1}w_{xxx}^2(L,t)\\&+\tfrac{EI\bar{h}}{4\delta_1}(h\Box w_{xx})(t)+Tw(L,t)w_x(L,t)-T\int_0^L|w_x|^2\ dx,\ \ t\geq 0.\end{aligned} \quad (3.20)$$

■

Lemme 3.3 *La dérivée de la fonction $\phi_2(t)$, le long de la solution (3.1) vérifie*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\phi_2(t) \leq & \left(\frac{EI\bar{h}}{2\delta_1}+\frac{TL^4\bar{h}}{4\delta_1}+\frac{\rho\gamma\bar{h}L^4}{4\delta_1}\right)(h\Box w_{xx})(t)+(EI\delta_1+T\delta_1)\int_0^L w_{xx}^2dx\\ &+(\rho\gamma\delta_1+\rho\delta_2-\rho h_0)\int_0^L w_t^2dx+\frac{EI}{4\delta_1}w_{xxx}^2(L,t)\\ &+2EI\delta_1\bar{h}\int_0^t h(t-s)|w(L,s)-w(L,t)|^2ds+\frac{EI}{4\delta_1}\left(\int_0^t h(t-s)w_{xxx}(L,s)ds\right)^2\\ &+EI\delta_1\bar{h}\int_0^L\int_0^t h(t-s)|w_{xx}(s)|^2dsdx+\frac{\rho L^4}{4\delta_2}\int_0^t \xi ds(\xi\Box w_{xx})(t),\ t\geq t_0.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Preuve.

Une différentiation de $\phi_2(t)$ donne

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\phi_2(t)=&\rho\int_0^L w_{tt}\int_0^t h(t-s)(w(s)-w(t))\,dsdx-\rho\int_0^L w_t^2\,dx\int_0^t h(s)\,ds\\ &+\rho\int_0^L w_t\int_0^t\frac{d}{dt}h(t-s)(w(s)-w(t))\,dsdx,\quad t\geq 0.\end{aligned} \tag{3.22}$$

En utilisant l'équation (3.3) dans (3.22), nous trouvons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\phi_2(t)=&-EI\int_0^L w_{xxxx}\int_0^t h(t-s)(w(s)-w(t))\,dsdx\\ &+EI\int_0^L\left[\int_0^t h(t-s)w_{xxxx}(s)\,ds\int_0^t h(t-s)(w(s)-w(t))\,ds\right]dx\\ &+T\int_0^L w_{xx}\int_0^t h(t-s)(w(s)-w(t))\,dsdx-\rho\int_0^L w_t^2\,dx\int_0^t h(s)\,ds\\ &+\rho\int_0^L w_t(t)\int_0^t h'(t-s)(w(s)-w(t))\,dsdx,\quad t\geq 0.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Nous fixons

$$\frac{d}{dt}\phi_2(t)=C_1+C_2+C_3+C_4+C_5, \tag{3.24}$$

où

$$c_1=-EI\int_0^L w_{xxxx}\int_0^t h(t-s)(w(s)-w(t))\,dsdx, \tag{3.25}$$

$$c_2=EI\int_0^L\left[\int_0^t h(t-s)w_{xxxx}(s)\,ds\int_0^t h(t-s)(w(s)-w(t))\,ds\right]dx, \tag{3.26}$$

$$c_3=\rho\int_0^L w_t(t)\int_0^t\frac{d}{dt}h(t-s)(w(s)-w(t))\,dsdx, \tag{3.27}$$

$$c_4=-\rho\int_0^L w_t^2\int_0^t h(s)\,ds, \tag{3.28}$$

et

$$C_5 = T\int_0^L w_{xx}\int_0^t h(t-s)(w(s)-w(t))\,dsdx. \tag{3.29}$$

Estimons ces termes séparément. D'abord une intégration par parties en (3.25) donne

$$C_1 = -EIw_{xxx}(L,t)\int_0^t h(t-s)(w(L,s)-w(L,t))\,ds + EI\int_0^L w_{xxx}\int_0^t h(t-s)(w_x(s)-w_x(t))dsdx \tag{3.30}$$

et une seconde intégration par parties en (3.30) conduit à

$$\begin{aligned} C_1 = &-EIw_{xxx}(L,t)\int_0^t h(t-s)(w(L,s)-w(L,t))\,ds \\ &+EI\int_0^L w_{xx}\int_0^t h(t-s)(w_{xx}(s)-w_{xx}(t))\,dsdx. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} C_1 \le &\tfrac{EI}{4\delta_1}w_{xxx}^2(L,t) + EI\delta_1\left(\int_0^t h(t-s)(w(L,s)-w(L,t))\,ds\right)^2 \\ &+EI\left(\delta_1\int_0^L w_{xx}^2\,dx\right) + \tfrac{EI\bar{h}}{4\delta_1}(h\Box w_{xx})(t),;\delta_1>0,\ t\ge 0. \end{aligned} \tag{3.31}$$

De même, une intégration par parties dans (3.26) donne

$$\begin{aligned} c_2 = &EI\left(\int_0^t h(t-s)w_{xxx}(L,s)ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)(w(L,s)-w(L,t))ds\right) \\ &-EI\int_0^L\left(\int_0^t h(t-s)w_{xxx}(s)ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)(w_x(s)-w_x(t))ds\right)dx \end{aligned} \tag{3.32}$$

et un autre sur (3.32) donne

$$\begin{aligned} c_2 = &EI\left(\int_0^t h(t-s)w_{xxx}(L,s)\,ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)(w(L,s)-w(L,t))\,ds\right) \\ &-EI\int_0^L\left(\int_0^t h(t-s)w_{xx}(s)\,ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)(w_{xx}(s)-w_{xx}(t))\,ds\right)dx. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} c_2 \le &\tfrac{EI}{4\delta_1}\left(\int_0^t h(t-s)w_{xxx}(L,s)\,ds\right)^2 \\ &+EI\bar{h}\delta_1\int_0^t h(t-s)|w(L,s)-w(L,t)|^2\,ds \\ &+EI\delta_1\bar{h}\int_0^L\int_0^t h(t-s)|w_{xx}(s)|^2dsdx + \frac{EI\bar{h}}{4\delta_1}(h\Box w_{xx})(t),\quad t\ge 0. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Le terme C_3 est estimé comme suit

$$\begin{aligned} c_3 &= \rho \int_0^L w_t \int_0^t \frac{d}{dt} h(t-s)(w(s)-w(t))dsdx \\ &= -\rho \int_0^L w_t \int_0^t \gamma h(t-s)(w(s)-w(t))dsdx \\ &+\rho \int_0^L w_t \int_0^t (\frac{d}{dt} h(t-s) + \gamma h(t-s))(w(s)-w(t))dsdx \\ &\leq \rho\gamma\delta_1 \int_0^L w_t^2 dx + \frac{\rho\gamma\bar{h}L^4}{4\delta_1}(h\Box w_{xx})(t) + \rho\delta_2 \int_0^L w_t^2 dx + \frac{\rho L^4}{4\delta_2}\left(\int_0^t \xi(s)ds\right)(\xi\Box w_{xx})(t),\ t \geq 0 \end{aligned} \tag{3.34}$$

où $\delta_2 > 0$.

pour $t \geq t_0 > 0$, le fait

$$\int_0^t h(s)ds \geq \int_0^{t_0} h(s)ds = h_0 > 0$$

implique que

$$-\rho \int_0^t h(s)ds \int_0^L w_t^2 dx \leq -\rho h_0 \int_0^L w_t^2 dx,\ \ t \geq t_0 > 0.$$

De plus, nous avons

$$C_5 \leq T\delta_1 \int_0^L w_{xx}^2 dx + \frac{TL^4\bar{h}}{4\delta_1}(h\Box w_{xx})(t),\ t \geq t_0. \tag{3.35}$$

En substituant (3.31), (3.33)–(3.35), et (3.28) à (3.24), nous arrivons à

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\phi_2(t) &\leq \left(\tfrac{EI\bar{h}}{2\delta_1} + \tfrac{TL^4\bar{h}}{4\delta_1} + \tfrac{\rho\gamma\bar{h}L^4}{4\delta_1}\right)(h\Box w_{xx})(t) + (EI\delta_1 + T\delta_1)\int_0^L w_{xx}^2 dx \\ &+(\rho\gamma\delta_1 + \rho\delta_2 - \rho h_0)\int_0^L w_t^2 dx + \frac{EI}{4\delta_1} w_{xxx}^2(L,t) \\ &+2EI\delta_1\bar{h}\int_0^t h(t-s)|w(L,s)-w(L,t)|^2 ds + \frac{EI}{4\delta_1}\left(\int_0^t h(t-s)w_{xxx}(L,s)ds\right)^2 \\ &+EI\delta_1\bar{h}\int_0^L\int_0^t h(t-s)|w_{xx}(s)|^2 dsdx + \frac{\rho L^4}{4\delta_2}\int_0^t \xi(s)ds(\xi\Box w_{xx})(t),\ t \geq t_0. \end{aligned} \tag{3.36}$$

■

Lemme 3.4 *Pour $\phi_3(t)$ on a*

$$\tfrac{d}{dt}\phi_3(t) \leq -\sigma\phi_3(t) - \int_0^t h(t-s)\left\|w_{xx}(s)\right\|_2^2 ds + \overline{h_\sigma}\left\|w_{xx}\right\|_2^2,\ \ t \geq 0 \tag{3.37}$$

Lemme 3.5

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\phi_4(t) &\leq -\sigma\phi_4(t) - \int_0^t h(t-s)|w(L,s)-w(L,t)|^2 ds \\ &\quad -2w_t(L,t)\int_0^t H_\sigma(t-s)(w(L,s)-w(L,t))ds \int_0^t H_\sigma(t-s)(w(L,s)-w(L,t))ds \\ &\leq -\sigma\phi_4(t) - L^4(h\Box w_{xx})(t) - 2w_t(L,t)\overline{H_\sigma}\phi_4(t), \quad t\geq 0\end{aligned} \tag{3.38}$$

Lemme 3.6

$$\tfrac{d}{dt}\phi_5(t) \leq -\sigma\phi_5(t) - \int_0^t \xi(t-s)\left\|w_{xx}(s)\right\|_2^2 ds + \overline{\xi_\sigma}\left\|w_{xx}\right\|_2^2, \quad t\geq 0 \tag{3.39}$$

Preuve. du Théorème 3.1

Une utilisation des Lemme 3.2, Lemme 3.3 et Lemme 3.4 et l'injection de (3.11) dans (3.6) dans la dérivée de la fonction $L(t)$, nous donne pour tout $t\geq t_0>0$

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}L(t) \leq & -(\rho\lambda_2 h_0 - \rho\lambda_1 - \rho\gamma\lambda_2\delta_1 - \rho\lambda_2\delta_2)\int_0^L w_t^2 dx - \lambda_1 T\int_0^L w_x^2(x,t)dx \\ & -\sigma\lambda_3\phi_3(t) - \sigma\lambda_5\phi_5(t) + \left(\tfrac{2\lambda_4}{4\delta_3} - d_s\right)w_t(L,t)^2 + \lambda_4(2\delta_3\overline{H}_\sigma - \sigma)\phi_4(t) \\ & +(2\lambda_2 EI\delta_1\bar{h} - \lambda_4)\int_0^t h(t-s)|w(L,s)-w(L,t)|^2 ds \\ & -(\lambda_3 - \lambda_2 EI\delta_1\bar{h})\int_0^L\int_0^t h(t-s)|w_{xx}(s)|^2 ds dx \\ & -(\lambda_1 EI - \lambda_3\overline{h_\sigma} - \lambda_2 EI\delta_1 - \lambda_1 EI(\delta_1+\bar{h}))\int_0^L w_{xx}^2 dx \\ & +(\lambda_2 T\delta_1 + \lambda_1 L\delta_4 + \lambda_5\bar{\xi_\sigma})\int_0^L w_{xx}^2 dx + \frac{\bar{h}\left[\lambda_1 EI + \lambda_2\left(TL^4 + 2\lambda_2 EI + \rho\gamma L^4\right)\right]}{4\delta_1} \\ & \times(h\Box w_{xx})(t) + \tfrac{\rho\lambda_2 L^4}{4\lambda_2}\int_0^t \xi(s)ds(\xi\Box w_{xx})(t) + \frac{EI}{2}(h'\Box w_{xx})(t) \\ & -\lambda_5\int_0^L\int_0^t \xi(t-s)|w_{xx}(s)|^2 ds dx + \left(\frac{EI(\lambda_1+\lambda_2)}{4\delta_1} - K\right)w_{xxx}^2(L,t) \\ & +\left(\tfrac{EI(\lambda_1+\lambda_2)}{4\delta_1} - K\right)\left(\int_0^t h(t-s)w_{xxx}(L,s)ds\right)^2 \\ & +\left(2\lambda_1 EI\delta_1 + \tfrac{\lambda_1 T^2}{4\delta_4} - K\right)w^2(L,t),\end{aligned} \tag{3.40}$$

où on a utilisé les estimations suivantes :

$$Tw(L,t)w_x(L,t) \leq \delta_4 L\int_0^L w_{xx}^2 dx + \frac{T^2}{4\delta_4}w^2(L,t).$$

Laisser

$$A = \frac{\bar{h}}{4\delta_1}\left\{\lambda_1 EI + \lambda_2\left(TL^4 + 2EI + \rho\gamma L^4\right)\right\},$$

puis sous l'hypothèse $(H2)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} A(h\Box w_{xx})(t) + \tfrac{\rho\lambda_2 L^4}{4\delta_2}\left(\int_0^t \xi(s)ds\right)(\xi\Box w_{xx})(t) + \tfrac{EI}{2}(\Box w_{xx})(t) \\ \leq -\left(\tfrac{\gamma EI}{2} - A\right)(h\Box w_{xx})(t) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\rho\lambda_2 L^4}{2\delta_2}\bar{\xi} + EI\right)(\xi\Box w_{xx})(t) \\ \leq -\left(\tfrac{\gamma EI}{2} - A\right)(h\Box w_{xx})(t) + 2\bar{\xi}\left(\tfrac{\rho\lambda_2 L^4}{4\delta_2}\bar{\xi} + \tfrac{EI}{2}\right)\int_0^L w_{xx}^2 dx \\ +2\left(\tfrac{\rho\lambda_2 L^4}{4\delta_2}\bar{\xi} + \tfrac{EI}{2}\right)\int_0^L\int_0^t \xi(t-s)|w_{xx}(s)|^2 dxds, \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Ensuite, en utilisant les Lemmes 3.5, 3.6 et en substituant (3.40) dans (3.41), on obtient pour tout $t \geq t_0 > 0$

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}L(t) \leq & -[\rho\lambda_2(h_0 - \gamma\delta_1 - \delta_2) - \lambda_1\rho]\int_0^L w_t^2 dx - \lambda_1 T\int_0^L w_x^2(x,t)dx \\ & -\sigma\lambda_3\phi_3(t) - \sigma\lambda_5\phi_5(t) + \left(\tfrac{2\lambda_4}{4\delta_3} - d_s\right)w_t(L,t)^2 + \lambda_4(2\delta_3\overline{H_\sigma} - \sigma)\phi_4(t) \\ & +(2\lambda_2 EI\delta_1\bar{h} - \lambda_4)\int_0^t h(t-s)[w(L,s) - w(L,t)]^2 ds - (\lambda_3 - \lambda_2 EI\delta_1\bar{h}) \\ & \times\int_0^L\int_0^t h(t-s)w_{xx}^2(x,s)dsdx - [\lambda_1 EI + \lambda_3\overline{h_\sigma} - \lambda_2 EI\delta_1 - \lambda_1 EI(\delta_1 + \bar{h})] \\ & \times\int_0^L w_{xx}^2 dx - \left[-\lambda_2 T\delta_1 - \lambda_1 L\delta_4 - \lambda_5\overline{\xi_\sigma} - \bar{\xi}\left(\frac{\rho\lambda_2 L^4}{2\delta_2}\bar{\xi} + EI\right)\right]\int_0^L w_{xx}^2 dx \\ & +\left(\tfrac{\rho\lambda_2 L^4}{2\delta_2}\bar{\xi} + EI - \lambda_5\right)\int_0^t\int_0^L \xi(t-s)|w_{xx}(s)|^2 dxds - \left(\frac{\gamma EI}{2} - A\right)(h\Box w_{xx})(t) \\ & +\left(\tfrac{EI(\lambda_1+\lambda_2)}{4\delta_1} - K\right)\left[w_{xxx}^2(L,t) + \left(\int_0^t h(t-s)w_{xxx}(L,s)ds\right)^2\right] \\ & +\left(2\lambda_1 EI\delta_1 + \tfrac{\lambda_1 T^2}{4\delta_4} - K\right)w^2(L,t). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Maintenant, nous commençons la sélection des différents paramètres de telle sorte que tous les coefficients dans le membre de droite de (3.42) soient négatifs. c'est

$$\begin{cases} \rho\lambda_2 h_0 - \rho\lambda_1 - \rho\gamma\lambda_2\delta_1 - \rho\lambda_2\delta_2 > 0, \\ \frac{\lambda_4}{2\delta_3} - d_s < 0, \\ 2\delta_3\overline{H_\sigma} - \sigma < 0, \\ 2\lambda_2 EI\delta_1\bar{h} - \lambda_4 < 0, \\ \lambda_3 - \lambda_2 EI\delta_1\bar{h} > 0, \\ \lambda_1 EI - \lambda_3\overline{h_\sigma} - \lambda_2 EI\delta_1 - \lambda_1 EI(\delta_1 + \bar{h}) - \lambda_2 T\delta_1 \\ -\lambda_1 L\delta_4 - \lambda_5\bar{\xi_\sigma} - \bar{\xi}\left(\frac{\rho\lambda_2 L^4}{2\delta_2}\bar{\xi} + EI\right) > 0, \\ \frac{\rho\lambda_2 L^4}{2\delta_2}\bar{\xi} + EI - \lambda_5 < 0, \\ \frac{\bar{h}}{4\delta_1}\{\lambda_1 EI + \lambda_2(TL^4 + 2EI + \rho\gamma L^4)\} < \gamma\frac{EI}{2}, \\ \frac{EI(\lambda_1+\lambda_2)}{4\delta_1} - K < 0, \\ 2\lambda_1 EI\delta_1 + \frac{\lambda_1 T^2}{4\delta_4} - K < 0. \end{cases} \tag{3.43}$$

Pour les trois dernières conditions en (3.43), λ_1 et λ_2 seront sélectionnées suffisamment petits. Ignorons un instant les paramètres δ_1 et δ_4, il nous faut

$$\begin{cases} \lambda_1 < \lambda_2(h_0 - \delta_2), \\ \frac{\lambda_4}{2\delta_3} < d_s, \\ 2\delta_3\overline{H_\sigma} < \sigma, \\ -\lambda_5\overline{\xi_\sigma} - \bar{\xi}\left(\frac{\rho\lambda_2 L^4}{2\delta_2}\bar{\xi} + EI\right) < \lambda_1 EI(1 - \bar{h}), \\ \frac{\rho\lambda_2 L^4}{2\delta_2}\bar{\xi} + EI < \lambda_5. \end{cases}$$

Notez que nous n'avons qu'une condition de petitesse sur λ_3 dans la sixième condition en (3.43). Donc on l'oublie un moment. Laissons $\delta_2 = \frac{h_0}{2}, \delta_2 = \frac{\sigma}{4\overline{H_\sigma}}$ *et* $\lambda_4 = \delta_3 d_s$. Le système se réduit à

$$\begin{cases} \lambda_1 < \lambda_2\frac{h_0}{2}, \\ \lambda_5\bar{\xi_\sigma} + \bar{\xi}\left(\frac{\rho\lambda_2 L^4}{2\delta_2}\bar{\xi} + EI\right) < \lambda_1 EI(1 - \bar{h}), \\ \frac{\rho\lambda_2 L^4}{h_0}\bar{\xi} + EI < \lambda_5. \end{cases}$$

Prenez, par exemple, $\lambda_1 = \frac{h_0}{4}\lambda_2$, alors nous devons avoir

$$\left(\frac{\rho\lambda_2 L^4}{h_0}\bar{\xi} + EI\right)\bar{\xi_\sigma} + \bar{\xi}\left(\frac{\rho\lambda_2 L^4}{2\delta_2}\bar{\xi} + EI\right) < \lambda_5\bar{\xi_\sigma} + \bar{\xi}\left(\frac{\rho\lambda_2 L^4}{2\delta_2}\bar{\xi} + EI\right) < \frac{h_0}{2}\lambda_2 EI(1 - \bar{h}).$$

Nous pourrons trouver λ_5 si

$$\left(\frac{\rho\lambda_2 L^4}{h_0}\bar{\xi}+EI\right)\bar{\xi_\sigma}+\bar{\xi}\left(\frac{\rho\lambda_2 L^4}{2\delta_2}\bar{\xi}+EI\right)<\frac{h_0}{2}\lambda_2 EI(1-\bar{h}),$$

c'est

$$(\bar{\xi_\sigma}+\bar{\xi})EI<\left(\frac{h_0}{2}\lambda_2 EI(1-\bar{h})-\frac{\rho L^4}{h_0}\bar{\xi}\bar{\xi_\sigma}-\frac{\rho L^4}{h_0}\bar{\xi}^2\right)\lambda_2.$$

Cette condition vaut pour les petits $\bar{\xi_\sigma}$. En gros, comme $\bar{\xi}\leq\bar{\xi_\sigma}$ il suffit de supposer que

$$\frac{\rho L^4}{h_0}\bar{\xi_\sigma}^2<\frac{h_0}{8}EI(1-\bar{h}),$$

c'est

$$\bar{\xi_\sigma}<\frac{\sqrt{2}h_0}{4L^2}\sqrt{\frac{EI(1-\bar{h})}{\rho}}$$

et

$$\bar{\xi_\sigma}<\frac{h_0}{8}\lambda_2(1-\bar{h}),$$

c'est à dire

$$\bar{\xi_\sigma}<min\left\{\frac{\sqrt{2}h_0}{4L^2}\sqrt{\frac{EI(1-\bar{h})}{\rho}},\frac{h_0}{8}\lambda_2(1-\bar{h})\right\}. \tag{3.44}$$

Après avoir imposé la condition ci-dessus sur $\bar{\xi_\sigma}$ nous pouvons déterminer λ_5 (en termes de λ_2 *et* $\bar{\xi_\sigma}$).

Alors, nous sélectionnons δ_1 et δ_4. À son tour, λ_2 seront fixés par K et γ selon (3.43).

Par conséquent, nous aboutissons à l'estimation suivante :

$$\frac{d}{dt}L(t)\leq -C(\mathcal{E}(t)+\phi_3(t)+\phi_4(t)+\phi_5(t)),$$

où C est une constante positive. D'après le membre de droite de la relation (3.8) dans la Proposition 3.1 on obtient :

$$\frac{d}{dt}L(t)\leq\frac{-C}{\rho_2}L(t)=-bL(t),\quad t\geq t_0>0.$$

Par conséquent,

$$L(t)\leq L(0)e^{-bt},\quad t\geq t_0>0,$$

où $L(0)$ et b sont des constantes positives. L'autre inégalité dans la Proposition 3.1, donne

$$\mathcal{E}(t)\leq Me^{-bt},\quad t\geq t_0>0.$$

où M est une constante positive. On peut prouver facilement une estimation similaire dans l'intervalle $[0, t_0]$.

Enfin, De notre précédent,

on a :

$$E(t) \leq \mathcal{E}(t), \quad t \geq 0,$$

C'est-à-dire

$$E(t) \leq \mathcal{E}(t) \leq Me^{-bt}, \quad t \geq 0,$$

on obtient finalement :

$$E(t) \leq Me^{-bt}, \quad t \geq 0.$$

Ceci achève la Preuve. ■

Conclusion et perspectives

Dans notre travail, nous avons traité quelques aspects importants du point de vue mathématique :

- L'étude du comportement asymptotique des solutions pour des temps infinis (décroissance exponentielle).

- Nous présentons notre résultat de stabilisation (stabilisation exponentielle) avec la preuve basée sur la technique des multiplicateurs.

D'autres aspects méritent également d'être explorés :

- Explosion des solutions.

- Donner une approximation numérique...

Les systèmes qui ont peut les traiter par même manière.

Bibliographie

[1] He W, Ge SS, How BVE, Choo YS, Hong KS. Robust adaptive boundary control of a flexible marine riser with vessel dynamics. Automatica. 2011 ;47 :722–732.

[2] Canbolat H,Dawson D, Rahn C,Vedagarbha P. Boundary control of a cantilevered flexible beam with point-mass dynamics at the free end. Center for Advanced Manufacturing, Clemson, USA, Clemson University.

[3] Conrad F, Morgül Ö. On the stabilization of a flexible beam with a tip mass. SIAM J. Control Optim. 1998 ;36 :1962–1986.

[4] Chentouf B, Wang JM. Optimal energy decay for a nonhomogeneous flexible beam with a tip mass. J. Dyn. Control Syst. 2007 ;13 :37–53.

[5] Nguyen TL, Do KD, Pan J. Boundary control of coupled nonlinear three dimentional marine risers. J. Marine Sci. Appl. 2013 ;12 :72–88.

[6] Ge SS, He W, How BVE, Choo YS. Boundary control of a coupled nonlinear flexible marine riser. Trans. Control Syst. Technol. 2010 ;18 :1080–1091.

[7] He W, Zhang S, Ge SS. Boundary control of a flexible riser with the application to marine intallation. Trans. Ind. Electron. 2013 ;60 :5802–5810.

[8] Borges F, Roitman N, Magluta C, Castello D, Franciss R. Vibration reduction through the use of viscoelastic materials. Int. J. Model. Simul. Pet. Ind. 2012 ;6 : 1–7.

[9] Lazzari B, Nibbi R. On the exponential decay of the Euler- Bernoulli beam with boundary energy dissipation. J. Math. Anal. Appl. 2012 ;389 :1078–1085.

[10] Aassila M, Cavalcanti MM, Cavalcanti VN. Existence and uniform decay of the wave equation with nonlinear boundary damping and boundary memory source term. Calc. Var. 2002 ;15 :155–180.

[11] Aassila M, Cavalcanti MM, Soriano JA. Asymptotic stability and energy decay rates for solutions of the wave equation with memory in a star-shaped domain. SIAM J. Control Optim. 2000 ;38 :1581–1602.

[12] Bae JJ, Yoon SB. On uniform decay of wave equation of carrier model subject to memory condition at the boundary. J. Korean Math. Soc. 2007 ;44 :1013–1024.

[13] Cavalcanti MM, Domingos Cavalcanti VN, Martinez P. General decay rate estimates for viscoelastic dissipative systems. Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 2008 ;68 :177–193.

[14] Kirane M, Tatar N-E. Non-existence results for a semilinear hyperbolic problem with boundary condition of memory type. Zeit. Anal. Anwend. 2000 ;19 :453–468.

[15] Messaoudi S, Mustafa MI. On the control of solutions of viscoelastic equations with boundary feedback. Nonlinear Anal. : Real World Appl. 2009 ;10 :3132–3140.

[16] Nicaise S, Pignotti C. Stabilization of the wave equation with variable coefficients and boundary condition of memory type. Asymp. Anal. 2006 ;50 :31–67.

[17] Propst G, Prüss J. On wave equations with boundary dissipatoin of memory type. J. Integral Equ. Appl. 1994 ;8 :99–123.

[18] Santos ML, Junior F. A boundary condition with memory for Kirchhoff plates equations. Appl. Math. Comput. 2004 ;148 :475–496.

[19] Tatar N. On a perturbed kernel in viscoelasticity. Appl. Math. Lett. J. Math. Anal. Appl. 2011 ;24 :766–770.

[20] Messaoudi S. General decay of solutions of a viscoelastic equation. J. Math. Anal. Appl. 2008 ;341 :1457–1467.

[21] Cavalcanti MM, Domingos Cavalcanti VN, Ferreira J. Existence and uniform decay for a nonlinear viscoelastic equation with strong damping. Math. Meth. Appl. Sci. 24 :1043–1053.

[22] L. Seghour, A. Khemmoudj and N. E. Tatar. Control of a riser through the dynamic of the vessel., Applicable Analysis : An International Journal, doi :10.1080/00036811.2015.1080249.