RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique

Université Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Combinatoire Probabilités et Applications

Par

SALMI Merouan

Le nombre z-chromatique d'un graphe

Soutenu publiquement le 24/06/2025, devant le jury composé de

AOUF Hadjer	*M C B.* Univ. Médéa	Présidente de jury
AZIZI Nesrine	*M C B.* Univ. Médéa	Examinatrice
BENDALI-BRAHAM Amel	*M C B.* Univ. Médéa	Promoteur

Année universitaire 2024/2025

Rmerciement

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui m'ont soutenu durant l'élaboration de ce mémoire.

J'adresse mes sincères remerciements à mon encadrante, Mme Bendali Braham A. pour ses orientations précieuses, sa patience et son accompagnement constant tout au long de ce travail.

Je remercie également les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer ce mémoire et pour leurs observations constructives.

Je n'oublie pas mes professeurs et collègues de l'Université Docteur Yahia Fares de Medea, dont le soutien a été précieux.

Enfin, je remercie chaleureusement ma famille, en particulier mes chers parents, pour leur appui inconditionnel, tant moral que matériel, tout au long de mon parcours universitaire.

À vous tous, j'exprime ma sincère reconnaissance et ma profonde gratitude.

DEDICACE

À tous ceux avec qui j'ai partagé des moments d'effort, de réflexion et d'apprentissage,
et à ceux qui ont cru en la valeur de ce chemin, même dans ses silences,
je vous adresse ma profonde reconnaissance... À ceux qui ont été les piliers de mon parcours,

À mes chers parents, pour leur soutien inconditionnel et leurs sacrifices silencieux,

À mes professeurs, pour leur encadrement rigoureux et leur bienveillance,

À toutes les personnes qui m'ont encouragé, de près ou de loin,

Et à celle dont la présence discrète a illuminé mes instants d'effort et de doute,

je dédie humblement ce travail.

À tous ceux avec qui j'ai partagé des moments d'effort, de réflexion et d'apprentissage,
et à ceux qui ont cru en la valeur de ce chemin, même dans ses silences,
je vous adresse ma profonde reconnaissance...

Merouan Salmi

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous sommes concentrés sur la z-coloration et le nombre z-chromatique . Une z-coloration d'un graphe G est une coloration propre de ses sommets, composée de classes de couleurs $C_1, C_2, \ldots, C_k$, satisfaisant les conditions suivantes :

(i) Pour toute paire de couleurs i et j avec $1 \leq i < j \leq k$, tout sommet de couleur j est adjacent à un sommet de couleur i,

(ii) il existe un ensemble $\{u_1, \ldots, u_k\}$ de sommets de G tel que $u_j \in C_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$ et u_k est adjacent à u_j pour chaque $1 \leq j \leq k$ avec $j \neq k$, et

(iii) pour chaque i et j avec $i \neq j$, le sommet u_j a un voisin dans C_i.

Nous avons également présenté certains résultats concernant la b-coloration et la coloration de Grundy.

Dans ce mémoire, nous exposons quelques résultats connus sur la z-coloration, puis nous déterminons le nombre chromatique-z des graphes milieu et total d'une chaîne (P_n), d'un cycle (C_n).

Abstract

In this manuscript, we focused on z-coloring and the z-chromatic number. A z-coloring of a graph G is a proper vertex coloring consisting of color classes $C_1, C_2, \ldots, C_k$, satisfying the following conditions :

(i) For every pair of colors i and j with $1 \leq i < j \leq k$, every vertex of color j is adjacent to a vertex of color i,

(ii) there exists a set $\{u_1, \ldots, u_k\}$ of vertices of G such that $u_j \in C_j$ for all $j \in \{1, \ldots, k\}$ and u_k is adjacent to u_j for each $1 \leq j \leq k$ with $j \neq k$, and

(iii) for every i and j with $i \neq j$, the vertex u_j has a neighbor in C_i.

We have also presented some results concerning b-coloring and Grundy coloring.

In this manuscript, we present some known results about z-coloring, then we determine the z-chromatic number of middle and total graphs of a path (P_n) and a cycle (C_n).

ملخص

في هذه المذكرة، ركزنا على مفهوم ز-تلوين والعدد ز-الكروماتيكي. يُعرَّف ز-تلوين لرسم بياني G على أنه تلوين صحيح لرؤوسه، يتكون من فئات لونية $C_1, C_2, \ldots, C_k$، وتحقق الشروط التالية:

- لكل زوج من الألوان i وj حيث $1 \leq i < j \leq k$، فإن كل رأس من اللون j يكون مجاورًا لرأس من اللون i،
- يوجد مجموعة $\{u_1, \ldots, u_k\}$ من رؤوس G بحيث $u_j \in C_j$ لكل $j \in \{1, \ldots, k\}$، ويكون الرأس u_k مجاورًا لكل u_j حيث $1 \leq j \leq k$ و$j \neq k$،
- لكل $i = j$، يكون للرأس u_j جار في الفئة اللونية C_i.

كما قدمنا أيضًا بعض النتائج المتعلقة ب: ب-التلوين وتلوين غراندي.
في هذه المذكرة، نستعرض بعض النتائج المعروفة حول ز-التلوين ، ثم نحدد العدد ز-الكروماتيكي لكل من الرسمين البيانيين: الرسم البياني الوسط والرسم البياني الكلي لسلسلة P_n ولدورة C_n.

Table des matières

Résumé ii

Abstract iii

1 Généralités sur les graphes 2
- 1.1 Notions préliminaire et notations . . . 2
  - 1.1.1 Notions sur les graphes . . . 2
  - 1.1.2 Voisinages et degrés . . . 3
  - 1.1.3 Chaînes et cycles . . . 4
  - 1.1.4 Sous-graphes, sous-graphes induits et graphes partiels . . . 4
  - 1.1.5 Distances,excentricités et diamètres . . . 5
  - 1.1.6 Graphes isomorphes . . . 5
  - 1.1.7 Graphes particuliers . . . 6
  - 1.1.8 Cliques et ensembles stables . . . 8
  - 1.1.9 Graphes Milieux et Graphes Totals . . . 8
  - 1.1.10 Graphes de Harary . . . 9
- 1.2 Quelques opérations sur les graphes . . . 10
  - 1.2.1 Suppression d'un sommet d'un graphe . . . 10
  - 1.2.2 Suppression d'une arête d'un graphe . . . 10
  - 1.2.3 Remplacement d'un sommet d'un graphe par une étoile . . . 11
  - 1.2.4 Autres opérations . . . 11
- 1.3 Coloration des sommets d'un graphe . . . 13
  - 1.3.1 Bornes et valeurs exactes sur le nombre chromatique . . . 14

2 b-coloration, coloration de Grundy et z-coloration 17
- 2.1 b-coloration et le nombre b-chromatique . . . 17
  - 2.1.1 Quelques résultats existants sur la b-coloration . . . 18
- 2.2 Coloration de Grundy . . . 22
  - 2.2.1 Quelques résultats existants sur la coloration de Grundy . . . 22
  - 2.2.2 Théorème d'interpolation . . . 24
- 2.3 z-coloration et le nombre z- chromatique . . . 26
  - 2.3.1 Quelques résultats existants sur le nombre z- chromatique . . . 27

3 Nouveaux résultats sur les z-colorations des graphes 29
- 3.1 Nombre z-chromatique de certains graphes particuliers . . . 29
  - 3.1.1 Nombre z-chromatique du graphe milieu et du graphe total d'un chaîne . . . 29
  - 3.1.2 Nombre z-chromatique du graphe milieu et du graphe total d'un cycle . . . 34

Bibliographie 40

Table des figures

1.1 Graphe simple comporte 9 sommets et 9 arêtes. 3
1.2 Exemples d'un cycle et d'une chaîne. 4
1.3 Exemples d'un sous-graphe, d'un sous-graphe induit et d'un graphe partiel de C_8. 5
1.4 Exemple représentant deux graphes isomorphes. 5
1.5 Exemples d'un graphe discret D_{10}, d'un graphe complet K_{10} et d'un graphe complémentaire $\overline{C}_{10}$. 6
1.6 Exemple d'un graphe 3-régulier. 6
1.7 Exemples d'un graphe biparti, d'un graphe biparti complet et d'une étoile. 7
1.8 Exemples d'un arbre et d'une chenille. 7
1.9 Exemples d'une clique et d'un stable d'un graphe G. 8
1.10 Exemples d'un graphe milieu et d'un graphe total de P_4. 9
1.11 Exemples d'un graphe milieu et d'un graphe total de C_3. 9
1.12 Graphes de Harary. 10
1.13 Exemple représente la suppression d'un sommet d'un graphe G. 10
1.14 Exemple représente la suppression d'une arête d'un graphe G. 11
1.15 Exemple représente la suppression d'une arête d'un graphe G. 11
1.16 Exemples d'une coloration propre et d'une coloration optimale d'un graphe G. 14

2.1 Exemple d'un b-coloration du graphe cycle C_6. 18
2.2 Exemple d'un coloration de Grundy. 23
2.3 Coloration de Grundy $M(P_3)$. 24
2.4 Coloration de Grundy $T(P_4)$. 25
2.5 coloration de Grundy $M(C_3)$. 25
2.6 Coloration de Grundy $T(C_4)$. 26
2.7 Exemple d'un z-coloration du graphe cycle C_6. 27

3.1 z-coloration de $M(P_2)$. 30
3.2 z-coloration de $M(P_3)$. 30
3.3 z-coloration de $M(P_n)$ si $n \geq 3$. 31
3.4 z-coloration de $T(P_2)$ et $T(P_3)$. 32
3.5 z-coloration de $T(P_4)$ et $T(P_5)$. 33
3.6 z-coloration de $T(P_n)$ si $n \geq 6$. 33
3.7 z-coloration de $M(C_3)$. 34
3.8 z-coloration de $M(C_n)$. 35
3.9 z-coloration de $T(C_3)$. 36
3.10 z-coloration de $T(C_4)$. 37
3.11 z-coloration de $T(C_5)$. 38

Notation

- V est l'ensemble des sommets.
- E est l'ensemble des arêtes.
- $d_G(v)$: Le degré du sommet v dans G (nombre d'arêtes incidentes à v).
- $\Delta(G)$: Le degré maximal d'un graphe G.
- $\delta(G)$: Le degré minimal d'un graphe G.
- $\chi(G)$: Le nombre chromatique du graphe G, c'est-à-dire le plus petit nombre de couleurs nécessaire pour colorier ses sommets de manière propre.
- $\omega(G)$: La taille de la plus grande clique dans G.
- $\alpha(G)$: Le nombre de stabilité de G, c'est-à-dire la taille maximale d'un ensemble stable (indépendant).
- C_n : Un cycle d'ordre n (graphe cyclique).
- K_n : Un graphe complet d'ordre n (chaque sommet est adjacent à tous les autres).
- P_k : Une chaîne (ou un chemin) de longueur k.
- $M(G)$: Le graphe milieu (*Middle Graph*) de G.
- $T(G)$: Le graphe total (*Total Graph*) de G.
- $\Gamma(G)$: Le nombre de grundy d'un graphe G.
- $b(G)$: Le nombre b-chromatique d'un graphe G.
- $z(G)$: Le nombre z-chromatique d'un graphe G.

Introduction

L'analyse combinatoire et les probabilités constituent un domaine fondamental des mathématiques qui étudie les structures discrètes, les phénomènes aléatoires et leurs interactions. Ce champ se distingue par sa capacité à modéliser des systèmes complexes et incertains dans des contextes aussi variés que l'informatique, la biologie, la logistique ou encore la cryptographie. Depuis une vingtaine d'années, les méthodes combinatoires et probabilistes connaissent un essor considérable, notamment grâce à leur rôle central dans l'analyse des algorithmes, la théorie des graphes, le traitement de l'information et la science des données. Plus récemment, ces outils ont été appliqués avec succès à des domaines émergents comme la bioinformatique, les réseaux sociaux, la cybersécurité, ou encore les systèmes intelligents. L'étude conjointe de la combinatoire et des probabilités offre ainsi un socle théorique riche et puissant pour résoudre des problèmes concrets liés à la complexité, à l'aléa et à l'optimisation.

L'histoire de la théorie des graphes débute avec les travaux du mathématicien suisse Leonard Euler au 18$^{\text{ème}}$ siècle, et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tel que celui des ponts de Königsberg, quand il se demandait s'il est possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même point et revenir à son point de départ. Dès le début du 20$^{\text{ème}}$ siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley, puis de Berge et d'Erdös.

Un des problèmes les plus connus de la théorie des graphes vient de la coloration des graphes, où le but est de déterminer combien de couleurs différentes suffisent pour colorer entièrement un graphe de telle façon qu'aucun sommet n'ait la même couleur que ses voisins. En 1852, le mathématicien anglais Francis Guthrie énonça le problème des quatre couleurs par une discussion à son frère, qui demanda à son professeur Auguste De Morgan si toute carte peut être coloriée avec quatre couleurs de façon que des pays voisins aient des couleurs différentes. Le problème de la coloration a suscité l'intérêt de grands chercheurs en théorie des graphes. Cet intérêt sans cesse croissant est largement motivé par le fait que beaucoup de problèmes concrets peuvent être modélisés en termes de coloration de graphes, comme l'ordonnancement de tâches, l'allocation de fréquences et le problème d'emploi du temps.

La coloration des sommets est certainement le concept le plus ancien et le plus étudié. Il s'agit d'affecter des couleurs (entiers positifs) aux sommets de telle sorte que deux sommets adjacents ne doivent pas avoir la même couleur ; une telle coloration est dite **propre (classique)**. Ce n'est qu'en 1976 que deux chercheurs, K. Appel et W. Haken, ont pu répondre

affirmativement à la conjecture des quatre couleurs. La recherche d'une réponse à ce problème est à l'origine de nombreux résultats relatifs à la coloration dans les graphes.

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Une *classe de couleur* i est un ensemble de sommets stable de V colorés avec la même couleur i. Le nombre minimum de classes de couleurs qui partitionnent l'ensemble V est le **nombre chromatique**, noté $\chi(G)$.

Beaucoup de variantes de coloration propre sont dérivées de la coloration classique, la plupart de ces colorations minimisent le nombre de couleurs nécessaires pour colorer un graphe. Il existe d'autres qui ont pour objet de maximiser le nombre de couleurs. Parmi eux, on cite la *coloration de Grundy* qui fait l'objet de ce mémoire. Un article de 1939 [14] de *Patrick Michael Grundy* (1917 1959) traitant de jeux combinatories contenait des idées qui ont conduit à la notion de coloration de Grundy dans les graphes. Cette coloration a été nommée et introduite par *C. A. Christen* et *S. M. Selkouv* [11] en 1979, dans le cadre de la théorie des jeux. La *coloration de Grundy* est une coloration propre vérifiant la propriété suivante : chaque sommet v, coloré par une couleur i doit être adjacent à au moins $i-1$ sommets colorés par chacune des couleurs j telles que $j < i$, un tel sommet est dit *sommet de Grundy*. Le *nombre de Grundy* d'un graphe G, noté $\Gamma(G)$, est le nombre maximum de couleurs nécessaires pour une coloration de Grundy de G.

La *b-coloration* est un concept important en théorie des graphes, utilisé pour améliorer le coloriage traditionnel en garantissant que chaque classe de couleur contient un *b-sommets*) connecté à toutes les autres classes de couleur. Ce concept a été introduit pour la première fois par Irving et Manlove en 1999 et est considéré comme un outil efficace pour analyser les propriétés des graphes et leurs applications pratiques. Dans ce type de coloriage, il est requis que le coloriage soit propre (c'est-à-dire qu'aucune paire de nuds adjacents n'ait la même couleur), tout en ayant au moins un nud dans chaque classe de couleur connecté à toutes les autres classes. Le nombre maximal de couleurs pouvant être utilisées dans un *b-coloriage* d'un graphe est appelé le *nombre b-chromatique*, noté $b(G)$.

Le concept de *z-coloration* des graphes représente une avancée significative dans le domaine de la théorie des graphes, offrant une approche raffinée par rapport aux méthodes classiques telles que la *coloration de Grundy* et la *b-coloration*. Introduite par Abbas Khaleghi et Manouchehr Zaker, la *z-coloration* se distingue par des propriétés plus strictes qui garantissent une meilleure optimisation dans l'utilisation des couleurs. Elle repose sur trois conditions principales : (i) toute paire de couleurs doit satisfaire une relation d'adjacence spécifique, (ii) l'existence d'un ensemble de sommets *niches* qui dominent les autres couleurs, et (iii) une connectivité particulière entre ces sommets. Ces contraintes permettent d'obtenir des colorations plus efficaces, comme le démontrent les auteurs à travers une séquence infinie de graphes où la *z-coloration* surpasse nettement les méthodes traditionnelles.

Ce mémoire est développé en trois chapitres :

- Dans le **premier chapitre**, nous rappelons quelques définitions de théorie des graphes nécessaires à la compréhension de ce mémoire. nous précisons notamment les définitions de la coloration classique.

- ❖ Dans le **deuxième chapitre**, nous étudions plusieurs résultats dans le domaine des colorations de graphes, plus précisément la **coloration de Grundy**, le **b-coloration** et le z**-coloration**. Nous expliquons comment obtenir une z**-coloration** à partir d'une **b-coloration** et d'une **coloration de grundy**, tout en clarifiant les relations entre ces différents types de colorations.
- ❖ Le **troisième chapitre** porte sur notre contribution dans le domaine de z-coloration, où nous déterminons la valeur exacte du nombre z-chromatique des graphes milieu et total d'une chaîne, d'un cycle.

Ce mémoire s'achève par une conclusion.

Chapitre 1

Généralités sur les graphes

Ce chapitre est consacré aux concepts fondamentaux et aux outils utilisés dans ce mémoire. Il est composé de deux sections.
Dans la première section, nous présenterons les notions essentielles ainsi que les notations nécessaires en théorie des graphes. Enfin, la dernière section sera consacrée aux différentes bornes de coloration des graphes en fonction de certains paramètres associés, notamment la coloration classique.

1.1 Notions préliminaire et notations

Dans cette section, nous introduirons quelques définitions afin de permettre au lecteur de se familiariser avec le vocabulaire employé dans ce mémoire.

1.1.1 Notions sur les graphes

- Les graphes constituent des structures fondamentales en théorie des graphes. Ils sont définis par deux ensembles distincts et finis :
  - Un ensemble $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dont les éléments sont appelés sommets.
  - Un ensemble $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ formé de liaisons entre les sommets, appelées arêtes.

  Ainsi, un graphe G est noté par $G = (V, E)$.
- Un sommet est généralement représenté par un point ou un cercle, tandis qu'une arête est représentée par un trait qui peut être courbé.
- Si deux sommets u et v sont reliés par une arête $e = uv$, alors u et v sont dits adjacents ou voisins, et e est dite incidente à u et v. Ces deux sommets sont appelés extrémités de e.
- Deux arêtes sont dites adjacentes si elles partagent un sommet commun.
- Un sommet u est dit isolé s'il n'est adjacent à aucun sommet.
- Une arête $e = (u, v)$ d'un graphe G est appelée boucle si ses extrémités u et v sont confondues.
- Une arête (u, v) est dite multiple s'il existe plus d'une arête reliant u et v.
- Un graphe est dit simple s'il ne contient ni boucles ni arêtes multiples.

- ❖ L'ordre d'un graphe, noté n, est le nombre de ses sommets, tandis que sa taille, notée m, est le nombre d'arêtes qu'il contient.
- ❖ Un graphe est dit trivial si $n = 1$, sinon, il sera dit *non-trivial*.

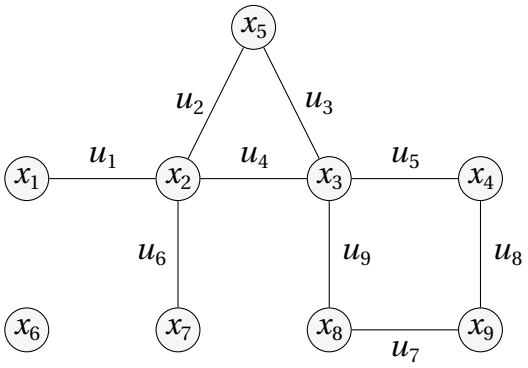


FIGURE 1.1 – Graphe simple comporte 9 sommets et 9 arêtes.

La Figure (1.1) illustre un graphe simple $G = (V, E)$, avec $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_9\}$ et $E = \{u_1, u_2, \ldots, u_9\}$. Les sommets x_1 et x_2 sont adjacents, et l'arête u_1 leur est incidente. Le sommet x_6 est l'unique sommet isolé de G.
Il est à noter que tous les graphes considérés dans ce mémoire sont finis, non orientés, simples et sans sommets isolés.

1.1.2 Voisinages et degrés

Dans un graphe G, le voisinage ouvert d'un sommet v, noté $N_G(v)$, est l'ensemble des sommets adjacents à v :

$$N_G(v) = \{u \in V : (u, v) \in E\}.$$

Le **voisinage fermé** de v, noté $N_G[v]$, inclut également v lui-même :

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}.$$

Le **degré** d'un sommet v, noté $d_G(v)$, correspond au nombre d'arêtes incidentes à v. Dans le cas d'un graphe simple, il est égal à la taille du voisinage ouvert :

$$d_G(v) = |N_G(v)|.$$

Les degrés maximal et minimal d'un graphe G, notés respectivement $\Delta(G)$ et $\delta(G)$, sont définis par :

$$\Delta(G) = \max\{d_G(v) : v \in V\}, \quad \delta(G) = \min\{d_G(v) : v \in V\}.$$

Enfin, un sommet est dit isolé si son degré est nul, et il est dit pendant si son degré est égal à 1.

1.1.3 Chaînes et cycles

- Une chaîne P_k dans un graphe G est une suite finie de sommets $v_1, v_2, \ldots, v_k$ telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, $v_i v_{i+1}$ est une arête de G. Les sommets v_1 et v_k sont appelés *extrémités* de P_k, tandis que les sommets $v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}$ sont appelés sommets intérieurs de P_k.
- La longueur d'une chaîne P_k correspond au nombre d'arêtes qui la composent.
- Une chaîne P_k est dite simple si elle n'emprunte pas plus d'une fois la même arête. Elle est dite élémentaire si tous ses sommets sont distincts. Il est important de noter que toute chaîne élémentaire est également simple.
- Un cycle d'ordre $n \geq 3$, noté C_n, est une chaîne dont les extrémités sont confondues. Un cycle élémentaire C_n est un cycle qui contient n sommets distincts.
- La longueur d'un cycle est le nombre d'arêtes qui le constituent.
- La maille d'un graphe G, notée $g(G)$, est définie comme la longueur du plus petit cycle contenu dans G.

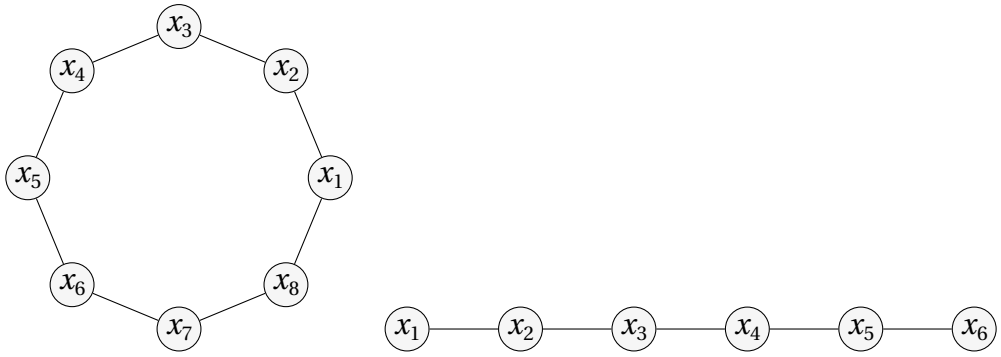
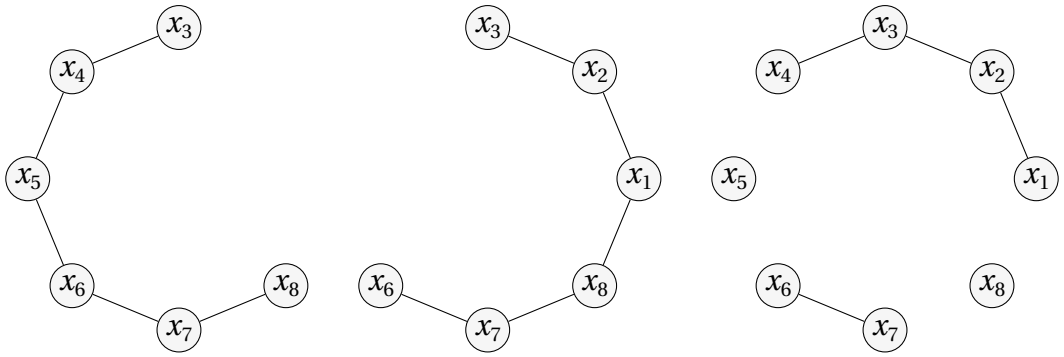


FIGURE 1.2 – Exemples d'un cycle et d'une chaîne.

1.1.4 Sous-graphes, sous-graphes induits et graphes partiels

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe.

- Un sous-graphe $H = (V(H), E(H))$ de G est un graphe vérifiant $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$.
- Un sous-graphe induit H de G est un graphe tel que $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H)$ contient toutes les arêtes de G reliant exclusivement les sommets de $V(H)$. Autrement dit, un sous-graphe induit par un ensemble de sommets A dans G est le sous-graphe contenant tous les sommets de A ainsi que toutes les arêtes existant dans G entre ces sommets. Ce graphe est noté $G[A]$.
- Un graphe partiel H de G est un graphe tel que $E(H) \subseteq E(G)$.



Sous-graphe de C_8 Sous-graphe induit de C_8 Graphe partiel de C_8

FIGURE 1.3 – Exemples d'un sous-graphe, d'un sous-graphe induit et d'un graphe partiel de C_8.

1.1.5 Distances,excentricités et diamètres

Soit $G=(V,E)$ un graphe simple, et soit $u,v \in V$.

- La distance entre u et v, notée $d(u,v)$, correspond à la longueur de la plus courte chaîne reliant u à v dans G.
- L'excentricité d'un sommet v, notée $e(v)$, est définie par :

$$e(v)=\max\{d(v,w) : w \in V\}.$$

- Le diamètre d'un graphe G, noté $\text{diam}(G)$, est donné par :

$$\text{diam}(G)=\max\{e(v) : v \in V\}.$$

1.1.6 Graphes isomorphes

Deux graphes $G=(V,E)$ et $G'=(V',E')$ sont dits isomorphes s'il existe une bijection $f : V \to V'$ préservant les relations d'adjacence entre les arêtes et assurant ainsi la correspondance des voisins pour chaque sommet.
En d'autre terme,

$$\forall x,y \in V, \quad xy \in E \iff f(x)f(y) \in E'.$$

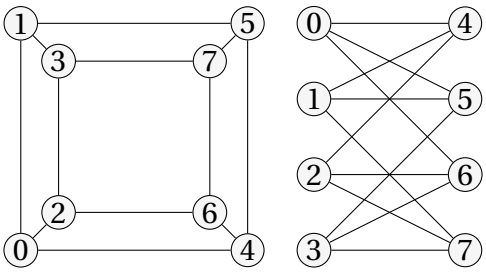
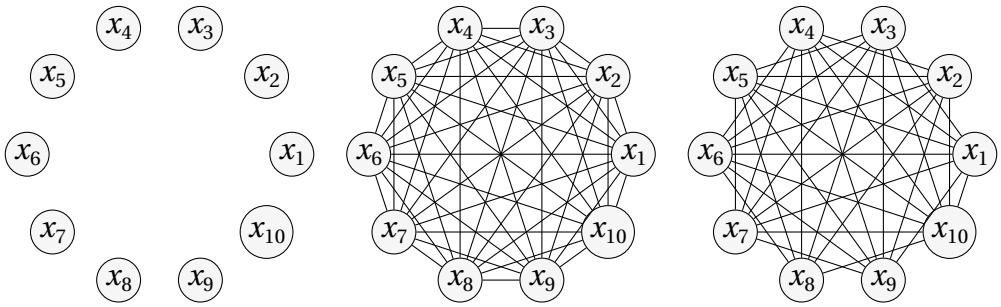


FIGURE 1.4 – Exemple représentant deux graphes isomorphes.

1.1.7 Graphes particuliers

- Un graphe complet d'ordre n, noté K_n, est un graphe dans lequel chaque paire de sommets est directement reliée par une arête (voir Figure (1.5)). Un sommet universel (ou dominant) est un sommet adjacent à tous les autres sommets du graphe. Le nombre total d'arêtes dans un graphe complet est donné par la formule $\frac{n(n-1)}{2}$, et chaque sommet y est universel.
- Un graphe discret (ou graphe nul) d'ordre n, noté D_n, est un graphe qui ne contient aucune arête (voir Figure (1.5)).
- Le graphe complémentaire d'un graphe $G=(V,E)$, noté $\overline{G}$, est le graphe défini par :

$$V(\overline{G})=V(G), \quad E(\overline{G})=\{uw \mid u,v\in V(G), uw\notin E(G)\}.$$



Graphe discret D_{10} Graphe complet K_{10} $G=\overline{C}_{10}$

FIGURE 1.5 – Exemples d'un graphe discret D_{10}, d'un graphe complet K_{10} et d'un graphe complémentaire $\overline{C}_{10}$.

- Un graphe est dit d-régulier si tous ses sommets ont un degré exactement égal à d.

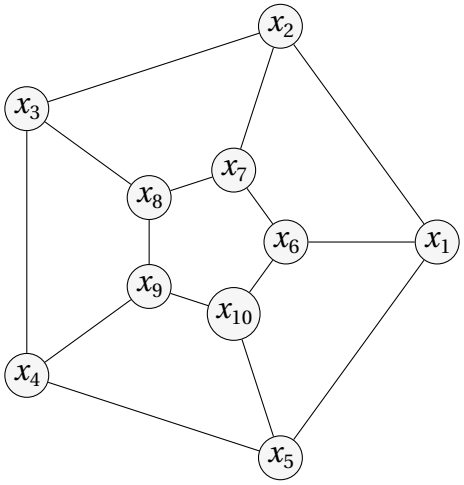


FIGURE 1.6 – Exemple d'un graphe 3-régulier.

- ❖ Un graphe biparti est un graphe dont l'ensemble des sommets peut être divisé en deux sous-ensembles V_1 et V_2 de telle sorte que les sous-graphes induits $G[V_1]$ et $G[V_2]$ soient des ensembles discrets (voir Figure (1.7)).
- ❖ Un graphe biparti complet, noté $K_{p,q}$, est un graphe biparti où les deux partitions V_1 et V_2 vérifient $|V_1| = p$, $|V_2| = q$, et chaque sommet de V_1 est relié à tous les sommets de V_2 (voir Figure(1.7)).
- ❖ En particulier, si $p = 1$, le graphe G est appelé une étoile, et le sommet unique de V_1 est désigné comme le centre de l'étoile (voir Figure(1.7)).

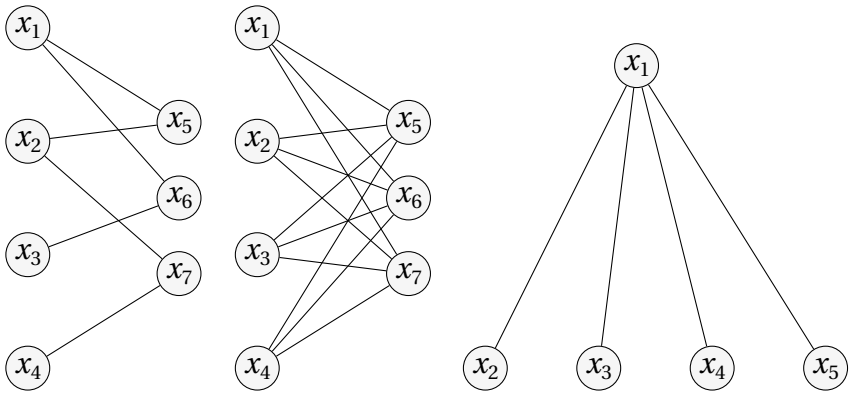


FIGURE 1.7 – Exemples d'un graphe biparti, d'un graphe biparti complet et d'une étoile.

- ❖ Un **graphe connexe** G est un graphe dans lequel chaque paire de sommets est reliée par une chaîne.
- ❖ Une **composante connexe** de G est un sous-graphe maximal de G qui est connexe. Si un graphe n'est pas connexe, on le qualifie de **non connexe**.
- ❖ Un **arbre** est un graphe connexe sans cycles. Un arbre d'ordre n possède exactement $(n-1)$ arêtes. Un arbre est généralement noté par T (voir Figure(1.8)).
- ❖ Une chenille est généralement représentée par $C(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ et définie comme un arbre particulier. Lorsque les sommets pendants adjacents aux sommets $t_1, t_2, \ldots, t_k$ sont supprimés, nous obtenons une chaîne $t_1 - t_2 - \ldots - t_k$ (voir Figure (1.8)).

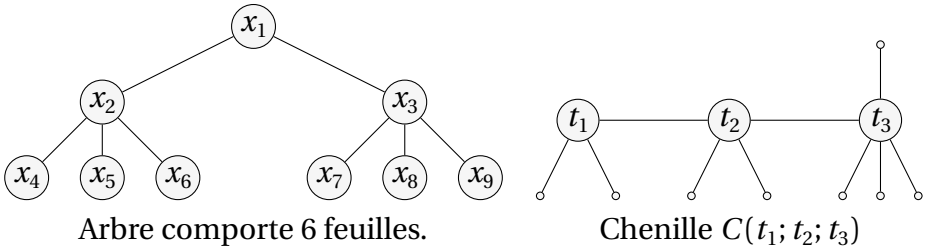


FIGURE 1.8 – Exemples d'un arbre et d'une chenille.

1.1.8 Cliques et ensembles stables

- Une **clique** dans un graphe G est un sous-ensemble de sommets dans lequel chaque paire de sommets est adjacente. La **taille** d'une clique correspond au nombre de sommets qu'elle contient. Le symbole $\omega(G)$ représente la taille de la plus grande clique dans G.
- Un **stable** dans un graphe G est un sous-ensemble de sommets, où tous les sommets sont deux à deux non adjacents. Le **nombre de stabilité** de G, noté $\alpha(G)$, est la cardinalité d'un stable de taille maximale dans G.

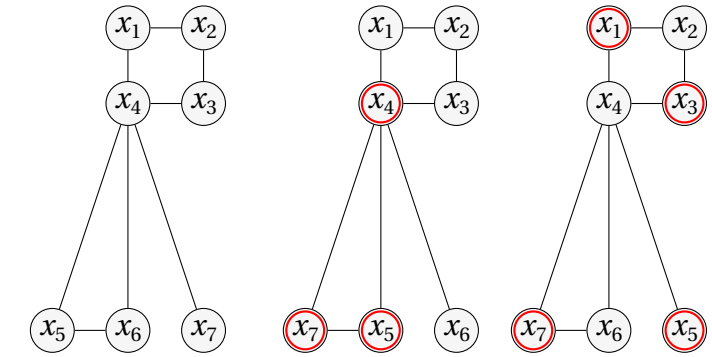


FIGURE 1.9 – Exemples d'une clique et d'un stable d'un graphe G.

1.1.9 Graphes Milieux et Graphes Totals

Graphe Milieu (Hamada et Yoshimura) [16]

Le graphe milieu d'un graphe G, noté $M(G)$,tel que l'ensemble de ses sommets est la reunion de l'ensemble des sommets $V(G)$ et de l'ensemble des arêtes $E(G)$. Deux sommets x et y de $M(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

$$\begin{cases} x, y \in E(G) \text{ et } x \text{ est adjacent à } y \text{ dans } G \\ x \in V(G),\ y \in E(G) \text{ et } x \text{ est incident à } y \text{ dans } G \end{cases}$$

Graphe Total (Behzad) [5]

Le graphe total d'un graphe G, noté $T(G)$, est un graphe dont l'ensemble des sommets est $V(G) \cup E(G)$. Deux sommets x et y de $T(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

$$\begin{cases} x, y \in V(G) \text{ et } x \text{ est adjacent à } y \text{ dans } G \\ x, y \in E(G) \text{ et } x \text{ est adjacent à } y \text{ dans } G \\ x \in V(G),\ y \in E(G) \text{ et } x \text{ est incident à } y \text{ dans } G \end{cases}$$

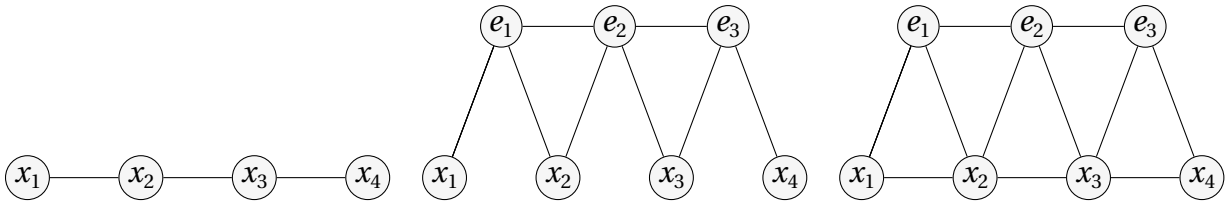


FIGURE 1.10 – Exemples d'un graphe milieu et d'un graphe total de P_4.

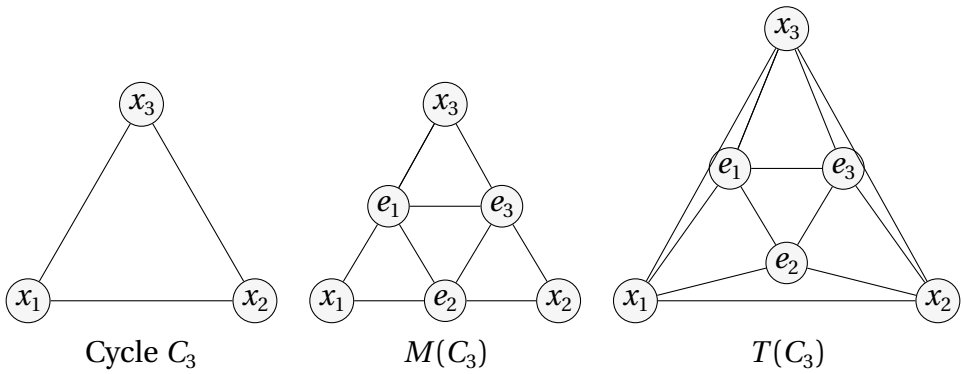


FIGURE 1.11 – Exemples d'un graphe milieu et d'un graphe total de C_3.

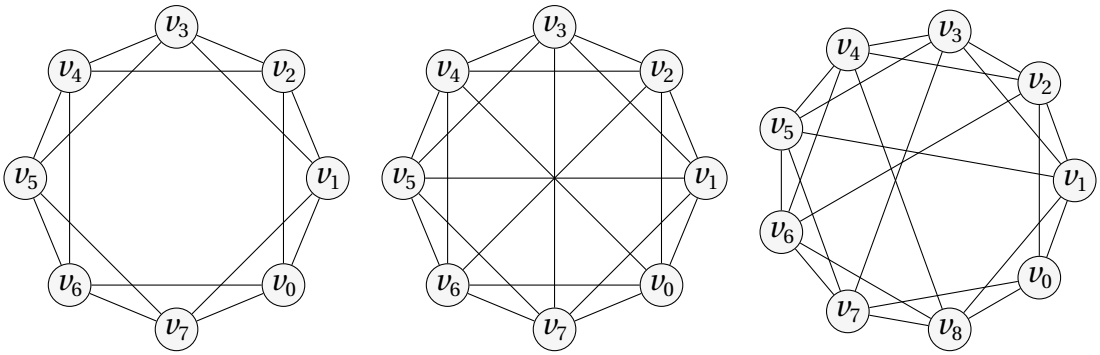
1.1.10 Graphes de Harary

West [29] a introduit les graphes de Harary.

Soient k et n deux entiers positifs, tels que $1 \leq k \leq n$. Les graphes de Harary, notés $H_{k,n}$, sont définis comme suit :

- Si k est pair, alors $H_{k,n}$ est un graphe dont les sommets sont $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, et deux sommets v_i, v_j sont reliés si $i - \frac{k}{2} \leq j \leq i + \frac{k}{2}$ (où l'addition est prise modulo n).
- Si k est impair et n est pair, alors $H_{k,n}$ est obtenu à partir de $H_{k-1,n}$ en ajoutant des arêtes joignant v_i à $v_{i+\frac{n}{2}}$ pour $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$.
- Si k est impair et n est impair, alors $H_{k,n}$ est obtenu à partir de $H_{k-1,n}$ en ajoutant une arête reliant v_i à $v_{i+\frac{n-1}{2}}$ pour $0 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$.

Le graphe $H_{k,n}$ est régulier dans les deux premiers cas. En revanche, il est non régulier dans le dernier cas.



Graphe de Harary $H_{4,8}$ Graphe de Harary $H_{5,8}$ Graphe de Harary $H_{5,9}$

FIGURE 1.12 – Graphes de Harary.

1.2 Quelques opérations sur les graphes

Dans cette section, nous allons présenter quelques opérations que nous pouvons apporter à un graphe.

1.2.1 Suppression d'un sommet d'un graphe

Définition 1.1 Soit v un sommet d'un graphe $G = (V, E)$. Le graphe $G \setminus \{v\}$ ou $(G - v)$ est le graphe obtenu à partir de G en retirant le sommet v et toutes les arêtes incidentes à v. Pour un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$, on note $G \setminus \{S\}$ ou $(G - S)$ le sous-graphe engendré par $V - S$.

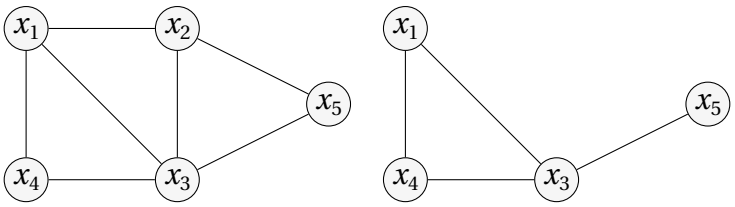


FIGURE 1.13 – Exemple représente la suppression d'un sommet d'un graphe G.

1.2.2 Suppression d'une arête d'un graphe

Définition 1.2 Soit $e = uv$ une arête de G. Le graphe $G \setminus \{e\}$ ou $(G - e)$ est le graphe obtenu à partir de G en retirant l'arête e et conservant leurs extrémités u et v.

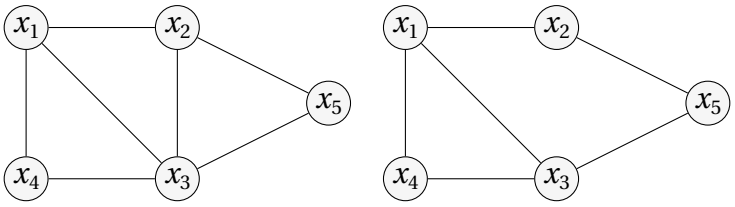


FIGURE 1.14 – Exemple représente la suppression d'une arête d'un graphe G.

1.2.3 Remplacement d'un sommet d'un graphe par une étoile

Définition 1.3 Soit v un sommet d'un graphe $G = (V, E)$. Le graphe $SK_{1,p}$ est obtenu à partir de G en retirant le sommet v et l'en remplaçant par l'étoile $K_{1,p}$, telle que les sommets de $K_{1,p}$ sont adjacents à tous les voisins de v.

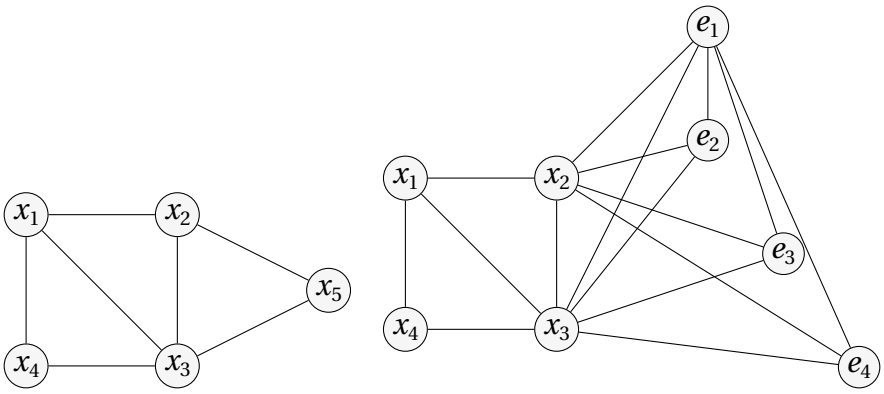


FIGURE 1.15 – Exemple représente la suppression d'une arête d'un graphe G.

1.2.4 Autres opérations

Étant donnés deux graphes disjoints $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$.

- L'union de deux graphes G_1 et G_2 est le graphe $G_1 + G_2$ dont l'ensemble des sommets est $V_1 \cup V_2$ et l'ensemble des arêtes est $E_1 \cup E_2$. Pour un entier k donné, l'union de k copies du graphe G est notée kG, avec $k \geq 1$.
- **Le *joint*** de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, noté $G_1 \vee G_2$ est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V_1 \cup V_2$ et ensemble d'arêtes $(E_1 \cup E_2) \cup \{uv : u \in V_1 \text{ et } v \in V_2\}$.

  Autrement dit, $G_1 \vee G_2$ est le graphe obtenu à partir de $G_1 + G_2$ en ajoutant toutes les arêtes entre tous les sommets de G_1 et G_2.
- Le produit cartésien ou somme cartésienne de deux graphes G_1 et G_2, noté $G_1 \otimes G_2$, est le graphe $G = (V, E)$ tel que ;

$$V = \{(u, v) : u \in V_1, v \in V_2\}.$$

Et deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont adjacents dans G si ;

$$u_1 = u_2 \text{ et } v_1, v_2 \in E_2 \quad \text{ou} \quad v_1 = v_2 \text{ et } u_1, u_2 \in E_1.$$

1.3 Coloration des sommets d'un graphe

La coloration des graphes est apparue en 1852, lorsque le problème des quatre couleurs a été posé pour la première fois par Francis Guthrie. Il a observé que tous les comtés de l'Angleterre peuvent être colorés avec seulement quatre couleurs, à condition que deux comtés voisins soient colorés différemment. Ceci l'a incité à réfléchir à la possibilité de colorer n'importe quelle carte géographique avec seulement quatre couleurs, sous la contrainte que deux pays voisins ne soient pas recouverts par la même couleur.

La preuve de ce problème n'a été donnée qu'en 1976, lorsque les deux chercheurs américains, K. Appel et W. Haken [2],[3], ont pu le résoudre à l'aide d'un calcul par ordinateur.

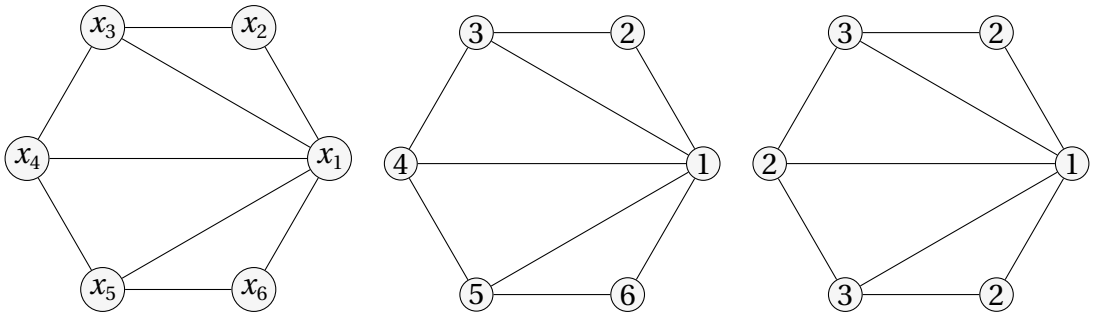
Par la suite, la notion de la coloration de graphe a fait l'objet de nombreuses études, engendrant une littérature très dense en théorie des graphes. Ce concept est sans doute le concept le plus connu et le plus étudié en théorie des graphes. Généralement, il s'agit de trouver une coloration optimale des sommets d'un graphe simple de manière à ce que deux sommets adjacents soient de couleurs distinctes.

Une coloration des sommets d'un graphe consiste à attribuer une couleur à chaque sommet en utilisant un nombre donné de couleurs. Une coloration utilisant k couleurs est appelée une k-coloration. Une coloration propre des sommets d'un graphe G est une coloration, telle que chaque paire de voisins reçoit des couleurs différentes.

Une k-coloration propre des sommets de G peut être interprétée comme une partition de l'ensemble des sommets de G en k ensembles stables. Une classe de couleur est un sous-ensemble stable de sommets de V qui partagent la même couleur.

Une coloration triviale de G consiste à attribuer à chaque sommet une couleur différente. De ce fait, tout graphe à n sommets peut être coloré avec n couleurs différentes. Il est donc pertinent de chercher à minimiser le nombre de couleurs requis pour colorer le graphe G.

Définition 1.4 Le nombre chromatique d'un graphe G, noté $\chi(G)$, est le plus petit entier k tel que G possède une k-coloration.
Une $\chi(G)$-coloration d'un graphe G est dite **coloration optimale** (ou minimale) de G.



Graphe $G=(V;E)$ Coloration propre Coloration optimale

FIGURE 1.16 – Exemples d'une coloration propre et d'une coloration optimale d'un graphe G.

1.3.1 Bornes et valeurs exactes sur le nombre chromatique

Proposition 1.1

[6] Soit G un cycle d'ordre n. Alors

$$\chi(C_n)=\begin{cases}2 & \text{si } n \text{ est pair}\\ 3 & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$$

***Remarque* 1**

Soit G un graphe d'ordre n. Il est clair que $1\leq\chi(G)\leq n$.

$$\chi(G)=\begin{cases}1 & \text{si et seulement si } G\cong\overline{K_n}\\ n & \text{si et seulement si } G\cong K_n\end{cases}$$

***Théorème* 1.1**

[6] Si G est un graphe de taille au moins deux, alors $\chi(G)=2$ si et seulement si G est biparti.

Proposition 1.2

[6] Si H est un sous-graphe de G, alors

$$\chi(H)\leq\chi(G).$$

Proposition 1.3

[6] Pour tout graphe G, on a

$$\chi(G) \geq \omega(G).$$

où $\omega(G)$ est la taille de la clique maximale de G

Proposition 1.4

[6]Soit G un graphe non connexe contenant k composantes connexes $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Alors

$$\chi(G) = \max\left\{\chi(C_i) : 1 \leq i \leq k\right\}.$$

Proposition 1.5

[6] Tout graphe G d'ordre n satisfait

$$\chi(G) + a(G) \geq \frac{n}{a(G)}.$$

Où $a(G)$ est le nombre de stabilité de G.

Dans [9], Brooks a montré les deux résultats suivants.

Proposition 1.6

[9] Tout graphe G de degré maximum $\Delta(G)$ satisfait

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Avec égalité si et seulement si on est dans l'un des deux cas suivants :

$$\begin{cases} \text{Soit } \Delta(G) \neq 2 \text{ et } G \text{ admet } K_{\Delta(G)+1} \text{ comme une composante connexe} \\ \text{Soit } \Delta(G) = 2 \text{ et } G \text{ admet un cycle d'ordre impair comme une composante connexe.} \end{cases}$$

Brooks [9] a analysé cette borne.

***Théorème* 1.2**

[9] Soit G un graphe connexe. Si G n'est ni un cycle d'ordre impair, ni un graphe complet, alors

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Proposition 1.7

[6] Soit G un graphe d'ordre n. Alors

$$\begin{cases} \chi(G) \times a(G) \geq n \\ \chi(G) + a(G) \leq n+1 \end{cases}$$

L'inégalité suivante a été donnée par Gaddum et Nordhaus [27].

Proposition 1.8

[27] Soit G un graphe d'ordre n et $\overline{G}$ son complémentaire. Alors :

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n+1.$$

Les chercheurs ne se sont pas limités à la coloration classique des graphes, car il existe plusieurs autres types de colorations, chacune ayant ses propres conditions. Parmi celles-ci, on peut citer la coloration de Grundy, la b-coloration, et la plus importante, la z-coloration.

Chapitre 2

b-coloration, coloration de Grundy et z-coloration

Dans ce chapitre, nous donnons la définition de la b-coloration et la coloration de grundy, ainsi les paramètres liés à ces deux colorations, et quelques résultats obtenu dans ce contexte.
En-suite, nous donnons un aperçue sur la z-coloration, qui fait l'objet de notre mémoire et nous présentons quelques résultats obtenus sur cette dernière.

2.1 b-coloration et le nombre b-chromatique

En 1999, Irving et Manlove [20, 25] ont défini une autre technique qui cherche à améliorer la coloration d'un graphe. Cette dernière consiste à partir d'une coloration propre donnée du graphe, de réduire le nombre de couleurs en transférant les sommets d'une certaine classe de couleur vers d'autres classes de couleur. Si chaque classe de couleur possède un sommet qui a un voisin dans toutes les autres classes de couleurs, il est impossible d'appliquer cette technique. D'où, la définition de la *b-coloration*.

Définition 2.1 Une *b-coloration* (ou coloration dominante) est une coloration propre telle que toute classe de couleur i contient un sommet (dit b-sommet ou sommet b-dominant) adjacent à au moins un sommet de chaque classes de couleur $j \neq i$.

Définition 2.2 Le *nombre b-chromatique* d'un graphe G, noté $b(G)$, représente le nombre maximal de couleurs k pouvant être utilisées dans une b-coloration de G.

Exemple : La Figure (2.1) présente une b-coloration d'un cycle C_6 avec $b(C_6)=3$.

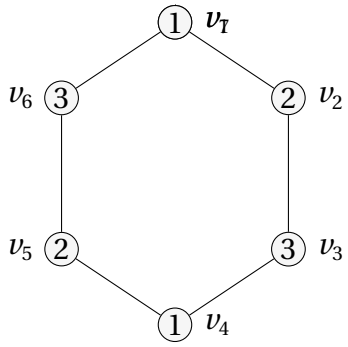


FIGURE 2.1 – Exemple d'un b-coloration du graphe cycle C_6.

2.1.1 Quelques résultats existants sur la b-coloration

Proposition 2.1

[19][24] Pour tout graphe G de degré maximum $\Delta(G)$, on a

$$\chi(G) \leq b(G) \leq \Delta(G)+1.$$

Kouider et Mahéo [22] ont montré que les bornes encadrant $\chi(G)$ restent valables pour $b(G)$.

Proposition 2.2

[22] Soit G un graphe connexe d'ordre n et $\alpha(G)$ son nombre de stabilité. Alors

$$b(G) \leq n+1-\alpha(G).$$

Proposition 2.3

[22]Soit G un graphe d'ordre n et de taille m. Alors

$$\frac{n}{\alpha(G)} \leq b(G) \leq \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+2m}.$$

Proposition 2.4

[22] Si G est un graphe non connexe de composantes $C_1, C_2, \ldots, C_p$ avec $(p \geq 2)$, alors

$$b(G) \geq \max\{b(C_i), 1 \leq i \leq p\}.$$

Proposition 2.5

[1] Soit G un graphe d'ordre n, de degré maximum $\Delta(G)$ et de degré minimum $\delta(G)$. Alors

$$b(G) \leq \left\lfloor \frac{2n-\Delta(G)-\delta(G)-3}{3n-2\Delta(G)-\delta(G)-4}\, n \right\rfloor.$$

Bikina et al. [7] ont donné une borne supérieure sur $b(G)$ dans le cas où G est un graphe différent du graphe complet.

Proposition 2.6

[15] Soit G un graphe d'ordre n différent d'un graphe complet et $\omega(G)$ la taille de sa clique maximum. Alors

$$b(G) \leq \left\lfloor \frac{n+\omega(G)-1}{2} \right\rfloor.$$

Des résultats de type Nordhaus-Gaddum ont été donnés dans [22].

***Théorème* 2.1**

[22] Soit G un graphe d'ordre n et $\overline{G}$ son complémentaire. Alors

$$\begin{cases} b(G)+b(\overline{G}) \leq n+1 \\ b(G)\times b(\overline{G}) \leq n \end{cases}$$

M. Kouider et M. Zaker [22] ont établi la borne ci-après dans le cas d'un graphe sans griffes généralisées.

Théorème 2.2

[23] Si G est un graphe sans $K_{1,t}$ avec $t \geq 3$, alors

$$b(G) \leq (t-1)(\chi(G)-1)+1.$$

Corollaire 1. *[23] Soit G un graphe sans griffe $K_{1,3}$. Alors*

$$b(G) \leq 2\chi(G)-1.$$

Plusieurs recherches ont été menées pour déterminer la valeur exacte du nombre b-chromatique pour des classes spécifiques de graphes. Dans ce qui suit, nous présentons quelques-uns de ces résultats.

Proposition 2.7

[22] Si G est un cycle C_n d'ordre $n \geq 3$, alors

$$b(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 4 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 2.8

[22]Si G est une chaîne P_n d'ordre $n \geq 2$, alors

$$b(P_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \in \{2,3,4\} \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 2.3

[22] Soient P_n et C_n respectivement une chaîne et un cycle d'ordre $n \geq 5$. Alors

$$b(P_n) = b(C_n) = 3.$$

A. El Sahili et M. Kouider [13] ont exploré les graphes d-réguliers dont le nombre b-chromatique est égal à $d+1$. Dans ce sens, ils ont donné le résultat suivant.

Théorème 2.4

[13] Soit G un graphe d-régulier sans cycle d'ordre six et de maille au moins cinq. Alors

$$b(G) = d + 1.$$

Les mêmes auteurs [13] ont proposé la conjecture suivante.

Proposition 2.9

[13]Soient D_n et K_n respectivement un graphe discret et un graphe complet. Alors

$$\begin{cases} b(D_n) = 1 \\ b(K_n) = n \end{cases}$$

Proposition 2.10

[22] Si G est un graphe biparti complet $K_{n,p}$ pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, alors $b(G) = 2$.

Dans [17] , les auteurs ont montré que le nombre b-chromatique du joint de deux graphes est égal à la somme de leurs nombres b-chromatiques.

Théorème 2.5

[17] Soient G_1 et G_2 deux graphes de sommets disjoints. Si $G = G_1 \vee G_2$, alors

$$b(G) = b(G_1) + b(G_2).$$

Théorème 2.6

[18] soient C_n un cycle d'ordre $n \geq 3$ et $M(C_n)$ son graphe milieu et $T(C_n)$ son graphe Total

$$b(M(C_n)) = b(T(C_n)) = \begin{cases} n & \text{si } n \in \{3,4\} \\ 5 & \text{si } n \geq 5 \end{cases}$$

Théorème 2.7

[18] soient P_n un chaîne d'ordre $n \geq 2$ et $M(P_n)$ son graphe milieu et $T(P_n)$ son graphe Total, on a

$$b(M(P_n)) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 2 \\ 3 & \text{si } n \in \{3,4\} \\ 4 & \text{si } n \in \{5,6,7\} \\ 5 & \text{si } n \geq 8 \end{cases} \qquad b(T(P_n)) = \begin{cases} 3 & \text{si } n \in \{2,3\} \\ 4 & \text{si } n = 4 \\ 5 & \text{si } n \geq 5 \end{cases}$$

2.2 Coloration de Grundy

De nombreux types de colorations ont été dérivés de la coloration classique, dont la plupart visent à **minimiser le nombre de couleurs** utilisées. En revanche, d'autres types de colorations cherchent à **maximiser ce nombre**, parmi lesquelles on trouve la **coloration de Grundy (Grundy Coloring)**.

Ce concept est apparu pour la première fois en 1939 dans un article de *Patrick Michael Grundy* (1917–1959) sur les jeux combinatoires, dans lequel ont été proposées des idées ayant conduit ultérieurement à la notion de coloration de Grundy dans les graphes. Ce type de coloration a été nommé ainsi et introduit officiellement en 1979 par *C. A. Christen* et *S. M. Selkow*, dans le cadre de la théorie des jeux.

La coloration de Grundy est une **coloration propre** satisfaisant la propriété suivante : *tout sommet v colorié avec la couleur i* doit être **adjacent à au moins** $i-1$ sommets ayant chacun une couleur j telle que $j < i$. Un tel sommet est appelé un **sommet de Grundy**.

Définition 2.3 [10] Une k—coloration de Grundy d'un graphe G est une coloration propre utilisant k couleurs vérifiant la propriété suivante : chaque sommet v, coloré par une couleur i, $1 \leq i \leq k$, doit être adjacent à au moins $i-1$ sommets colorés par chacune des couleurs j telles que $1 \leq j \leq i-1$. Dans une coloration de Grundy chaque sommet est un sommet de Grundy. Le nombre de Grundy d'un graphe G, noté $\Gamma(G)$, est le nombre maximum de couleurs nécessaire pour une coloration de Grundy de G, pris sur toutes les colorations de Grundy de G. Ce paramètre a été introduit par C. Christen et S. Selkou .

Exemple : La Figure (2.2) présente une coloration de Grundy d'un graphe G avec $\Gamma(G) = 4$.

2.2.1 Quelques résultats existants sur la coloration de Grundy

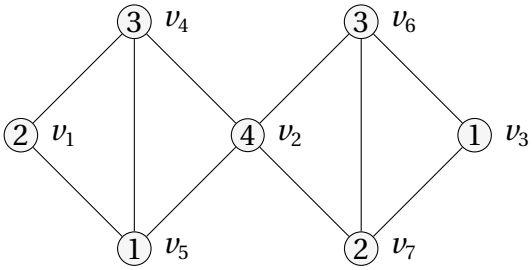


FIGURE 2.2 – Exemple d'un coloration de Grundy.

Proposition 2.11

[26] Tout graphe G satisfait

$$\Gamma(G) \leq \Delta(G)+1.$$

Théorème 2.8

[12] Soit G un graphe connexe d'ordre n et de nombre de stabilité a. Alors

$$\Gamma(G) \leq n+1-a.$$

Proposition 2.12

[31] Soit G un graphe connexe. Alors,

$$\Gamma(G) \leq \max \min_{(v,u)\in E} \{|d(v),d(u)|\}+1.$$

Proposition 2.13

[4] Si H est un sous-graphe induit de G, alors

$$\Gamma(G) \geq \Gamma(H).$$

Théorème 2.9

[28] Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 1$,

$$\Gamma(G) \leq \frac{n+\omega}{2}.$$

Théorème 2.10

[8] Si G est un graphe sans P_4, alors

$$\Gamma(G) \leq b(G).$$

2.2.2 Théorème d'interpolation

Le résultat suivant est l'un des résultats majeurs dans la coloration de Grundy et qui dû a C.A. Christen et S. M. Selkow [11].

Théorème 2.11

[11] Pour tout graphe G et pour tout r avec $\chi(G) \leq r \leq \Gamma(G)$, coloration de Grundy de G avec r couleurs.

Proposition 2.14

[30]Pour toute chaîne P_n d'ordre $n \geq 2$, on a

$$\Gamma(M(P_n)) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 2 \\ 3 & \text{si } n = 3,4 \\ 4 & \text{si } n \geq 5 \end{cases}$$

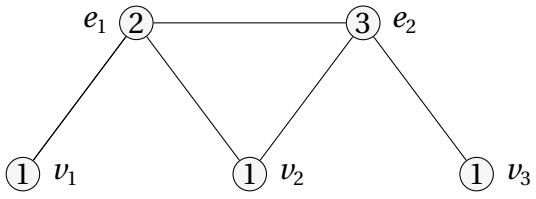


FIGURE 2.3 – Coloration de Grundy $M(P_3)$.

Proposition 2.15

[30] Pour toute chaîne P_n d'ordre $n \geq 2$, on a

$$\Gamma(T(P_n)) = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 2 \\ 4 & \text{si } n = 3 \\ 5 & \text{si } n \geq 4 \end{cases}$$

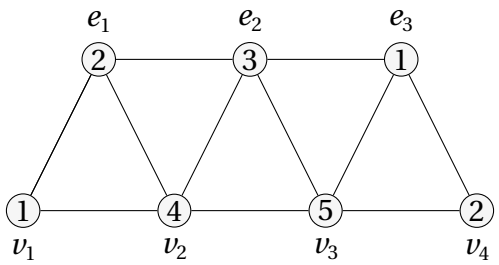


FIGURE 2.4 – Coloration de Grundy $T(P_4)$.

Proposition 2.16

[30] Pour tout cycle C_n d'ordre $n \geq 3$, on a

$$\Gamma(M(C_n)) = 4.$$

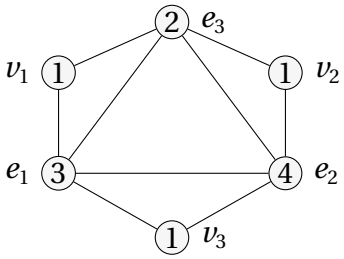


FIGURE 2.5 – coloration de Grundy $M(C_3)$.

Proposition 2.17

[30] Pour tout cycle C_n, d'ordre $n \geq 3$, on a

$$\Gamma(T(C_n)) = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 3 \\ 5 & \text{si } n \geq 4 \end{cases}$$

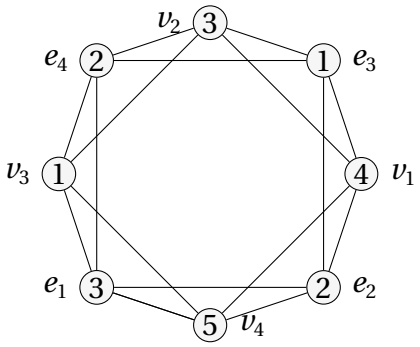


FIGURE 2.6 – Coloration de Grundy $T(C_4)$.

2.3 z-coloration et le nombre z- chromatique

Dans cette section, nous nous intéressons à une nouvelle coloration dans les graphes, appelée *z-coloration*. Nous nous intéressons à sa définition, à l'identification de ses conditions. Ainsi qu' à quelques résultats obtenus à son coloration.
Une opération de coloration sophistiquée et une technique correspondante de suppression de couleurs sont introduites dans [32] sous le nom de z-coloration.

Définition 2.4 [21] Une z-coloration d'un graphe G est une coloration propre des sommets constituée des classes de couleurs $C_1, \ldots, C_k$ telles que.
(i) pour toute paire de couleurs i et j avec $1 \leq i < j \leq k$, tout sommet de couleur j est adjacent à un sommet de couleur i, (ii) il existe un ensemble $\{u_1, \ldots, u_k\}$ de sommets de G tel que $u_j \in C_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$ et u_k est adjacent à u_j pour chaque $1 \leq j \leq k$ avec $j \neq k$ (u_k est dit (**nice-sommet**)), et (iii) pour chaque i et j avec $i \neq j$, le sommet u_j a un voisin dans C_i.

Définition 2.5 Le *nombre z-chromatique* d'un graphe G, noté $z(G)$, représente le nombre maximal de couleurs k pouvant être utilisées dans une z-coloration de G.

Exemple : La Figure (2.7) présente une z-coloration d'un cycle C_6 avec $z(C_6)=3$. Tell que v_3 est une nice-sommet v_2 et v_4 sont des b-sommets

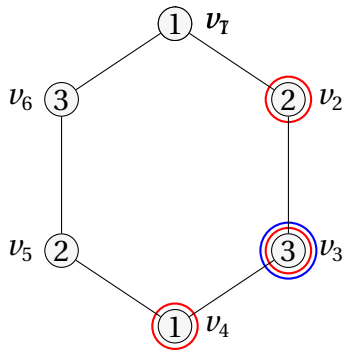


FIGURE 2.7 – Exemple d'un z-coloration du graphe cycle C_6.

2.3.1 Quelques résultats existants sur le nombre z- chromatique

Proposition 2.18

[21] Tout graphe G satisfait

$$z(G) \leq \Delta(G)+1.$$

***Théorème* 2.12**

[21] Pour tout graphe G, on a

$$z(G) \leq min\{b(G), \Gamma(G)\}.$$

Proposition 2.19

[21] Soient G_1 et G_2 deux graphes disjoints (sommets disjoints). Alors

(i) $z(G_1 \oplus G_2) = z(G_1) + z(G_2)$.

(ii) $z(G_1 \cup G_2) = \max\{z(G_1), z(G_2)\}$.

Proposition 2.20

[21] Il existe une suite infinie de graphes $\{G_n\}_{n=3}^{\infty}$ telle que pour tout n,

$$\Gamma(G_n) = \mathrm{b}(G_n) = 2n-1$$

mais

$$z(G_n) = \chi(G_n) = n$$

Chapitre 3

Nouveaux résultats sur les z-colorations des graphes

Dans ce chapitre, nous présentons les valeurs exactes du nombre z-chromatique de certains graphes particuliers. Comme le graphe milieu et le graphe total d'une chaîne et d'une cycle.

3.1 Nombre z-chromatique de certains graphes particuliers

3.1.1 Nombre z-chromatique du graphe milieu et du graphe total d'un chaîne

Proposition 3.1

Pour toute chaîne P_n d'ordre $n \geq 2$, on a;

$$z(M(P_n)) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 2 \\ 3 & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

Preuve. Posons $V(P_n) = v_1, v_2, \ldots, v_n$ *et* $E(P_n) = e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ *avec,* $e_j = v_j v_{j+1}$, $1 \leq j \leq n-1$. *Soit* $G = M(P_n)$. *Par définition de* G, *on a* $V(G) = V(P_n) \cup E(P_n)$. Soit c est une z-coloration de G avec k couleurs. *Pour* $n = 2$.

D'après le Théorème (2.12) on a,

$$k \leq \min(\Gamma(M(P_2)), b(M(P_2))).$$

Et on a par la Proposition (2.14) et le Théorème (2.7),

$$\Gamma(M(P_2)) = 2 \quad \text{et} \quad b(M(P_2)) = 2.$$

Donc,

$$k \leq \min(2, 2).$$

Alors,

$$k \leq 2.$$

Montrons maintenant que $k \geq 2$.
Nous colorions e_1 avec la couleur 2 et v_1 et v_2 avec la couleur 1. Tel que e_1 est un nice-sommet et v_1 et v_2 est une b-sommets. Cela satisfait les conditions du z-coloration, (Voir la Figure (3.1)). Donc, $k \geq 2$.
Ainsi,

$$k = 2.$$

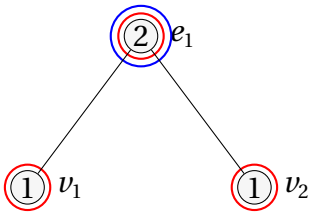


FIGURE 3.1 – z-coloration de $M(P_2)$.

Pour $n \geq 3$, une z-coloration de G avec 3 couleurs est obtenue de la façon suivante. e_1 avec la couleur 2, e_2 avec la couleur 3, et v_1, v_2, v_3 avec la couleur 1. Tel que e_2 est un nice-sommet et e_1 et v_2 est une b-sommets. Cela satisfait les conditions du z-coloration, (Voir la Figure (3.3)). Donc, $k \geq 3$.

Montrons maintenant que $k \leq 3$.

Par l'absurde, supposons que $k \geq 4$. Comme $\Delta(G) = 4$, alors, $3 \leq k \leq 5$. De plus, Proposition (2.14) implique que, $k \leq 4$.
Pour obtenir une z-coloration avec 4 couleurs, il fait que G comprend un sommet de degré au moins 3 et adjacent à au moins 3 sommet de degré au moins 3, et cela est impossible à cause de la structure de G. Alors, $k \leq 3$.
Ainsi, $k = 3$.

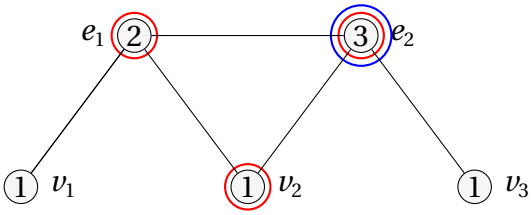


FIGURE 3.2 – z-coloration de $M(P_3)$.

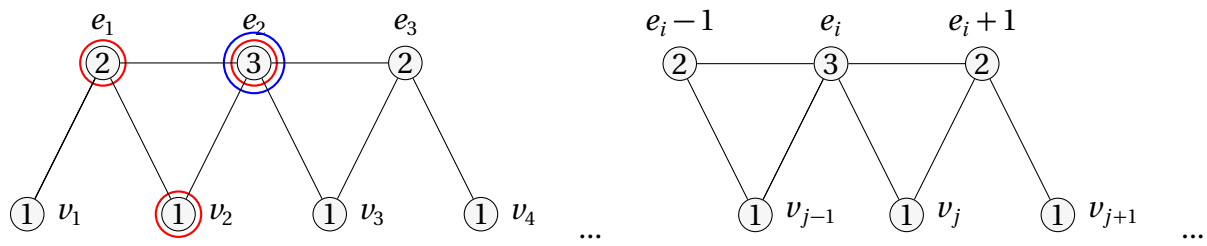


FIGURE 3.3 – z-coloration de $M(P_n)$ si $n \geq 3$.

Proposition 3.2

Pour toute chaîne P_n d'ordre $n \geq 2$, on a;

$$z(T(P_n)) = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 2,3 \\ 4 & \text{si } n = 4,5 \\ 5 & \text{si } n \geq 6 \end{cases}$$

Preuve. Posons $V(P_n) = v_1, v_2, \ldots, v_n$ *et* $E(P_n) = e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ *avec* $e_j = v_j v_{j+1}$, $1 \leq j \leq n-1$. *Soit* $G = T(P_n)$. *Par définition de* G, *on a* $V(G) = V(P_n) \cup E(P_n)$. Soit c est une z-coloration de G avec k couleurs, *Pour* $n = 2,3$.

D'après le Théorème (2.12), on a,

$$k \leq \min(\Gamma(T(P_n)), b(T(P_n))) \qquad \text{si } n = 2,3.$$

Et on a dans la Proposition (2.15) et le Théorème (2.7),

$$\Gamma(T(P_2)) = 3 \quad \text{et} \quad b(T(P_2)) = 3.$$

$$\Gamma(T(P_3)) = 4 \quad \text{et} \quad b(T(P_3)) = 3.$$

Donc,

$$k \leq \min(3,3) \qquad \text{si } n = 2.$$

$$k \leq \min(4,3) \qquad \text{si } n = 3.$$

Alors,

$$k \leq 3 \qquad \text{si } n = 2,3.$$

Et on a, $\omega(G) = 3$. Alors,

$$k \geq 3.$$

Ainsi,

$$k = 3.$$

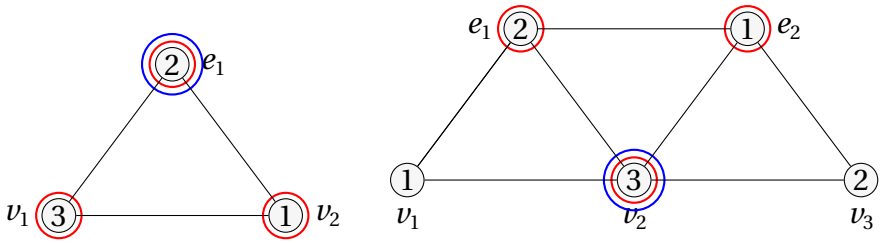


FIGURE 3.4 – z-coloration de $T(P_2)$ et $T(P_3)$.

Pour $n = 4$.

D'après le Théorème (2.12) on a,

$$k \leq \min(\Gamma(T(P_4)), b(T(P_4))).$$

Et on a dans la Proposition (2.15) et le Théorème (2.7),

$$\Gamma(T(P_4)) = 5 \quad \text{et} \quad b(T(P_4)) = 4.$$

Donc,

$$k \leq \min(5,4).$$

Alors,

$$k \leq 4.$$

Montrons maintenant que $k \geq 4$, une z-coloration de G avec 4 couleurs est obtenue de la façon suivante. e_1 et e_3 avec la couleur 3 et e_2 avec la couleur 4, v_1 et v_3 avec la couleur 1 et v_2 avec la couleur 2 et v_4 avec la couleur 2 . Tel que e_2 est un nice-sommet et e_3, v_2, v_3 et v_2 est une b-sommets. Cela satisfait les conditions du z-coloration, (Voir la Figure (3.5)).
Donc, $k \geq 4$.
Ainsi,

$$k = 4.$$

Pour $n = 5$.

D'après le Théorème (2.12) on a,

$$k \leq \min(\Gamma(T(P_5)), b(T(P_5))).$$

Et on a dans la Proposition (2.15) et le Théorème (2.7),

$$\Gamma(T(P_5)) = 5 \quad \text{et} \quad b(T(P_5)) = 5.$$

Donc,

$$k \leq \min(5,5).$$

Alors,

$$k \leq 5.$$

Supposons que $k = 5$, et montrons que $T(P_5)$ n'admet pas une z-coloration avec 5 couleurs.
Comme $\Delta(G) = 4$, alors, $k \leq 5$.
Pour obtenir une z-coloration avec 5 couleurs, il faut que G comprend un sommet de degré

au moins 4 et adjacent à au moins 4 sommets de degré au moins 4, et cela est possible à condition que v_3 soit un nice-sommet, et que v_2, v_4, e_2, e_4 soient des b-sommets. Mais avec cette coloration, les autres sommets du graphe ne sont pas des sommets de Grundy, à cause de la structure de G. Alors, $k \leq 4$.
Montrons maintenant que $k \geq 4$, une z-coloration de G avec 4 couleurs est obtenue de la façon suivante. e_1, v_5 et e_3 avec la couleur 2 et e_2, e_4 et v_1 avec la couleur 1 et v_4, v_2 avec la couleur 3 et v_3 avec la couleur 4. Tel que v_3 est un nice-sommet et e_2,e_3 et v_2 est une b-sommets. Cela satisfait les conditions du z-coloration, (Voir la Figure (3.5)). Donc, $k \geq 4$.
Ainsi,

$$k = 4.$$

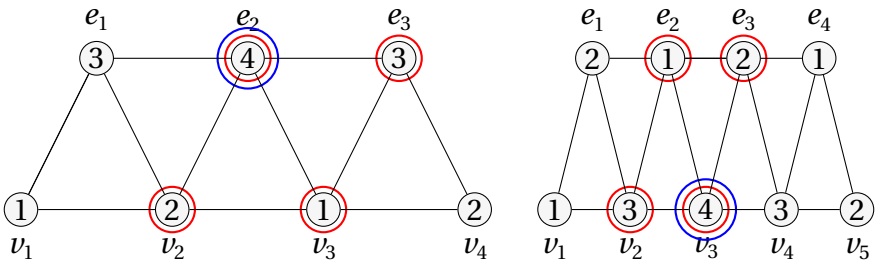


FIGURE 3.5 – z-coloration de $T(P_4)$ et $T(P_5)$.

Pour $n \geq 6$ on a,
$\Delta(G) = 4$ et $k \leq \Delta(G)+1$. Alors, $k \leq 5$.
Montrons maintenant que $k \geq 5$, une z-coloration de G avec 5 couleurs est obtenue de la façon suivante. e_1 avec la couleur 1 et e_2 avec la couleur 3 et e_3 avec la couleur 5 et e_4 avec la couleur 4 et e_5 avec la couleur 2, v_1 avec la couleur 2 et v_2 avec la couleur 4 et v_3 avec la couleur 2 et v_4 avec la couleur 1 et v_5 avec la couleur 3 et v_6 avec la couleur 1 . Tel que e_3 est un nice-sommet et e_2,e_4,v_3 et v_4 est une b-sommets. Cela satisfait les conditions du z-coloration, (Voir la Figure (3.6)). Donc, $k \geq 5$.
Ainsi,

$$k = 5.$$

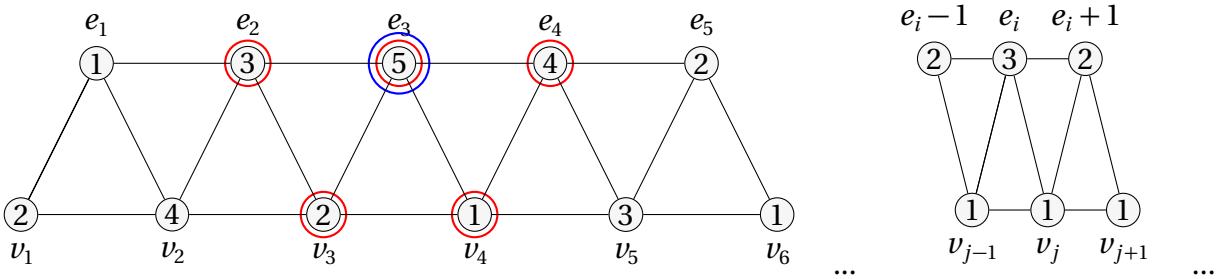


FIGURE 3.6 – z-coloration de $T(P_n)$ si $n \geq 6$.

3.1.2 Nombre z-chromatique du graphe milieu et du graphe total d'un cycle

Proposition 3.3

Pour tout cycle C_n d'ordre $n \geq 3$, on a;

$$z(M(C_n)) = 3.$$

Preuve. Posons $V(C_n) = v_1, v_2, \ldots, v_n$ *et* $E(C_n) = e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ *avec,* $e_j = v_j v_{j+1}$, $1 \leq j \leq n-1$. *Soit* $G = M(C_n)$. *Par définition de* G, *on a* $V(G) = V(C_n) \cup E(C_n)$. Soit c est une z-coloration de G avec k couleurs.
Pour $n = 3$.
D'après le Théorème(2.12), on a,

$$k \leq \min(\Gamma(M(C_3)), b(M(C_3))).$$

Et on a dans la Proposition (2.16) et le Théorème (2.6),

$$\Gamma(M(C_3)) = 4 \quad \text{et} \quad b(M(C_3)) = 3.$$

Donc,

$$k \leq \min(4,3).$$

Alors,

$$k \leq 3.$$

Et on a, $\omega(G) = 3$. Alors,

$$k \geq 3.$$

Ainsi,

$$k = 3.$$

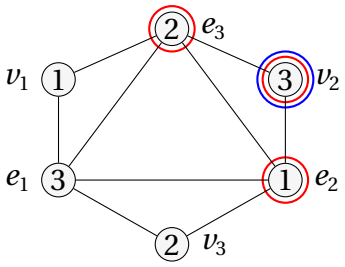


FIGURE 3.7 – z-coloration de $M(C_3)$.

Pour $n \geq 3$.
Puisque nous avons pu colorier avec 3 couleurs pour $n = 3$, il est alors possible de colorier avec 3 couleurs pour tout $n \geq 3$, en réutilisant le même coloriage à 3 couleurs et en complétant le reste à l'aide d'un coloration de grundy, grâce au Théorème (2.11) d'interpolation.
Donc,

$$k \geq 3.$$

Montrons maintenant que $k \leq 3$.

Par l'absurde, supposons que $k \geq 4$. Comme $\Delta(G) = 4$, alors, $3 \leq k \leq 5$. De plus, Proposition (2.16) implique que, $k \leq 4$.
Pour obtenir une z-coloration avec 4 couleurs, il fait que G comprend un sommet de degré au moins 3 et adjacent à au moins 3 sommet de degré au moins 3, et cela est impossible à cause de la structure de G. Alors, $k \leq 3$.
Ainsi,

$$k = 3.$$

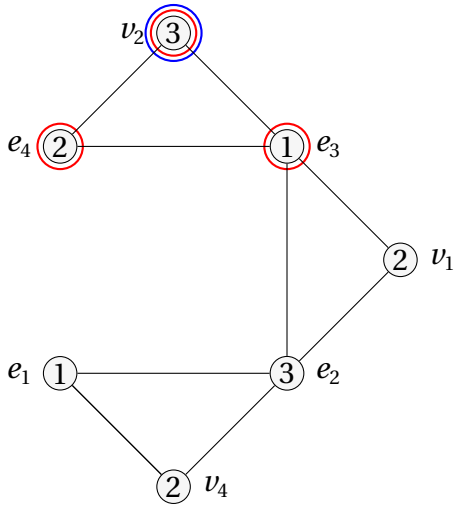


FIGURE 3.8 – z-coloration de $M(C_n)$.

Proposition 3.4

Pour tout cycle (C_n) *d'ordre* $n \geq 3$, *on a*;

$$z(T(C_n)) = \begin{cases} n & \text{si } n = 3,4 \\ 5 & \text{si } n \geq 5 \end{cases}$$

Preuve. Posons $V(C_n) = v_1, v_2, \ldots, v_n$ *et* $E(C_n) = e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ *avec* $e_j = v_j v_{j+1}$, $1 \leq j \leq n-1$. *Soit* $G = T(C_n)$. *Par définition de* G, *on a* $V(G) = V(C_n) \cup E(C_n)$. Soit c est une z-coloration de G avec k couleurs. *Pour* $n = 3$.
D'après le Théorème(2.12), on a,

$$k \leq \min(\Gamma(T(C_3)), b(T(C_3))).$$

Et on a dans la Proposition (2.17) et le Théorème (2.6),

$$\Gamma(T(C_3)) = 3 \quad \text{et} \quad b(T(C_3)) = 3.$$

Donc,

$$k \leq \min(3,3).$$

Alors,

$$k \leq 3.$$

Montrons maintenant que $k \geq 3$.
On a $\omega(G) = 3$. Donc, $k \geq 3$.
Ainsi,

$$k = 3.$$

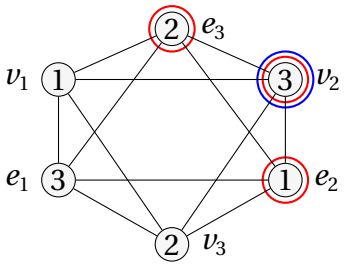


FIGURE 3.9 – z-coloration de $T(C_3)$.

Pour $n = 4$.
D'après le Théorème(2.12), on a,

$$k \leq \min(\Gamma(T(C_4)), b(T(C_4))).$$

Et on a dans la Proposition (2.17) et le Théorème (2.6),

$$\Gamma(T(C_4)) = 4 \quad \text{et} \quad b(T(C_4)) = 5.$$

Donc,

$$k \leq \min(4, 5).$$

Alors,

$$k \leq 4.$$

Pour $n = 4$, une z-coloration de G avec 4 couleurs est obtenue de la façon suivante. e_1, e_3 avec la couleur 3 et v_3, v_1 avec la couleur 1 et v_4, v_2 avec la couleur 4 et e_4, e_3 avec la couleur 2. Tel que v_2 est un nice-sommet et e_3, e_4 et v_1 est une b-sommets. Cela satisfait les conditions du z-coloration, (Voir la Figure (3.10)). Donc, $k \geq 4$.

Ainsi,

$$k = 4.$$

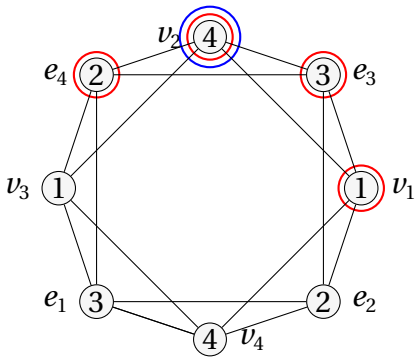


FIGURE 3.10 – z-coloration de $T(C_4)$.

Pour $n \geq 5$, une z-coloration de G avec 5 couleurs est obtenue de la façon suivante.e_1, v_3 avec la couleur 5, e_2, v_4 avec la couleur 1 et e_3, v_5 avec la couleur 4 , e_4, v_1 avec la couleur 2, e_5, v_2 avec la couleur 3. Tel que v_3 est un nice-sommet et e_3, e_4, v_4 et v_2 est une b-sommets. Cela satisfait les conditions du z-coloration, (Voir la Figure (3.11)). Donc, $k \geq 5$.

Et on a, $\Delta(G) = 4$ et $k \leq \Delta(G) + 1$. Alors, $k \leq 5$.
Ainsi,

$$k = 5.$$

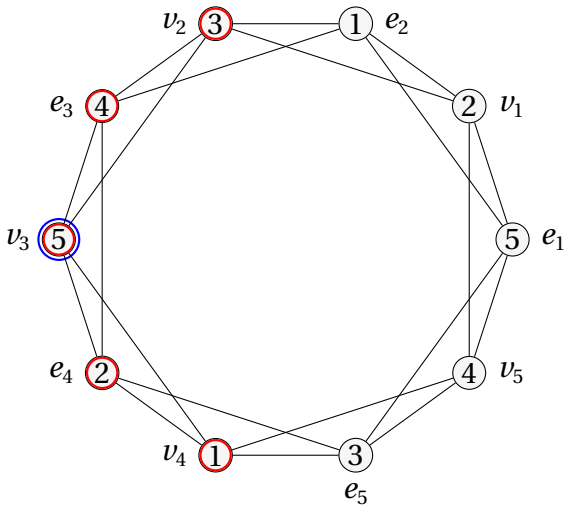


FIGURE 3.11 – z-coloration de $T(C_5)$.

Conclusion

À travers ce mémoire, nous avons étudié la *z-coloration* des graphes, une notion relativement récente dans le domaine de la théorie des graphes. Le travail a principalement consisté à déterminer le nombre z-chromatique pour certaines graphes particulières de graphes.

Nous nous sommes intéressés en particulier aux *graphes milieux* et aux *graphes totales* construits à partir des chaîne P_n et des cycles C_n. Les résultats obtenus ont permis de mieux comprendre l'impact de la structure du graphe de départ sur les propriétés de sa z-coloration.

Les contributions apportées dans le cadre de ce mémoire permettent d'enrichir les connaissances existantes sur ce sujet et ouvrent la voie à de futures recherches, notamment sur des graphes de structures plus complexes. Ce travail constitue ainsi une étape encourageante vers le développement d'une compréhension plus approfondie de la z-coloration des graphes.

Bibliographie

[1] M. Alkhateeb, A. Kohl : Upper bounds on the b-chromatic number and results for restricted graph classes. *Discuss. Math. Graph Theory* 31 : 709735, 2011.

[2] K. Appel et W. Haken. *Every planar map is four colorable : Part 1, discharging*. Illinois J. Math., 21 :429–490, 1977.

[3] K. Appel et W. Haken. *Every planar map is four colorable : Part 2, reducibility*. Illinois J. Math., 21 :491–567, 1977.

[4] M. Aste, F. Havet, C. Linhares-Sales : Grundy number and products of graphs. Research Report RR-6672, INRIA, 2008.

[5] M. Behzad : A criterion for the total graph of a graph. *Proc. Camb. Philos. Soc.* 63 : 679-681, 1967.

[6] C. Berge : *Graphs*. North Holland, 1985.

[7] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf, F. Maïray : b-coloring of some bipartite graphs. *Australas. J. Combin.* 53 : 6776, 2012.

[8] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf, F. Maffray : Characterization of b-perfect graphs. AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, Vol. 9, No. 1 (2012), pp. 2129.

[9] R. Brooks : On coloring the nodes of a network. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 37 : 194-197, 1941.

[10] C. Christen, S. Selkow. *Some Perfect Coloring Properties of Graphs*. J. Combin. Theory Ser. B, 27 :49-59, 1979.

[11] C.A. Christer and S.M. Selow, Some perfect coloring properties of graphs, J. Combin. Theory B27(1979) 49-59.

[12] B. Effantin, H. Kheddouci : Grundy number of a graph. Discussiones Mathematicae Graph Theory, Vol. 27 (2007), pp. 518.

[13] A. El Sahili, M. Kouider : About b-colorings of regular graphs. Research Report 1432, LRI, University of Orsay, France, 2006.

[14] P. M. Grundy, Mathematics and games. Eureka 2 (1939) 6-8.

[15] T. Hamada, I. Yoshimura : Traversability and connectivity of the middle graph of a graph. *Discrete Math.* 14 : 247256, 1976.

[16] T. Hamada, I. Yoshimura : Traversability and connectivity of the middle graph of a graph. *Discrete Math.* 14 : 247-256 ; 1976.

[17] C.T. Hoàng, M. Kouider : On the b-dominating coloring of graphs. *Discrete Appl. Math.* 152 : 176186, 2005.

[18] N. Ikhlef Eschouf : Étude de la b-coloration dans les graphes, graphes extrémaux et graphes critiques. Thèse de doctorat, Blida, 2012.

[19] R.W. Irving, D.F. Manlove : The b-chromatic number of graphs. *Discrete Appl. Math.* 91 : 127141, 1999.

[20] R.W. Irving, D.F. Manlove. The b-chromatic number of graphs. Discrete Appl. Math. 91, 127141,1999.

[21] A. Khaleghi, M. Zaker : More results on the Z-chromatic number of graphs. arXiv :2302.01306v1 [math.CO], 2 February 2023. Submitted to Discrete Applied Mathematics on September 08, 2022.

[22] M. Kouider, M. Mahéo : Some bounds for the b-chromatic number of a graph. *Discrete Math.* 256 : 267277, 2002.

[23] M. Kouider, M. Zaker : Bounds for the b-chromatic number of some families of graphs. *Discrete Math.* 306(7) : 617623, 2006.

[24] D.F. Manlove : Minimaximal and maximinimal optimization problems : a partial order-based approach. PhD thesis, Technical Report TR-1998-27, Computing Science Department, University of Glasgow, 1998.

[25] D.F. Manlove. Minimaximal and maximinimal optimization problems : a partial order-based approach. PhD thesis, technical report tr-1998 27 of the Computing Science Department of Glasgow University, 1998.

[26] A. Mansouri, M. Salim Bouhlel : On the equality of the Grundy numbers of a graph. International Journal of Next-Generation Networks (IJNGN), Vol. 5, No. 4, December 2013.

[27] E.A. Nordhaus, J.W. Gaddum : On complementary graphs. *Amer. Math. Monthly* 63 : 175-177, 1956.

[28] Z. Tang, B. Wu, L. Hu : More bounds for the Grundy number of graphs. arXiv :1507.0108v2 [math.CO], 8 December 2015.

[29] B. West. *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall of India, 2003.

[30] R. Zaibak : *Étude de la coloration de Grundy dans les graphes.* Mémoire de Master en Mathématiques, spécialité Recherche Opérationnelle, Université Dr. Yahia Fares - Medea, juin 2017.

[31] M. Zaker : Inequalities for the Grundy chromatic number of graphs. July 2007, available online 23 August 2007.

[32] M. Zaker, A new vertex coloring heuristic and corresponding chromatic number, Algorithmica 82 (2020) 23952414.