Résumé en arabe

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a simple graph. A partition $\mathcal{P}$ is a partition of the set of vertices V of G. A partition $\mathcal{P}$ is said domatic if each class of $\mathcal{P}$ is a dominating set of G. The maximal cardinality of $\mathcal{P}$, denoted $d(G)$, is called the domatic number. A domatic partition $\mathcal{P}$ of G is b-domatic if no larger domatic partition $\mathcal{P}'$ can be obtained by gethering subsets of some classes of $\mathcal{P}$ to form a new dominating class. The minimum cardinality of a b-domatic partition of G, denoted $bd(G)$, is called the b-domatic number.

A domatic partition $\mathcal{P}$ of G is a paired if each class of $\mathcal{P}$ is paired dominating set of G. The paired b-domatic number $bd_{pr}(G)$ is the minimum cardinality of a paired b-domatic partition of G. A domatic partition $\mathcal{P}$ of G is a connected if each class of $\mathcal{P}$ is connected dominating set of G. The connected b-domatic number $bd_{pr}(G)$ is the minimum cardinality of a connected b-domatic partition of G.

In this paper, we study some properties of b-domatic, paired b-domatic partitions and connected b-domatic in graphs, we determine the numbers $bd_{pr}(G)$ and $bd_c(G)$ of classes of graphs and we provide a bounds on these numbers.

Résumé

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Une partition $\mathcal{P}$ est une partition de l'ensemble des sommets V de G. Une partition $\mathcal{P}$ est dite domatique si chaque classe de $\mathcal{P}$ est un ensemble dominant de G. Le cardinal maximum de $\mathcal{P}$, noté $d(G)$, est appelé le nombre domatique. Une partition domatique $\mathcal{P}$ de G est b-domatique si aucune partition domatique $\mathcal{P}'$ de cardinalité plus grande que $\mathcal{P}$ peut être obtenue à partir de $\mathcal{P}$ en rassemblant des sous-ensembles de certaines classes de $\mathcal{P}$ pour former une nouvelle classe. La cardinalité minimale d'une partition b-domatique de G, noté $bd(G)$, est appelée le nombre b-domatique.

Une partition domatique $\mathcal{P}$ de G est dite couplée si chaque classe de $\mathcal{P}$ est un ensemble dominant couplé de G. Le nombre b-domatique couplé, noté $bd_{pr}(G)$, est la cardinalité minimale d'une partition b-domatique couplée $\mathcal{P}$ de G. Une partition domatique $\mathcal{P}$ de G est dite connexe si chaque classe de $\mathcal{P}$ est un ensemble dominant connexe de G. Le nombre b-domatique connexe, noté $bd_c(G)$, est la cardinalité minimale d'une partition b-domatique connexe $\mathcal{P}$ de G.

Dans ce mémoire, on étudie certaines propriétés des partitions b-domatique, b-domatique couplée et b-domatique connexe dans les graphes. Puis, on détermine les nombres $bd_{pr}(G)$ et $bd_c(G)$ pour certaines classes de graphes. Ensuite, on établie des bornes sur ces deux paramètres.

Remerciments

Louange à Allah le Seigneur des mondes.

Je rends Allah le tout puissant de m'avoir donné le courage et la volonté ainsi que la patience pour bien mener ce travail.

Je tiens à remercier chaleureusement mon promoteur Monsieur Noureddine IKHLEF ESCHOUF, Maître de conférences à l'université Dr. Yahia Farès de Médéa, pour avoir accepté d'encadrer mon mémoire. Ainsi de m'avoir orienté, aidé et conseillé.

Je remercie beaucoup Monsieur Mohamed BENATALLAH,Maître Assistant à l'université ZIANE ACHOUR de Djelfa, pour son soutien, ses encouragements et ses conseils durant toute la période de la réalisation de ce mémoire.

Je remercie également Monsieur Ahmed BOUCHOU, Maître de Conférences à l'université Dr. YAHIA FARÈS de Médéa, pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire. Mes vifs remerciments vont également au Soufiane KHELIFI, Maître de Conférences à l'université YAHIA FARÈS de Médéa, pour avoir accepté l'invitation.

Je tiens également à exprimer ma gratitude à l'ensemble des enseignants du département M.I de l'université Dr. Yahia Farès.de Médéa.

Enfin, il est important pour moi de remercier mes parents, d'avoir fait de leur mieux pour que je puisse accomplir ce mémoire dans les meilleures conditions possibles et qui n'ont jamais cessé de m'encourager. Je remercie mon mari pour son soutien et un grand merci pour le personne qu'est chère pour moi, Kamel. Je remercie mes frères, sans oublier mes chèrs amis qui étaient toujours présents.

Table des matières

Introduction **3**

1 Concepts généraux dans les graphes **5**

1.1 Notions de base et notations 5

1.1.1 Graphe, sous-graphe et graphe partiel 5

1.1.2 Voisinage et degré 6

1.1.3 Chaîne, cycle et connexité 7

1.2 Propriétés des graphes 9

1.2.1 Partition de graphes 9

1.2.2 Minimalité et maximalité d'un ensemble 9

1.2.3 Quelques classes de graphes classiques 9

1.2.4 Invariants de graphe 12

1.3 Produit cartésien 13

1.4 La domination 14

1.4.1 Différentes définitions de la domination 14

1.4.2 Quelques paramètres de domination 15

2 Quelques partitions domatiques existantes dans les graphes **18**

2.1 Partition domatique et a-domatique 18

2.1.1 Partition domatique 18

2.1.2 Partition a-domatique 20

2.2 Différents paramètres de la partition domatique 21

2.2.1 Nombre domatique total 21

2.2.2 Nombre domatique indépendant 23
2.2.3 Nombre domatique couplé 24
2.2.4 Nombre domatique connexe 25
2.3 Nombre *b*-domatique 26
2.3.1 Définitions et notations 26
2.3.2 Résultats fondamentaux 27

3 Nouveaux résultats sur la partition b-domatique couplée et la partition b-domatique connexe **29**
3.1 Nombre b-domatique couplé 29
3.1.1 Définitions et notations 29
3.1.2 Bornes sur le nombre b-domatique couplé 30
3.1.3 Calcul de $bd_{pr}(G)$ pour quelques classes de graphes 38
3.2 Partition *b*-domatique connexe 40
3.2.1 Propriétés de $bd_c(G)$ 41
3.2.2 Quelques résultats de bd_c pour certains graphes 43

Conclusion **46**

Bibliographie **48**

Liste des Figures

1.1.1 Graphe simple G, sous-graphe G_A et graphe partiel G_B 7

1.1.2 Chaîne et cycle d'ordre 3 8

1.1.3 Graphe connexe et graphe non connexe 8

1.2.1 Graphe complet 10

1.2.2 Graphe biparti et graphe biparti complet 10

1.2.3 Un graphe et son complémentaire 11

1.2.4 Graphe 3-régulier 11

1.2.5 Etoile $K_{1,3}$ 11

1.2.6 Exemple de deux graphes isomorphes 12

1.4.1 Graphe de Petersen G_{10} 17

2.1.1 Exemple de deux partitions domatiques l'une maximale P_2 et l'autre non maximale P_1 . . 19

3.1.1 Exemple d'une étoile $K_{1,3}$ 30

3.1.2 Partition b-domatique couplée d'une chaîne P_4 32

3.1.3 Une partition b-domatique couplée de K_4 32

3.1.4 Une partition b-domatique couplée de $K_{3,3}$ 33

3.1.5 Une partition b-domatique couplée de C_8 34

3.1.6 Une partition b-domatique couplée de C_6 34

3.1.7 Une partition b-domatique couplée de $C_4 \boxdot K_2$ 35

3.1.8 Un graphe $K_5 \boxdot K_2$ et une partition b-domatique couplée 37

3.1.9 Une partition b-domatique couplée d'un graphe milieu d'un cycle pair 39

3.1.10 Partition b-domatique couplée d'un graphe de Peterson 39

3.1.11 Partition b-domatique couplée de la roue 40
3.2.1 Une partition b-domatique connexe de K_3. 42
3.2.2 Partition b-domatique connexe de la chaîne P_3. 43
3.2.3 Une partition b-domatique connexe du cycle C_4 43
3.2.4 Une partition b-domatique connexe d'un cycle C_6 44
3.2.5 Une partition b-domatique connexe du graphe de Petersen 44

Introduction

La théorie des graphes est un très vaste domaine, en évolution constante tant du point de vue des applications que de celui des recherches fondamentales et constitue aujourd'hui un corpus de connaissances très important.

La théorie des graphes est née au dix-huitième siècle en essayant de trouver des solutions à des problèmes considérés comme étant des curiosités mathématiques. Elle est devenue une branche des mathématique discrètes au début du vingtième siècle grâce aux travaux de König, de Menger, de Cayley, puis de Berge et de Erdös. Les graphes constituent à la fois une théorie et un outil qui permettent de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de graphes.

En 1822, le mot ″graphe″ est introduit par l'Anglais J.J.Sylvester. Un graphe est défini par deux ensembles: son ensemble de sommets et son ensemble d'arêtes (arcs, si le graphe est orienté), une arête étant une paire de sommets reliés. Il ne faut pas confondre un graphe et son dessin: un même graphe peut être dessiné de plusieurs façon. La théorie des graphes introduit de nombreuses classes de graphes, des familles de graphes qui vérifient certaines propriétés. Les domaines d'applications des graphes sont diverses, justifiant une recherche importante, on peut citer: les réseaux de communication, la gestion de la production et les problèmes d'ordonnancement des tâches, les flots dans les réseaux, la chimie, la physique et l'économie, etc...

Ces nombreuses applications font de la théorie des graphes un sujet de recherche toujours prolifique.

Leonhard Euler (en 1736) proposa le problème des sept ponts de Königsberg, il s'interroge sur l'existence d'une promenade lui permettant de passer par tous les ponts de la ville une

et une seule fois, et de revenir à son point de départ. Euler modélise ce problème par un graphe: un sommet est associé à chaque parcelle de terre délimitée par la rivière et une arête est associée à chaque pont les reliant. Ainsi, une promenade passant par chacun des ponts une et une seule fois est alors un cycle eulérien dans ce graphe.

En effet, beaucoup de problèmes sur les graphes nécessitent d'une partition d'un ensemble d'objets d'après certaines conditions. De telles partitions permettent d'étudier la structure des graphes appartenant à une même classe. Cette partition peut être partition des ensembles dominants, partition domatique, etc...

Parmi les domaines les plus importants et très étudiés en théorie des graphes sont les problèmes de domination dans les graphes, la technique de domination est devenue un outil très puissant dans la résolution des problèmes de la théorie des graphes. Généralement, il s'agit de trouver un ensemble de sommets d'un graphe qui satisfasse certaines conditions d'optimalité. L'histoire de la domination remonte au dix-neuvième siècle, grâce aux jeux d'échec. Ce n'est qu'en 1958, qu'elle est formalisée dans un contexte théorique par Claude Berge. Cependant, la notion du nombre domatique à été introduite par Cockayne et Hedetniemi en 1977. Hedetniemi et Laskar (1984), ont introduit le concept du nombre domatique connexe. Puis en 1995, Haynes et Slater ont introduit le nombre domatique couplé. En 2013, Odile Favaron a introduit le nombre b-domatique.

Dans ce mémoire, nous nous intéréssons principalement à l'étude des partitions b-domatiques couplées et connexes dans les graphes .

Après une introduction générale, le mémoire s'atricule autour de trois chapitres:

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques concepts de base de la théorie des graphes, ainsi que les définitions nécessaires utilisées tout au long de ce mémoire.

Le deuxième chapitre est consacré aux travaux de certains chercheurs concernant la partition domatique et ses variantes. Ensuite nous rappelons les principaux résultats existants sur la partition b-domatique.

Dans le troisième chapitre, nous proposons notre travail sur la partition b-domatique couplée et b-domatique connexe, et nous déterminons les paramètres bd_{pr} et bd_c dans certaines classes de graphes.

Enfin, nous donnons une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

Concepts généraux dans les graphes

En mathématique, et plus particulièrement en théorie des graphes. Un graphe est une structure constituant un ensemble d'objets, il répresente de manière simple et naturelle des relations entre ces objets. Ce chapitre est consacré à la présentation des quelques définitions élémentaires qui seront utilisées dans ce mémoire. Celles-ci, bien que formalisées de manière abstraite, sont très intuitives et donc simples à comprendre. Pour plus de détails, nous guidons le lecteur aux ouvrages de [5] et [3].

1.1 Notions de base et notations

1.1.1 Graphe, sous-graphe et graphe partiel

Un graphe

- Un graphe G est une paire ordonnée des ensembles disjoints $(V(G), E(G))$, l'ensemble $V(G)$ est un ensemble des sommets de G et $E(G)$ est un ensemble des arêtes de G. On notera $V(G) = V$ et $E(G) = E$ si le contexte est clair.

- L'ordre d'un graphe G est le nombre de ses sommets, noté $|V| = n$, et le nombre de ses arêtes est appelé taille de G, noté $|E| = m$. Un graphe est dit fini ou infini suivant son ordre. Un graphe est dit trivial s'il ne possède qu'un seul sommet ($n = 1$) et aucune arête ($m = 0$).

- Une arête reliant deux sommets u et v est notée par uv ou bien par (u, v), ainsi uv et vu signifient exactement la même arête, noté $e = uv$. Les sommets u et v sont des extrémité de e, sont adjacents ou voisins et sont incidents avec l'arête e. Deux arêtes sont adjacents si elles ont exactement une extrémités en commun.

- Une boucle est une arête d'un graphe G ayant pour extrémités le même sommet. Des arêtes multiples sont des plusieurs arêtes différentes relient la même paire de sommets. Un graphe simple est un graphe dont tout couple de sommets est relié par au plus une arête et toute arête de G a ses extrémités distinctes. En d'autre termes, G est simple s'il est sans boucle et sans arêtes multiples.

- Les graphes considérées dans ce mémoire sont simples et finis ou parfois connexes.

Sous-graphe

Nous disons que $G' = (V', E')$ est un sous-graphe de $G = (V, E)$ si $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$, dans ce cas nous écrivons $G' \subseteq G$. Pour un sous-ensemble $A \subseteq V$, le sous-graphe induit par A, noté $G[A]$ ou simplement $\langle A \rangle$, est le graphe ayant A pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans A.

Graphe partiel

Soit un graphe $G = (V, E)$. Si $B \subset E$, on appelle graphe partiel de G défini par B, le sous-graphe $G_B = (V, B)$ de G dont les ensemble de sommets et d'arêtes sont respectivement V et B. Voir Figure 1.1.1.

1.1.2 Voisinage et degré

- Soit $G = (V, E)$ un graphe. L'ensemble de sommets adjacents à un sommet $v \in V(G)$ est le voisinage ouvert de v, il est noté par $N_G(v)$. Le voisinage fermé de v est l'ensemble $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. S'il n'y a pas de risque de confusion, les voisinages ouvert et fermé d'un sommet v seront notés simplement par $N(v)$ et $N[v]$ respectivement.

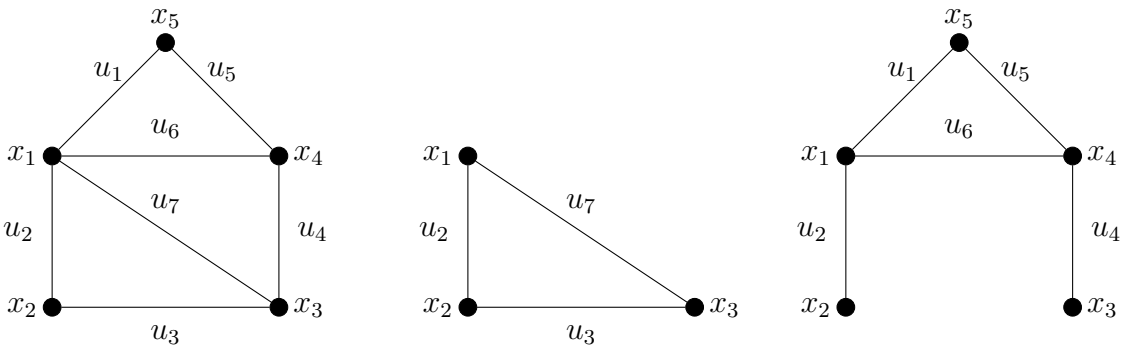


Figure 1.1.1 : Graphe simple G, sous-graphe G_A et graphe partiel G_B

- Soit S un sous-ensemble de V. L'ensemble $N_G[S] = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$ est appelé voisinage ouvert de S, et l'ensemble $N_G[S] = N_G(S) \cup S$ est son voisinage fermé. De même, nous utiliserons les notations $N(S)$ et $N[S]$ au lieu de $N_G(S)$ et $N_G[S]$ respectivement.

- Le voisinage privé d'un sommet $v \in S$ est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont pas d'autres voisins dans S. Cet ensemble est noté $pn[v, S]$ et donné par $pn[v, S] = \{u : N[u] \cap S = \{v\}\}$.

- Le degré d'un sommet v est $d_G(v) = |N_G(v)|$. Un sommet de degré 0 est dit un sommet isolé et un sommet de degré égale à un est dit sommet pendant. Un sommet adjacent à au moins un sommet pendant est appelé sommet support. Le degré minimum de G est noté $\delta(G)$ et donné par $\delta(G) = \min_{v \in V} d_G(v)$. Le degré maximum de G est noté $\Delta(G)$ et donné par $\Delta(G) = \max_{v \in V} d_G(v)$.

1.1.3 Chaîne, cycle et connexité

Chaîne

Une chaîne P d'un graphe $G = (V, E)$, est une suite de sommets reliés par des arêtes. La longueur de P est le nombre d'arêtes utilisées. Une chaîne qui ne passe qu'au plus une fois par chaque sommet est dite élémentaire. Une chaîne qui ne passe qu'au plus une fois par chaque arête est dite simple.

Le terme de chaîne désigné aussi la chaîne P_n constitué d'une chaîne élémentaire de longueur n.

Cycle

Un cycle C d'un graphe $G = (V, E)$ est une suite d'arêtes consécutives (chaine simple) dont les deux sommets extrémités sont identiques. Dans un cycle élémentaire, le degré de tous les sommets est égale à deux. La longueur d'un cycle est le nombre de ses sommets (ou de ses arêtes). Le terme de cycle désigne aussi C_n constitué d'un cycle élémentaire de longueur n.



Figure 1.1.2 : Chaîne et cycle d'ordre 3

Connexité

Un graphe $G = (V, E)$ est un graphe connexe s'il existe une chaîne entre toutes les paires de sommets du graphe. Un graphe connexe à n sommets possède au moins $n - 1$ arêtes. Une composante connexe d'un graphe G est un sous-graphe induit maximal.

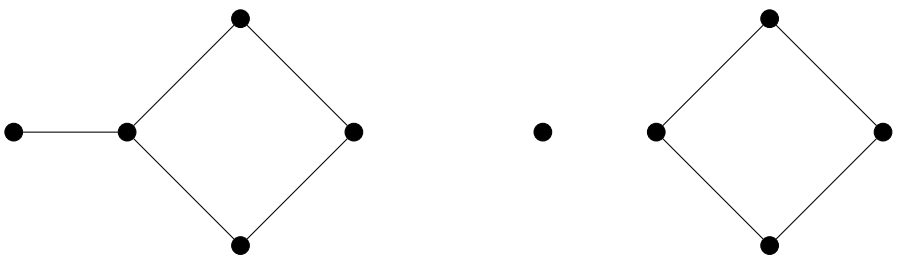


Figure 1.1.3 : Graphe connexe et graphe non connexe

1.2 Propriétés des graphes

1.2.1 Partition de graphes

Soit un graphe $G = (V, E)$. Une partition $\mathcal{P}$ de G est une partition de ses sommets suivant certaines règles. Si le nombre de classes dans la partition $\mathcal{P}$ est fixé à un entier k, on parle k-partition, ou bien, on dit que la partition $\mathcal{P}$ contient k classes.

1.2.2 Minimalité et maximalité d'un ensemble

Soit un graphe $G = (V, E)$ et soit une propriété P. On dit qu'un ensemble S est minimal pour la propriété P si aucun sous-ensemble strict de S ne vérifie cette propriété. Aussi S est dit maximal par rapport à P si aucun ensemble contenant S et différent de S ne vérifie cette propriété.

De même, on dit qu'un ensemble est minimum pour la propriété P si aucun ensemble plus petit (pas nécessairement un sous-ensemble) ne vérifie la propriété. Ainsi, un ensemble minimum est nécessairement minimal, mais l'inverse n'est pas vrais en général. Il est maximum si aucun ensemble plus grand que S (sans nécessairement le contenir) ne vérifie P.

1.2.3 Quelques classes de graphes classiques

Certains types de graphes jouent des rôles importants dans la théorie des graphes.

Graphe complet

Soit un graphe $G = (V, E)$ d'ordre n. Un graphe complet, noté K_n, est un graphe simple dont tous les sommets sont adjacents, c'est à dire que tout couple de sommets disjoints est relié par une arête. Un graphe complet à n sommets contient $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes.

Dans G, on nomme clique un sous-graphe complet de G, ce que veut dire une partie de l'ensemble des sommets de G telles que le graphe induit par G sur cette partie soit un graphe complet. Une clique de p sommets est notée K_p.

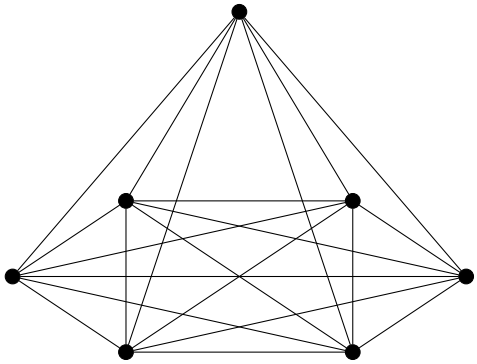


Figure 1.2.1 : Graphe complet

Graphe biparti

Etant donné un graphe $G = (V, E)$, G est un graphe biparti s'il existe une partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensembles V_1 et V_2 tels que les sous-graphe $G[V_1]$ et $G[V_2]$ ne contiennent aucune arête, donc chaque arête ait une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2. Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycle impair.

Un graphe biparti complet (un biclique) est un graphe biparti tel que chaque sommet de V_1 est relié à chaque sommet de V_2. Si $|V_1| = n_1$ et $|V_2| = n_2$, alors G est noté $K_{n_1 n_2}$.

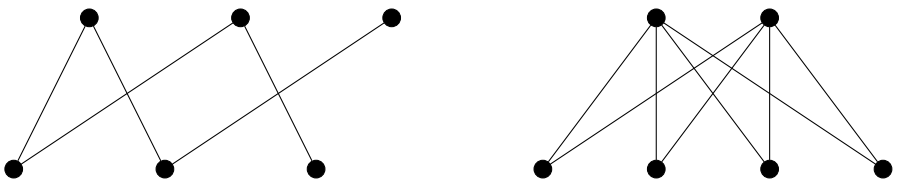


Figure 1.2.2 : Graphe biparti et graphe biparti complet

Graphe complémentaire

Un graphe complémentaire d'un graphe $G = (V, E)$ est un graphe $\overline{G}$ ayant les mêmes sommets tels que deux sommets distincts de $\overline{G}$ soient adjacents si et seulement s'ils ne sont pas adjacents dans G. La somme d'un graphe et son complémentaire est le graphe complet.

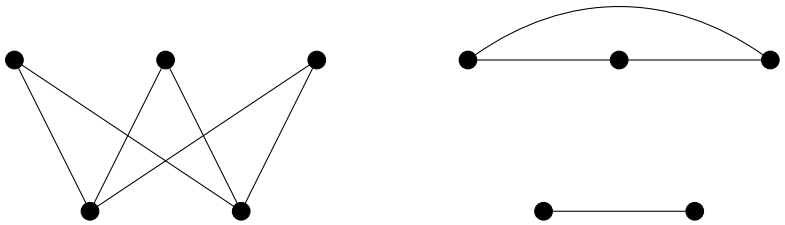


Figure 1.2.3 : Un graphe et son complémentaire

Graphe régulier

Un graphe $G = (V, E)$ est régulier si tous ses sommets ont le même degré. De plus, G est dit k-régulier si $d_G(v) = k$ pour tout sommet v de G. Un graphe complet K_n est un graphe $(n-1)$-régulier.

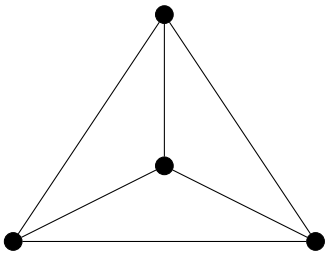


Figure 1.2.4 : Graphe 3-régulier

Etoile

Une étoile est un graphe biparti complet dans lequel $|V_1| = 1$ et $|V_2| = k$, noté $K_{1,k}$. On peut définir une étoile comme un graphe connexe dont tous les sommets sauf un sont de degré 1. L'étoile $K_{1,3}$ est un griffe.

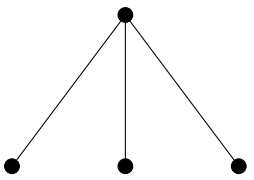


Figure 1.2.5 : Etoile $K_{1,3}$

1.2.4 Invariants de graphe

Isomorphisme de graphe

Les graphes G et H sont dits isomorphes et on écrit $G \simeq H$ s'il existe une application bijective f entre les sommets de G et ceux de H, $f : V(G) \longrightarrow V(H)$ telle que pour toute paire de sommets u, v de G, l'arête $uv \in E(G)$ si et seulement si l'arête $f(u)f(v) \in E(H)$.

• Un invariant d'un graphe est une propriété préservé par isomorphisme comme le nombre de ses sommets et le nombre de ses arêtes.

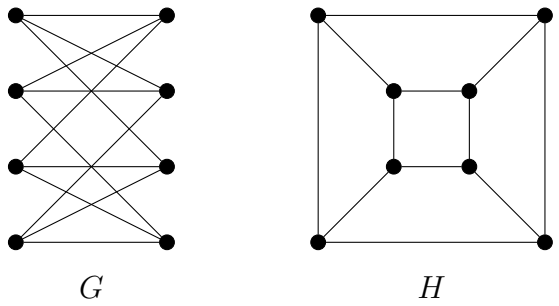


Figure 1.2.6 : Exemple de deux graphes isomorphes

Dans ce mémoire, nous utiliserons plusieurs invariants d'un graphe. Voici les définitions de quelques uns.

Connectivité

Soit G un graphe connexe. Une coupe de sommet de G est un sous-ensemble S de $V(G)$ tel que le sous-graphe de G induit par l'ensemble $V(G) - S$ est déconnecté.

Si G n'est pas un graphe complet, alors le nombre minimum de sommets d'une coupe de sommet de G est le nombre de connectivité $\kappa_0(G)$ de G. Si G est un graphe complet K_n avec n sommets, alors par définition $\kappa_0(G) = n - 1$.

Couplage

Un couplage C dans un graphe G est un ensemble d'arêtes deux-à-deux non-adjacentes. Un couplage maximum est un couplage de taille maximale. On désigne par $\beta(G)$ la taille d'un couplage maximum dans G. Un sommet d'un graphe est saturé par un couplage de

ce graphe lorsqu'il est extrémité d'une arête de ce couplage. Autrement, il est insaturé par ce couplage. Un couplage C qui sature tous les sommets de G est parfait. une chaîne C-alternée est une chaîne élémentaire dont ses arêtes sont alternativement dans le couplage C et dans $E \setminus C$. Une chaîne C-alternée est dite C-augmentante si ses extrémités sont insaturés par C.

On a les propriétés suivantes d'un couplage dans le graphe G:

1. Le cardinal d'un couplage est au plus $n/2$, ceci est du au fait que chaque arête du couplage sature deux sommets.

2. Un couplage est parfait si et seulement si $\beta(G) = n/2$.

3. Tout graphe d'ordre impair ne contient pas de couplage parfait. Mais, un graphe d'ordre pair ne possède pas nécessairement un couplage parfait. Par exemple, une étoile d'ordre $2n$, n'admet pas un couplage parfait.

4. Le nombre de sommets insaturés par un couplage C est $n - 2\,|C|$.

L'indépendance

Un ensemble indépendant de G (appelé aussi stable) est un ensemble de sommets de G deux à deux non adjacents. Un stable maximum S de G est un stable de cardinalité maximale. Le nombre de stabilité (nombre d'indépendance), noté $\alpha(G)$, est le cardinal maximum d'un stable S de G.

1.3 Produit cartésien

Soient G_1 et G_2 deux graphes où $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$.

Le produit cartésien $G_1 \boxdot G_2$ est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V_1 \times V_2$ et dont deux sommets (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont reliés par une arête si et seulement si soit $x_1x_2 \in E_1$ et $y_1 = y_2$, soit $y_1y_2 \in E_2$ et $x_1 = x_2$. Autrement dit, deux sommets du produit $G_1 \boxdot G_2$ sont adjacents si et seulement si les sommets de l'une de leurs coordonnées sont égaux et ceux de l'autre coordonnée sont adjacents.

1.4 La domination

On peut dire que le problème des "cinq reines" est à l'origine de l'étude des ensembles dominants dans les graphes. En 1862, De Jaenisch [17] a étudié le problème des reines dans un jeu d'échecs, il voulait déterminer le nombre minimum de reines peuvant être placées sur l'échiquier de telle sorte que toutes les cases de ce dernier soient attaquées ou occupées par une reine en un seul coup. Il a été montré que cinq est le nombre minimum de reines pour un échiquier 8×8. Le problème de la reine dominante peut être énoncé en général comme la domination des sommets d'un graphe, et le nombre minimum de reines reste indéterminé.

Claude Berge dans son livre [4] a déduit pour le première fois le concept du nombre de domination d'un graphe. Il a appelé ce nombre le "coefficient de la stabilité externe". Le terme "ensemble dominant" et "nombre de domination" a été utilisé pour la première fois par Ore dans son livre [19]. En 1977, Cockayne et Hedetniemi [7] ont publié une étude des rares résultats connus à l'époque concernant les ensembles dominants dans les graphes. Dans ce papier, Cockayne et Hedetniemi ont été les premièrs à utiliser la notation $\gamma(G)$ pour le nombre de domination d'un graphe, qui est devenu par la suite la notation acceptée.

1.4.1 Différentes définitions de la domination

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un sous-ensemble D de V est un dominant du graphe G si tout sommet $v \in V$ est ou bien dans D ou bien adjacent à un sommet de D. Un sommet domine tous les sommets de son voisinage fermé.

Il existe plusieurs façons de définir un ensemble dominant dans un graphe, chacune illustrant un aspect différent du concept de domination. Considérons les définitions équivalentes suivantes. Un sous-ensemble D de V est un ensemble dominant si et seulement si:

- Pour tout sommet $v \in V - D$, il existe un sommet $u \in D$ tel que v est adjacent à u.
- Pour tout sommet $v \in V - D$, $d(v, D) \leq 1$.
- $N[D] = V$.
- Pour tout sommet $v \in V - D$, $|N(v) \cap D| \geq 1$, c'est à dire, chaque sommet $v \in V - D$ est adjacent à au moins un sommet de D.

- Pour tout sommet $v \in V$, $|N[v] \cap D| \geq 1$.

Le nombre de domination $\gamma(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G. Un ensemble dominant de G de cardinal minimum est noté $\gamma(G)$-ensemble. Un ensemble dominant D d'un graphe G contient tous les sommets isolés de G. Puisque le nombre de domination est défini pour tout graphe, et puisque tout graphe est dominé par son ensemble de sommets, on a $1 \leq \gamma(G) \leq |V(G)|$.

Il est noter que si D est un $\gamma(G)$-ensemble, alors tout ensemble de sommets de G qui contient D est aussi un dominant de G. Cependant, un sous-ensemble de D n'est pas forcément un dominant de G. Un ensemble dominant de G est dit minimal s'il ne contient aucun sous-ensemble strict qui domine les sommets de G.

1.4.2 Quelques paramètres de domination

Dans la domination, il est possible de former de nouveaux paramètres. En effet, beaucoup de paramètres ont été définis en combinant la domination avec une autre propriété dans les graphes. Harary et Haynes [12] ont défini le nombre de domination conditionnelle $\gamma(G : P)$ comme le cardinal minimum d'un sous-ensemble $D \subseteq V$ tel que le sous-graphe induit par D satisfait P.

Comme exemples de paramètres de domination conditionnelle, nous citons les propriétés suivantes:

- $P_1 : G[D]$ est connexe.
- $P_2 : G[D]$ est sans arêtes.
- $P_3 : G[D]$ a un couplage parfait.
- $P_4 : G[D]$ est sans sommets isolés.

Certains paramètres de domination conditionnelle n'existent pas forcément pour n'importe quel graphe.

Dans cette partie, on défini quelques paramètres de la domination.

Domination totale

La domination totale a été introduite par Cockayne, Dawes, et Hedetniemi dans [8].

Définition 1.4.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant total de G s'il est dominant et le sous-graphe induit par D ne contient pas de sommets isolés (propriété P_4). Le nombre de domination totale $\gamma(G : P_4) = \gamma_t(G)$ est le cardinal minimum d'un dominant total.*

Remarque 1.4.1 *Si G est un graphe sans sommets isolés, alors $2 \leq \gamma_t(G) \leq n$.*

Domination stable

Définition 1.4.2 *Un sous-ensemble $D \subseteq V$ est un dominant stable de G s'il est dominant et le sous-graphe induit par D est sans arêtes (propriété P_2). Le nombre de domination stable $\gamma(G : P_2) = i(G)$ est le cardinal minimum d'un stable maximal de G. Un ensemble indépendant maximal de cardinal minimum est dit $i(G)$-ensemble.*

Domination couplée

Définition 1.4.3 *Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant couplé de G s'il est dominant et le sous-graphe induit par D contient un couplage parfait M (propriété P_3). La domination couplée (appelée aussi paired-domination) a été introduite par Haynes et Slater [16].*

Définition 1.4.4 *Le nombre de domination couplée $\gamma(G : P_3) = \gamma_{pr}(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant couplé de G. Un ensemble dominant couplé de cardinal $\gamma_{pr}(G)$ est appelé $\gamma_{pr}(G)$-ensemble. Il est minimal s'il n'existe aucun sous-ensemble propre de D qui est dominant couplé de G.*

Pour tout graphe G sans sommets isolés, $\gamma(G) \leq \gamma_{pr}(G)$ et $\gamma_{pr}(G)$ est pair. Pour certaines des classes de graphes, on note que: $\gamma_{pr}(K_n) = \gamma_{pr}(K_{r,s}) = \gamma_{pr}(W_n) = 2$ et $\gamma_{pr}(P_n) = \gamma_{pr}(C_n) = 2\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$.

Domination connexe

Définition 1.4.5 *Sampathkumar et Walikar [21] ont défini un ensemble dominant connexe comme étant un ensemble dominant D dont le sous-graphe induit $\langle D\rangle$ est connexe (propriété P_1). Le nombre de domination connexe noté $\gamma(G : P_1) = \gamma_c(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant connexe de G.*

Théorème 1.4.1 *[20] Soit G un graphe connexe d'ordre n, alors $\gamma_c(G) = n - \kappa_0$ si et seulement si G est l'un des graphes suivants: C_n, K_n.*

Il est évident que $\gamma(G) \leq \gamma_c(G)$ et si $\gamma(G) = 1$, alors $\gamma(G) = \gamma_c(G) = 1$.

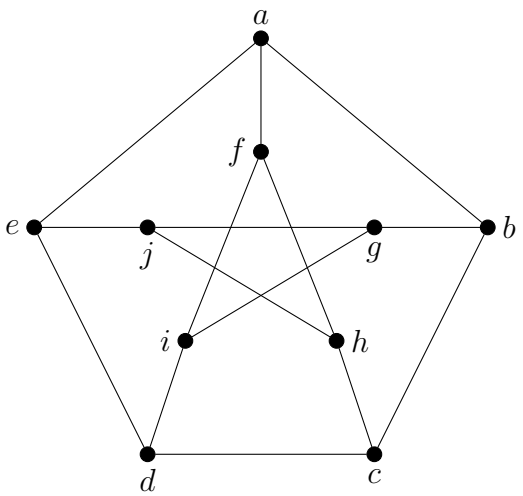


Figure 1.4.1 : Graphe de Petersen G_{10}

Dans le graphe de la Figure 1.4.1, nous avons:

- l'ensemble $D_1 = \{a, g, c\}$ est un ensemble dominant, et le minimum $\gamma(G_{10}) = 3$.
- l'ensemble $D_2 = \{a, b, e, f\}$ est un ensemble dominant total, et le minimum $\gamma_t(G_{10}) = 4$.
- l'ensemble $D_3 = \{a, d, g, h\}$ est un ensemble dominant stable, et le minimum $i(G_{10}) = 4$.
- l'ensemble $D_4 = \{a, b, c, d, e, j\}$ est un ensemble dominant couplé, et le minimum $\gamma_{pr}(G_{10}) = 6$.
- l'ensemble $D_5 = D_2 = \{a, b, e, f\}$ est un ensemble dominant connexe, et le minimum $\gamma_c(G_{10}) = 4$.

Chapitre 2

Quelques partitions domatiques existantes dans les graphes

Ce chapitre est consacré à l'étude des quelques structures fondamentales qui jouent un très grand rôle dans ce mémoire. Premièrement, on donne le concept de la partition domatique dans les graphes. Puis, on établir quelques paramètres spécifiques et on présente certaines bornes de ces paramètres. Ensuite, on défini le nombre b-domatique qui a été introduit par Favaron [11] et on présente quelques propriétés de $bd(G)$.

2.1 Partition domatique et a-domatique

2.1.1 Partition domatique

Favaron a défini la partition domatique comme la suite.

Définition 2.1.1 *Une partition domatique d'un graphe G est une partition de son ensemble de sommets V en ensembles dominants.*

La partition $\{V\}$ de cardinalité 1 est domatique et les partitions domatiques les plus intéressantes sont celles de grande cardinalité. Voir Figure 2.1.1.

Définition 2.1.2 *Soit $\mathcal{C}$ une classe d'une partition $\mathcal{P}$. Un sommet $x \in \mathcal{C}$ est dominé par $V \setminus \mathcal{C}$ si x admet au moins un voisin dans chaque classe différente de leur classe $\mathcal{C}$.*

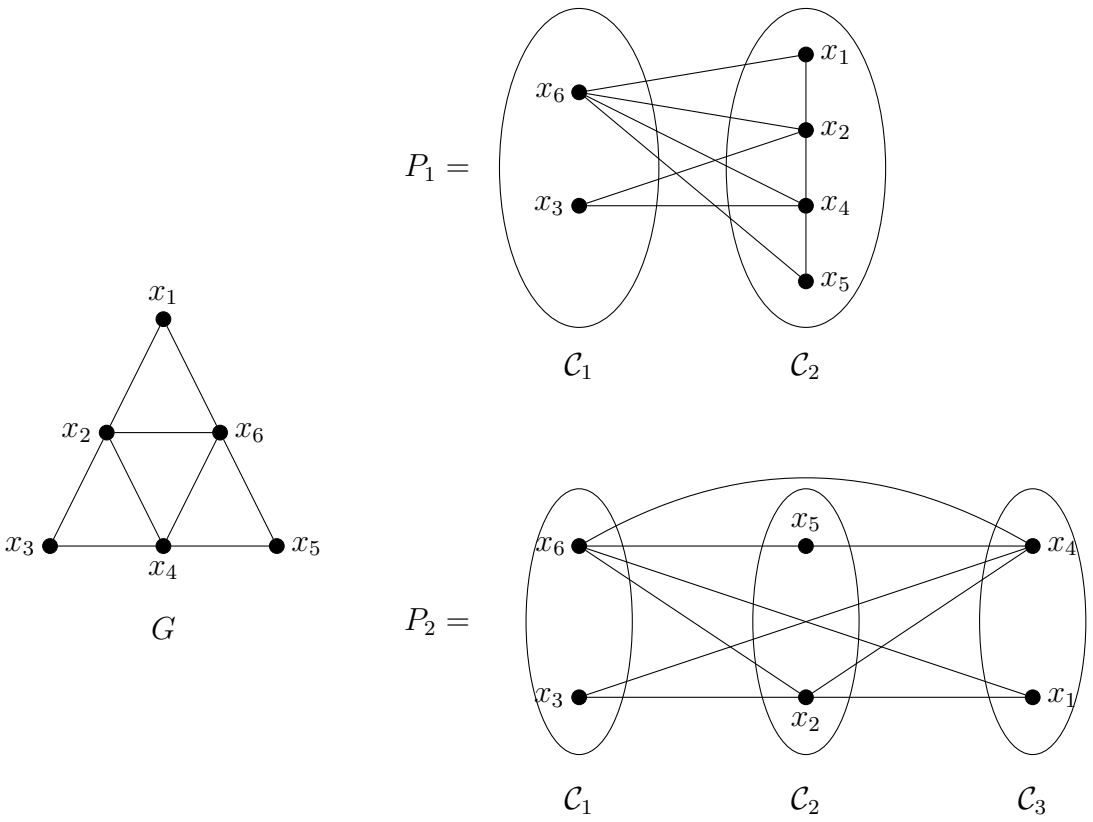


Figure 2.1.1 : Exemple de deux partitions domatiques l'une maximale P_2 et l'autre non maximale P_1

Définition 2.1.3 *On note qu'une partition est domatique si et seulement si chaque sommet $x \in \mathcal{C}$ est dominé par chaque classe différente de sa classe propre.*

Définition 2.1.4 *Le nombre domatique d'un graphe $G = (V, E)$, noté $d(G)$ est le nombre maximum de classes qui partitionnent l'ensemble V.*

Proposition 2.1.1 *[7] Tout graphe G de degré minimum δ, satisfait*

$$d(G) \leq \delta + 1.$$

Les graphes tels que $d(G) = \delta + 1$ sont appelés le graphes domaticully full(mot en anglais).

Proposition 2.1.2 *[7] Pour tout graphe G, on a*

$$d(G)\gamma(G) \leq n.$$

En effet, chaque classe d'une partition domatique contient au moins $\gamma(G)$ sommets.

Théorème 2.1.1 *[7] Pour tout graphe G, on a*

$$d(G) + d(\overline{G}) \leq n + 1.$$

avec égalité si et seulement si $G = K_n$ ou $\overline{K_n}$.

Théorème 2.1.2 *[13]Tout graphe G. avec $\delta(G) \geq 1$, satisfait*

$$\gamma(G) + d(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2.$$

Théorème 2.1.3 *[24] Soit p, q des entiers positifs, $p < q$. Alors il existe un graphe G tel que*

$$\kappa_0(G) = p,\ d(G) = q.$$

Théorème 2.1.4 *[24] Soit h un entier positif, alors il existe un graphe G tel que*

$$\kappa_0(G) - d(G) = h.$$

2.1.2 Partition a-domatique

Favaron a défini la partition a-domatique comme la suite.

Définition 2.1.5 *Une partition domatique $\mathcal{P}$ est considéré a-domatique si aucune partition domatique plus grande $\mathcal{P}'$ ne peut être obtenue en divisant une classe $\mathcal{C}_i$ en deux nouveaux ensembles dominants $\mathcal{C}'_i$ et $\mathcal{C}''_i$, en d'autres termes, si chaque classe est un ensemble dominant indivisible de G. Nous utilisons ici le terme a-domatique pour désigner ce type de maximalité.*

Définition 2.1.6 *La cardinalité minimale d'une partition a-domatique de G est appelée le nombre adomatique et notée par $ad(G)$.*

Proposition 2.1.3 *Toute partition domatique $\mathcal{P}$ dont chaque classe $\mathcal{C}$ contient un sommet isolé dans $G[\mathcal{C}]$ est a-domatique.*

Preuve. Un ensemble dominant $\mathcal{C}$ contenant un sommet x isolé dans $G[\mathcal{C}]$ est indivisible, puisque si nous divisons $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$contenant x et $\mathcal{C}''$, x n'est pas dominé par $\mathcal{C}''$. Par conséquent, toutes les classes de $\mathcal{P}$ sont indivisibles. ■

2.2 Différents paramètres de la partition domatique

2.2.1 Nombre domatique total

En 1980, Cockayne, Hedetniemi et Dawes ont introduit le nombre domatique total $d_t(G)$.

Définition 2.2.1 *La partition domatique totale d'un graphe G est une partition de l'ensemble de sommets V en ensembles dominants totaux.*

La partition $\{V\}$ de cardinalité 1 est domatique totale (si le graphe G ne contient pas un sommet isolé).

Définition 2.2.2 *Le nombre domatique total $d_t(G)$ est la cardinalité maximale de la partition domatique totale de G.*

Remarque 2.2.1 *Le nombre domatique total est défini seulement pour les graphes sans sommets isolés, et donc $\delta(G) \geq 1$.*

On général, on s'intéresse à une partition domatique totale de large cardinalité.

Remarque 2.2.2 *Une partition $\mathcal{P}$ d'un graphe G est domatique totale si et seulement si tout sommet de G est dominé par chaque classe de $\mathcal{P}$.*

Ceci implique que si on considère un sommet de dégré $\delta(G)$, alors on a le résultat suivant.

Théorème 2.2.1 *[8] Pour tout graphe G sans sommets isolés, $d_t(G) \leq \delta(G)$.*

Une autre propriété immédiate de $d_t(G)$ est la suivante.

Théorème 2.2.2 *[14] Pour tout graphe G sans sommets isolés, on a*

$$d_t(G)\gamma_t(G) \leq n.$$

Puisque $\gamma_t(G) \geq 2$, alors le résultat suivant est immédiat.

Corollaire 2.2.1 *Pour tout graphe G sans sommets isolés, on a*

$$d_t(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Nous donnons ci-après quelques bornes existant sur le nombre domatique total.

Théorème 2.2.3 *[25] Pour tout graphe, on a*

$$d_t(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{n - \delta(G) + 1} \right\rfloor.$$

Cockayne, Hedietniemi et Dawes [8] ont établi un résultat de type Nordhauss-Gaddum pour le nombre domatique total.

Théorème 2.2.4 *[8] Pour tout graphe G avec $\delta(G) \geq 1$ et $\triangle(G) \leq n-2$ on a:*

$$d_t(G) + d_t\left(\overline{G}\right) \leq n - 1.$$

Avec l'égalité si et seulement si G ou $\overline{G}$ est isomorphe au cycle C_4.

S. Arumugam [1] a amélioré la borne du Théorème 2.2.4 ensuite il a caractérisé quelques graphes particuliers atteignant cette nouvelle borne.

Théorème 2.2.5 *[1] Soit G un graphe avec au moins 5 sommets avec $\delta(G) \geq 1$ et $\triangle(G) \leq n-2$. Alors*

$$d_t(G) + d_t\left(\overline{G}\right) \leq n - 2.$$

Théorème 2.2.6 *[1] Soit G un graphe non connexe r-reguliér avec au moins 5 sommets. Alors $d_t(G) + d_t(\overline{G}) = n - 2$ si et seulement si G est isomorphe à $2C_3$, $2C_4$, $3K_2$, ou $2K_4$.*

Notez que la borne supérieure est grandement améliorée lorsque G n'a pas de sommets isolés.

Théorème 2.2.7 *[9] Si $d_t(G) \geq 2$, alors:*

$$\gamma_t(G) + d_t(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2.$$

Théorème 2.2.8 *[14] Pour tout graphe G*

$$\begin{cases} d(G) \geq d_t(G) \\ d_t(G) \leq \frac{n}{\gamma_t(G)} \end{cases}.$$

Partition a-domatique totale

Définition 2.2.3 *Une partition domatique totale $\mathcal{P}$ est dite a-domatique totale, s'il n'existe pas une partition domatique totale $\mathcal{P}'$ de cardinalité plus grande que $\mathcal{P}$, obtenue en divisant une classes $\mathcal{C}_i$ en deux dominants totaux $\mathcal{C}'_i$ et $\mathcal{C}''_i$.*

Définition 2.2.4 *La cardinalité minimale de la partition a-domatique totale de G est appelée le nombre a-domatique totale et on le note par $ad_t(G)$.*

2.2.2 Nombre domatique indépendant

E. J. Cockayne et S. T. Hedetniemi [7] et Zelinka [22] ont introduit le nombre domatique indépendant $id(G)$.

Définition 2.2.5 *S'il existe au moins une partition domatique d'un graphe G dont toutes les classes sont des ensembles indépendants. Alors cette partition est appelée domatique indépendante.*

Définition 2.2.6 *Le nombre maximum de classes d'une telle partition est appelé le nombre domatique indépendant (ou le nombre idomatic de G) et noté $id(G)$.*

Théorème 2.2.9 *[14] Pour tout graphe G*

$$d(G) \geq id(G).$$

Pour tout sommet $v \in V$, Si $D \in V$ est un ensemble dominant indépendant, alors $D \cap N(v) \neq \emptyset$. Par conséquent on trouve les deux résultats suivants

Théorème 2.2.10 *[14] Pour tout graphe G. Si $\gamma(G) \geq 2$, alors*

$$id(G) \leq \delta(G) + 1.$$

Théorème 2.2.11 *[14] Pour tout graphe G*

$$id(G) \leq \frac{n}{i(G)}.$$

Proposition 2.2.1 *[22] Soit G un graphe idomatique, alors*

$$ad(G) \leq id(G).$$

2.2.3 Nombre domatique couplé

Définition 2.2.7 *Une partition de $V(G)$ est appelée domatique couplée, si toutes ses classes sont des ensembles dominants couplés de G.*

Définition 2.2.8 *Le nombre domatique couplé $d_{pr}(G)$ est le cardinal maximum d'une partition domatique couplée de G.*

Remarque 2.2.3 *Le nombre domatique couplé est défini seulement pour les graphes sans sommets isolés, et donc $\delta(G) \geq 1$.*

Remarque 2.2.4 *Une partition $\mathcal{P}$ d'un graphe est domatique couplée si et seulement si tout sommet de G est dominé par chaque classe de $\mathcal{P}$ où chaque classe contient au moins une arête et est sans sommets isolés.*

Théorème 2.2.12 *[14] Pour tout graphe G*

$$d(G) \geq d_{pr}(G)$$

Pour tout sommet $v \in V$, si $D \subset V$ est un ensemble dominant couplé, alors $D \cap N(v) \neq \emptyset$. Par conséquent on trouve les deux résultats suivants

Théorème 2.2.13 *[14] Pour tout graphe G. Si $\gamma(G) \geq 2$, alors*

$$d_{pr}(G) \leq \delta(G).$$

Théorème 2.2.14 *[14] Pour tout graphe G*

$$d_{pr}(G) \leq \frac{n}{\gamma_{pr}(G)}.$$

Haynes et Slater [15] ont établi un résultat de type Nordhauss-Gaddum pour le nombre domatique couplé.

Théorème 2.2.15 *[15] Pour tout graphe G avec $\delta(G) \geq 1$ et $\triangle(G) \leq n-2$ on a:*

$$d_{pr}(G) + d_{pr}\left(\overline{G}\right) \leq n-1.$$

Avec égalité si et seulement si G ou $\overline{G}$ est isomorphe au C_4.

Théorème 2.2.16 *[15] Si $d_{pr}(G) \geq 2$, alors:*

$$\gamma_{pr}(G) + d_{pr}(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2.$$

Partition a-domatique couplée

Définition 2.2.9 *Une partition domatique couplée $\mathcal{P}$ est dite a-domatique couplée, s'il n'existe pas une partition domatique couplée $\mathcal{P}'$ de cardinalité plus grand que $\mathcal{P}$, obtenue en divisant une classes $\mathcal{C}_i$ en deux dominants couplés $\mathcal{C}'_i$ et $\mathcal{C}''_i$.*

Définition 2.2.10 *La cardinalité minimale de la partition domatique a-domatique couplée de G est appelée le nombre adomatique couplé et on le note par $ad_{pr}(G)$.*

2.2.4 Nombre domatique connexe

En 1984, Hedetniemi et Laskar [18] ont défini le nombre domatique connexe $d_c(G)$.

Définition 2.2.11 *La partition domatique connexe d'un graphe G est une partition de V, dont toutes les classes sont des ensembles dominants connexes de G*

Définition 2.2.12 *Le nombre maximum de classes d'une partition domatique connexe de G est appelé le nombre domatique conexe, et noté $d_c(G)$.*

Définition 2.2.13 *Une partition domatique connexe $\mathcal{P}$ est une partition domatique telle que chaque classe de $\mathcal{P}$ induit un sous-graphe connexe.*

Remarque 2.2.5 *Le nombre domatique connexe d'un graphe n'est défini que pour les graphes connexe*

Remarque 2.2.6 *Une partition $\mathcal{P}$ d'un graphe G est domatique connexe si et seulement si tout sommet de G est dominé par chaque classe de $\mathcal{P}$.*

Théorème 2.2.17 *[14]Pour tout graphe G. Si $\gamma(G) \geq 2$, alors*

$$d_c(G) \leq d_t(G).$$

Pour tout sommet $x \in V$, Si $\mathcal{D} \subset V$ est un ensemble dominant connexe avec $|\mathcal{D}| \geq 2$, alors $\mathcal{D} \cap N(x) \neq \emptyset$. Par conséquent on trouve les deux résultats suivants.

Théorème 2.2.18 *[14] Pour tout graphe G. Si $\gamma(G) \geq 2$, alors*

$$d_c(G) \leq \delta(G).$$

Théorème 2.2.19 *[14]Pour tout graphe G*

$$d_c(G) \leq \frac{n}{\gamma_c(G)}.$$

Maintenant, on compare $d_c(G)$ avec $\kappa_0(G)$.

Théorème 2.2.20 *[23] Soit G un graphe connexe qui n'est pas complet, alors*

$$d_c(G) \leq \kappa_0(G).$$

Partition a-domatique connexe

Définition 2.2.14 *Une partition domatique connexe $\mathcal{P}$ est dite a-domatique connexe, s'il n'existe pas une partition domatique connexe $\mathcal{P}'$ de cardinalité plus grand que $\mathcal{P}$, obtenue en divisant une classes $\mathcal{C}_i$ en deux dominants connexes $\mathcal{C}'_i$ et $\mathcal{C}''_i$.*

Définition 2.2.15 *La cardinalité minimale de la partition a-domatique connexe de G est appelée le nombre adomatique connexe et on le note par $ad_c(G)$.*

2.3 Nombre b-domatique

2.3.1 Définitions et notations

Définition 2.3.1 *Une partition domatique $\mathcal{P}$ est dite b-domatique si aucune partition domatique $\mathcal{P}'$ de cardinalité plus grande que $\mathcal{P}$ peut être obtenue en rassemblant des sous-ensembles de certaines classes de $\mathcal{P}$ pour former une nouvelle classe.*

Plus formellement la partition b-domatique peut être définie comme suit.

Définition 2.3.2 *$\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_p\}$ est b-domatique s'il n'existe pas p sous-ensembles C'_i de C_i (parmi eux $p-1$ peuvent être vides) telle que la partition*

$$\mathcal{P}' = \{\mathcal{C}_1 \backslash \mathcal{C}'_1, \mathcal{C}_2 \backslash \mathcal{C}'_2, ..., \mathcal{C}_p \backslash \mathcal{C}'_P, \mathcal{C}'_1 \cup \mathcal{C}'_2 \cup ... \cup \mathcal{C}'_P\}$$

est domatique.

Remarque 2.3.1 *Une partition b-domatique de cardinalité maximale est une partition domatique.*

Définition 2.3.3 *La cardinalité minimale d'une partition b-domatique de G est appelée le nombre b-domatique et notée par $bd(G)$.*

Remarque 2.3.2 *Si $\delta = 0$, alors $\{V\}$ est l'unique partition domatique et $1 = ad(G) = bd(G) = d(G)$.*

Définition 2.3.4 *On dit qu'un graphe G est bd-continu s'il admet une partition b-domatique pour toute cardinalité entre $bd(G)$ et $d(G)$. Les graphes tels que $bd(G) = d(G)$ ou $d(G) - 1$ sont évidemment bd-continus.*

Définition 2.3.5 *Le bd-spectre d'un graphe G est l'ensemble des cardinalités de toutes les partitions b-domatique de G entre $bd(G)$ et $d(G)$.*

2.3.2 Résultats fondamentaux

Ore [19] a observé que l'ensemble de sommets de chaque graphe sans sommet isolé contient deux ensembles disjoints dominants, ce qui implique que $ad(G) \geq 2$.

Proposition 2.3.1 *[11]Tout graphe G de degré minimum $\delta \geq 1$ satisfait*

$$2 \leq ad(G) \leq bd(G) \leq d(G) \leq \delta + 1.$$

La Proposition 2.3.2 est une autre formulation de la définition d'une partition b-domatique et les Propositions de 2.3.3 à 2.3.5 sont des Corollaires de la Proposition 2.3.2.

Proposition 2.3.2 *[11] Une partition domatique $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_k\}$ est b-domatique si et seulement si pour tout choix d'ensembles dominants minimaux $\mathcal{D}_i$ de G respectivement contenus dans $\mathcal{C}_i$, $V \setminus \cup_{i=1}^{k} \mathcal{D}_i$ ne domine pas G.*

Proposition 2.3.3 *[11] Toute partition domatique $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_k\}$ dont chaque classe est un ensemble dominant minimal de G est b-domatique.*

Proposition 2.3.4 *[11] Toute partition a-domatique $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_k\}$ dont chaque classe $\mathcal{C}_i$, $1 \leq i \leq k-1$, est un ensemble dominant minimal de G est b-domatique.*

Proposition 2.3.5 *[11] Si G admet une partition b-domatique de cardinalité k, alors il existe une famille $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, ..., \mathcal{D}_k\}$ de k ensembles dominants minimaux disjoints de G tel que $V \setminus \cup_{i=1}^{k} \mathcal{D}_i$ n'est pas un ensemble dominant de G.*

La Proposition 2.3.6 ci-dessous est légèrement plus faible que l'inverse de la Proposition 2.3.5.

Proposition 2.3.6 *[11] S'il existe une famille $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, ..., \mathcal{D}_k\}$ avec k ensembles dominants minimaux disjoints de G, et un indice i_0 tel que $V \setminus \cup_{i=1}^{k} \mathcal{D}_i$ ne domine pas G, mais $V \setminus \cup_{i=1, i \neq i_0}^{k} \mathcal{D}_i$ est un ensemble dominant indivisible de G, alors G admet une partition b-domatique de cardinalité k.*

Le Théorème suivant détermine $bd(G)$ lorsque G est non connexe.

Théorème 2.3.1 *[11] Soit $G_1, ..., G_k$ les composantes d'un graphe non connexe G sans sommets isolés. Alors $bd(G) = \min\{bd(G_i) \mid 1 \leq i \leq k\}$.*

Remarque 2.3.3 *Par la Proposition 2.3.1, chaque graphe connexe de degré minimum $\delta = 1$, et en particulier chaque arbre non-trivial, satisfait $ad(G) = bd(G) = d(G) = 2$.*

La clique K_n satisfait $ad(K_n) = bd(K_n) = d(K_n) = n = \delta + 1$. Pour les cycles, il a été montré dans [7] que

$$d(C_n) = \begin{cases} 3 \text{ si } n \equiv 0 (mod 3) \\ 2 \text{ } sinon \end{cases}$$

Théorème 2.3.2 *[11] Le cycle C_n satisfait $ad(C_n) = bd(C_n) = 2$ pour chaque $n \geq 4$.*

Les deux Théorèmes suivants donnent des exemples de graphes G tels que $ad(G) = bd(G) < d(G)$ et $ad(G) < bd(G) = d(G)$ respectivement.

Théorème 2.3.3 *[11] Soit $K_{p,p'}$ est un graphe biparti complet avec $2 \leq p \leq p'$. Alors $ad(K_{p,p'}) = bd(K_{p,p'}) = 2$ et $d(K_{p,p'}) = p$.*

Chapitre 3

Nouveaux résultats sur la partition b-domatique couplée et la partition b-domatique connexe

Dans ce chapitre, on étudie le concept des nouveaux paramètres, à savoir le nombre b-domatique couplé et le nombre b-domatique connexe, on présente quelques résultats sur ces paramètres et on détermine la valeur exacte de $bd_{pr}(G)$ et $bd_c(G)$ pour certaines familles de graphes.

3.1 Nombre b-domatique couplé

3.1.1 Définitions et notations

Définition 3.1.1 *Une partition domatique couplée $\mathcal{P}$ est dite b-domatique couplée si aucune partition domatique couplée $\mathcal{P}'$ de cardinalité plus grande que $\mathcal{P}$ peut être obtenue en rassemblant des sous-ensembles de certaines classes de $\mathcal{P}$ pour former une nouvelle classe (un autre ensemble dominant couplé).*

Remarque 3.1.1 *Une partition b-domatique couplée de cardinalité minimale est une partition domatique couplée.*

Définition 3.1.2 *La cardinalité minimale d'une partition b-domatique couplée de G est appelée le nombre b-domatique couplé et on le note par $bd_{pr}(G)$.*

Remarque 3.1.2 *Le nombre b-domatique couplé n'est pas bien défini pour tous les graphes.*

Si $\delta = 1$, alors $\{V\}$ est l'unique partition domatique couplée, et $bd_{pr}(G) = d_{pr}(G) = 1$ si G admet un couplage parfait.

Remarque 3.1.3 *Soit G un graphe d'ordre n*

- *S'il existe une partition b-domatique couplée de G, alors n est pair.*
- *Si n est pair, alors n'est pas forcément qu'il existe un $bd_{pr}(G)$. (voir Figure* 3.1.1*).*

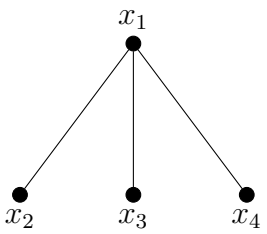


Figure 3.1.1 : Exemple d'une étoile $K_{1,3}$

3.1.2 Bornes sur le nombre b-domatique couplé

Dans cette partie du mémoire, on étudie quelques bornes puisque l'objectif est de bien connaître les propriétés du nombre b-domatique couplé.

Il est clair que toute partition domatique couplée optimale est une partition b-domatique couplée et toute partition b-domatique couplée est une partition a-domatique couplée. Alors le résultat suivant est immédiat.

Proposition 3.1.1 *Soit G un graphe de degré minimum $\delta(G) \geq 1$, alors*

$$1 \leq ad_{pr}(G) \leq bd_{pr}(G) \leq d_{pr}(G) \leq \delta(G).$$

D'après le Théorème 2.2.14 et la Proposition 3.1.1, on déduit le Corollaire suivant.

Corollaire 3.1.1 *Tout graphe G satisfait*

$$bd_{pr}(G) \leq \frac{n}{\gamma_{pr}(G)}.$$

Proposition 3.1.2 *Si chaque arête du graphe est un dominant couplé de G, alors toute classe d'une partition b-domatique contient une seule arête. Le graphe biparti complet est vérifié cette proposition.*

Proposition 3.1.3 *Toute partition domatique couplée $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_k\}$ dont chaque classe est un ensemble dominant minimal couplé de G est b-domatique couplée.*

Preuve. *Etant donné que chaque classe est un ensemble dominant minimal couplé du graphe G, $\mathcal{D}_i = \mathcal{C}_i$ pour chaque i et $V \setminus \underset{i=1}{\overset{k}{\cup}} \mathcal{D}_i$ est non dominant couplé de G.* ■

Proposition 3.1.4 *S'il existe une partition b-domatique couplée d'un graphe G, alors G possède un nombre pair de sommets.*

Preuve. Soit $\mathcal{P}$ est une partition b-domatique couplée d'un graphe G. Alors chaque classe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}$ possède un couplage parfait et par suit le nombre de sommets de $G[\mathcal{C}]$ est pair. ceci implique que l'ordre de G est pair. ■

D'après le Théorème 2.2.15 et la Proposition 3.1.1, on déduit le résultat suivant.

Pour tout graphe G avec $\delta(G) \geq 1$ et $\triangle(G) \leq n-2$ on a:

$$bd_{pr}(G) + bd_{pr}\left(\overline{G}\right) \leq n-1.$$

Cette borne est atteinte, par exemple pour le graphe C_4.

Proposition 3.1.5 *Si G possède une partition b-domatique couplée de cardinalité 2, alors*

$$bd_{pr}(G) = 2.$$

Proposition 3.1.6 *Soit P_n une chaîne d'ordre n pair, alors*

$$bd_{pr}(P_n) = 1.$$

Preuve. Soit P_n une chaîne d'ordre n pair. Vu que P_n a un couplage parfait et $\delta(P_n) = 1$, alors d'après la Proposition 3.1.1, $bd_{pr}(P_n) = 1$. ■

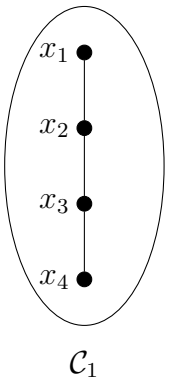


Figure 3.1.2 : Partition b-domatique couplée d'une chaîne P_4

Proposition 3.1.7 *Soit K_n un graphe complet d'ordre n pair, alors*

$$bd_{pr}(K_n) = \frac{n}{2}.$$

Preuve. Vu que $\gamma_{pr}(K_n) = 2$, alors $bd_{pr}(K_n) \leq \frac{n}{2}$ d'après le Corollaire 3.1.1.

Soit $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_k\}$ une partition b-domatique couplée de K_n de cardinalité k. Notons que chaque paire de sommet de K_n est un dominant couplée de K_n. De ce fait, chaque classe $\mathcal{C}_i$ contient exactement une seule arête d'après la Proposition 3.1.2. D'où, $k \geq \frac{n}{2}$, et par conséquent $bd_{pr}(K_n) = \frac{n}{2}$. ■

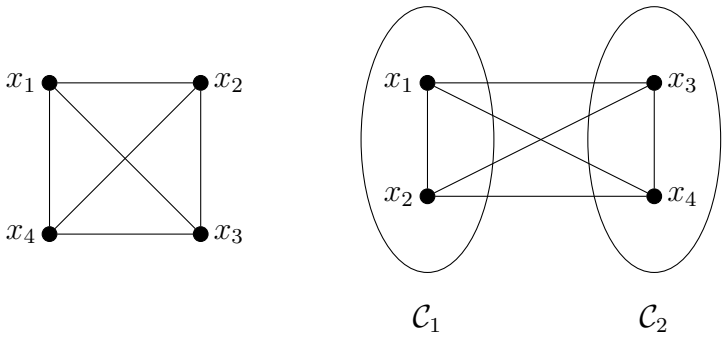


Figure 3.1.3 : Une partition b-domatique couplée de K_4

Proposition 3.1.8 *Soit $K_{n,n}$ un graphe biparti complet, alors*

$$bd_{pr}(K_{n,n}) = n.$$

Preuve. Soit $K_{n,n}$ un graphe biparti complet de bipartition (X, Y) telle que $X = (x_1, ..., x_n)$ et $Y = (y_1, ..., y_n)$. Vu que $\delta(K_{n,n}) = n$, alors d'après la Proposition 3.1.1, $bd_{pr}(K_{n,n}) \leq n$.

Soit $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_k\}$ une partition b-domatique couplée de $K_{n,n}$ de cardinalité k. Il est à souligner que chaque arête de $K_{n,n}$ est un dominant couplée de $K_{n,n}$. Ainsi, chaque classe $\mathcal{C}_i$ contient exactement une seule arête d'après la Proposition 3.1.2. Donc, $k \geq n$, et par conséquent $bd_{pr}(K_{n,n}) = n$. ■

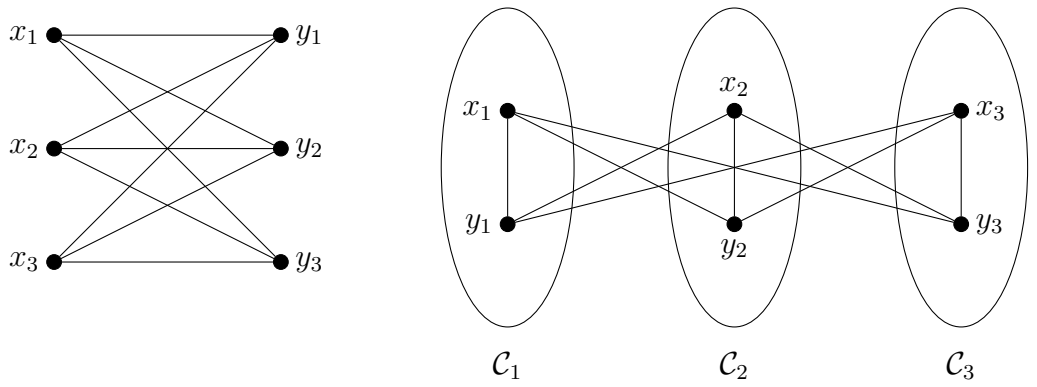


Figure 3.1.4 : Une partition b-domatique couplée de $K_{3,3}$

Proposition 3.1.9 *Soit C_n un cycle d'ordre n pair, alors*

$$bd_{pr}(C_n) = \begin{cases} 2 \text{ si } n \equiv 0\,[4] \\ 1 \text{ sinon} \end{cases} .$$

Preuve. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les sommets de C_n. D'après la Proposition 3.1.1, $bd_{pr}(C_n) \leq 2$.

Supposons que $bd_{pr}(C_n) = 2$, et soit $P = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$ une partition b-domatique couplée de C_n. Comme C_n est un graphe 2-régulier, alors chaque classe $\mathcal{C}_i$ contient un P_2 comme sous-graphe induit et le nombre de P_2 dans $\mathcal{C}_1$ égale le nombre de P_2 dans $\mathcal{C}_2$, donc

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}_1| &= k \times |P_2| = 2k. \\ \text{et } |\mathcal{C}_2| &= k \times |P_2| = 2k. \end{aligned}$$

, c'est à dire $n = 4k$ est un multiple de 4. Sinon n ne divise pas 4, alors il existe un P_2 que n'est pas dominé par $\mathcal{C}_i$ donc $bd_{pr}(C_n) \neq 2$. D'où, $bd_{pr}(C_n) = 1$. ■

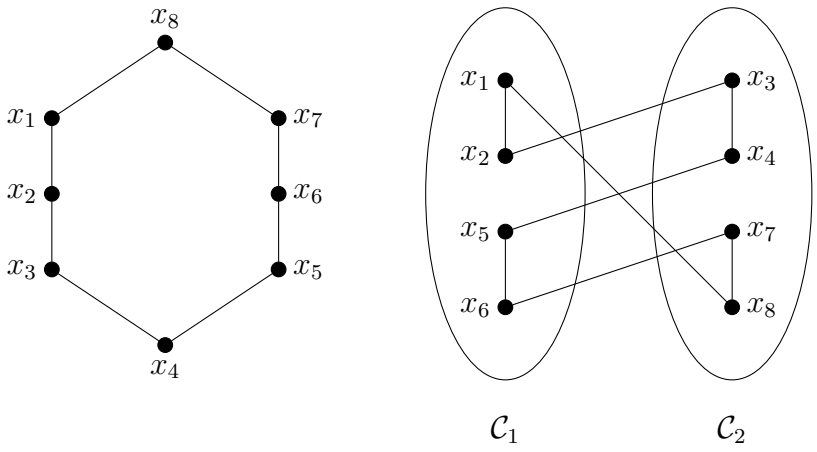


Figure 3.1.5 : Une partition b-domatique couplée de C_8

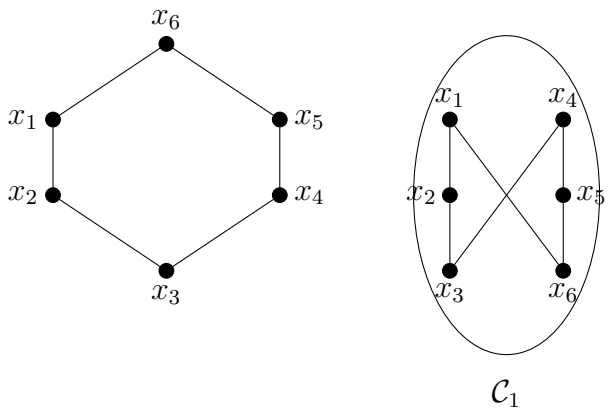


Figure 3.1.6 : Une partition b-domatique couplée de C_6

Proposition 3.1.10 *Soit G un graphe. Si G admet un couplage parfait, alors*

$$bd_{pr}(G \boxdot K_2) = 2.$$

Preuve. Soient G_1 et G_2 deux copies de $(G \boxdot K_2)$ et soit $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$ une partition domatique couplée telle que $\mathcal{C}_1$ contient le graphe G_1 et $\mathcal{C}_2$ contient le graphe G_2. Chaque sommet de G_1(ou G_2) admet un seul voisin dans G_2(ou G_1 respectivement), alors $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont des dominants minimaux couplés. D'après la Proposition 3.1.5, $\mathcal{P}$ est b-domatique couplée. D'où, $bd_{pr}(G \boxdot K_2) = 2$. Voir Figure 3.1.7. ■

Théorème 3.1.1 *Soit K_n un graphe complet d'ordre n, alors*

$$bd_{pr}(K_n \boxdot K_2) = \begin{cases} 2 \text{ si } n \text{ pair} \\ \frac{n+1}{2} \text{ sinon} \end{cases}$$

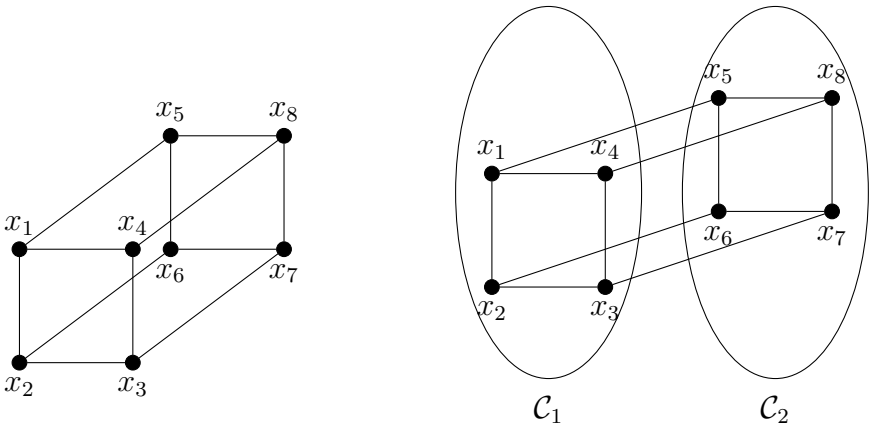


Figure 3.1.7 : Une partition b-domatique couplée de $C_4 \boxdot K_2$

Preuve. Posons $G = K_n \boxdot K_2$. Soient G_1 et G_2 les deux copies de G avec $V(G_1) = \{x_1, ..., x_n\}$ et $V(G_2) = \{y_1, ..., y_n\}$.

Si n est pair, alors $G_i, (i = 1, 2)$ admet un couplage parfait, et par la Proposition 3.1.10, $bd_{pr}(G) = 2$.

Si n est impair G_i $(i = 1, 2)$ ne possède pas de couplage parfait tandis que G admet un couplage parfait. Observons que pour $i \in \{1, ..., n\}$, l'ensemble $\{x_i, y_i\}$ est un dominant couplé minimal de G. Nous allons d'abord montra que $bd_{pr}(G) \leq \frac{n+1}{2}$. Pour cela, il suffit de construire une partition b-domatique couplée $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_{\frac{n+1}{2}}\}$ de cardinalité $\frac{n+1}{2}$ de la façon suivante.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\frac{n+1}{2}} &= \{x_n, y_n\}\mathcal{C}_{\frac{n-1}{2}} = \\ \{x_{n-2}, x_{n-1}, y_1, y_2\}. & \\ \mathcal{C}_i &= \{x_{2i-1}, x_{2i}, y_{2i+1}, y_{2i+2}\},\ i \in \{1, ..., \frac{n-3}{2}\}. \end{aligned}$$

Cette partition est bien b-domatique couplée de cardinalité $\frac{n+1}{2}$ car chacune des classe $\mathcal{C}_{\frac{n-1}{2}}$ et $\mathcal{C}_i, i \in \{1, ..., \frac{n-3}{2}\}$ contiennent deux arêtes indépendentes, et la classe $\mathcal{C}_{\frac{n+1}{2}} = \{x_n, y_n\}$ est une dominant couplé minimal. D'où, $bd_{pr}(G) \leq \frac{n+1}{2}$.

Supposons que $bd_{pr}(G) = k < \frac{n+1}{2}$, et considérons une partition b-domatique couplée $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_k\}$. Appelons une arête croisée une arête x_iy_i ayant ses deux extrémités dans deux copies différentes, et une arête parallèle une arête non croisée. Etant donné que n est impair et que pour $i \in \{1, ..., k\}$, $G[C_i]$ possède un couplage parfait, alors il existe une classe

$\mathcal{C}_l$,pour un certain $l \in \{1, ..., k\}$ telle que $G[\mathcal{C}_l]$ possède une arête croisée e_l. Sans perte de généralité, posons $l = 1$ et $e_1 = x_1y_1$. Nous réclamons les faits suivants.

Fait 1. *e_1 est la seule arête croisée de $G[\mathcal{C}_1]$.*

Preuve. Si $G[\mathcal{C}_1]$ possède une autre arête croisée $e_2 = x_2y_2$, alors vu que $\{x_1, y_1\}$ et $\{x_2, y_2\}$ sont des dominants couplés minimaux de G, la partition $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1\backslash\{x_2, y_2\}, , ..., \mathcal{C}_k, \{x_2, y_2\}\}$ est domatique couplée de cardinalité $k + 1$, contradiction. Ceci termine la preuve du **Fait 1.**

En conséquence, pour $i \in \{2, ..., k\}, G[\mathcal{C}_i]$ possède au plus une arête croisée.

Fait 2. *Tous les sommets de $\mathcal{C}_1\diagdown\{x_1, y_1\}$ appartiennent soit à $V(G_1)$, soit à $V(G_2)$, mais pas aux deux à la fois.*

Preuve. Vu que $G[C_1]$ contient une seule arête croisée, alors toutes autres arêtes de $G[\mathcal{C}_1]$ sont parallèles. Supposons au contraire que pour $i = 1, 2$, $(\mathcal{C}_1\diagdown\{x_1, y_1\}) \cap V(G_i) \neq \emptyset$. Alors $G[\mathcal{C}_1]$ contient au moins deux arêtes parallèles, disons x_sx_t et y_py_q tels que $s, t, p, q \neq 1$. Dans ce cas, $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1\diagdown\{x_1, y_1\}, , ..., \mathcal{C}_k, \{x_1, y_1\}\}$ est une partition domatique couplée de cardinalité $k + 1$ car $\{x_sx_t, y_qy_p\}$ est un dominant couplé de G, contradiction. Ceci termine la preuve du **Fait 2.**

En conséquence et sans perte de généralité, supposons que $\mathcal{C}_1\diagdown\{x_1, y_1\} \subset V(G_1)$ et $x_3x_4 \in \mathcal{C}_1$

Fait 3. Pour $i \neq 1$, toutes les arêtes de $G[\mathcal{C}_1]$ sont parallèles.

Preuve. Supposons au contraire qu'il existe aussi une autre classe, disons $\mathcal{C}_2$ de $\mathcal{P}$ qui contient une arête croisée $e_2 = x_2y_2$. D'après le Fait 2, $(\mathcal{C}_2\diagdown\{x_2, y_2\})$ contient uniquement les sommets de $V(G_1)$ ou $V(G_2)$ mais pas les deux à la fois. Si $\mathcal{C}_2\diagdown\{x_2, y_2\} \subset V(G_2)$, alors $\mathcal{P} = \{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, ..., \mathcal{C}_k, (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2\diagdown\{x_2, y_2\})\}$ est domatique couplée de cardinalité $k + 1$, contradiction. Si pour toute classe $\mathcal{C}_i$ contenant une arête croissée x_iy_i, on a $\mathcal{C}_i\diagdown\{x_i, y_i\} \subset V(G_1)$, alors il existe forcément une classe $\mathcal{C}_r$ $(r \neq i)$ qui ne contient aucune arête croisée telle que $G[\mathcal{C}_r]$ possède au moins deux arêtes parallèles y_sy_t et y_py_q de $E(G_2)$ et au moins une arête parallèle x_fx_g de $E(G_1)$. Mais dans ce cas,

$\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1 \setminus \{x_1, y_1\}, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_i \setminus \{y_s, y_t\}, ..., \mathcal{C}_k, \{x_1, y_1, y_s, y_t\}\}$ est domatique couplée de cardinalité $k+1$, contradiction.

Ceci termine la preuve du **Fait 3.**

En conséquence, $\mathcal{C}_1$ *est la seule classe qui contient une arête croisée. Ceci implique qu'il existe une classe* $\mathcal{C}_r$ $(r \neq 1)$ qui contient au moins deux arêtes parallèles $y_s y_t$ et $y_p y_q$. Mais alors $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1 \setminus \{x_1, y_1\}, ..., \mathcal{C}_r \setminus \{y_s, y_t\}, ..., \mathcal{C}_k, \{x_1, y_1, y_s, y_t\}\}$ est domatique couplée de cardinalité $k+1$, contradiction.

Ceci termine la preuve du Théoreme. ■

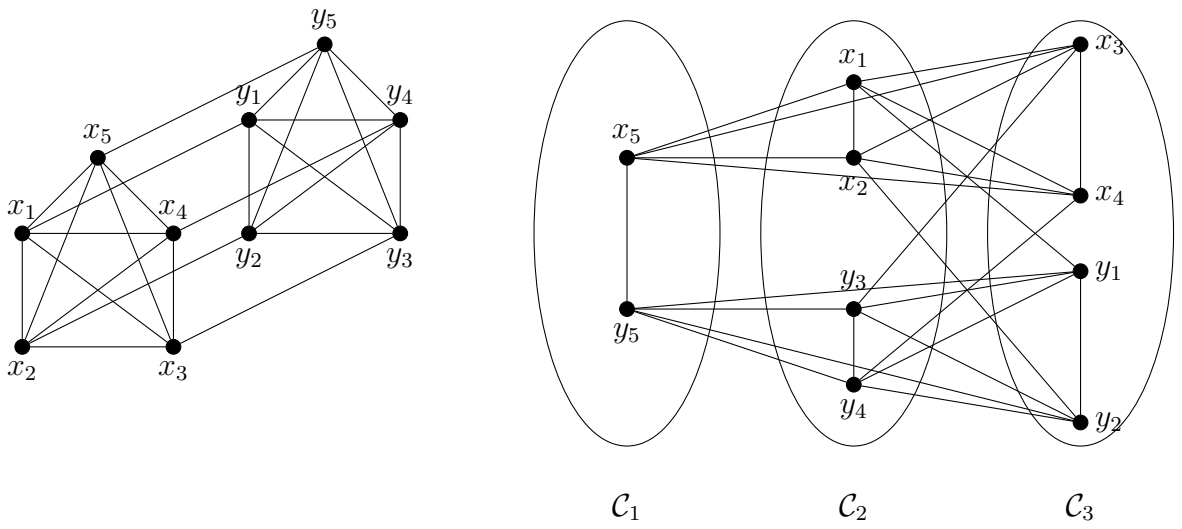


Figure 3.1.8 : Un graphe $K_5 \boxdot K_2$ et une partition b-domatique couplée

Proposition 3.1.11 *Si* G *admet un couplage parfait, alors*

$$bd_{pr}(G \boxdot K_n) \leq n$$

Preuve. Soit G un graphe d'ordre m tel que G admet un couplage parfait et K_n un graphe complet, alors $G \boxdot K_n$ contient n copies de G et admet un couplage parfait. Soit $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_n\}$ une partition domatique couplé telle que chaque classe $\mathcal{C}_i, i = 1, ..., n$ contient un copie de graphe G avec tous sommets dans chaque classe $\mathcal{C}_i, i = 1, ..., n$ admet un seul voisin dans chaque classes différentes. Supposons que la partition $\mathcal{P}$ n'est pas b-domatique c'est à dire il existe $\mathcal{P}' = \{\mathcal{C}_1 \setminus \mathcal{C}'_1, ..., \mathcal{C}_n \setminus \mathcal{C}'_n, \mathcal{C}'_1 \cup ... \cup \mathcal{C}'_n\}$ une partition domatique.

Soit $A = \{\mathcal{C}'_1 \cup ... \cup \mathcal{C}'_n\} \neq \emptyset$ c'est à dire A contient au moins deux sommets de même classe $\mathcal{C}'_i$. Donc les voisins de ces sommets dans les n copies ne domine pas la classe $\mathcal{C}_i \setminus \mathcal{C}'_i$. D'où, $bd_{pr}(G \boxdot K_n) \leq n$. ■

3.1.3 Calcul de $bd_{pr}(G)$ pour quelques classes de graphes

Graphe milieu d'un cycle

Définition 3.1.3 *Le graphe milieu de G, désigné par $M(G)$ est défini comme l'ensemble des sommets de $M(G)$ est $V(G) \cup E(G)$. Deux sommets x, y de $M(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

- $x, y \in E(G)$ et x, y sont adjacents dans G.
- $x \in V(G)$, $y \in E(G)$ et x est incident à y dans G.

Proposition 3.1.12 *Soit C_n un cycle d'ordre n pair, alors*

$$bd_{pr}(M(C_n)) = 2.$$

Preuve. Soit $G = M(C_n)$ le graphe milieu du cycle C_n. On pose $V(C_n) = x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $E(C_n) = y_1, y_2, \ldots, y_n$ avec y_j adjacent à x_j et x_{j+1}, $1 \leq j \leq n-1$ et y_n adjacent à x_n et x_1.

Soit $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$ une partition domatique couplée de G avec $\mathcal{C}_1 = \{x_i, y_i, i \equiv 0(mod 2)\}$ où $\mathcal{C}_2 = \{x_i, y_i, i \equiv 1(mod 2)\}$. Chaque $\mathcal{C}_i$, $i = 1, 2$ est un dominant minimal couplé. Alors, d'après la proposition 3.1.5, $bd_{pr}(M(C_n)) = 2$. Voir Figure 3.1.9. ■

Graphe de Petersen

Proposition 3.1.13 *Soit P le graphe de Petersen, alors*

$$bd_{pr}(P) = 1.$$

Preuve. Soit P le graphe de Petersen d'ordre $n = 10$ et contient seulement un C_5 comme un sous-graphe induit. Soit $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1\}$ une partition domatique telle que $\mathcal{C}_1 = \{x_1, ..., x_{10}\}$. Supposons que $\mathcal{P}$ n'est pas b-domatique c'est à dire il existe une partition $\mathcal{P}' = \{\mathcal{C}_1 \setminus \mathcal{A}, \mathcal{A}\}$.

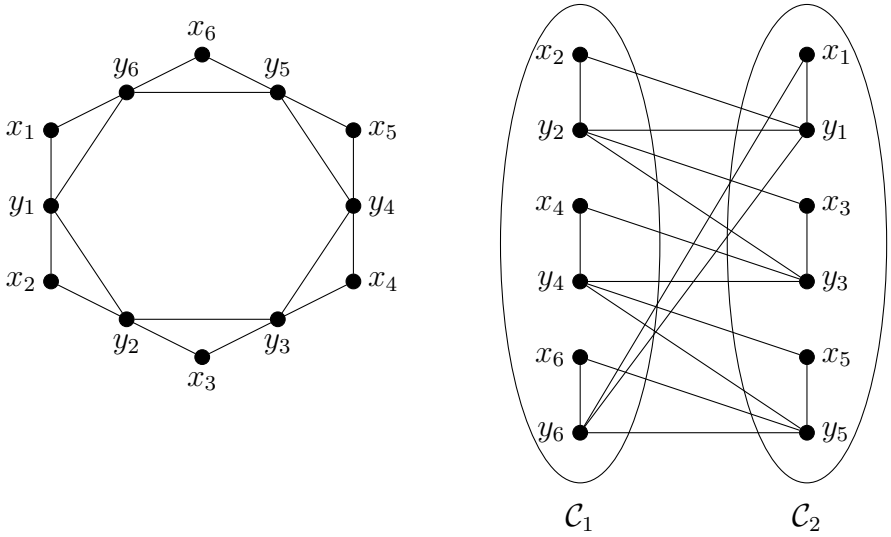


Figure 3.1.9 : Une partition b-domatique couplée d'un graphe milieu d'un cycle pair

Vu que $\gamma_{pr}(P) = 6$ et le graphe de Petersen possède cinq couplages, alors chaque classe de $\mathcal{P}'$ contient au moins trois couplages et dans ce cas, cela est impossible car $|\mathcal{A}| \geq 6$ donc la partition $\mathcal{P}'$ n'est pas domatique. D'où, $bd_{pr}(P) = 1$. ■

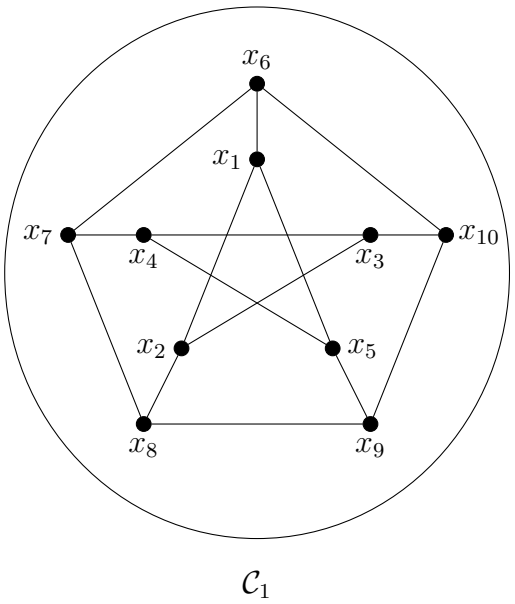


Figure 3.1.10 : Partition b-domatique couplée d'un graphe de Peterson

Graphe roue

Définition 3.1.4 *Le graphe roue W_n est un graphe d'ordre $n \geq 4$ avec $2(n-1)$ arêtes, formé en ajoutant un sommet universel adjacents à tous les sommets de cycle C_{n-1}.*

Proposition 3.1.14 *Soit W_n une roue d'ordre n pair, alors*

$$bd_{pr}(W_n) = 2.$$

Preuve. Soit W_n une roue d'ordre n avec $C_{n-1} = \{x_1, ..., x_{n-1}\}$ et y un sommet universel. Soit $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$ une partition domatique couplée telle que $\mathcal{C}_1 = \{y, x_1\}$, $\mathcal{C}_2 = \{x_2, ..., x_{n-1}\}$, chaque classe est un dominant minimal couplé. D'après la proposition 3.1.5, $bd_{pr}(W_n) = 2$. ■

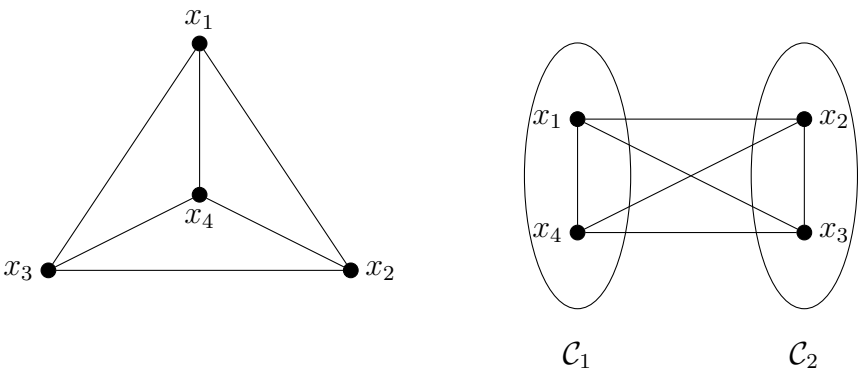


Figure 3.1.11 : Partition b-domatique couplée de la roue

3.2 Partition b-domatique connexe

Une partition domatique connexe $\mathcal{P}$ est dite b-domatique connexe si aucune partition domatique connexe $\mathcal{P}'$ de cardinalité plus grande que $\mathcal{P}$ peut être obtenue en rassemblant des sous-ensembles de certaines classes de $\mathcal{P}$ pour former une nouvelle classe.

Plus formellement la partition b-domatique connexe peut être définie comme suit.

Définition 3.2.1 *Une partition $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_p\}$ est b-domatique connexe s'il n'existe pas p sous-ensembles $\mathcal{C}'_i \subset \mathcal{C}_i$ telle que la partition $\mathcal{P}' = \{\mathcal{C}_1 \setminus \mathcal{C}'_1, \mathcal{C}_2 \setminus \mathcal{C}'_2, \ldots, \mathcal{C}_p \setminus \mathcal{C}'_p, \mathcal{C}'_1 \cup \mathcal{C}'_2 \cup \ldots \cup \mathcal{C}'_p\}$ est une partition domatique connexe, avec $(\mathcal{C}'_1 \cup \mathcal{C}'_2 \cup \ldots \cup \mathcal{C}'_p \neq \emptyset)$.*

Définition 3.2.2 *La cardinalité minimale d'une partition b-domatique connexe d'un graphe G est appelée le nombre b-domatique connexe, noté $bd_c(G)$.*

3.2.1 Propriétés de $bd_c(G)$

On donne dans cette section quelques propriétes de partition b-domatique connexe.

On note que toute partition domatique connexe optimale est une partition b-domatique connexe et toute partition b-domatique connexe est une partition a-domatique connexe. D'après les Théorèmes 2.2.17, 2.2.8 et 2.1.1, le résultat suivant est immédiat.

Proposition 3.2.1 *Soit G un graphe connexe, alors*

$$1 \leq ad_c(G) \leq bd_c(G) \leq d_c(G) \leq \delta(G) + 1.$$

D'après le Théorème 2.2.19 et la Proposition 3.2.1, on a le résultat suivant.

Corollaire 3.2.1 *Tout graphe connexe G satisfait*

$$bd_c(G) \leq \frac{n}{\gamma_c(G)}.$$

Observation 3.2.1 *Toute classe d'une partition b-domatique connexe contient au plus un sommet universel.*

Proposition 3.2.2 *Soit K_n un graphe complet d'ordre n, alors*

$$bd_c(K_n) = n.$$

Preuve. Vu que $\gamma_c(K_n) = 1$, alors $bd_c(K_n) \leq n$ d'après le Corollaire 3.2.1.

Soit $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_k\}$ une partition b-domatique connexe de K_n de cardinalité k. Notons que chaque sommet de K_n est un dominant connexe de K_n. De ce fait, chaque classe $\mathcal{C}_i$ contient un seul sommet d'après l'Observation 3.2.1. D'où, $k \geq n$, et par conséquent $bd_c(K_n) = n$. ■

En utilisant le résultat de Théorème 2.2.20 et la Proposition 3.2.1, on déduit le Théorème suivant.

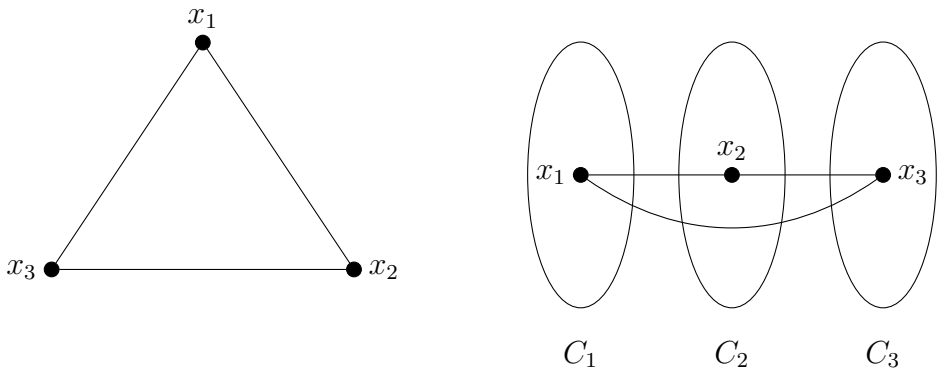


Figure 3.2.1 : Une partition b-domatique connexe de K_3.

Théorème 3.2.1 *Tout graphe connexe G différent d'un graphe complet, satisfait*

$$bd_c(G) \leq \kappa_0(G).$$

Proposition 3.2.3 *Toute partition domatique connexe $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_k\}$ dont chaque classe est un ensemble dominant minimal connexe de G est b-domatique connexe.*

Preuve. *Etant donné que chaque classe est un ensemble dominant minimal connexe du G, $\mathcal{D}_i = \mathcal{C}_i$ pour chaque i et $V \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{D}_i$ est non dominant connexe de G.* ■

Proposition 3.2.4 *Si G possède une partition b-domatique connexe de cardinalité 2, alors*

$$bd_c(G) = 2.$$

Proposition 3.2.5 *Soit P_n une chaîne d'ordre n, alors*

$$bd_c(P_n) = \begin{cases} 2 \text{ si } n = 2 \\ 1 \text{ si } n \geq 3 \end{cases}.$$

Preuve. Soit P_n une chaîne d'ordre n. pour $n = 2$, alors $bd_c(P_2) = 2$ d'après la Proposition 3.2.2.

Pour $n \geq 3$, puisque $\kappa_0(P_n) = 1$ et d'après le Théorème 3.2.1 et la Proposition 3.2.1 alors $bd_c(P_n) = 1$. Voir Figure 3.2.2. ■

Proposition 3.2.6 *Soit C_n un cycle d'ordre n, alors*

$$bd_c(C_n) = \begin{cases} 3 \text{ si } n = 3 \\ 2 \text{ si } n = 4 \\ 1 \text{ si } n \geq 5 \end{cases}.$$

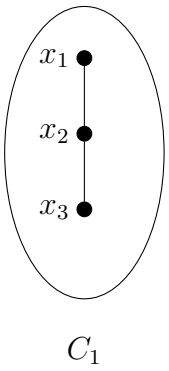


Figure 3.2.2 : Partition b-domatique connexe de la chaîne P_3.

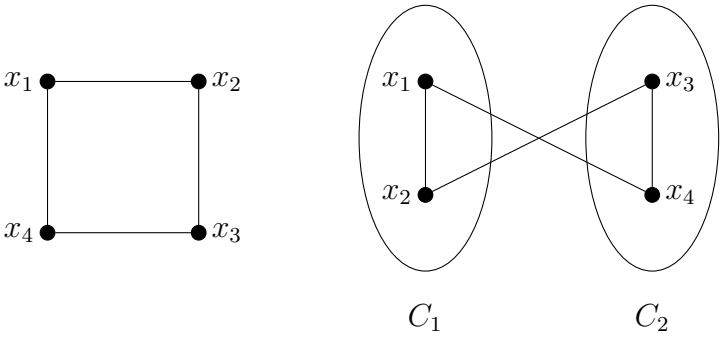


Figure 3.2.3 : Une partition b-domatique connexe du cycle C_4 .

Preuve. Soit C_n un cycle d'ordre n.

Cas 01: Pour $n = 3$, alors $bd_c(C_3) = 3$ d'après la Proposition 3.2.2.

Cas 02: Pour $n = 4$, alors $bd_c(C_4) = 2$ d'après l'Observation 3.2.1.

Cas 03: Pour $n \geq 5$, vu que $\kappa_0(C_n) = 2$. D'après le Théorème 1.4.1, alors$bd_c(C_n) \leq 1 + \frac{2}{n-2}$ et d'après la Proposition 3.2.1 $bd_c(C_n) = 1$. Voir Figure 3.2.3 et 3.2.4. ■

3.2.2 Quelques résultats de bd_c pour certains graphes

Proposition 3.2.7 *Soit P un graphe de Petersen, alors*

$$bd_c(P) = 2.$$

Preuve. Soit $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$ une partition domatique connexe telle que $\mathcal{C}_1 = \{x_1, ..., x_5\}$ et $\mathcal{C}_2 = \{y_1, ..., y_5\}$, chaque classe est un dominant minimal connexe. D'après la proposition 3.2.4, $bd_c(P) = 2$. Voir Figure 3.2.5 ■

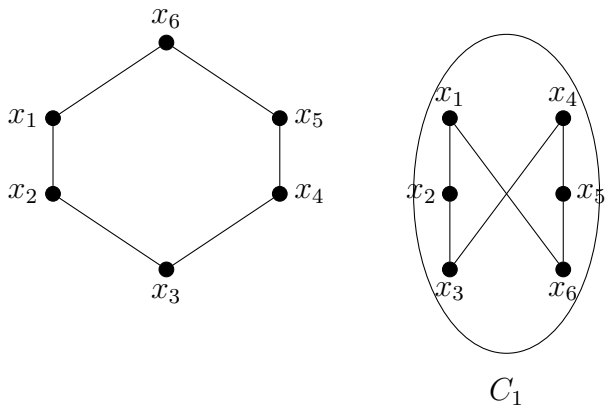


Figure 3.2.4 : Une partition b-domatique connexe d'un cycle C_6 .

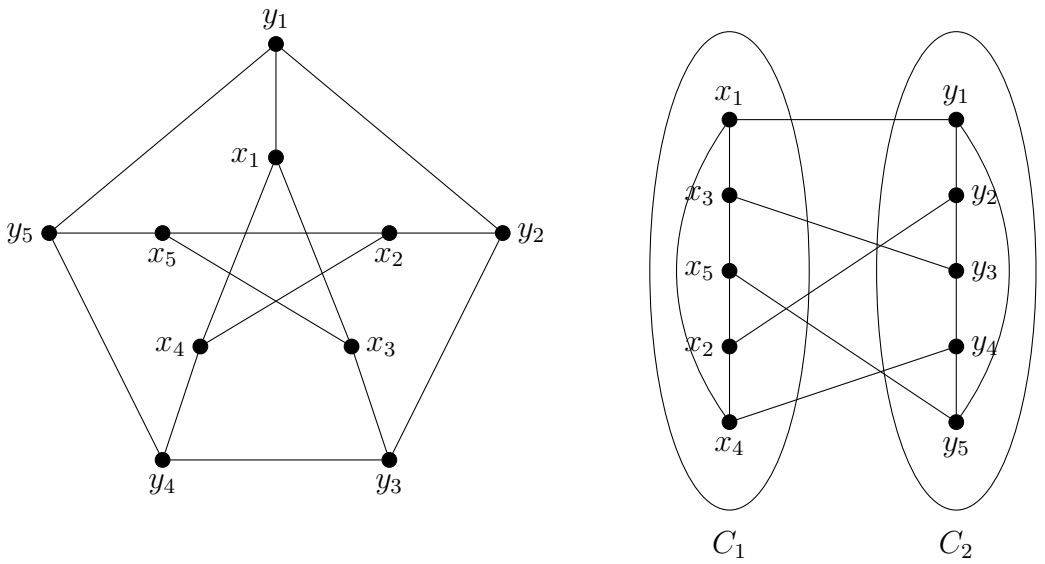


Figure 3.2.5 : Une partition b-domatique connexe du graphe de Petersen

Théorème 3.2.2 *Soit W_n une roue d'ordre n, alors*

$$bd_c(W_n) = \begin{cases} 4 \ si \ n = 4 \\ 3 \ si \ n = 5 \\ 2 \ si \ n \geq 6 \end{cases} .$$

Preuve. Soit W_n une roue d'ordre n avec $C_{n-1} = \{x_1, ..., x_{n-1}\}$ et y le sommet universel.

Cas 01: Pour $n = 4$ vu que $\gamma_c(W_4) = 1$, alors $bd_c(W_4) \leq 4$ d'après le Corollaire 3.2.1.

Soit $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_k\}$ une partition b-domatique connexe de W_4. Il est à noter que chaque sommet de W_4 est un dominant connexe. Ce que veut dire que chaque classe

$\mathcal{C}_i$ contient un seul sommet d'après la Proposition 3.2.1. D'où, $k \geq 4$, et par conséquent $bd_c(W_4) = 4$.

Cas 02: Pour $n = 5$ vu que $\kappa_0(W_5) = 3$, alors $bd_c(W_5) \leq 3$ d'après le Théorème 3.2.1.

Maintenant supposons que $bd_c(W_5) = k < 3$, c'est à dire il existe $\mathcal{P}' = \{\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_k\}$ une partition b-domatique connexe telle que $\mathcal{C}_1$ contient deux sommets adjacents avec le sommet universel y, alors la partition $\mathcal{P}' = \{\mathcal{C}_1 \setminus \{y\}, ..., \mathcal{C}_k, \{y\}\}$ est domatique connexe, contradiction. D'où, $bd_c(W_5) = 3$.

Cas 03: Pour $n \geq 6$. Soit $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$ une partition domatique connexe telle que $\mathcal{C}_1 = \{y\}$, $\mathcal{C}_2 = \{x_1, ..., x_{n-1}\}$, chaque classe est un dominant minimal connexe. D'après la proposition 3.2.4, $bd_c(W_n) = 2$. ■

Conclusion

Au cours de ce mémoire, nous avons étudié quelques paramètres des partitions b-domatiques d'un graphe simple.

En premier lieu, nous nous sommes intéressés à la notion du nombre domatique, puis on a rappelé certaines propriétés sur les paramètres d'une partition domatique et sur le nombre b-domatique. Ensuite, nous avons présenté quelques nouveaux résultats sur le nombre b-domatique couplé et le nombre b-domatique connexe et déterminé la valeur exacte de ces paramètres pour certains types des graphes.

En perspectives, un grand nombre de problèmes restent ouverts dans le domaine et peuvent être étudiés ultérieurement. On citera, par exemple:

- Détermination soit des valeurs exactes, soit des bornes pour $bd_{pr}(G)$ et $bd_c(G)$ et pour l'étude les graphes critiques.

- Etudier d'autres types des graphes par rapport au paramètre $bd_{pr}(G)$ et $bd_c(G)$.

- Détermination de bd_{pr} et bd_c pour les deux produits (lexicographique, et fort) de deux graphes quelconques.

Bibliographie

[1] S. Arumugam. TOTAL DOMATIC NUMBER OF A GRAPH-1. Indian J. pure appl. Math. 29(5), 1998

[2] C. Berge. Graphes et Hypergraphes. Dunod, Paris, 1970.

[3] C. Berge, Graphs. North Holland, 1985.

[4] C. Berge. Theory of Graphs and its Applications. Mentheun, London, 1962.

[5] B. Bollobas. Modern Graph Theory. Memphis. Marcb 15, Springer, 1998

[6] G.J. Chang, The domatic number problem, Discrete Math. 125 (1994).

[7] E. J. Cockayne et S. T. Hedetniemi, Towards a theory of domination graphs. Networks, 7 (1977).

[8] E. J. Cockayne, R. M. Dawes et S. T. Hedetniemi, Total domination in graphs. Networks, 10 (1980).

[9] E. J. Cockayne, T. W. Haynes et S. T. Hedetniemi. Extremal graphs for inequalities involving domination parameters, 1996.

[10] R. Diestel. Graph Theory. Springer, second edition. New York, 2000.

[11] O. Favaron. The b-domatic number of a graph, Discussiones Mathematics, Graph Theory 33 (2013)$747 - 757$.

[12] F. Harary , T. W, Haynes. Conditional graph theory IV: Dominating sets. Utilitas Math. To appear.

[13] F. Harary, T. W. Haynes. Nordhaus-Gaddum inequalities for domination in graphs. Discrete Math, 155, 1996.

[14] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi et P. J. Slater, Fundamentals of domination in Graphs. Marcel Dekker New York, 1998.

[15] T. W. Haynes, P. J. Slater. Paired-domination and the paired-domatic number. Congr. Nurner., $109 : 67-\cdot 72, 1995$.

[16] T. W. Haynes, P. J. Slater. Paired-domination in graph. Networks 32 (1998), $199-206$.

[17] C. F De Jaennish, "Application de l'analyse mathématique au jeu d'échecs", Petrograd, 1962.

[18] R. Laskar and S. T. Hedetniemi, Connected domination in graphs. Technical Report NO. 414, Clemson Univ (1983)

[19] O. Ore, Theory of graphs, Amer. Math soc. Colloq. Publ. 38 (1962).

[20] J. Paulraj Joseph and S. Arumugam. Domination and connectivity in graphs. Internat. J. Management Systems, $8(3) : 233-236$, 1992.

[21] E. Sampathkumar and H. B. Walikar. The connected domination number of a graph. J. Math. Phys. Sci., $13 : 607-613, 1979$

[22] B. Zelinka, Adomatic and idomatic numbers of graphs, Math. Slovaca 33 (1983).

[23] B. Zelinka, connected domatic numbers of graphs, Math. Slovaca 36 (1986).

[24] B. Zelinka, Some remarks on domatic numbers of graphs. Časop. pěst. mat. 106 (1981) $373-375$.

[25] B. Zelinka. Total domatique number of degree of vertices of a graph. Math. Slovaca, 1989.