UNIVERSITÉ YAHIA FARÈS DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DES SCIENCES DE LA MATIÈRES

Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de

Master en Physique

Spécialité

Physique Théorique

Par

KERMEZLI Bachir

Thème

Méthode de construction du lagrangien du modèle standard et application pour l'étude de processus physiques

---

Évalué par le jury composé de :

M. Mekhtiche Abdelhalim	MCB	Université de Médéa	Président
M. Cherroud Othmane	MCB	Université de Médéa	Examinateur
Mme. Hattou Souad	MAA	Université de Médéa	Examinatrice
M. Bouchachia Karim	MCB	Université de Médéa	Directeur de mémoire

Année universitaire 2019 / 2020

ملخص

يدخل عملنا في إطار دراسة النموذج المعياري للجسيمات الأولية. درسنا أولاً أساس النظرية، مبدأ ثبات المقياس الذي يؤدي إلى ظهور البوزونات التي تتوسط في التفاعلات وكذلك آلية هيغز التي تؤدي إلى توليد كتل الجسيمات. قدمنا بعد ذلك تقنيات حساب السعات والمقاطع الفعالة لبعض التفاعلات الفيزيائية عالية الطاقة. لهذا الغرض، قمنا بإجراء هذه الحسابات بشكل تحليلي وكذلك باستخدام رموز حساب FeynArts و FeynCalc في إطار برنامج Mathematica.

الكلمات الدلالية : النموذج المعياري، ثبات المقياس، آلية هيغز، المقطع الفعال.

Résumé

Notre travail entre dans le cadre de l'étude du modèle standard des particules élémentaires. Nous avons étudié en premier lieu le fondement de la théorie, le principe d'invariance de jauge qui conduit à l'apparition des bosons médiateurs d'interactions ainsi que le mécanisme de Higgs qui conduit à la génération des masses des particules. Nous avons présenté par la suite les techniques de calculs d'amplitudes et de sections efficaces de certain processus physique à haute énergie. A cet effet nous avons fait ces calculs analytiquement ainsi qu'avec les codes de calculs de FeynArts et FeynCalc sous le logiciel Mathematica.

Mots clés: Modèle standard, invariance de jauge, mécanisme de Higgs, section efficace.

Abstract

Our work falls within the framework of the study of the standard model of elementary particles. We first studied the basis of the theory, the principle of gauge invariance which leads to the appearance of interactions mediating bosons as well as the Higgs mechanism which gives masses to particles. We have subsequently presented the techniques for calculating the amplitudes and cross sections of some high-energy physical processes. For this purpose we have made these calculations analytically as well as with the calculation codes of FeynArts and FeynCals under the software Mathematica.

Mots clés: Standard model, gauge invariance, Higgs mecanism, cross section.

Remerciement

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force, l'endurance et la patience d'accomplir ce travail.

A mon encadreur Dr. Bouchachia Karim, j'adresse ma plus profonde reconnaissance pour son bon encadrement et pour les conseils fructueux qu'il n'a cessé de me prodiguer.

Mes remerciements vont également à Monsieur la présidente du jury, Dr. Mekhtiche Abdelhalim, et aux membres du jury Dr. Cherroud Othmane et. Mme. Hattou Souad, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant d'examiner mon mémoire de Master et de l'enrichir par leurs suggestions et propositions.

Je doit chaque bribe de ma connaissance à mes enseignants du département des science de la matière à l'université de Médéa qui ont si bien mené leur noble quête d'enseigner les bases du physique. Je les remercie non seulement pour le savoir qu'ils m'ont transmis, mais aussi pour la fierté et l'ambition que leurs personnes m'aspirent.

Mes remerciements les plus sincères vont à toute personne ayant eu la bonté et la patience de satisfaire ma curiosité et de m'avoir aider dans mon travail par leurs précieux conseils, réponses et recommandations.

Et toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à ma progression dans mon cursus universitaire, qu'elles voient en ces mots l'expression de ma gratitude pour leur présence, pour leur dévouement et pour l'aide inestimable qu'elles m'ont apportées tout au long de ce parcours.

Un petit bout de chemin certes, mais un grand enrichissement.

Dédicace

Tout d'abord je remercie Allah pour sa grâce.

Avec l'expression de ma reconnaissance, je dédie ce modeste travail à ceux qui, quels que soient les termes embrassés, je n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincère.

A mes très chers parents, source de vie, d'amour et d'affection.

A mes chers frères, source de joie et de bonheur.

A toute ma famille, source d'espoir et de motivation.

A tous mes amis.

A vous cher lecteurs.

Table des Matières

Introduction **7**

1 Fondements du modèle standard **9**

1.1 Formalisme lagrangien 9

1.2 Symétries du lagrangien et interactions fondamentales 11

1.2.1 Symétrie de jauge 11

1.2.2 Brisure spontanée de la symétrie et mécanisme de Higgs 24

1.3 Lagrangien du modèle standard 31

1.3.1 Lagrangien des champs de jauges 31

1.3.2 Lagrangien des champs de fermions 31

1.3.3 Lagrangien de Higgs 32

1.3.4 Lagrangien de Yukawa 33

1.3.5 Lagrangien de la fixation de la jauge 33

1.3.6 Lagrangien de Faddeev-Popov 33

2 Evaluation analytique des amplitudes et des sections efficaces **35**

2.1 Règles de Feynman 35

2.1.1 Electrodynamique quantique 35

2.1.2 Interaction faible 36

2.1.3 Chromodynamique quantique 37

2.2 Applications pour l'électrodynamique quantique 39

2.2.1 Le processus $e^-e^+ \to f\bar{f}$ 39

2.2.2 Le processus $\mu^+\mu^- \to e^+e^-$ 44

2.2.3 Le processus $e^-\gamma \to e^-\gamma$ 45

2.3 Applications pour la chromodynamique quantique 50

2.3.1 le processus $e^-e^+ \to q\bar{q}$ 50

2.3.2 le processus $e^-e^+ \to q\bar{q}g$ 52

2.3.3 le processus $q_1\bar{q}_2 \to g_1g_2, q_1g_2 \to q_3g_4, g_1g_2 \to q_3q_4$ 54

2.4 Applications pour l'interaction faible 58
2.4.1 Le processus $\nu_\mu + e^- \to \nu_e + \mu^-$ 58
2.4.2 Le processus $\nu_\mu + e^- \to \nu_\mu + e^-$ 60
2.4.3 Le processus $e^- + e^+ \to f + \overline{f}$ 61

3 Evaluation des amplitudes et des sections efficaces par FeynCalc 63
3.1 Applications pour l'électrodynamique quantique 63
3.1.1 Le processus $e^- + \gamma \to e^- + \gamma$ 63
3.1.2 Le processus $\mu^+ + \mu^- \to e^+ + e^-$ 65
3.2 Applications pour la chromodynamique quantique 67
3.2.1 Le processus $e^+ + e^- \to q + \overline{q}$ 67
3.2.2 Le processus $q + \overline{q} \to g + g$ 70
3.3 Applications pour l'interaction faible 72
3.3.1 Le processus $e + \nu_\mu \to \nu_e + \mu$ 72
3.3.2 Le processus $\pi^-(d + \overline{u}) \to e^- + \overline{\nu}_e$ 75

Conclusion 79

4 Diffusion de hadrons et de leptons 82

Introduction

Le modèle standard est une théorie mathématique élégante qui décrit les particules élémentaires et leurs interactions. Elle incorpore dans sa formulation les trois interactions fondamentales: électromagnétique, nucléaire faible et nucléaire forte [1], et fournit des prédictions de haute précision cohérentes avec des décennies d'études expérimentales [2]. Considérée comme la théorie la plus fondamentale en physique et la plus précise de tous les temps, elle a obtenu sa touche finale à la veille de juillet 2012 suite à la découverte de la particule tant attendue, le " boson de Higgs", au plus grand amphithéâtre souterrain de recherche sur les particules, le Grand collisionneur de hadrons (LHC) [3].

Cette théorie est basée sur le groupe de symétrie $G_{MS} = SU(3)_C \otimes SU(2)_I \otimes U(1)_Y$. Le groupe $SU(3)_C$ décrit l'interaction forte (la chromodynamique quantique) où l'indice C représente la charge de couleur des particules, $SU(2)_I$ décrit les interactions faible où l'indice I représente l'isospin faible**,** quant au groupe $U(1)_Y$, il décrit l'interaction électromagnétique (l'électrodynamique quantique) où Y désignent l'hypercharge faible[1]. Le modèle standard stipule que toute la matière est composée par des champs fermioniques qui interagissent entre eux par échange de particule bosoniques dite particules de jauges. Chaque type d'interaction est associé à un groupe de symétrie de jauge local.

Les symétries jouent un rôle fondamental dans le classement des états des particules déjà connues et à prévoir d'autres nouvelles particules. De même que les éléments chimiques sont classés dans des groupes dans le tableau périodique, les particules sont également classées dans des multiplets caractérisés par des nombres quantiques : charge électrique, spin, isospin, hypercharge, charge de saveur, charge de couleur, etc. Cependant, l'utilisation de la symétrie en physique des particules va bien au-delà de la simple classification, elle décrit aussi la dynamique des particules et leurs interactions à travers les symétries de jauges.

Une symétrie de jauge est une symétrie locale, interne, continue. De même, une théorie de jauge est une théorie quantique des champs où le lagrangien L du système physique est invariant sous une certaine symétrie de jauge. L'ensemble des transformations de jauge possibles forment

[1] L'hypercharge Y d'une particule élémentaire de charge électrique Q et la projection d'isospin I_3 est définie par la relation de Gell-Mann-Nishijima $Y = 2\,(Q - I_3)$.

un groupe, appelé groupe de jauge. Il s'agit d'un groupe de Lie, et ses générateurs forment une algèbre de Lie. Une symétrie est dit brisée spontanément, si le Lagrangien de la théorie présente une symétrie mais l'état fondamental (le vide) ne possède pas cette symétrie. La description des particules et des forces de la nature est basé sur le langage mathématique de la théorie quantique des champs, qui combine la mécanique quantique et la relativité restreinte. Dans cette théorie, les particules sont des excitations des champs fondamentaux qui dépendent des coordonnées de l'espace-temps.

Afin de comprendre comment les symétries d'un système physique peuvent avoir des conséquences dynamiques, il est nécessaire de souligner que chaque principe d'invariance est intimement liée à la conservation d'une quantité physique, comme l'a prouvé le théorème de Noether. Dans le cas classique (sur l'espace de Minkowski), le théorème de Noether, entraîne la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion (invariance par translation), ainsi que la conservation du moment angulaire (invariance par rotation). Dans le cas quantique (sur l'espace de Hilbert), l'invariance conduit, non seulement, à la conservation des propriétés externes qui sont liées à la structure de l'espace-temps, mais aussi à la conservation des propriétés internes tels que les nombres quantiques.

La formulation mathématique du modèle standard est assez complexe car elle tire sa source de la théorie des champs et de la théorie des groupes. Cependant, toutes les informations liées à la théorie sont encodées de façon compacte dans le lagrangien de la théorie, même si cette formule "compacte" occupe encore plusieurs pages [4].

Le présent manuscrit est agencé en trois chapitres, hors introduction et conclusion. La premier chapitre est consacré à la présentation des éléments de base associée à la construction du lagrangien du modèle standard. Dans le deuxième chapitre, on introduit les techniques de calculs analytiques utilisées pour l'évaluation des sections efficaces de certains processus physique à haute énergie dans le cadre du modèle standard. Dans le troisième chapitre, on utilise les logiciels FeynArts et FeynCalc, sous Mathematica, pour générer les diagrammes de Feynman associé à certain processus et pour évaluer les amplitudes et les sections efficaces.

Chapitre 1

Fondements du modèle standard

Nous allons présenter dans ce chapitre les éléments de base du modèle standard en prenant comme point de départ la formulation lagrangienne. Nous allons décortiquer le lagrangien de la théorie afin de comprendre les principes fondamentaux sur lesquels il construit ainsi que pour mettre en évidence le lien entre les propriétés de particules et leurs interactions et les groupes de symétries.

1.1 Formalisme lagrangien

En mécanique classique le Lagrangien d'un système isolé s'exprime comme

$$L(q, \dot{q}, t) = T - V \tag{1.1}$$

où q et $\dot{q}$ sont les coordonnées généralisées, T l'énergie cinétique et V l'énergie potentielle.

Le principe de moindre action, ou principe de Hamilton, stipule que le système se déplace de telle sorte que l'action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \tag{1.2}$$

soit extrémale

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \tag{1.3}$$

avec la position du système q déterminée aux instants t_1 et t_2, c'est à dire

$$\delta q(t_1\ ) = \delta q(t_2\ ) = 0 \tag{1.4}$$

En intégrant par partie et sachant (1.4), il découle de l'équation (1.3) que

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \tag{1.5}$$

c'est l'équation d'Euler-Lagrange qui exprime autrement le principe de moindre action et conduit à l'équation dynamique de mouvement.

Dans le cas d'un système isolé, les équations du mouvement ne dépendent pas explicitement du temps alors

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L\right] = 0 \tag{1.6}$$

ceci conduit à la conservation de la quantité

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L = E \tag{1.7}$$

qui n'est d'autre que l'énergie totale du système et qui est dans ce cas une constante du mouvement. Ce résultat peut être obtenu de manière différente à partir du théorème de Noether. Ce dernier énonce que pour toute symétrie continue (dans notre cas ici temporelle) d'un système, il existe une constante du mouvement associée. Dans ce cas précis, c'est l'invariance du lagrangien par rapport à une translation temporelle qui conduit à la conservation de l'énergie totale du système. Cette notion de symétrie, ou invariance, est un élément clé dans la construction d'une théorie des champs et encore d'avantage pour le cas du modèle standard qui est théorie de jauge [5].

Pour un système continu sur l'espace-temps de Minkowski, on peut étendre le formalisme présenté

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow \mathcal{L}(\phi(x^\mu), \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}, x^\mu) \tag{1.8}$$

où $\mathcal{L}$ représente une densité lagrangienne liée au Lagrangien par la relation

$$L = \int \mathcal{L} dx^3. \tag{1.9}$$

Pour la construction d'une théorie quantique des champs le point de départ est la donnée de la densité lagrangienne décrivant la particule considérée, ainsi pour une particule scalaire libre

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{1.10}$$

ce qui conduit à l'équation du mouvement

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu - m^2\right)\phi = 0 \tag{1.11}$$

connue comme l'équation de Klein-Gordon. Cette équation régit l'évolution d'une particule scalaire libre quantique et relativiste [5].

De même, une particule fermionique libre est décrite par la densité du lagrangien de Dirac

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi \tag{1.12}$$

donnant l'équation du mouvement

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi = 0 \tag{1.13}$$

où γ^μ sont les matrices de Dirac, et μ est un indice de Lorentz.

1.2 Symétries du lagrangien et interactions fondamentales

La construction systématique du lagrangien du modèle standard peut être effectuée par étapes à partir du lagrangien fermionique libre qui décrit les leptons et quarks, qu'on suppose initialement avec masses nuls. On impose par la suite au lagrangien d'être invariant globalement et localement par les groupes de symétrie $U(1)$, $SU(2)$ et $SU(3)$ ceci à comme conséquence de générer un lagrangien de jauge qui décrit les particules médiatrices, les bosons de jauges, ainsi qu'un lagrangien d'interactions. Les bosons de jauges associés à ce nouveau lagrangien ont tous des masses nulles. Pour générer les masses des particules on introduit le lagrangien scalaire qui décrit la particule de Higgs et permet par la suit de générer les masses des particule par le mécanisme de Higgs suite à la brisure spontanée de la symétrie globale pour les fermions et de la symétrie de jauges pour les bosons.

1.2.1 Symétrie de jauge

La notion d'interaction, ou force d'interaction, est définie dans le cadre du modèle standard comme étant un échange de particules appelées boson médiateurs d'interactions. Ainsi l'interaction électromagnétique de deux particules électriquement chargées n'est d'autre qu'un échange d'un photon, qui est dans ce cas le boson médiateur de l'interaction. Les interactions fondamentales sont générées dans le cadre du modèle standard à travers un formalisme mathématique élégant basé les groupes de symétries locales qu'on appel théorie de jauge. Les interactions fondamentales décrites par le modèle standard sont alors intiment liées aux groupes de symétries. Nous allons voir, plus en détail, ce lien à travers le mécanisme de jauge.

L'électrodynamique quantique

L'interaction électromagnétique est décrite dans le cadre du modèle standard par la théorie de l'électrodynamique quantique. Le groupe de symétrie associé à cette interaction est le groupe de jauge $U(1)$. Afin d'illustrer le mécanisme de jauge, on considère une particule fermionique de masse m décrite le lagrangien $\mathcal{L}_D$ [6]

$$\mathcal{L}_D = \overline{\psi}\left(i\gamma_\mu \partial^\mu - m\right)\psi, \tag{1.14}$$

nous allons voir par la suite comment à travers l'invariance globale et locale de ce lagrangien par le groupe $U(1)$ on peut générer l'interaction électromagnétique.

Symétrie globale Les groupes de Lie[1] sont largement utiliser en physique pour exprimer les propriétés de symétries des systèmes. Une transformation U d'un groupe de lie peut être écrite sous la forme

$$U = e^{-ig\sum_{i=1}^{r}\alpha^i T^i} \tag{1.15}$$

où g constante réelle arbitraire[2], α^i sont les r paramètres du groupes et T^i les générateurs du groupe.

Le groupe de symétrie $U(1)$ est un groupe de Lie unitaire à un seul paramètre et dimension 1, il est représenté par l'opérateur

$$U(\theta) = e^{-i\theta} \tag{1.16}$$

où θ est le paramètre du groupe et $U^\dagger U = 1$. On dit que la transformation du groupe est globale si le paramètre θ ne dépend pas des coordonnées de l'espace-temps

$$\theta \neq \theta(x). \tag{1.17}$$

On appliquant cette transformation au champ ψ on obtient

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = e^{-i\,\theta}\psi \\ \overline{\psi}' &= \left(\psi'\right)^\dagger \gamma^0 \rightarrow e^{i\theta}\psi \\ \partial^\mu\psi' &\rightarrow e^{i\,\theta}\partial^\mu\psi \end{aligned} \tag{1.18}$$

[1] Par définition un groupe de Lie est un ensemble de transformations doté à la fois d'une structure de groupe et d'une structure de variété différentiable.

[2] La constante g est introduite en théorie de jauge pour représenter la constante de couplage d'interaction, sinon on prend $g = 1$.

on peut ensuite vérifier si le lagrangien est invariant par ce groupe de transformation, donc

$$\psi \to \psi^{'} \Longrightarrow \mathcal{L}_D \to \mathcal{L}^{'}_D = \overline{\psi}^{'} \gamma_\mu \partial^\mu \psi^{'} - m\overline{\psi}^{'} \psi \tag{1.19}$$

si on remplace par les relations (1.18) et (1.19) on obtient

$$\mathcal{L}^{'}_D \equiv \mathcal{L}_D \tag{1.20}$$

on dire alors que le lagrangien $\mathcal{L}$ et invariant par la groupe de symétrie de jauge globale.

Symétrie locale Dans le cas où le paramètre du groupe dépend des coordonnées de l'espace-temps

$$\theta = \theta(x) \tag{1.21}$$

le groupe de symétrie de jauge est dit local, dans ce cas le lagrangien $\mathcal{L}$ n'est plus invariant par les transformations de ce groupe

$$\begin{aligned} \psi^{'} &\to e^{-i\ \theta(x)Q}\psi \\ \overline{\psi}^{'} &= \left(\psi^{'}\right)^{\dagger}\gamma^0 \to \overline{\psi}e^{i\ \theta(x)Q} \\ \partial^\mu\psi^{'} &\to \left(-iQ\partial^\mu\theta(x)\right).\psi + e^{-i\ \theta(x)}\partial^\mu\psi \end{aligned} \tag{1.22}$$

Q est le générateur du groupe $U(1)$ qui n'est d'autre que l'unité, on obtient alors pour le lagrangien

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D &\to \mathcal{L}^{'}_D = \overline{\psi}\left(i\gamma_\mu\partial^\mu - m\right)\psi + i\overline{\psi}\psi\partial^\mu\theta(x) \\ &= \mathcal{L}_D + i\overline{\psi}\psi\partial^\mu\theta(x) \end{aligned} \tag{1.23}$$

donc

$$\mathcal{L}^{'}_D \not\equiv \mathcal{L}_D \tag{1.24}$$

on dit que le terme $i\partial^\mu\theta(x)$ brise l'invariance de jauge locale. Pour remédier à ce problème on remplace la dérivée ordinaire ∂^μ par la dérivée covariante D^μ [6]

$$D_\mu = \partial_\mu + ieQA_\mu \tag{1.25}$$

cette nouvelle dérivée se transforme comme

$$D^\mu\psi^{'} \to e^{-i\theta(x)}D^\mu\psi \tag{1.26}$$

où A_μ est un nouveau champ vectoriel qui se transforme de façon à annuler le terme en $\partial^\mu\theta(x)$ dans (1.22)

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x) \tag{1.27}$$

en remplaçant ∂^μ par D^μ, on obtient alors un lagrangien invariant par le groupe de jauge local

$$\mathcal{L}_D = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m) - eQ\ \overline{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi \tag{1.28}$$

où le terme

$$\mathcal{L}_I = -eQ\ \overline{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi \tag{1.29}$$

décrit l'interaction électromagnétique entre un champ de fermion ψ (et anti-fermion $\overline{\psi}$) et un champ de boson A_μ représentant le photon.

Ainsi en imposant au lagrangien d'être localement invariant, nous sommes obligés d'introduire un nouveau champ vectoriel A_μ (champ de jauge), ce dernier décrit en faite un boson de jauge qui n'est d'autre que le photon, et afin de l'interpréter comme tel, il est nécessaire d'ajouter un lagrangien libre associé à ce boson. Le seul candidat invariant lors de la transformation (**??**) doit être construit à partir du tenseur

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{1.30}$$

conventionnellement le lagrangien décrivant le photon est écrit sous la forme

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{1.31}$$

ce lagrangien est appelé lagrangien de Yang-Milles. On obtient ainsi le lagrangien totale de la théorie de l'électrodynamique quantique qui est invariant par les transformations locales du groupe $U(1)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{loc} &= \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_I \\ &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - eQ\ \overline{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi. \end{aligned} \tag{1.32}$$

L'interaction nucléaire faible

L'interaction faible intervient à travers les bosons vecteur W^+, W^- et Z. Elle est 10^9 fois plus faible que l'interaction nucléaire forte, d'où sont nom [7]. Le groupe de symétrie associé à cette interaction est le groupe de jauge $SU(2)_I$. Cette interaction est responsable des changements de saveurs des particules, leptons et quarks, et elle est la cause directe du phénomène de radioactivité. Les interactions faibles peuvent être classées selon la nature de particules impliquée [8] :

Interactions leptoniques par exemple la désintégration leptonique du muon

$$\mu^- \rightarrow e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu \tag{1.33}$$

Interactions semi-leptoniques par exemple la désintégration β du neutron

$$n \rightarrow p + e^- + \overline{\nu}_e \tag{1.34}$$

Interactions non-leptoniques (hadroniques) par exemple la désintégration hadronique du Λ^0

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^0 \tag{1.35}$$

Les interactions faibles sont caractérisées par les propriétés suivantes [8]

- Mettent en jeu des neutrinos ou des quarks qui changent de saveur, c'est-à-dire des Particules ayant une charge faible
- Couplage faible (entre protons)
  $\alpha_{Fremi} = \frac{G_F m_p^2}{4\pi} \approx 10^{-6}, G_F = 1.16 \cdot 10^{-5} Gev^{-2}$;
- Temps d'interaction ou vie moyenne typique de $\approx 10^{-8} s$;
- Section efficace de $\approx 10^{-44} m^2$;
- Echange de bosons $W^{\pm}$ (courants chargés) et Z^0 (courant neutre);
- portée $R = 10^{-18} m$;

Les interactions faibles décrire par la densité lagrangien

$$\mathcal{L}_F = \frac{G_F}{2} J_\mu^\dagger J^\mu, \tag{1.36}$$

avec le courant leptonique

$$J^\mu = \overline{\psi}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_\nu, \tag{1.37}$$

dans le cas général on peut écrire chaque spineur

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi + \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi \\ \psi &= \psi_R + \psi_L, \end{aligned} \tag{1.38}$$

les parties gauches ψ_e et ψ_ν sont groupé comme suivant

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_\nu \\ \psi_e \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi_\nu \\ \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi_e \end{pmatrix}. \tag{1.39}$$

Le groupe $SU(2)$ est un groupe spécial ($\det U = 1$) unitaire ($U^\dagger U = 1$) de dimension 2 et a trois paramètres. Sa représentation fondamentales est réalisée par des matrices 2×2 complexes, unitaires et de déterminant égale à un. Ce groupe est utiliser en mécanique quantique pour représenter la rotation des fonctions d'ondes sur l'espace de Hilbert, où les trois paramètres du groupe coïncide avec les angles de rotation d'Euler (α, β, γ). La représentation de ce groupe en mécanique quantique est réalisée par des matrices $(2j+1) \times (2j+1)$, où j est le spin de la particule ou le moment cinétique du système. Dans le cadre du modèle standard, le groupe $SU(2)$ est utilisé pour représenté la rotation des champs mais aussi pour représenter la transformation des isomultiplets de champs sur l'espace de l'isospin, d'où l'ajout de l'indice I à $SU(2)$. Sa représentation fondamentales est réalisée par

$$U(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = \exp(-\frac{i}{2} g \epsilon_k \tau_k) \tag{1.40}$$

où ϵ_k sont les paramètres du groupe, g est une constante réelle positive et τ_k sont les matrices de Pauli

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.41}$$

tel que

$$[\tau_i, \tau_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\tau_k. \tag{1.42}$$

Pour avoir une représentation de dimension supérieur de $SU(2)_I$ il suffit de remplacer les matrices de Pauli par des matrices $(2I+1)\times(2I+1)$, où I désigne l'isospin associé au multiplet de champs. Ces matrices doivent vérifier la même relation de structure que celle des matrices de Pauli (1.42).

Les transformations infinitésimales des champs sont

$$\begin{aligned} \delta\psi^a &= -\frac{i}{2} g \epsilon_k (\tau_k)^{ab} \psi^b \\ \delta\overline{\psi}^a &= \frac{i}{2} g \epsilon_k (\tau_k)^{ab} \psi^b \end{aligned} \tag{1.43}$$

les générateurs des transformations sont

$$T_k^{ab} = -\frac{ig}{2} \left(\tau_k^{ab}\right) \tag{1.44}$$

la relation de commutation des générateurs est

$$[T_k, T_l] = -\frac{g^2}{4}[\tau_k, \tau_l] = g\epsilon_{klm}T_m \tag{1.45}$$

il s'ensuit que les constantes de structure sont

$$f_{klm} = g\epsilon_{klm} \tag{1.46}$$

où ϵ_{klm} est le tenseur de Levi-Civita.

Une théorie ayant une invariance de jauge non triviale par $SU(2)_I$ nécessiterait au moins un doublet de champs, dons ce cas l'isospin associé est $I = \frac{1}{2}$. Considérons le cas d'un isodoublet de $SU(2)_I$ composé par des champs de spineurs ψ^1 et ψ^2

$$\psi^a = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} \tag{1.47}$$

où ψ^1 et ψ^2 décrivent, par exemple, un proton et un neutron (de masse M) respectivement [9]. Le lagrangien libre pour un tel doublet est donné par

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(\overline{\psi}^a\gamma^\mu\partial_\mu\psi^a - \partial_\mu\overline{\psi}^a\gamma^\mu\psi^a) - M\overline{\psi}^a\psi^a. \tag{1.48}$$

Symétrie globale La transformation globale des champs par le groupe de jauge $SU(2)_I$ [9] est donnée par

$$\begin{aligned} \psi^a &\rightarrow \psi^{'a} = [\exp(-\frac{i}{2}g\epsilon_k\tau_k)]^{ab}\psi^b \\ \overline{\psi}^a &\rightarrow \overline{\psi}^{'a} = \overline{\psi}^b[\exp(\frac{i}{2}g\epsilon_k\tau_k)]^{ab} \end{aligned} \tag{1.49}$$

le lagrangien transformée est

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \frac{i}{2}(\overline{\psi}^{'a}\gamma^\mu\partial_\mu\psi^{'a} - \partial_\mu\overline{\psi}^{'a}\gamma^\mu\psi^{'a}) - M\overline{\psi}^{'a}\psi^{'a} \tag{1.50}$$

on peut vérifier l'invariance de ce lagrangien terme par terme

$$M\overline{\psi}^{'a}\psi^{'a} = M\overline{\psi}^a\psi^a \tag{1.51}$$

et

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}^{'a}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi^{'a} &= \overline{\psi}^{b}[\exp(\frac{i}{2}g\epsilon_{k}\tau_{k})]^{ab}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}[\exp(-\frac{i}{2}g\epsilon_{k}\tau_{k})]^{ad}\psi^{d} \\
&= \overline{\psi}^{b}[\exp(\frac{i}{2}g\epsilon_{k}\tau_{k})]^{ab}[\exp(-\frac{i}{2}g\epsilon_{k}\tau_{k})]^{ad}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi^{d} \\
&= \overline{\psi}^{b}\left[\underbrace{[\exp(\frac{i}{2}g\epsilon_{k}\tau_{k})][\exp(-\frac{i}{2}g\epsilon_{k}\tau_{k})]}_{=\mathbf{1}}\right]^{bd}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi^{d} \\
&= \overline{\psi}^{b}\left[\mathbf{1}\right]^{bd}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi^{d} = \overline{\psi}^{b}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi^{b} = \overline{\psi}^{a}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi a
\end{aligned} \tag{1.52}$$

de même pour le terme

$$\partial_{\mu}\overline{\psi}^{'a}\gamma^{\mu}\psi^{'a} = \partial_{\mu}\overline{\psi}^{a}\gamma^{\mu}\psi^{a} \tag{1.53}$$

on en déduit que ce lagrangien est invariant par la transformation globale du groupe $SU(2)_I$

$$\mathcal{L}^{'} = \mathcal{L}. \tag{1.54}$$

Symétrie locale Pour que le lagrangien 1.48 soit invariant par la transformation de jauge locale de $SU(2)_I$, il suffit de remplacé la dérivée ordinaire par la dérivée covariante [3]

$$\partial_{\mu}\psi^{a} \rightarrow D_{\mu}\psi^{a} = \partial_{\mu}\psi^{a} + \frac{ig}{2}(\tau_{k})^{ab}\psi^{b}A^{k}_{\mu}, \qquad k = 1, 2, 3 \tag{1.55}$$

où A^{k}_{μ} sont les champs de jauges, leur nombre est égal au nombre de générateurs du groupe. Le lagrangien des champs de jauge est pris sous la forme

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F^{k}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_{k} \tag{1.56}$$

où

$$F^{k}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} - \frac{g}{2}\epsilon_{klm}(A^{l}_{\mu}A^{m}_{\nu} - A^{l}_{\nu}A^{m}_{\mu}) \tag{1.57}$$

$F^{k}_{\mu\nu}$ est le tenseur du champ de Yang-Mills, l'équation (1.56) contient, outre les termes quadratiques, les termes cubique et quartique dans les champs A^{k}_{μ}, c'est-à-dire que le champ de Yang-Mills est auto-interactif. Les champs de jauge A^{k}_{μ} se transforment comme suit

$$\delta A^{k}_{\mu} = g\epsilon_{klm}A^{m}_{\mu}\epsilon_{l}(x) + \partial_{\mu}\epsilon_{k}(x) \tag{1.58}$$

[3] C'est la condition nécessaire est suffisante pour avoir une invariance de jauge locale.

On obtient alors le lagrangien total localement invariant par $SU(2)_I$ sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{loc} &= \mathcal{L} + \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_I & (1.59) \\ &= \frac{i}{2}(\overline{\psi}^a \gamma^\mu \partial_\mu \psi^a - \partial_\mu \overline{\psi}^a \gamma^\mu \psi^a) - M\overline{\psi}^a \psi^a + -\frac{1}{4} F^k_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_k - \frac{g}{2}\overline{\psi}^a \gamma^\mu (\tau_k)_{ab} \psi^b A^k_\mu & (1.60) \end{aligned}$$

où $\mathcal{L}_I = -\frac{g}{2}\overline{\psi}^a \gamma^\mu (\tau_k)_{ab} \psi^b A^k_\mu$ est le lagrangien d'interaction faible entre un multiplet ψ^a de champs de fermions (et anti-fermions $\overline{\psi}^a$) et des champs de bosons A^k_μ représentant les médiateurs de l'interaction faible, le lagrangien (1.59) invariant implique la conservation du courant [9]

$$\begin{aligned} J^k_\mu &= -\frac{g}{2}\overline{\psi}^a \gamma^\mu (\tau_k)_{ab} \psi^b & (1.61) \\ &\quad -g\epsilon_{klm} A^m_\mu \left[\partial_\mu A^l_\nu - \partial_\nu A^l_\mu - \frac{g}{2}\epsilon_{lij}(A^i_\mu A^j_\nu - A^i_\nu A^j_\mu) \right]. \end{aligned}$$

Par analogie avec le cas de l'électromagnétisme, nous avons besoin de 3 bosons de jauges sans masses pour satisfaire l'invariance de jauge [10]. Mais, en réalité l'interaction faible est véhiculé par trois bosons de jauges massives W^+, W^- et Z^0 ($m_{W^\pm} = 80,33GeV$ et $m_{Z^0} = 91.19GeV$). C'est pour remédier à cette situation que le mécanisme de Higgs-Englert-Brout à été introduit [11, 12].

Dans le cas où le lagrangien fermionique est localement invariant par les groupes $U(1)$ et $SU(2)$ alors il y a l'unification de l'interaction électromagnétique et de l'interaction faible, on parle alors de l'interaction électrofaible.

L'interaction nucléaire forte

L'interaction forte qui s'exerce sur les quarks à l'aide de bosons médiateurs, au nombre de huit, appelés gluons [13]. Elle assure la cohésion du noyau atomique et décrite par la chromodynamique quantique (QCD) et basée sur le groupe de jauge $SU(3)_c$. Les champs de matière sont les quarks. Ils sont dans la représentation fondamentale du groupe de jauge et ont un spin 1/2. Il existe six quarks, notés u (up;haut), d (dwn;bas), c (;charm;charme), s (strange;étrange), t (top;haut) et b (bottom;bas), ce sont les six saveurs des quarks. Un autre nombre quantique peut être associé aux quarks, c'est la couleur. Il existe trois couleurs : bleu, vert et rouge. Par conséquent, un champ de quark générique a deux indices, ψ^j_i avec $i = 1, 2, 3$ l'indice de couleur et $j = u, d, c, s, t, b$ l'indice de saveur. Ceci ramène le nombre de quark à 18, auxquels on ajoute 18 antiquarks. Chaque quark est décrit par un lagrangien femionique avec une masse différente pour chaque saveur [14]

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\psi \qquad (1.62)$$

où ψ est un triplet de champs fermioniques (quarks)

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \tag{1.63}$$

donc

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_1(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi_1 + \bar{\psi}_2(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi_2 + \bar{\psi}_3(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi_3 \tag{1.64}$$

L'action du groupe $SU(3)$ sur ψ donnée par

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = U\psi \\ \overline{\psi} &\rightarrow \overline{\psi'} = \overline{\psi}U^\dagger \end{aligned} \tag{1.65}$$

où

$$U(\alpha^a) = e^{-ig\alpha^a T^a} \quad , a = 1, ..., 8 \tag{1.66}$$

où T_a sont les générateurs de groupe $SU(3)$ qui sont un ensemble de 8 matrices 3×3 tels que $T_a = \frac{\lambda_a}{2}$ et λ_a sont les matrices de Gell-Mann

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.67}$$

on remarque que $Tr[\lambda_a] = Tr[T_a] = 0$. Le groupe $SU(3)$ est non Abélien puisque les générateurs du groupe T_a ne commutent pas entre eux et sont orthogonaux

$$\begin{aligned} [T_i, T_j] &= if_{ijk}T_k \\ Tr[T^a T^b] &= \frac{1}{2}\delta^{ab} \end{aligned} \tag{1.68}$$

Les coefficients f_{ijk} sont antisymétriques et réels, ce sont les constantes de structure du groupe $SU(3)$.l'invariance de $\mathcal{L}$ sous la transformation globale découle directement de la propriété d'unitarité

de U

$$U^{\dagger} = U^{-1} \tag{1.69}$$

Symétrie locale Dans ce cas les paramètres α^a sont des fonctions des coordonnées de l'espace-temps, $\alpha^a \rightarrow \alpha^a(x)$

$$U(\alpha^a) = e^{ig\alpha^a(x)T^a} \quad , a = 1, ..., 8 \tag{1.70}$$

l'action d'un élément du groupe sur les fermions est

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi^{'} = U(x)\psi \\ \overline{\psi} &\rightarrow \overline{\psi^{'}} = \overline{\psi}U^{\dagger}(x) \end{aligned} \tag{1.71}$$

Il est pratique de considérer une transformation de jauge infinitésimale

$$U(\alpha^a) = 1 - ig\alpha^a(x)T^a \tag{1.72}$$

appliquée aux champs on obtient

$$\delta\psi(x) = -ig\alpha^a(x)T^a\psi(x) \ , \tag{1.73}$$

$$\delta\overline{\psi}(x) = \overline{\psi}(x)(ig\alpha^a(x)T^a) \tag{1.74}$$

$$\delta\left\{\partial_\mu\psi(x)\right\} = \partial_\mu\delta\psi(x) = -ig\alpha^a(x)T^a\partial_\mu\psi(x) - ig\left(\partial_\mu\alpha^a(x)\right)T^a\psi(x)$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \delta\overline{\psi}(x)i\not{\partial}\psi(x) + \overline{\psi}(x)i\gamma^\mu\delta\left\{\partial_\mu\psi(x)\right\} - m\delta\overline{\psi}(x)\psi - m\overline{\psi}\psi(x) \\ &= \overline{\psi}(x)\left\{g\left(\partial_\mu\alpha^a(x)\right)T^a\gamma^\mu\right\}\psi(x) \end{aligned} \tag{1.75}$$

Le lagrangien n'est plus invariant à cause du terme dérivatif proportionnel à $\partial_\mu\alpha^a(x)$. Par analogie avec QED, on introduit des champs vecteurs A^b_μ, et on ajoute dans le lagrangien un terme qui a la même structure de groupe $SU(3)$ et de Lorentz que le terme en $\left(\partial_\mu\alpha^a(x)\right)T^a$ soit

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(x)\left(i(\partial_\mu - igA^b_\mu(x)T^b)\gamma^\mu - m\right)\psi(x), \qquad b = 1, ..., 8$$

On introduit la dérivée covariante

$$\mathcal{D}_\mu\psi(x) = \left(\partial_\mu - igA^b_\mu(x)T^b\right)\psi(x) \tag{1.76}$$

qui se transforme par le groupe $SU\,(3)$ de façon à rétablir l'invariance du lagrangien

$$(\mathcal{D}_\mu\psi(x))^{'} \equiv \mathcal{D}^{'}_\mu\psi^{'}(x) = \mathcal{D}^{'}_\mu U(x)\psi(x) = U(x)\mathcal{D}_\mu\psi(x) \tag{1.77}$$

et en terme d'opérateur

$$\mathcal{D}^{'}_\mu = U(x)\mathcal{D}_\mu U^{-1}(x) = U(x)\mathcal{D}_\mu U^{\dagger}(x) \tag{1.78}$$

Pour éviter la manipulation d'indices de couleur on introduit les matrices 3×3, locales hermitiennes de trace nulle

$$\mathcal{A}_\mu(x) = A^b_\mu T^b \qquad , \qquad \widetilde{\alpha}(x) = \alpha^a(x)T^a$$

avec sommation implicite sur les indices de couleur. On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{'}_\mu &= U(x)\left(\partial_\mu - ig\mathcal{A}_\mu(x)\right)U^{-1}(x) \\ &= \partial_\mu + U(x)(\partial_\mu U^{-1}(x)) - igU(x)\mathcal{A}_\mu(x)U^{-1}(x) \end{aligned} \tag{1.79}$$

donc $\mathcal{D}^{'}_\mu$ de la forme $\partial_\mu - ig\mathcal{A}^{'}_\mu(x)$, avec

$$\mathcal{A}^{'}_\mu(x) = \frac{i}{g}U(x)(\partial_\mu U^{-1}(x)) + U(x)\mathcal{A}_\mu(x)U^{-1}(x) \tag{1.80}$$

la transformation infinitésimale s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{'}_\mu(x) - \mathcal{A}_\mu(x) &= \delta\mathcal{A}_\mu(x) \\ &= \partial_\mu\widetilde{\alpha}(x) - ig[\mathcal{A}_\mu(x), \widetilde{\alpha}(x)] \\ &= \partial_\mu\alpha^a(x) + g\ f^{abc}A^a_\mu(x)\alpha^c(x) \end{aligned} \tag{1.81}$$

A partir des l'équations (1.73) et (1.81) on a donc bien rétabli la propriété d'invariance du lagrangien de l'équation[4] (1.75)

$$\delta\mathcal{L} = 0 \tag{1.82}$$

Il est utile d'introduire les générateurs du groupe opérant sur la représentation adjointe. Ce sont des matrices 8×8 dont les éléments sont donnés par

$$(\mathcal{T}^c)^{ab} = -\,if^{abc} \tag{1.83}$$

[4]Le deuxième terme (non abélien) de l'équation illustre la différence fondamentale entre QED et QCD car il permet, le couplage des bosons de jauge entre eux ce qui conduira à la propriété de liberté asymptotique.

et tenant compte de la relations de commutation des générateurs de $SU(3)$, les éléments de matrice de la dérivée covariante opérant sur la représentation adjointe sont alors obtenues par la relation

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}_\mu)^{ab} &= \partial_\mu \delta^{ab} - ig(T^c)^{ab} A^c_\mu(x) \\ &= \partial_\mu \delta^{ab} - g f^{abc} A^c_\mu(x)\end{aligned} \tag{1.84}$$

donc l'équation (1.81) prend la forme

$$\delta A^a_\mu(x) = (\mathcal{D}_\mu)^{ab}\, \alpha^b(x) \tag{1.85}$$

c'est la transformation infinitésimale du champ de jauge par le groupe $SU(3)$ dans la représentation adjointe.

Terme cinétique pour les gluons On va donc définir le tenseur antisymétrique qui généralise l'expression du tenseur $F_{\mu\nu}$ dans le cas non abélien

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mu\nu} &= \frac{1}{g}[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \\ &= \partial_\mu \mathcal{A} - \partial_\nu \mathcal{A}_\nu - ig[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]\end{aligned} \tag{1.86}$$

$\mathcal{D}_\mu$ donné par l'équation (1.76), on utilisant la formule de Leibniz $\partial_\mu A_\nu = (\partial_\mu A_\nu) + A_\nu\ \partial_\mu$ on obtient

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a - \partial_\nu A^a_\nu + \underbrace{igf^{abc} A^b_\mu A^c_\nu}_{\text{terme non abélien}}. \tag{1.87}$$

Pour obtenir la variation du tenseur $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ sous une transformation de jauge U il est utile de se souvenir que, par l'équation (1.78)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'_{\mu\nu} &= U\mathcal{F}_{\mu\nu}U^\dagger \\ U &= 1 + ig\ \widetilde{\alpha}(x)\end{aligned} \tag{1.88}$$

donc, la transformation infinitésimale donne par[5]

$$\delta\mathcal{F}_{\mu\nu} = -ig[\mathcal{F}_{\mu\nu}, \widetilde{\alpha}(x)]. \tag{1.89}$$

[5]Du point de vue des transformations du groupe $SU(3)$, $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ se transforme comme $\mathcal{A}_\mu$ c'est-à-dire un élément de la représentation adjointe [14]

On définit le terme cinétique des champs de jauge comme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{cin} &= -\frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}F^a_{\mu\nu}F^{b\mu\nu}\underbrace{Tr\left[T^aT^b\right]}_{\frac{1}{2}\delta^{ab}} \\ &= -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}\end{aligned} \tag{1.90}$$

donc lagrangien de la QCD est

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu - m)\psi(x) \tag{1.91}$$

Le premier terme contient les couplages à trois et quatre gluons tandis que le deuxième terme contient le couplage des gluons aux fermions. En général, il existe plusieurs façons d'écrire la relation (1.91). Parmi elles [15]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{YM} &= \bar{\psi}\left(i\not{D} - m\right)\psi - \frac{1}{2}Tr\left[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right] \\ &= i\bar{\psi}^\alpha\gamma^\mu\partial_\mu\psi^\alpha - m\bar{\psi}^\alpha\psi^\alpha + gG^a_\mu\bar{\psi}^\alpha\gamma^\mu\left(T^a_R\right)_{\alpha\beta}\psi^\beta - \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{a\ \mu\nu}\end{aligned} \tag{1.92}$$

où $\not{D} = \gamma^\mu\left[\partial^\mu - igG_\mu\right]$. Par conséquent

$$\mathcal{L}_{loc} = i\bar{\psi}^{\alpha,k}\gamma^\mu\partial_\mu\psi^{\alpha,k} - m_{(k)}\bar{\psi}^{\alpha,k}\psi^{\alpha,k} - \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{a\ \mu\nu} + gG^a_\mu\bar{\psi}^{\alpha,k}\gamma^\mu\left(T^a_R\right)_{\alpha\beta}\psi^{\beta,k} \tag{1.93}$$

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu + gf^{abc}G^b_\mu G^c_\nu \tag{1.94}$$

$a = \{1.....8\}$

g est une constante de couplage

ψ^α le champ de fermion correspondant à un quark (avec masse $m_{(k)}$)

G^a_μ champ de gluon

f^a_{bc} constantes de structure de$SU(3)$,pour $\left[T^a, T^b\right] = if^{ab}_c T^c$

où l'on additionne à la fois les indices de couleur α, β et l'indice de saveur G et T^a sont les générateurs de $SU(3)$ dans la représentation fondamentale.

1.2.2 Brisure spontanée de la symétrie et mécanisme de Higgs

Une symétrie est dite brisée spontanément, si le lagrangien de la théorie est invariant par rapport à un certain groupe de symétrie alors que l'état fondamental (le vide) ne l'est pas. Cette brisure de symétrie est un ingrédient important dans le mécanisme de Higgs-Englert-Brout [11, 12] qui permet de générer les masses des particules.

Le groupe U(1)

Soit le lagrangien qui décrit le champ de matière scalaire complexe φ en interaction avec le champ de jauge A_μ

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} + (D^\mu\varphi)^*(D_\mu\varphi) - V(\varphi^*,\varphi) \tag{1.95}$$

où D_μ est la dérivée covariante $D_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi + igA_\mu\varphi$, et $\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ le lagrangien de Yang-Mills et $V(\varphi^*,\varphi)$ le potentiel de Higgs qui a comme expression

$$V(\varphi^*,\varphi) = \mu^2\varphi^*\varphi + \frac{\lambda}{4}(\varphi^*\varphi)^2 \;\; ; \;\; \lambda > 0 \text{ et } \mu \text{ arbitraire} \tag{1.96}$$

Il est à noter que le lagrangien est invariant sous les transformations infinitésimales de jauge globales suivantes

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= -ig\epsilon\varphi \\ \delta\varphi^* &= ig\epsilon\varphi^* \end{aligned} \tag{1.97}$$

où $\epsilon \neq \epsilon(x)$ est un paramètre réel (constant). La forme du lagrangien comportant la dérivée covariante et le terme de Yang-Mills est choisit aussi de sorte à être localement invariant. C'est le principe qui nous permet d'introduire l'interaction d'une manière dynamique. Ces transformations sont

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= -ig\epsilon(x)\varphi \\ \delta\varphi^* &= ig\epsilon(x)\varphi^* \\ \delta A_\mu &= \frac{1}{g}\partial_\mu\epsilon(x)A_\mu \end{aligned} \tag{1.98}$$

Définissons maintenant ce qu'on appelle l'état du vide quantique $\varphi_0 = \langle\varphi\rangle_0$, Il est obtenu en minimisant le potentiel par rapport au champ $\varphi(x)$

$$\frac{\partial V(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi_0} = \frac{\partial V(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi^*}\Big|_{\varphi_0} = 0 \tag{1.99}$$

On remarque qu'il y a deux cas, selon le signe de μ^2

1)-pour $\mu^2 > 0$

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial V(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi} &= \mu^2\varphi^* + \tfrac{\lambda}{2}(\varphi^*\varphi)\varphi^* = 0 \\ \tfrac{\partial V(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi^*} &= \mu^2\varphi + \tfrac{\lambda}{2}(\varphi\ \varphi^*)\varphi = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \varphi^* = 0 \tag{1.100}$$

Donc l'état du vide est

$$\varphi_0 = \langle\varphi\rangle_0 = \varphi_0^* = \langle\varphi^*\rangle_0 = 0 \tag{1.101}$$

Dans ce cas l'état du vide à une symétrie exacte, donc il n'y a pas de brisure de la symétrie, et il est invariant sous la transformation de jauge locale

$$\begin{aligned} \delta\varphi_0 &= -ig\epsilon(x)\varphi_0 = 0 \\ \delta\varphi_0^* &= ig\epsilon(x)\varphi_0^* = 0 \end{aligned} \tag{1.102}$$

2)-pour $\mu^2 < 0$ on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi} &= 0 \Longrightarrow (\mu^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi^*\varphi)\varphi^* = 0 \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \varphi^* = 0 \\ \varphi^*\varphi = |\varphi|^2 = \frac{-2\mu^2}{\lambda} \end{cases} \end{aligned} \tag{1.103}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi^*} &= 0 \Longrightarrow (\mu^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi\ \varphi^*)\varphi = 0 \\ &\begin{cases} \varphi^* = 0 \\ \varphi^*\varphi = |\varphi|^2 = \frac{-2\mu^2}{\lambda} \end{cases} \end{aligned} \tag{1.104}$$

On pose

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 \quad ; \quad (\varphi_1\ ,\ \varphi_2) \in \mathbb{R} \tag{1.105}$$

Donc, à partir de l'équation (1.103) et (1.104) on a

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = \frac{-2\mu^2}{\lambda} \tag{1.106}$$

cette équation (1.106) représente l'équation d'un cercle de rayon

$$R = \sqrt{\frac{-2\mu^2}{\lambda}} \tag{1.107}$$

C'est à dire il y a une dégénérescence de l'état du vide, et la symétrie est brisée spontanément. En effet

$$\begin{aligned} \delta\varphi(x) &= \delta\varphi_1(x) + i\delta\varphi_2(x) \\ \text{avec} &\quad \begin{cases} \delta\varphi_1(x) = g\epsilon(x)\varphi_2(x) \\ \delta\varphi_2(x) = -g\epsilon(x)\varphi_1(x) \end{cases} \end{aligned} \tag{1.108}$$

et d'après l'équation (1.104), on a

$$(\varphi_1^0)^2 + (\varphi_2^0)^2 = \frac{-2\mu^2}{\lambda} \tag{1.109}$$

Donc

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } \ \varphi_1^0 = 0 \Longrightarrow \varphi_2^0 \neq 0 \\ \text{si } \ \varphi_2^0 = 0 \Longrightarrow \varphi_1^0 \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \delta\varphi_1^0 = g\epsilon(x)\varphi_2^0; \delta\varphi_1^0 = 0 \ \text{ mais } \ g\epsilon(x)\varphi_2^0 \neq 0 \\ \delta\varphi_2^0 = -g\epsilon(x)\varphi_1^0; \delta\varphi_2^0 = 0 \ \text{ mais } \ g\epsilon(x)\varphi_1^0 \neq 0 \end{array}\right. \tag{1.110}$$

Et l'état du vide dans ce cas n'est pas invariant sous les transformations de jauge locales. Par conséquent, la symétrie du système (lagrangien) n'est pas la symétrie du vide [16].

Brisure spontanée de la symétrie On fait un choix de l'état du vide [16]

$$\varphi_1^0 = 0 \text{ et } \varphi_2^0 = \sqrt{\frac{-2\mu^2}{\lambda}} \tag{1.111}$$

En générant une petite fluctuation φ autour de l'état du vide φ_0, on peut écrire

$$\begin{aligned} \varphi^{'} &= \varphi_0 + \varphi \\ \text{avec } \varphi &= \varphi_1 + i\varphi_2. \end{aligned} \tag{1.112}$$

Le lagrangien bosonique est réécrit sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \ = \ & \frac{-1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \partial_\mu\varphi_1\partial^\mu\varphi_1 + \partial_\mu\varphi_2\partial^\mu\varphi_2 + g^2A_\mu A^\mu\varphi_1^2 + g^2A_\mu A^\mu\varphi_2^2 \\ & + g^2A_\mu A^\mu\varphi_0^2 - 2g\varphi_0A_\mu\partial^\mu\varphi_2 + 2g\partial^\mu\varphi_1A_\mu\varphi_2 - 2g\partial^\mu\varphi_2A_\mu\varphi_1 \\ & + g^2A_\mu A^\mu\varphi_0\varphi_1 - \varphi_1^2(\mu^2 + \frac{3}{2}\lambda\varphi_0^2) - \varphi_2^2(\mu^2 + \frac{1}{2}\lambda\varphi_0^2) - \frac{\lambda}{4}(\varphi_0^4 + \varphi_1^4 + \varphi_2^4) \\ & - 2(\frac{\lambda}{2}\varphi_0\varphi_1^3 + \frac{\lambda}{2}\varphi_0^3\varphi_1 + \mu^2\varphi_0\varphi_1) - \frac{\lambda}{2}\varphi_1^2\varphi_2^2 - \lambda\varphi_0\varphi_1\varphi_2^2 - \mu^2\varphi_0^2. \end{aligned} \tag{1.113}$$

On remarque que ce Lagrangien contient un terme non physique $2g\varphi_0A_\mu\partial^\mu\varphi_2$ et le champ φ_2 décrit une particule scalaire réelle sans masse ou particule de Goldstone. En outre, le nombre de degrés de liberté n'est pas conservé avant et après la brisure de la symétrie [16].

Mécanisme de Higgs-Englert-Brout Le mécanisme de Higgs est une méthode utilisée dans le modèle standard pour éliminer les particules de Goldstone [16], diagonaliser le lagrangien (le rendre physique) et rétablir la conservation des degrés de liberté.

En redéfinitions le champ de jauge $A_\mu(x)$

$$A_\mu(x) \rightarrow B_\mu(x) = A_\mu(x) + \alpha\partial_\mu\xi(x) \tag{1.114}$$

où avec $\alpha = \frac{-\sqrt{\lambda}}{2gm}$ et $m^2 = -\mu^2$. Le champs scalaire se transforme comme

$$\varphi(x) = \exp[\frac{i\xi}{\varphi_0}](\varphi_0 + \varphi_1 + i\varphi_2) \tag{1.115}$$

En posant $\eta(x) = \varphi_1 + i\varphi_2$. Le tenseur électromagnétique reste invariant $F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$, et la dérivée covariante devient

$$\begin{aligned} D_\mu\varphi &= (\partial_\mu\eta(x) - igB_\mu(x)\eta(x))\exp[\frac{i\xi}{\varphi_0}] \\ (D^\mu\varphi)^* &= (\partial^\mu\eta(x) + igB^\mu(x)\eta(x))\exp[-\frac{i\xi}{\varphi_0}] \end{aligned} \tag{1.116}$$

alors

$$(D^\mu\varphi)^*(D_\mu\varphi) = \partial_\mu\eta(x)\partial^\mu\eta(x) + g^2B_\mu B^\mu(\varphi_0 + \eta(x))^2 \tag{1.117}$$

et

$$(\varphi\varphi^*)^2 = \varphi_0^4 + \eta^4(x) + 4\varphi_0^3\eta(x) + 6\varphi_0^2\eta^2(x) + 4\varphi_0\eta^3(x) \tag{1.118}$$

par conséquent le potentiel $V(\varphi, \varphi^*)$ prend la forme

$$V(\varphi, \varphi^*) = \frac{\varphi_0^2\mu^2}{4} - \mu^2\eta^2(x) + \frac{\lambda}{4}\varphi_0\eta^3(x) + \frac{\lambda}{16}\eta^4(x). \tag{1.119}$$

Après l'application du mécanisme de Higgs, le lagrangien $\mathcal{L}$ du secteur bosonique est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_\mu\eta(x)\partial^\mu\eta(x) + \mu^2\eta^2(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + g^2\varphi_0^2B_\mu B^\mu - \frac{\varphi_0^2\mu^2}{4} \\ &\quad + g^2B_\mu B^\mu\eta^2(x) + 2g^2B_\mu B^\mu\varphi_0\eta(x) - \frac{\lambda}{4}\varphi_0\eta^4(x) - \frac{\lambda}{16}\eta^4(x) \end{aligned} \tag{1.120}$$

Donc, on obtient un champ scalaire $\eta(x)$ avec masse non nulle associé à une particule appelée particule de Higgs et le boson de jauge $B_\mu(x)$ qui a acquiert une masse $\frac{g\varphi_0}{\sqrt{2}}$.

Le groupe non abélien SU(2)

Soit la densité lagrangienne

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F^k_{\mu\nu}F^{\mu\nu k} + \partial_\mu\left(\varphi^\dagger\right)^a - (\frac{i}{2}g\left(\varphi^\dagger\right)^b(\tau_k)_{ab}A^k_\mu)(\partial_\mu\varphi^a + \frac{i}{2}g(\tau_k)_{ab}\varphi^bA^k_\mu) \\ &\quad -\mu^2((\varphi^\dagger)^a\varphi^a) - \frac{\lambda}{4}((\varphi^\dagger)^a\varphi^a)^2 \end{aligned} \tag{1.121}$$

où $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ représente le doublet des particules scalaires complexes sous l'action du potentiel

$$V(\varphi, \varphi^\dagger) = \mu^2((\varphi^\dagger)^a \varphi^a) + \frac{\lambda}{4}((\varphi^\dagger)^a \varphi^a)^2 \tag{1.122}$$

et le tenseur antisymétrique $F^k_{\mu\nu}$ tel que $F^k_{\mu\nu} = \partial_\mu A^k_\nu - \partial_\nu A^k_\mu + g f_{klm} A^l_\mu A^m_\nu$,$(k = 1, 2, 3)$.

Dans ce cas la dérivée covariante des champs scalaires est définies par

$$\begin{aligned} D_\mu \varphi^a &= \partial_\mu \varphi^a + \frac{i}{2} g \, (\tau_k)_{ab} \, \varphi^b A^k_\mu \\ D_\mu \left(\varphi^\dagger\right)^a &= \partial_\mu \left(\varphi^\dagger\right)^a - \frac{i}{2} g \, (\tau_k)_{ab} \left(\varphi^\dagger\right)^b A^k_\mu \end{aligned} \tag{1.123}$$

avec les transformations de jauge locales qui laisse le lagrangien invariant

$$\begin{aligned} \delta \varphi^a &= -\frac{i}{2} g \epsilon_k(x) \, (\tau_k)_{ab} \, \varphi^b \\ \delta \left(\varphi^\dagger\right)^a &= -\frac{i}{2} g \epsilon_k(x) \, (\tau_k)_{ab} \left(\varphi^\dagger\right)^b \end{aligned} \tag{1.124}$$

l'état du vide est défini tel que

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi^a} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial \left(\varphi^\dagger\right)^a} = 0 \tag{1.125}$$

si $\mu^2 > 0$, on trouve que la symétrie du système ou de la densité lagrangienne est la même que l'état du vide. Par contre dans le cas $\mu^2 < 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \varphi^a} &= 0 \Longrightarrow \left(\varphi^\dagger\right)^a = 0, \quad \text{où} \ \sum_{a=1}^{2} |\varphi^a|^2 = -\frac{2\mu^2}{\lambda} \\ \text{avec} \ \ \varphi &= \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix}; \varphi^1 = \varphi^1_1 + i\varphi^1_2 \quad , \varphi^2 = \varphi^2_1 + i\varphi^2_2 \end{aligned} \tag{1.126}$$

Notez que les composantes de l'état du vide constitue un cercle de rayon $\sqrt{\frac{-2\mu^2}{\lambda}}$ c.-à-d. le vide est dégénéré. Si on fait un choix de l'état du vide il n'y aura pas d'invariance par rapport aux transformations de jauge locales du groupe de Lie $SU(2)$ et la symétrie sera brisée spontanément [16].

Brisure spontanée de la symétrie Pour être plus explicite, dans le cas où $\mu^2 < 0$,on peut choisir l'état du vide comme suit

$$\langle \varphi^a \rangle_0 = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} m \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \ m^2 = -\mu^2 \tag{1.127}$$

comme dans le cas du groupe $U(1)$, on fait une perturbation $\eta^a(x)$ autour de l'état du vide, donc

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \langle\varphi^a\rangle_0 + \eta^a(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{2\mu}{\sqrt{\lambda}} + \sigma(x) - i\tau_k\theta^k(x))\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ \varphi^\dagger(x) &= \langle\varphi^a\rangle_0 + \eta^a(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}(\frac{2\mu}{\sqrt{\lambda}} + \sigma(x) - i\tau_k\theta^k(x))\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1.128}$$

en remplaçant dans le lagrangien précédent on trouve

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A^k_\nu - \partial_\nu A^k_\mu)^2 + \frac{1}{2\lambda}g^2\mu^2 A^k_\mu A^{\mu k} + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \mu^2\sigma^2(x) \\ &\quad + \frac{1}{2}\partial_\mu\theta^k\partial^\mu\theta^k + \frac{1}{2\sqrt{2}}g\mu\partial_\mu\theta^k A^k_\mu + \frac{1}{2\sqrt{2}}g^2\sigma^2 A^k_\mu A^{\mu k} + \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\mu g^2\sigma A^k_\mu A^{\mu k}\end{aligned} \tag{1.129}$$

Notons qu'après cette brisure spontanée de la symétrie, le Lagrangien acquiert un terme non physique de la forme $\frac{1}{2\sqrt{2}}g^2\sigma^2 A^k_\mu A^{\mu k}$, et l'apparition des bosons de Goldstone $\theta^k(x)$ avec une masse nulle ainsi qu'un champ scalaire réel $\sigma(x)$ massif. Donc, on a des degrés de liberté en plus et notre système n'est pas physique [16].

Le mécanisme de Higgs En redéfinitions les champs de jauge $A_\mu(x)$

$$B^k_\mu = A^k_\mu + \frac{\sqrt{\lambda}}{2\mu g}\partial_\mu\theta^k \tag{1.130}$$

on peut facilement démontrer que

$$(D_\mu\varphi^a)\,(D_\mu\varphi^a)^\dagger = \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \frac{1}{2\lambda}g^2\mu^2 B^k_\mu B^{\mu k} + \frac{1}{2\sqrt{2}}g^2 B^k_\mu B^{\mu k}\sigma^2 + \sqrt{\frac{2}{\lambda}}g^2\mu B^k_\mu B^{\mu k}\sigma \tag{1.131}$$

le potentiel prend la forme

$$V(\varphi^a, (\varphi^\dagger)^a) = \frac{\lambda}{16}\sigma^4(x) + \frac{1}{4}\varphi_0^2\mu^2 + \frac{1}{4}\varphi_0\lambda\sigma^3(x) - \mu^2\sigma^2(x) \tag{1.132}$$

alors le lagrangien physique est $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$, où

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu B^k_\nu - \partial_\nu B^k_\mu)^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma(x)\partial^\mu\sigma(x) - \mu^2\sigma^2(x) + \frac{1}{2\lambda}g^2\mu^2 B^k_\mu B^{\mu k} \\ \mathcal{L}_I &= \frac{1}{2\sqrt{2}}g^2 B^k_\mu B^{\mu k}\sigma^2 - \sqrt{\frac{2}{\lambda}}g^2\mu B^k_\mu B^{\mu k}\sigma(x) + \frac{1}{4}\varphi_0^2\mu^2 - \frac{1}{4}\varphi_0\lambda\sigma^3(x) - \frac{\lambda}{16}\sigma^4(x)\end{aligned} \tag{1.133}$$

Il est à noter que les particules de Goldstone ont disparues et on constate l'apparition d'un terme de masse pour les bosons de jauge $B^k_\mu(x)$. Donc, les trois états associés aux bosons de Goldstone se sont transformés en trois composantes longitudinales des champs vectoriels qui sont devenus massifs. La particule associée au champ scalaire $\sigma(x)$ est la particule de Higgs [16].

1.3 Lagrangien du modèle standard

Le lagrangien total du modèle standard comporte les lagrangiens libres de 24 fermions (dont 6 leptons et 18 quarks) et 13 bosons (dont 12 bosons de jauges et un boson de Higgs) ainsi que tout les termes d'interactions triples et quartiques permises par les contraintes dues aux invariances globale et locale à la fois des groupes $SU(3)_C$, $SU(2)_I$ et $U(1)_Y$, à l'invariance par les groupes de Lorentz $SO(1,3)$ et $SL(2,\mathbb{C})$ ainsi que les symétries C, P, T, la chiralité, etc. En respectant toute ces contraintes, on obtient un lagrangien pour le modèle standard qui comporte plusieurs centaines de termes, il peut être écrit sous la forme compacte suivante [17]

$$\mathcal{L}_{MS} = \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{Fermion} + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{Yukawa} + \mathcal{L}_{FJ} + \mathcal{L}_{FP} \tag{1.134}$$

nous allons voir dans ce qui suit la signification de chaque terme de ce lagrangien.

1.3.1 Lagrangien des champs de jauges

Le lagrangien du champ de jauge est écrit sous la forme

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}W^a_{\mu\nu}W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \tag{1.135}$$

telle que

$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu + g f^{abc} G^b_\mu G^c_\nu,\ \ a = 1, ..., 8$

f^{abc} les constantes de structure de groupe de jauges $SU(3)_c$

$W^a_{\mu\nu} = \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu + g\epsilon^{abc} W^b_\mu W^c_\nu,\ \ a = 1, 2, 3$, pour la représentation fondamentale de $SU_I(2)$ on a $T^a = \dfrac{\sigma^a}{2}$

ϵ^{abc} tenseur antisymétrique à 3 dimensions

$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ où $\quad B_{\mu\nu}$ est le tenseur électromagnétique

1.3.2 Lagrangien des champs de fermions

La partie cinétique du lagrangien des champs de fermions en interaction avec les champs de jauge est donné par [17]

$$\mathcal{L}_{Fermion} = \sum_{quarks} i\overline{q}\gamma^\mu D_\mu q + \sum_{\psi_L} i\overline{\psi}_L \gamma^\mu D_\mu \psi_L + \sum_{\psi_R} i\overline{\psi}_R \gamma^\mu D_\mu \psi_R \tag{1.136}$$

telle que

$$D_\mu q = (\partial_\mu + i\eta_s\ g_s\ G^a_\mu\ T^a)q \tag{1.137}$$

$$
\begin{aligned}
D_\mu \psi_L &= \left[\partial_\mu + i\eta \frac{g}{\sqrt{2}}(\tau^+ W_\mu^+ + \tau^- W_\mu^-) + i\eta \frac{g}{2}\tau_3 W_\mu^3 + i\eta^{'} g^{'} \eta_Y \; Y \; B_\mu\right] \psi_L \qquad (1.138)\\
&= [\partial_\mu + i\eta \frac{g}{\sqrt{2}}(\tau^+ W_\mu^+ + \tau^- W_\mu^-) + i\eta_e \; eQ \; A_\mu + i\eta \frac{g}{\cos\theta_W}(\frac{\tau_A}{2} - Q\sin^2\theta_W \;)\eta_Z \;\; Z_\mu]\psi_L \\
D_\mu \psi_R &= \left[\partial_\mu + i\eta^{'} g^{'} \eta_Y \;\; Y \; B_\mu\right] \psi_R \\
&= \left[\partial_\mu + i\eta_e \; e \; Q \; A_\mu \; - i\eta \; \frac{g}{\cos\theta_W} \; Q \; \sin^2\theta_W \;\; \eta_z \; Z_\mu\right] \psi_R
\end{aligned}
$$

où

$$
Q = T_3 + \eta_Y Y = \frac{\tau_3 + \eta \; _Y \; Y}{2} \qquad (1.139)
$$

et Y est l'hypercharge. Les termes de masses seront générés par la suite avec le mécanisme de Higgs.

1.3.3 Lagrangien de Higgs

Le lagrangien de Higgs est donné par

$$
\mathcal{L}_{Higgs} = (D_\mu \phi)^\dagger \, D^\mu \phi + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda \left(\phi^\dagger \phi\right)^2 \qquad (1.140)
$$

tel que

$$
\phi = \begin{bmatrix} \varphi \\ \frac{\nu + H + i\varphi_Z}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad (1.141)
$$

et le dérivé covariant

$$
\begin{aligned}
D_\mu \phi &= \left[\partial_\mu - (i\frac{g}{\sqrt{2}}(\tau^+ W_\mu^+ + \tau^- W_\mu^-) - i\frac{g}{\sqrt{2}}\tau_3 W_\mu^3 + i\frac{g^{'}}{\sqrt{2}} B_\mu\right] \phi \qquad (1.142)\\
&= \left[\partial_\mu - (i\frac{g}{\sqrt{2}}(\tau^+ W_\mu^+ + \tau^- W_\mu^-) + ieQA_\mu - i\frac{g}{\cos\theta_W}(\frac{\tau_3}{2} - Q \; \sin^2\theta_W) Z_\mu\right]
\end{aligned}
$$

où l'opérateur de charge Q est défini par

$$
Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \eta_Y Y & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + \eta_Y Y \end{bmatrix} \qquad (1.143)
$$

pour $\eta_Y Y_\phi = +\frac{1}{2}$

$$
Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.144)
$$

et on a $\nu = \dfrac{\mu^2}{\lambda}$, $m_h^2 = 2\mu^2$, $\lambda = \dfrac{g^2}{8}\dfrac{m_h^2}{m_W^2}, m_W = \frac{1}{2}g\nu$, $m_Z = \dfrac{1}{\cos\theta_W} m_W$

1.3.4 Lagrangien de Yukawa

Il nous faut maintenant préciser l'interaction entre les fermions et le doublet de Higgs qui, après la brisure spontanée de la symétrie, donne des masses aux fermions [17]

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -\overline{L}\, Y_l\ \phi\ l_R - \overline{Q}^{'}_L\ Y_d \phi\ d^{'}_R - \overline{Q}_L Y_u \widetilde{\phi}\ u^{'}_R + h.c \tag{1.145}$$

où une somme sur plusieurs générations est impliquée par la notation matricielle, L_L $(Q^{'})$ sont les doublets de leptons (quark) gauches

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi} &= i\sigma_2\phi^* = \begin{bmatrix} \frac{\nu+H-i\phi_Z}{\sqrt{2}} \\ -\phi^- \end{bmatrix} \\ \sigma_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$Y_l, Y_d\ M$ et Y_u sont des matrices 3×3 complexes générales dans les espaces de saveur respectifs.

1.3.5 Lagrangien de la fixation de la jauge

Pouvoir définir les propagateurs, il faut calibrer la partie calibre du lagrangien. Dans les jauges R_ζ , la jauge fixant le lagrangien se lit [17]

$$\mathcal{L}_{FJ} = -\frac{1}{2\zeta_G}F_G^2\ -\frac{1}{2\zeta_A}F_A^2\ -\frac{1}{2\zeta_Z}F_Z^2\ -\frac{1}{2\zeta_W}F_-\ F_+ \tag{1.146}$$

où

$$\begin{aligned} F_G^a &= \partial^\mu G^a_\mu, \quad F_A = \partial^\mu A_\mu \\ F_Z &= \partial^\mu Z_\mu + \eta\eta_Z\ \ \zeta_Z\ \ m_Z\ \ \phi_Z \\ F_+ &= \partial^\mu W^+_\mu + \eta\ \eta_W\ \zeta_W\ \ m_W\ \ \phi^+ \\ F_- &= \partial^\mu W^-_\mu - \eta\ \eta_W\ \zeta_W\ \ m_W\ \ \phi^- \end{aligned} \tag{1.147}$$

1.3.6 Lagrangien de Faddeev-Popov

Le lagrangien de Faddeev-Popov est le dernier terme nécessaire pour calibrer les propagateurs des champs de jauge et pour préserver l'unitarité de la théorie. Ce lagrangien introduit des particules virtuels (non physiques) appelées particules fantômes (ghosts). Ces particules apparaissent seulement dans des boucles fermées associées aux corrections radiatives. Pour une condition de fixation de

jauge linéaire (1.147), le lagrangien décrivant les particules fantômes est donné par

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{FP} &= \eta_G \sum_{i=1}^{4}\left[\overline{c}_+ \frac{\partial(\delta F_+)}{\partial\alpha^i} + \overline{c}_- \frac{\partial(\delta F_+)}{\partial\alpha^i} + \overline{c}_Z \frac{\partial(\delta F_Z)}{\partial\alpha^i} + \overline{c}_A \frac{\partial(\delta F_A)}{\partial\alpha^i}\right] c_i \\ &\quad +\eta_G \sum_{a,b=1}^{8} \overline{\omega}^a \frac{\partial(\delta F_G^a)}{\partial\beta^b}\omega^b\end{aligned} \tag{1.148}$$

où ω^a les champs fantômes associés au transformations $SU(3)_c$,et $c_\pm$, c_A , c_Z les champs fantômes électrofaibles associés aux transformations de jauge. Après la brisure spontanée de la symétrie, les champs fantômes acquièrent les mêmes masses que les champs de jauges associés cependant ils ne peuvent pas être détectées car ils sont considérées comme des fluctuations de l'état du vide quantiques.

Chapitre 2

Evaluation analytique des amplitudes et des sections efficaces

En physique théorique des hautes énergies, le lien entre la théorie et l'expérience est réalisé par le calcul des éléments de la matrice de diffusion et de sections efficaces associés aux processus physiques. Du point de vue théorique, les éléments de la matrice de diffusion sont représentés par des diagrammes de Feynman qui décrivent les interactions des particules élémentaires. La détermination des expressions analytiques des éléments de la matrice de diffusion, ou amplitudes de diffusion, est une tache mathématique très complexe. Bienheureusement, il est possible d'aller directement au résultat sans passer par le calcul lourd. Pour cela, un diagramme de Feynman est associé au processus physique étudié, l'utilisation des règles de correspondances, dites règles de Feynman, permet de déduire l'expression analytique de l'amplitude de diffusion associé au processus.

2.1 Règles de Feynman

Nous allons introduire, dans ce qui suit, certaines des règles de Feynman pour le modèle standard.

2.1.1 Electrodynamique quantique

Propagateur

Propagateur de fermion



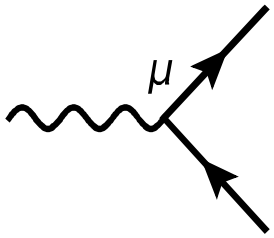
$$= \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \tag{2.1}$$

Propagateur du γ (covariant)



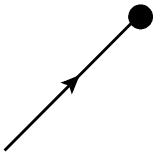
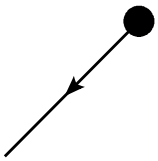
$$= -\frac{i}{k^2 + i\epsilon}\left(g_{\mu\nu} + \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon}\right) \tag{2.2}$$

Vertex

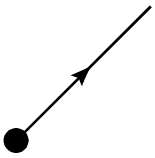
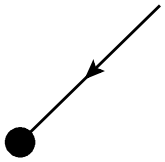


$$= -ie\gamma_\mu \tag{2.3}$$

Electron-Positron initial-final

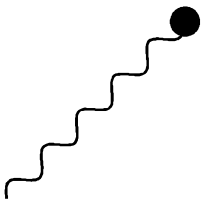
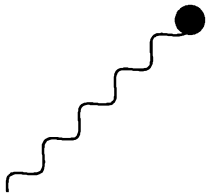
Electron initial  $= u_\alpha(p)$ Positron initial  $= \overline{v}_\alpha(p)$

;

Electron final  $= \overline{u}_\alpha(p)$ Positron final  $= v_\alpha(p)$

(2.4)

Photon initial-final

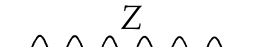
Photon initial  $= \epsilon_\mu(k)$ Photon final  $= \epsilon^*_\mu(k)$ (2.5)

2.1.2 Interaction faible

Propagateurs



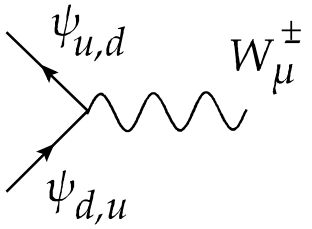
$$= -i\frac{1}{k^2 - m_w^2 + i\epsilon}\left[g_{\mu\nu} - (1-\xi_w)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi_w m_w^2}\right] \tag{2.6}$$



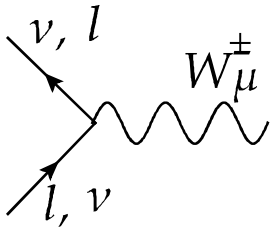
$$= -i\frac{1}{k^2 - m_z^2 + i\epsilon}\left[g_{\mu\nu} - (1-\xi_z)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi_z m_z^2}\right] \tag{2.7}$$

Vertex

interactions de courants chargés

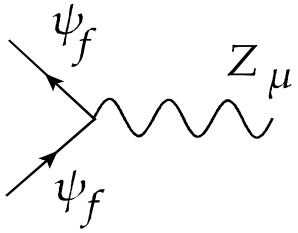


$$= i\frac{g_w}{\sqrt{2}}\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2} \tag{2.8}$$



$$= -i\eta\frac{g_w}{\sqrt{2}}\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2}, (\eta = \pm 1) \tag{2.9}$$

Interaction de courant neutre



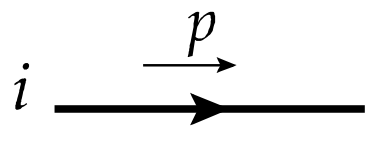
$$= i\frac{g}{\cos\theta_w}\gamma_\mu(c_V^f - c_A^f\gamma_5) \tag{2.10}$$

où $c_V^f = \frac{1}{2}T_f^3 - Q_f \sin^2\theta_w$, $c_A^f = \frac{1}{2}T_f^3$ où T_f^3 est la projection sur l'axe ox_3 de l'isospin du fermion et Q_f sa charge électrique.

2.1.3 Chromodynamique quantique

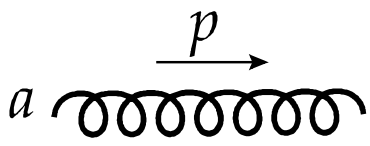
Propagateurs

quarks



$$= i\frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m + i\epsilon}\delta_{ji} \tag{2.11}$$

gluons



$$= i\frac{d^{\mu\nu}(p)}{p^2 + i\epsilon}\delta_{ba} \tag{2.12}$$

l'expression de $d^{\mu\nu}(p)$ dépend du choix de la jauge, ainsi :

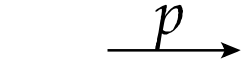
$d^{\mu\nu}(p) = -\eta^{\mu\nu} + (1-\xi)\,\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}$ pour la jauge covariante.

$d^{\mu\nu}(p) = -\eta^{\mu\nu} + \frac{(p^\mu n^\nu + n^\mu p^\nu)}{n\cdot p} - (n^2 + \xi p^2)\,\frac{p^\mu n^\nu}{(p\cdot n)^2}$ pour la jauge physique (non-covariante) [18]..

et ξ est un paramètre de jauge tel que

$$\xi = \{ \begin{array}{ll} 1, & Jauge\ Feynman \\ 0, & Jauge\ Landau \end{array} \tag{2.13}$$

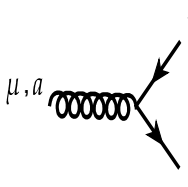
fantômes



$$= i\frac{1}{p^2 + i\epsilon}\delta_{ba} \tag{2.14}$$

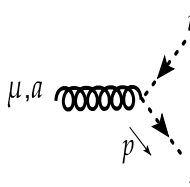
Vertex

Interaction Quark-gluon



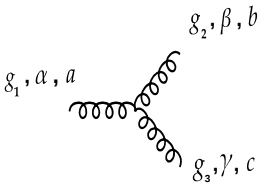
$$= -ig_s T^a_{ij}\gamma_\mu \tag{2.15}$$

Gluon-fantôme-antifantôme



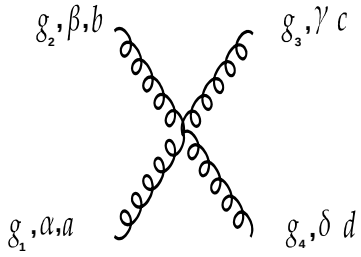
$$= -g_s f_{abc} p_\mu \tag{2.16}$$

Trois gluons



$$\begin{aligned} = \ & +g_s f_{abc}\eta_{\alpha\beta}(g_1 - g_2)_\gamma \\ & +g_s f_{abc}\eta_{\beta\gamma}(g_2 - g_3)_\alpha \\ & +g_s f_{abc}\eta_{\alpha\gamma}(g_3 - g_1)_\beta \end{aligned} \tag{2.17}$$

Quatre gluons



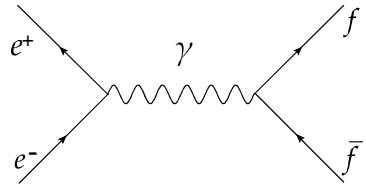
$$= ig_s^2 f_{abe} f_{cde}(\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta} - \eta_{\alpha\delta}\eta_{\beta\gamma}) \qquad (2.18)$$

$$+ f_{ace} f_{dbe}\left(\eta_{\alpha\delta}\eta_{\beta\gamma} - \eta_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta}\right)$$

$$+ f_{ade} f_{bce}\left(\eta_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta} - \eta_{\alpha\gamma}\eta_{\delta\beta}\right)$$

2.2 Applications pour l'électrodynamique quantique

2.2.1 Le processus $e^-e^+ \to f\bar{f}$



$$\Longrightarrow \quad f \neq e \qquad (2.19)$$

$$f = \{\mu^-, \nu_e, v_\mu, \nu_\tau, u, d, s, t, b, c\}$$

La fonction de Green et l'élément de matrice S sont donnés par la contribution du diagramme (2.19) unique [19] , où f est un fermion de masse M (autre que l'électron) et de charge Q autre qu'un électron. Les lignes fermioniques sont orientées selon le sens du flot de charge de la particule un positon d'impulsion $p_\mathbf{2}$ dans l'état initial correspond à une ligne sortant du diagramme portant une impulsion $-p_\mathbf{2}$ dans le sens de la ligne. Pour le calcul d'amplitude associée à ce diagramme, nous allons commencer par l'expression de la fonction de Green à l'ordre $e^\mathbf{2}$.

Fonctions de Green du processus

$$\begin{aligned} G(p_1, p_2, k_1, k_2) &= (2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \\ &\quad .i^3 \frac{-\not{p}_2 + m}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon}(-e\gamma^\mu)\frac{\not{p}_1 + m}{p_1 - m^2 + i\epsilon} \\ &\quad .i^3 \frac{\not{k}_1 + M}{K_1^2 - M^2 + i\epsilon}(eQ\gamma^\mu)\frac{-\not{k}_2 + M}{K_2^2 - M^2 + i\epsilon} \\ &\quad .\frac{-i}{(p_1+p_2)^2 + i\epsilon}\left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{(p_1+p_2)_\mu (p_1+p_2)_\nu}{(p_1+p_2)^2 + i\epsilon}\right) \end{aligned} \qquad (2.20)$$

Calcule de l'amplitude $\mathcal{M}$

L'élément de matrice réduit $\tau = \langle k_{\mathbf{1}}, k_{\mathbf{2}}, in|i\tau|p_{\mathbf{1}}, p_{\mathbf{2}}, in\rangle$ est obtenu à partir de la fonction de Green [19] en remplaçant les propagateurs externes par les fonctions d'onde des spineurs.

Règles de Feynman utilisées

- pour l'état initial

$$\begin{aligned} i\frac{-\not{p}_1 + m}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} &\rightarrow u^{(\alpha_1)}(p_1) \qquad \text{(électron entrant)} \\ i\frac{-\not{p}_2 + m}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} &\rightarrow \bar{v}^{(\alpha_2)}(p_2) \qquad \text{(positon entrant)} \end{aligned} \tag{2.21}$$

- pour l'état final

$$\begin{aligned} i\frac{-\not{k}_1 + m}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} &\rightarrow \bar{u}_F^{(\beta_1)}(k_1) \qquad \text{(fermion } F \text{ sortant)} \\ i\frac{-\not{k}_1 + m}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} &\rightarrow v_{\overline{F}}^{(\beta_2)}(k_2) \qquad \text{(anti-fermion } \overline{F} \text{ sortant)} \end{aligned} \tag{2.22}$$

$\alpha_i = 1, 2$ et $\beta_j = 1, 2$ sont les polarisations des quatre particules. L'élément de la matrice réduit τ s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\equiv \langle k_{\mathbf{1}}, k_{\mathbf{2}}, in|i\tau|p_{\mathbf{1}}, p_{\mathbf{2}}, in\rangle \\ &= -iQe^2 \left[\bar{v}^{(\alpha_2)}(p_2)\gamma^\mu u^{(\alpha_1)}(p_1)\right] \left[\bar{u}_F^{(\beta_1)}(k_1)\gamma^\nu v_F^{(\beta_2)}(k_2)\right] \\ &\quad \cdot\frac{1}{(p_1+p_2)^2 + i\epsilon}\left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{(p_1+p_2)_\mu (p_1+p_2)_\nu}{(p_1+p_2)^2 + i\epsilon}\right) \end{aligned} \tag{2.23}$$

le terme ne dépend pas de λ on utilisant l'équation de Dirac, dont les spineurs $u^{(\boldsymbol{\alpha})}(p)$ et $v^{(\boldsymbol{\beta})}(k)$ sont des solutions on obtient

$$\begin{aligned} \left[\bar{v}^{(\alpha_2)}(p_2)\boldsymbol{\gamma}^\mu u^{(\alpha_1)}(p_1)\right](p_1+p_2)_\mu &= \bar{v}^{(\alpha_2)}(p_2)(\not{p}_{\mathbf{1}} + m + \not{p}_{\mathbf{2}} - m)u^{(\alpha_1)}(p_1) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.24}$$

et le terme dépendant de λ du propagateur du photon ne contribue pas à[1] $\mathcal{M}$. Alors on applique directement la jauge de Feynman $\lambda = 1$

$$\frac{-i}{(p_1+p_2)^2 + i\epsilon}\left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{(p_1+p_2)_\mu (p_1+p_2)_\nu}{(p_1+p_2)^2 + i\epsilon}\right) = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1+p_2)^2 + i\epsilon} \tag{2.25}$$

[1] En général, tout élément de matrice S est invariant de jauge et donc indépendant de λ

On prendre la limite $\epsilon \to \infty$ et on note $(p_1+p_2)^2 = s$, donc

$$\mathcal{M}{=}iQe^2 s^{-1}\left[\bar{v}^{(\alpha_2)}(p_2)\gamma^\mu u^{(\alpha_1)}(p_1)\right]\left[\bar{u}_F^{(\beta_1)}(\mathbf{k}_1)\gamma_\mu v_F^{(\beta_2)}(k_2)\right] \tag{2.26}$$

Calcule du carré de l'amplitude

Pour calculer le carré de l'amplitude $\mathcal{M}$ il faut également prendre la moyenne sur les états de polarisation de l'électron et du positon [19]

$$\frac{1}{4}\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2=1,2}|\mathcal{M}|^2 \equiv \frac{1}{4}\sum_{polar}|\mathcal{M}|^2 \tag{2.27}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= \frac{Q^2e^4}{\mathbf{s}^2}\left[\bar{v}^{(\alpha_2)}(p_2)\gamma^\mu u^{(\alpha_1)}(p_1)\right]\left[\bar{u}^{(\alpha_1)}(p_1)\gamma^\nu v^{(\alpha_2)}(p_2)\right] \\
&\quad\times\left[\bar{u}_F^{(\beta_1)}(k_1)\gamma_\mu v_F^{(\beta_2)}(k_2)\right]\left[\bar{v}_F^{(\beta_2)}(k_2)\gamma_\nu u_F^{(\beta_1)}(k_1)\right] \\
&= \frac{Q^2e^4}{\mathbf{s}^2}Tr\left\{\left[v^{(\alpha_2)}(p_2)\bar{v}^{(\alpha_2)}(p_2)\right]\gamma^\mu\left[u^{(\alpha_1)}(p_1)\bar{u}^{(\alpha_1)}(p_1)\right]\gamma^\nu\right\} \\
&\quad\times Tr\left\{\left[u_F^{(\beta_1)}(k_1)\bar{u}_F^{(\beta_1)}(k_1)\right]\gamma_\mu\left[v_F^{(\beta_2)}(k_2)\bar{v}_F^{(\beta_2)}(k_2)\right]\gamma_\nu\right\}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\sum_{polar}|\mathcal{M}|^2 &= \frac{Q^2e^4}{4\mathbf{s}^2}Tr\left\{\left[\sum_{\alpha_2}v^{(\alpha_2)}(p_2)\bar{v}^{(\alpha_2)}(p_2)\right]\gamma^\mu\left[\sum_{\alpha_1}u^{(\alpha_1)}(p_1)\bar{u}^{(\alpha_1)}(p_1)\right]\gamma^\nu\right\} \\
&\quad\times Tr\left\{\left[\sum_{\beta_1}u_F^{(\beta_1)}(k_1)\bar{u}_F^{(\beta_1)}(k_1)\right]\gamma_\mu\left[\sum_{\beta_2}v_F^{(\beta_2)}(k_2)\bar{v}_F^{(\beta_2)}(k_2)\right]\gamma_\nu\right\}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

où

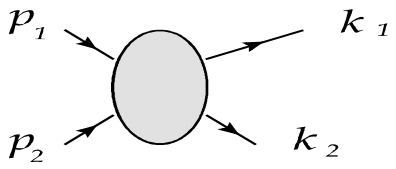
$$\sum_\alpha u^\alpha(k)\overline{u}^\alpha(k) = \frac{\not{k}+m}{2m}, \quad \sum_\alpha v^\alpha(k)\overline{v}^\alpha(k) = \frac{\not{k}-m}{2m} \tag{2.30}$$

on obtient alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\sum_{\mathbf{polar}}|\mathcal{M}|^2 &= \frac{Q^2e^4}{4s^2}\frac{1}{16m^2M^2}Tr\left[(\not{p}_{\mathbf{2}}-m)\gamma^\mu(\not{p}_{\mathbf{1}}+m)\gamma^\nu\right] \\
&\quad\times Tr\left[(\not{k}_1+M)\gamma_\mu(\not{k}_2-M)\gamma_\nu\right] \\
&= \frac{Q^2e^4}{4s^2}\frac{1}{16m^2M^2}[2\left(p_1k_1\right)+2\left(p_2k_2\right)+2\left(p_1k_2\right)\left(p_2k_1\right) \\
&\quad+2M^2\left(p_1p_2\right)+2m^2\left(k_1k_2\right)+4m^2M^2]
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Variables de Mandelstam (s, t, u)

De façon général et pour un processus $2 \to 2$



$$\equiv (|int\rangle \equiv |p_1, p_2\rangle \quad \text{et} \quad |out\rangle \equiv |k_1, k_2\rangle) \tag{2.32}$$

les variables de Mandelstam sont utilisées pour simplifier les expressions des amplitudes de diffusion et des sections efficaces. Ce sont des invariants de Lorentz définies par les expressions suivantes

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (k_1 + k_2)^2, \\ t &= (p_1 - k_1)^2 = (p_2 - k_2)^2, \\ u &= (p_1 - k_2)^2 = (p_2 - k_1)^2. \end{aligned} \tag{2.33}$$

En utilisant le référentiel du centre de masse où

$$\overrightarrow{p}_1 = -\overrightarrow{p}_2, \quad \overrightarrow{k}_1 = -\overrightarrow{k}_2 \tag{2.34}$$

on obtient un ensemble de relations pratiques

$$\begin{aligned} s + t + u &= 2m^2 + 2M^2 \\ p_1 p_2 &= \frac{1}{2}s - m^2, \quad k_1 k_2 = \frac{1}{2}s - M^2, \\ p_1 k_1 &= p_2 k_2 = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}(m^2 + M^2), \quad p_1 k_2 = p_2 k_1 = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}(m^2 + M^2) \\ p_1^0 &= p_2^0 = \frac{\sqrt{s}}{2}, \quad k_1^0 = k_2^0 = \frac{\sqrt{s}}{2} \\ p_1 k_1 &= \frac{s}{4} - \overrightarrow{p}_1 \cdot \overrightarrow{k}_1, \quad p_1 k_2 = \frac{s}{4} + \overrightarrow{p}_1 \cdot \overrightarrow{k}_1 \\ \left|\overrightarrow{k}_1\right| &= \frac{\sqrt{s}}{2}\sqrt{1 - \frac{4M^2}{s}}, \quad |\overrightarrow{p_1}| = \frac{\sqrt{s}}{2}\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

où $\sqrt{s}$ est l'énergie dans le centre de masse[2]. En utilisant ces relations on peut réécrire l'équation (2.31) en fonction des variables de Mandelstam (s, t, u)

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sum_{polar}|\mathcal{M}|^2 &= \frac{Q^2e^4}{4s^2}\frac{1}{16m^2M^2}\left[\frac{1}{2}(t^2+u^2)+2s(m^2+M^2)-(m^2+M^2)\right]\\ &= \frac{Q^2e^4}{4s^2}\frac{1}{16m^2M^2}\left[2\left(p_1k_1\right)^2+\left(p_1k_2\right)^2+s(m^2+M^2)\right]\\ &= \frac{Q^2e^4}{4s^2}\frac{1}{16m^2M^2}\left[1{+}4\frac{m^2+M^2}{s}{+}\left(1-\frac{m^2}{s}\right)\left(1-\frac{M^2}{s}\right)\cos^2\theta\right] \qquad (2.36)\end{aligned}$$

l'angle θ entre $\overrightarrow{p_1}$ et $\overrightarrow{k_1}$.

Calcule de section efficace différentielle

La formule de la section efficace différentielle est

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{1}{32\pi s}\left|\frac{\overrightarrow{k_1}}{\overrightarrow{p_1}}\right|\left(16m^2M^2\right)\frac{1}{4}\sum_{polar}|\mathcal{M}|^2 \qquad (2.37)$$

où le facteur $16m^2M^2$ rend compte de la présence de quatre fermions dans le processus et $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137}$ est la constante de structure fin. En utilisant la relation (2.36) on obtient

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi Q^2\alpha^2}{2s}\frac{\left|\overrightarrow{k_1}\right|}{|\overrightarrow{p_1}|}\left[1{+}4\frac{m^2+M^2}{s}{+}\left(1-\frac{m^2}{s}\right)\left(1-\frac{M^2}{s}\right)\cos^2\theta\right]$$

Section efficace totale σ

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\pi Q^2\alpha^2}{2s}\int_{-1}^{+1}d\cos\theta\left\{\frac{\left|\overrightarrow{k_1}\right|}{|\overrightarrow{p_1}|}\left[1{+}4\frac{m^2+M^2}{s}{+}\left(1-\frac{m^2}{s}\right)\left(1-\frac{M^2}{s}\right)\cos^2\theta\right]\right\} \qquad (2.38)\\ &= \frac{4}{3}\pi\frac{Q^2\alpha^2}{s}\left(\frac{1-\frac{4M^2}{s}}{1-\frac{4m^2}{s}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1{+}2\frac{m^2+M^2}{s}{+}4\frac{m^2M^2}{s^2}\right]\end{aligned}$$

en utilisant l'approximation $m << M$, on trouve

$$\sigma = \frac{4}{3}\pi\frac{Q^2\alpha^2}{s}\left(1-\frac{4M^2}{s}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1{+}2\frac{M^2}{s}\right] \qquad (2.39)$$

Ces formules approximatives sont applicables à la production de paires leptoniques $\mu^+\mu^-$ou $\tau^+\tau^-$, mais aussi pour des paires de quarks s, c et b, ces derniers conduisent à des états finals hadroniques.

[2]l'énergie dans le centre de masse $\sqrt{s}$ est supérieure à $2M$ et $2m$,pour que le processus existe.

2.2.2 Le processus $\mu^+\mu^- \to e^+e^-$

L'amplitude de Feynman de ce processus est donnée par [20]

$$i\mathcal{M} = \left(\begin{array}{ccc} q_1 & & q_2 \\ & p_1 + p_2 & \\ p_1 & & p_2 \end{array} \right) = \frac{ie^2}{(p_1+p_2)^2 + i\epsilon} \overline{v}(p_2,s)\gamma^\mu u(p_1,r)\overline{u}(q_1,r')\gamma_\mu v(q_2,s') \tag{2.40}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \left\langle \left| \mathcal{M}^2 \right| \right\rangle &= \frac{e^4}{4}\frac{1}{(p_1+p_2)^4} \sum_{r,s=1}^{2}\sum_{r',s'}^{2} \overline{v}_a(p_2,s)(\gamma^\mu)_{ab}u_b(p_1,r) \\ &\quad \times \overline{u}_c(q_1,r')(\gamma_\mu)_{cd}v_d(q_2,s')\overline{u}_e(p_1,r)(\gamma^\nu)_{ef}v_f(p_2,s) \\ &\quad \times \overline{v}_g(q_2,s')(\gamma_\nu)_{gh}\overline{u}_h(q_1,r') \\ &= \frac{e^4}{4(p_1+p_2)^4} \sum_s \left[v_f(p_2,s)\overline{v}_a(p_2,s)\right](\gamma^\mu)_{ab} \\ &\quad \times \sum_r \left[u_b(p_1,r)\overline{u}_e(p_1,r)\right](\gamma^\nu)_{ef} \\ &\quad \times \sum_{r'} \left[\overline{u}_h(q_1,r')\overline{u}_c(q_1,r')\right](\gamma_\mu)_{cd} \\ &\quad \times \sum_{s'} \left[v_d(q_2,s')\overline{v}_g(q_2,s')\right](\gamma_\nu)_{gh} \end{aligned} \tag{2.41}$$

en utilisant les relations fondamentales des spineurs

$$\begin{aligned} \sum_s \left[v_f(p_2,s)\overline{v}_a(p_2,s)\right] &= \frac{\not{p}_2 - m_\mu}{2m_\mu} \\ \sum_r \left[u_b(p_1,r)\overline{u}_e(p_1,r)\right] &= \frac{\not{p}_1 + m_\mu}{2m_\mu} \\ \sum_{r'} \left[\overline{u}_h(q_1,r')\overline{u}_c(q_1,r')\right] &= \frac{\not{q}_1 + m_e}{2m_e} \\ \sum_{s'} \left[v_d(q_2,s')\overline{v}_g(q_2,s')\right] &= \frac{\not{q}_2 - m_e}{2m_e} \end{aligned} \tag{2.42}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \left\langle \left| \mathcal{M}^2 \right| \right\rangle &= \frac{e^4}{4(p_1+p_2)^4}\frac{1}{16m_e^2m_\mu^2} tr\left[(\not{q}_1 + m_e)\gamma_\mu(\not{q}_2 - m_e)\gamma_\nu\right] \\ &\quad \times tr\left[(\not{p}_2 - m_\mu)\gamma^\mu(\not{p}_1 - m_\mu)\gamma^\mu\right] \end{aligned} \tag{2.43}$$

et après évaluation des traces

$$\begin{aligned}\left\langle\left|\mathcal{M}^2\right|\right\rangle &= \frac{e^4}{4(p_1+p_2)^4}\frac{1}{m_e^2 m_\mu^2}\left[q_{1\mu}q_{2\nu}+q_{2\mu}q_{1\nu}-(q_1.q_2)g_{\mu\nu}-m_e^2 g_{\mu\nu}\right] \\ &\quad\times\left[p_1^\mu p_2^\nu+p_2^\mu p_1^\nu-(p_1.p_2)\,g^{\mu\nu}-m_\mu^2 g^{\mu\nu}\right] \\ &= \frac{e^4}{4(p_1+p_2)^4 m_e^2 m_\mu^2}[2(p_2.q_1)(p_1.q_2)+2(p\,.\,q_2)(p_1.q_1) \\ &\quad+2m_e^2(p_1.p_2)+2m_\mu^2(q_1.q_2)+4m_e^2 m_\mu^2]\end{aligned} \tag{2.44}$$

Dans le référentiel du centre de masse, on a

$$\begin{aligned}p_1 &= (E,0,0,p), \\ p_2 &= (E,0,0,-p), \\ q_1 &= (E,q\sin\theta,0,q\cos\theta), \\ q_2 &= (E,-q\sin\theta,0,-q\cos\theta),\end{aligned} \tag{2.45}$$

où p et q sont les modules des vecteurs impulsions, dans ce cas

$$\begin{aligned}\left\langle\left|\mathcal{M}^2\right|\right\rangle &= \frac{e^4}{16(p_1+p_2)^4 m_e^2 m_\mu^2}[(E^4+m_e^2 m_\mu^2)(1+\cos^2\theta) \\ &\quad+E^2(m_e^2+m_\mu^2)\sin^2\theta]\end{aligned} \tag{2.46}$$

à très haute énergie $p \approx E$

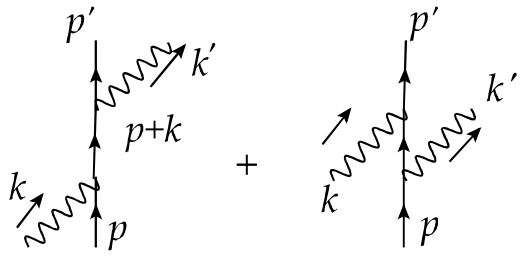
$$\left\langle\left|\mathcal{M}^2\right|\right\rangle = \frac{e^4}{16 m_e^2 m_\mu^2}(1+\cos^2\theta) \tag{2.47}$$

on obtient alors pour la section efficace différentielle l'expression

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{256\pi^2 E^2}(1+\cos^2\theta). \tag{2.48}$$

2.2.3 Le processus $e^-\gamma \to e^-\gamma$

Il s'agit de la diffusion de Compton à haute énergie, nous allons calculer la section efficace non polarisée pour cette réaction, l'amplitude $\mathcal{M}$ est associée aux diagrammes suivants

$i\mathcal{M} \equiv$ 

(2.49)

en appliquant les règles de Feynman pour ces deux diagrammes, nous obtenons [21]

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \overline{u}(p^{'})(-ie\gamma^{\mu})\epsilon_{\mu}^{*}(k^{'})\frac{i(\not{p}+\not{k}+m)}{(p+k)^2-m^2}(-ie\gamma^{\nu})\epsilon_{\nu}(k)u(p) \\ &\quad +\overline{u}(p^{'})(-ie\gamma^{\nu})\epsilon_{\nu}(k)\frac{i(\not{p}-\not{k}+m)}{(p-k)^2-m^2}\epsilon_{\mu}^{*}(k^{'})(-ie\gamma^{\mu})u(p) \\ &= -ie^2\epsilon_{\mu}^{*}(k^{'})\epsilon_{\nu}(k)\overline{u}(p^{'})\left[\frac{\gamma^{\mu}(\not{p}+\not{k}+m)\gamma^{\nu}}{(p+k)^2-m^2}+\frac{\gamma^{\mu}(\not{p}-\not{k}+m)\gamma^{\nu}}{(p-k)^2-m^2}\right]u(p) \end{aligned} \tag{2.50}$$

On peut procéder à quelques simplifications avant de mettre l'amplitude au carré

$$\left[\begin{array}{c} p^2=m^2 \\ \text{et} \\ k^2=0, \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} \text{les dénominateurs} \\ \text{des propagateurs} \\ \Rightarrow \end{array} \quad \left[\begin{array}{c} (p+k)^2-m^2=2p\cdot k \\ et \\ (p-k)^2-m^2=-2p\cdot k \end{array}\right] \tag{2.51}$$

Nous utilisons les propriétés des matrices de Dirac pour simplifier les numérateurs

$$\begin{aligned} (\not{p}+m)\gamma^{\nu}u(p) &= (2p^{\nu}-\gamma^{\nu}\not{p}+\gamma^{\nu}m)u(p) \\ &= 2p^{\nu}u(p)-\gamma^{\nu}\underbrace{(\not{p}-m)u(p)}_{=0} \\ &= 2p^{\nu}u(p) \end{aligned} \tag{2.52}$$

on obtient alors

$$i\mathcal{M}=-ie^2\epsilon_{\mu}^{*}(k^{'})\epsilon_{\nu}(k)\overline{u}(p^{'})\left[\frac{\gamma^{\mu}\not{k}\gamma^{\nu}+2\gamma^{\mu}p^{\nu}}{2p\cdot k}+\frac{-\gamma^{\nu}\not{k}^{'}\gamma^{\mu}+2\gamma^{\nu}p^{\mu}}{-2p\cdot k^{'}}\right]u(p) \tag{2.53}$$

L'amplitude au carre $|\mathcal{M}^2|$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\sum_{spins}\left|\mathcal{M}^2\right| &= \frac{e^4}{4}g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}tr\left(\not{p}^{'}+m\right)\left[\frac{\gamma^{\mu}\not{k}\gamma^{\nu}+2\gamma^{\mu}p^{\nu}}{2p\cdot k}+\frac{\gamma^{\nu}\not{k}^{'}\gamma^{\mu}-2\gamma^{\nu}p^{\mu}}{2p\cdot k^{'}}\right] \\ &\quad \times\left[\frac{\gamma^{\sigma}\not{k}\gamma^{\rho}+2\gamma^{\rho}p^{\sigma}}{2p\cdot k}+\frac{\gamma^{\rho}\not{k}^{'}\gamma^{\sigma}-2\gamma^{\sigma}p^{\rho}}{2p\cdot k^{'}}\right] \\ &\equiv \frac{e^4}{4}\left[\frac{I}{(2pk)^2}+\frac{II}{(2p\cdot k)(2p\cdot k^{'})}+\frac{III}{(2p\cdot k^{'})(2p\cdot k)}+\frac{IV}{(2pk^{'})^2}\right] \end{aligned} \tag{2.54}$$

où I ,II ,III et IV

$$\begin{aligned} I &= \left(\not{p}^{'}+m\right)\left(\gamma^{\mu}\not{k}\gamma^{\nu}+2\gamma^{\mu}p^{\nu}\right)\left(\not{p}+m\right)\left(\gamma_{\mu}\not{k}\gamma_{\nu}+2\gamma_{\mu}p_{\nu}\right) \\ II &= \left(\not{p}^{'}+m\right)\left(\gamma^{\mu}\not{k}\gamma^{\nu}+2\gamma^{\mu}p^{\nu}\right)\left(\not{p}+m\right)\left(\gamma_{\mu}\not{k}^{'}\gamma_{\nu}-2\gamma_{\mu}p_{\nu}\right) \\ III &= \left(\not{p}^{'}+m\right)\left(\gamma_{\mu}\not{k}^{'}\gamma_{\nu}-2\gamma_{\mu}p_{\nu}\right)\left(\not{p}+m\right)\left(\gamma^{\mu}\not{k}\gamma^{\nu}+2\gamma^{\mu}p^{\nu}\right) \\ IV &= \left(\not{p}^{'}+m\right)\left(\gamma_{\mu}\not{k}^{'}\gamma_{\nu}-2\gamma_{\mu}p_{\nu}\right)\left(\not{p}+m\right)\left(\gamma^{\mu}\not{k}\gamma^{\nu}+2\gamma^{\mu}p^{\nu}\right) \end{aligned} \tag{2.55}$$

on remarque que si $k \rightarrow \left(-k^{'}\right) \Rightarrow IV = I$,et puisque nous pouvons inverser l'ordre des matrices γ à l'intérieur d'une trace $tr(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}.....) = tr(.....\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}) \Rightarrow III = II$, nous savons que

$$\begin{aligned} tr\left[\not{p}^{'}\gamma^{\mu}\not{k}\gamma^{\nu}\not{p}\gamma_{\mu}\not{k}\gamma_{\nu}\right] &= tr\left(-2\not{p}^{'}\right)\not{k}\left(-2\not{p}\right)\not{k} \\ &= tr\left(4\not{p}^{'}\not{k}\left(2p\cdot k-\not{k}\not{p}^{'}\right)\right) \\ &= 8\left(p\cdot k\right)tr\left(\not{p}^{'}\not{k}\right) \\ &= 32\left(p\cdot k\right)\left(p^{'}\cdot k\right) \end{aligned} \tag{2.56}$$

et

$$\begin{aligned} \not{p}\not{p} &= m^2, \quad k^2 = 0 \\ \gamma^{\mu}\gamma_{\mu} &= g_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right\} = g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4 \\ \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma_{\mu} &= -2\gamma^{\nu} \\ \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma_{\mu} &= 4g^{\nu\rho} \\ \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma_{\mu} &= -2\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma} \end{aligned} \tag{2.57}$$

donc

$$I = 16\left(4m^4-2m^2p\cdot p^{'}+4m^2p\cdot k-2m^2p^{'}\cdot k+2\left(p\cdot k\right)\left(p^{'}\cdot k\right)\right) \tag{2.58}$$

Les variables de Mandelstam pour cette interaction

$$\begin{aligned} s+t+u &= 2m^2; \\ s &= \left(p+k\right)^2 = 2p\cdot k+m^2 = 2p^{'}\cdot k^{'}+m^2; \\ t &= \left(p^{'}-p\right)^2 = -2p\cdot p^{'}+2m^2 = -2k\cdot k^{'}; \\ u &= \left(k^{'}-p\right)^2 = -2k^{'}\cdot p+m^2 = -2k\cdot p^{'}+m^2; \end{aligned} \tag{2.59}$$

donc

$$I = 16\left(2m^4+m^2\left(s-m\right)^2-\frac{1}{2}\left(s-m^2\right)\left(u-m^2\right)\right). \tag{2.60}$$

si on remplacer $k \longleftrightarrow k^{'}$ on a la formule IV

$$IV = 16\left(2m^4 + m^2\left(u-m\right)^2 - \frac{1}{2}\left(s-m^2\right)\left(u-m^2\right)\right) \tag{2.61}$$

il en est de même pour les équations II et III donc

$$\frac{1}{4}\sum_{spins}\left|\mathcal{M}^2\right| = 2e^4\left[\frac{p\cdot k^{'}}{p\cdot k} + \frac{p\cdot k}{p\cdot k^{'}} + 2m^2\left(\frac{1}{p\cdot k} - \frac{1}{p\cdot k^{'}}\right) + m^4\left(\frac{1}{p\cdot k} - \frac{1}{p\cdot k^{'}}\right)^2\right] \tag{2.62}$$

Section efficace

Selon que le photon incident a une très haute énergie ou pas, on distingue deux régimes de diffusion Compton: les régimes dits de Klein-Nishina et de Thomson.

1)- Cas des basses énergies, diffusion de Thomson

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{lab}} = \frac{1}{2\pi}\frac{d\sigma}{dt}\frac{dt}{d\cos\theta_{lab}} = \frac{1}{2\pi}\frac{d\sigma}{d\cos\theta_{lab}} \tag{2.63}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\cos\theta} &= \frac{1}{2\omega}\frac{1}{2m}\frac{1}{8\pi}\frac{\left(\omega^{'}\right)^2}{\omega m}\left(\frac{1}{4}\sum_{spins}\left|\mathcal{M}^2\right|\right) \\ &= \frac{\pi\alpha^2}{m^2}\left(\frac{\omega^{'}}{\omega}\right)^2\left[\frac{\omega^{'}}{\omega} + \frac{\omega}{\omega^{'}} - \sin^2\theta\right]\end{aligned} \tag{2.64}$$

nous avons utilisé $pk = m\omega$ et $p.k^{'} = m\omega^{'}$, on a

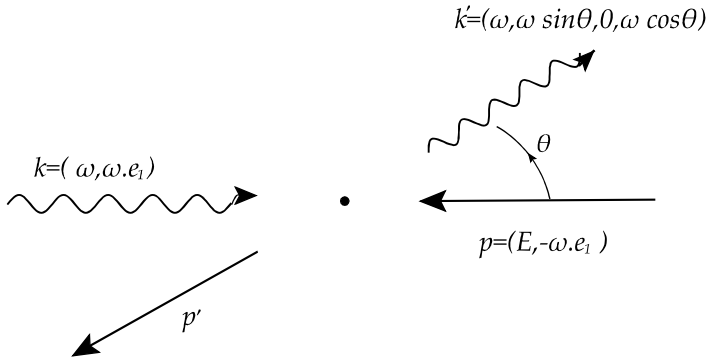
$$\begin{aligned}\omega^{'} &= \left(\frac{\omega}{1+\frac{\omega}{m}\left(1-\cos\theta\right)}\right) \\ \omega &\rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\omega^{'}}{\omega} \rightarrow 1\end{aligned} \tag{2.65}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\cos\theta} &= \frac{\pi\alpha^2}{m^2}\left(1+\cos^2\theta\right) \\ \sigma_{total} &= \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2}\end{aligned} \tag{2.66}$$

Il s'agit de la fameuse section efficace transversale de J. J. Thomson pour la diffusion du rayonnement électromagnétique par un électron libre.

2)- Cas des hautes énergies, formule de Klein-Nishina Pour analyser le comportement à haute énergie de la section efficace de diffusion de Compton, il est plus facile de travailler dans le référentiel du centre de masse



On a les relations $p\cdot k=\omega(E+\omega)$, $p\cdot k^{'}=\omega(E+\omega\cos\theta)$ et $E^2=(\omega^2+m^2)$. Pour $E>>m$ et $\theta\approx\pi$, la relation (2.62) devient

$$\frac{1}{4}\sum_{spins}\left|\mathcal{M}^2\right|\approx 2e^2.\left(\frac{p\cdot k}{p\cdot k'}\right)=2e^2\frac{E+\omega}{E+\cos\theta} \tag{2.67}$$

la section efficace différentielle est

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\cos\theta} &= \frac{1}{2}.\frac{1}{2E}.\frac{1}{2\omega}.\frac{\omega}{(2\pi)\,4\,(E+\omega)}.\frac{2e^4\,(E+\omega)}{(E+\omega\cos\theta)} \\ &\approx \frac{2\pi\alpha^2}{2m^2+s\,(1+\cos\theta)}\end{aligned} \tag{2.68}$$

Remarque que $s>>m$, la section efficace est alors

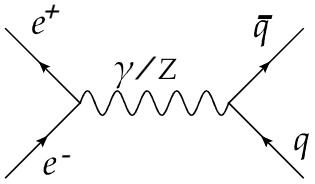
$$\sigma_{total}=\frac{2\pi\alpha^2}{s}\log\left(\frac{s}{m^2}\right) \tag{2.69}$$

Cette relation porte le nom de formule de Klein-Nishina et décrit la diffusion d'un photon à très haute énergie.

2.3 Applications pour la chromodynamique quantique

2.3.1 le processus $e^-e^+ \to q\bar{q}$

Le diagramme de Feynman pour ce processus est



(2.70)

l'amplitude $\mathcal{M}$ est obtenue en utilisant les règles de Feynman

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \overline{v}(l^+).-ie\gamma_\mu.u(l^-) \times \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{Q^2} \times \overline{u}(q).-iee_q\gamma_\nu\delta_{ij}.v(\overline{q}) \\ &= e\overline{v}(l^+).\gamma_\mu.u(l^-) \times iQ^{-2} \times \overline{u}(q).ee_q\gamma_\nu\delta_{ij}.v(\overline{q}) \end{aligned} \tag{2.71}$$

Pour plus de simplicité, seul l'échange de photons est inclus, qui est approprié pour $l^+ + l^- >> M_z$ et nous avons choisi de travailler dans la jauge covariante de Feynman

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= e^2\overline{v}(l^+).\gamma_\mu.u(l^-)\left[\overline{v}(l^+).\gamma_\nu.u(l^-)\right]^\dagger \times Q^{-4} \\ &\quad \times (ee_q)^2 \left(\delta_{ij}\delta_{ji}\right)\overline{u}(q)\gamma^\mu v(\overline{q})\left[\overline{u}(q)\gamma^\nu v(\overline{q})\right]^\dagger \\ &= e^2\left[\overline{v}(l^+).\gamma_\mu.u(l^-)\overline{u}(l^-)\gamma_\nu v(l^+)\right] \times Q^{-4} \\ &\quad \times (ee_q)^2 N_c\left[\overline{u}(q)\gamma^\mu v(\overline{q})\overline{v}(\overline{q})\gamma^\nu u(q)\right] \end{aligned} \tag{2.72}$$

où N_c est le nombre de couleur de quark. Les termes conjugués hermitiens de l'équation 2.72 le facteur de couleur dans $\mathcal{M} \propto a^*(q)_i\delta_{ij}a(\overline{q})_j$ où

$$\sum_{\text{col.}pols} a_k(q)a_i^*(q) = \delta_{ki} \quad , \quad \sum_{\text{col.}pols} g_c(q)g_c^*(q) = \delta_{ac} \tag{2.73}$$

les indices [18] $\{a, c\} = 1, ..., N_c^2 - 1$, donc

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\propto \sum\left[a_i^*(q)\delta_{ij}a_j(\overline{q})\right]\left[a_k^*(q)\delta_{kl}a_l(\overline{q})\right]^* \\ &= \sum\left(\sum a_k(k)a_i^*(k)\right)\delta_{ij}\left(\sum a_j(\overline{q})a_l(\overline{q})\right)\delta_{lk} \\ &= \sum\delta_{ki}\delta_{ij}\delta_{jl}\delta_{lk} = \sum\delta_{kj}\delta_{jk} = N_c \end{aligned} \tag{2.74}$$

Le résultat de $|\mathcal{M}|^2$ est donné sous la forme

$$\begin{aligned}\overline{\sum}|\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{4Q^4}e^2\cdot Tr\left\{\left(\not{l}^+ - m_e\right)\gamma_\mu\left(\not{l}^- + m_e\right)\gamma_\nu\right\} \\ &\quad \times (ee_q)^2 N_c Tr\left\{\left(\not{q} + m_q\right)\gamma^\mu\left(\overline{\not{q}} - m_q\right)\gamma^\nu\right\} \\ &= \frac{e^2}{4Q^4}\cdot\left[l_\mu^+ l_\nu^- + l_\mu^- l_\nu^+ - \frac{Q^2}{2}\eta_{\mu\nu}\right] \\ &\quad \times (ee_q)^2\cdot N_c\cdot 4\left[q^\mu\overline{q}^\nu + \overline{q}^\mu q^\nu - \frac{Q^2}{2}\eta^{\mu\nu}\right] \\ &\equiv \frac{1}{Q^4}L_{\mu\nu}\cdot H^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{2.75}$$

$\overline{\sum}$ est la somme sur l'état final, sur les spins et les couleurs de l'état initial, $L_{\mu\nu}$tenseur de lepton et $H_{\mu\nu}$ tenseur de hadron

$$\begin{aligned}\overline{\sum}|\mathcal{M}|^2 &= 4\left(\frac{e^2 e_q N_c}{Q^4}\right)^2\left[2\left(l^+\cdot q\right)\left(l^-\cdot\overline{q}\right) + 2\left(l^-\cdot q\right)\left(l^+\cdot\overline{q}\right)\right. \\ &\quad \left. + \left(m_l^2 + m_q^2\right)Q^2\right] \\ &= \left(e^2 e_q\right)^2 N_c\cdot\frac{1}{2}\left(2 - \left(\beta_q^*\right)^2 + \left(\beta_q^*\right)^2\cos^2\theta^*\right)\end{aligned} \tag{2.76}$$

θ^* angle de diffusion entre le lepton entrant et le quark sortant, β^*angle de diffusion entre les vitesse des quarks d'état final. La dépendance de l'angle polaire dans l'équation **??** est une conséquence directe que les quarks et les leptons ont un spin 1/2.

Dans la référentiel du centre de masse on a

$$\begin{aligned}\left(l^\pm\right)^\mu &= \frac{\sqrt{Q^2}}{2}(1,0,0,\pm 1), \\ &\quad \overline{q}^\mu\left(1,\pm\beta_q^*\sin\theta^*,0,\pm\beta_q^*\cos\theta^*\right)\end{aligned} \tag{2.77}$$

où $\beta^* = \sqrt{1 - \frac{4m_q^2}{Q^2}}$.

Variables de Mandelstam

Pour un processus $ab \longrightarrow cd$ les variables de Mandelstam s, t et u sont

$$\begin{aligned}s &= (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d)^2 \\ t &= (p_a - p_c)^2 = (p_b - p_d)^2 \\ u &= (p_a - p_d)^2 = (p_b - p_d)^2 \\ s + u + t &= m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2\end{aligned} \tag{2.78}$$

l'équation (**??**) devient

$$\overline{\sum}|\mathcal{M}|^2 = \left(e^2 e_q\right)^2 N_c \frac{\left[t^2+u^2+\left(m_e^2+m_q^2\right)\left(2s-m_q^2-m_e^2\right)\right]}{s^2} \tag{2.79}$$

la section efficace différentielle est alors

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\cos\theta^*} &= \frac{\alpha_{em} e_q^2 \pi N_c}{2s}\left(2-\left(\beta_q^*\right)^2+\left(\beta_q^*\right)^2\cos^2\theta^*\right)\beta_q^* \\ \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{\alpha_{em} e_q^2 \pi N_c}{s}\left[\frac{t^2+u^2-m_q^2\left(2s-m_q^2\right)}{s^2}\right] \end{aligned} \tag{2.80}$$

la section efficace totale

$$\sigma_0 = \frac{2\alpha_{em} e_q^2 \pi N_c}{s}\left(1-\frac{\left(\beta_q^*\right)^2}{3}\right)\beta_q^* \approx \frac{4\pi\alpha_{em}^2}{3s} e_q^2 N_c \tag{2.81}$$

l'approximation est bien au-dessus du seuil, $s >> 2m$ équivalent à $\beta^* \to 1$. Pour obtenir des résultats similaires pour les processus $e^- q \to e^- q$ et $q\overline{q} \to e^- e^+$ une approche consiste à calculer l'élément matriciel exactement de la même manière que ci-dessus. Une alternative élégante consiste à prendre le résultat précédent pour $\mathcal{M}(e^- e^+ \to q\overline{q})$ et à utiliser la symétrie croisée. L'idée de base est d'échanger des particules entre les états initiaux et les états finaux, un exemple est donné par

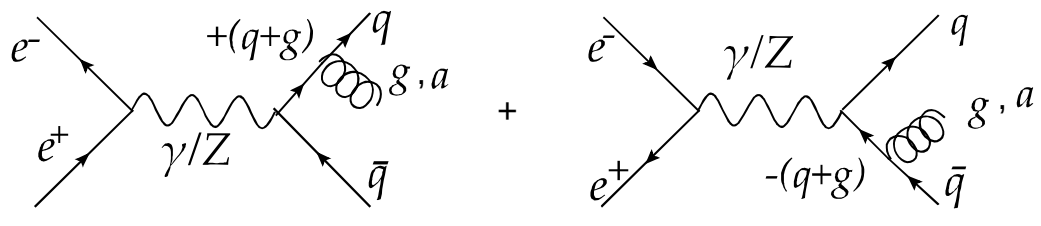
$$\begin{aligned} M^{a\bar{b}\to c\bar{d}}(p_a,\overline{p}_b,p_c,\overline{p}_d) &\simeq M^{ad\to bc}(p_a,-p_d,-p_b,p_c) \\ &\Rightarrow \left|M^{a\bar{b}\to c\bar{d}}(s,u,t)\right|^2 = \left|M^{ad\to bc}(s,u,t)\right|^2 \end{aligned} \tag{2.82}$$

En utilisant ces résultats (2.82) et en négligeant les masses, nous obtenons

$$\begin{aligned} \overline{\sum}\left|\mathcal{M}(e^- q\to e^- q)\right|^2 &= \left(e^2 e_q\right)^2 \frac{u^2+s^2}{t^2} \\ \overline{\sum}\left|\mathcal{M}(q\overline{q}\to e^- e^+)\right|^2 &= \left(e^2 e_q\right)^2 \frac{1}{N_c}\frac{t^2+u^2}{s^2} \end{aligned} \tag{2.83}$$

2.3.2 le processus $e^- e^+ \to q\bar{q}g$

Les diagrammes de Feynman représentant ce processus sont



(2.84)

En supposant seulement un échange de photons

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\mu} &= iee_q g_s T^a_{ij}\overline{u}(q) \\ &\times\left[\gamma_\sigma\frac{\left(\not{q}+\not{g}+m_q\right)}{\left(q+g\right)^2-m_q^2}\gamma_\mu+\gamma_\mu\frac{-\left(\overline{\not{q}}+\not{g}\right)+m_q}{\left(\overline{q}+g\right)^2-m_q^2}\gamma_\sigma\right] \\ &\times v(\overline{q})\left(\epsilon^*\right)^\sigma(g)\epsilon.\end{aligned} \tag{2.85}$$

Avant de procéder à l'évaluation de $|\mathcal{M}|^2$, il est instructif de vérifier l'invariance de la jauge électromagnétique en utilisant $Q^\mu = q^\mu + \overline{q}^\mu + g^\mu$ et en négligeant les facteurs globaux constants [18]

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_\mu Q^\mu &= \overline{u}(q)\not{\epsilon}^*\frac{\left(\not{p}+\not{g}+\overline{\not{q}}\right)}{\left(\not{q}+\not{g}-m_q\right)}v(\overline{q}) \\ &\quad+\overline{u}(q)\frac{\left(\not{q}+\not{g}+\overline{\not{q}}\right)}{\left(-\left(\not{q}+\not{g}\right)-m_q\right)}\not{\epsilon}^*v(\overline{q}) \\ &= \overline{u}(q)\left[\not{\epsilon}^*\frac{\left(\not{q}+\not{g}-m_q\right)}{\left(\not{q}+\not{g}-m_q\right)}-\frac{\left(\not{q}+\not{g}+m_q\right)}{\left(\not{q}+\not{g}+m_q\right)}\not{\epsilon}^*\right]v(\overline{q}) \\ &= \overline{u}(q)\left[\not{\epsilon}^*\mathbf{1}-\mathbf{1}\not{\epsilon}^*\right]v(\overline{q}) \\ &= 0\end{aligned} \tag{2.86}$$

$\mathbf{1}$ est la matrice identité, en utilisant, $\left(\not{q}-m_q\right)\cdot\left(\not{q}+m_q\right)=\left(q^2-m_q^2\right).\mathbf{1}$

$$\begin{aligned}\left(\not{q}-m_q\right)u(q) &= 0 \\ \left(\overline{\not{q}}-m_q\right)v(\overline{q}) &= 0 \\ \overline{u}(q)\left(\not{q}-m_q\right) &= 0 \\ \overline{v}(\overline{q})\left(\overline{\not{q}}-m_q\right) &= 0\end{aligned} \tag{2.87}$$

Donc nous confirmons que notre expression pour l'amplitude est invariante, à condition d'inclure les contributions des deux diagrammes **??** Pour calcule $|\mathcal{M}|^2$ nous revenons à la relation 2.75 tel que

$$L_{\mu\nu}H^{\mu\nu}=8\left(e^2e_q\right)^2g_s^2C_FN_c\frac{1}{Q^2}\frac{\left(l^-\cdot q\right)^2+\left(l^-\cdot\overline{q}\right)^2+\left(l^+\cdot q\right)^2+\left(l^+\cdot\overline{q}\right)^2}{\left(q\cdot g\right)\left(\overline{q}\cdot g\right)} \tag{2.88}$$

où la masse des quarks est négligée[3] alors, la section efficace différentiel est

$$d^2\sigma=\sigma_0\frac{\alpha_s}{2\pi}C_F\frac{\left[\left(q\cdot Q\right)^2+\left(\overline{q}\cdot Q\right)^2\right]}{\left(q\cdot g\right)\left(\overline{q}\cdot g\right)}\frac{1}{Q^2}dE_qdE_{\overline{q}} \tag{2.89}$$

[3] C'est une bonne approximation pour les quarks légers.

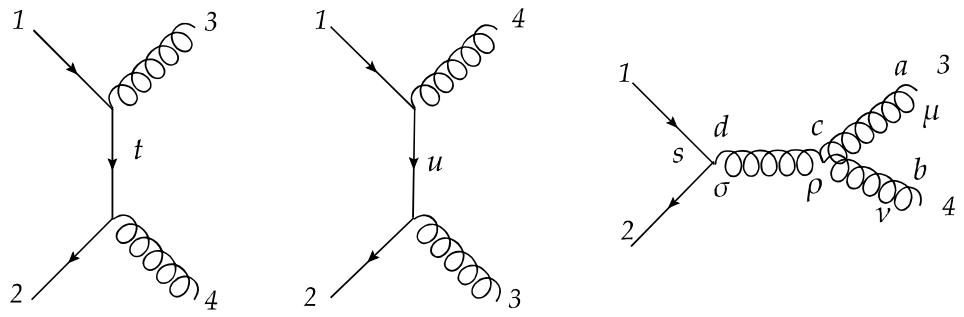
et $x_i = 2\frac{p_i \cdot Q}{Q^2} = \frac{E_i^{COM}}{E_{berm}}$, σ_0 section efficace total pour le processus $e^- e^+ \to q\bar{q}$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dx_q dx_{\bar{q}}} &= \sigma_0 \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{x_q^2 + x_{\bar{q}}^2}{(1 - x_{\bar{q}})(1 - x_q)} \\ x_q + x_{\bar{q}} + x_g &= 2 \end{aligned} \tag{2.90}$$

Les valeurs propres C_F et b associées à la représentation fondamentale et adjointe, respectivement, sont également appelés facteurs de couleurs.

2.3.3 le processus $q_1\overline{q}_2 \to g_1 g_2, q_1 g_2 \to q_3 g_4, g_1 g_2 \to q_3 q_4$

Ce processus de diffusion quark-gluon est intéressant puisqu'il permet d'illustrer les subtilités des calculs de la QCD en faisant intervenir explicitement la structure non-abélienne de la théorie. Les trois diagrammes à considérer sont indiqués dans la figure [14]



(2.91)

l'amplitude de diffusion pour des gluons de polarisation k_3 et k_4 s'écrit

$$\mathcal{M}^{(k_3,k_4)} = \mathcal{M}^{ab,\mu\nu} \epsilon_\mu^{(k_3)}(p_3) \epsilon_\nu^{(k_4)}(p_4) \tag{2.92}$$

les vecteurs polarisation des gluons d'impulsion p_3 et p_4 satisfont la condition de Lorentz [14]

$$p_3 \cdot \epsilon^{a,(k_3)}(p_3) = 0 \quad \text{et} \quad p_4 \cdot \epsilon^{b,(k_4)}(p_4) = 0 \tag{2.93}$$

L'amplitude de diffusion

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{ab,\mu\nu} &= (-ig)\,\overline{v}_2\,(-ig)\,T^a T^b \gamma^\nu \frac{\not{p}_1 - \not{p}_3}{t} \gamma^\mu u_1 \\ &+ (-ig)\,\overline{v}_2\,(-ig)\,\gamma^\mu \frac{\not{p}_3 - \not{p}_2}{u} \gamma^\nu u_1 \\ &+ (-ig)\,\overline{v}_2 g T^d \gamma^\sigma \frac{G^{dc}_{\sigma\rho}(p_3 + p_4)}{s} f^{abc} V^{\mu\nu\rho}(p_3, p_4, -p_3, -p_4) u_1 \end{aligned} \tag{2.94}$$

avec $V^{\mu\nu\rho}(p,q,r) = (p-q)^{\rho}g^{\mu\nu} + (q-r)^{\mu}g^{\nu\rho} + (r-p)^{\nu}g^{\rho\mu}$

$V^{\mu\nu\rho}(p,q,r)$ est la partie dépendant des impulsions du couplage à 3 gluons [4]

$G^{dc}_{\sigma\rho}(p_3+p_4)$ l'une des trois formes du propagateur du gluon

Si on substitue l'impulsion à l'un des vecteurs de polarisations alors

$$\mathcal{M}^{ab,\mu\nu}p_{3\mu}\epsilon^{b,(k_4)}_{4\nu} = \mathcal{M}^{ab,\mu\nu}\epsilon^{a,(k_3)}_{\mu}p_{4\nu} = 0 \tag{2.95}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{ab,\mu\nu}p_{3\mu}\epsilon^{b,(k_4)}_{4\nu} &= (-ig)\,\overline{v}_2[T^aT^b\not{\epsilon}^{b,(k_4)}\frac{\not{p}_1-\not{p}_3}{t}\not{p}_3 \\ &\quad +T^bT^a\not{p}_3\frac{\not{p}_3-\not{p}_2}{u}\not{\epsilon}^{b,(k_4)} \\ &\quad -if^{abc}T^c\frac{1}{s}((\not{p}_3-\not{p}_4)p_3\cdot\epsilon_4 \\ &\quad +(p_3+2p_4)\cdot p_3\not{\epsilon}^{b,(k_4)} - (p_4-2p_3)\cdot\epsilon^{b,(k_4)}\not{p}_3]u_1\end{aligned} \tag{2.96}$$

en utilisant les relations suivantes

$$\frac{\not{p}_1-\not{p}_3}{t}\not{p}_3 = -1 \qquad ,\frac{\not{p}_3-\not{p}_2}{u}\not{\epsilon}_3 = 1 \tag{2.97}$$

quand évalué dans $\overline{v}_2\,[...]\,u_1$,et que le coefficient de $-if^{abc}T^c\frac{1}{s}$ se réduit à $s\not{\epsilon}^{b,(k_4)}$ ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{ab,\mu\nu}p_{3\mu}\epsilon^{b,(k_4)}_{4\nu} &= (-ig)\,\overline{v}_2[(T^aT^b-T^bT^a)\not{\epsilon}^{b,(k_4)} - if^{abc}T^c\not{\epsilon}^{b,(k_4)}]u_1 \\ &= (-ig)\,\overline{v}_2[if^{abc}T^c - if^{abc}T^c]u_1 = 0\end{aligned} \tag{2.98}$$

Cette vérification ne prouve pas l'invariance de jauge de la QCD, mais seulement l'invariance par la translation

$$\epsilon^{a,(k)}_{\mu}(p) \rightarrow \epsilon^{a,(k)}_{\mu}(p) + p_{\mu} \tag{2.99}$$

en fait, les vecteurs $\epsilon^{a,(k)}_{\mu}(p)$ contraints par l'équation (2.93) contiennent un état de polarisation non physique, somme des polarisations scalaire et longitudinale

$$\epsilon^{a,(0)}_{\mu}(p) + \epsilon^{a,(3)}_{\mu}(p) \propto p \tag{2.100}$$

par conséquent

$$\mathcal{M}^{ab,\mu\nu}p_{3\mu}\epsilon^{b,(k_4)}_{4\nu} = 0 \tag{2.101}$$

[4] les impulsions p,q,r sont sortantes du vertex.

signifie que cet état de polarisation ne contribue pas aux processus physiques.

Calcul de $\overline{\sum}|\mathcal{M}|^2$

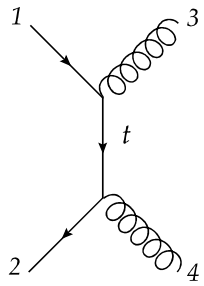
On commence le calcule par

$$\begin{aligned}\overline{\sum}|\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2|^2 &= g^4 Tr\left(\not p_2\gamma^\nu\frac{\not p_4-\not p_2}{t}\gamma^\mu\not p_1\times\gamma_\mu\frac{\not p_4-\not p_2}{t}\gamma_\nu\right) \\ &\times Tr\left[T^bT^aT^aT^b\right] \\ &+Tr\left(\not p_2\gamma^\mu\frac{\not p_3-\not p_2}{u}\gamma^\nu\not p_1\times\gamma_\nu\frac{\not p_3-\not p_2}{u}\gamma_\mu\right) \\ &\times Tr\left[T^aT^bT^bT^a\right] \\ &+2Tr\left(\not p_2\gamma^\nu\frac{\not p_4-\not p_2}{t}\gamma^\mu\not p_1\times\gamma_\nu\frac{\not p_3-\not p_2}{u}\gamma_\mu\right) \\ &\times Tr\left[T^bT^aT^bT^a\right]\end{aligned} \tag{2.102}$$

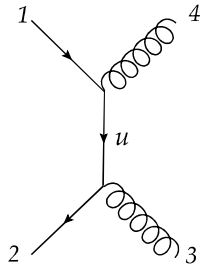
après simplification

$$\overline{\sum}|\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2|^2 = g^4\left\langle C_F^2N\right\rangle 8\left(\frac{u}{t}+\frac{t}{u}\right) \tag{2.103}$$

pour



$$\equiv \mathcal{M}_1 \tag{2.104}$$



$$\equiv \mathcal{M}_2 \tag{2.105}$$

$Tr\left[T^bT^aT^aT^b\right] = Tr\left[T^aT^bT^bT^a\right] = C_F^2N$ où N est le nombre de couleurs. Le carré du terme contenant le couplage à 3 gluons est

$$\begin{aligned}\left|\sum\mathcal{M}_3\right|^2 &= g^4f^{abc}f^{abd}Tr(T^cT^d)\frac{1}{s^2}Tr(\not p_2\gamma_\rho\not p_1\gamma^\sigma)[(p_3-p_4)^\rho g^{\mu\nu} \\ &+(p_3+2p_4)^\mu g^{\nu\rho}-(p_4-2p_3)^\nu g^{\mu\rho}] \\ &\times[(p_3-p_4)_\sigma g_{\mu\nu}+(p_3+2p_4)_\mu g_{\nu\sigma}-(p_4+2p_3)_\nu g_{\sigma\mu}] \\ &= g^4<C_FN^2>\frac{1}{s^2}Tr(\not p_2\gamma_\rho\not p_1\gamma^\sigma)[12p_4^\rho p_4^\sigma+4sg^{\rho\sigma}p_3^\rho p_4^\sigma+p_4^\rho p_3^\sigma] \\ &= -g^4<C_FN^2>\frac{4}{s^2}[4(t^2+u^2)+3tu].\end{aligned} \tag{2.106}$$

on peut évaluer le terme d'interférence par les relations suivant

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Re}\,\mathcal{M}_1\mathcal{M}_3^* &= g^4\frac{2}{st}[if^{abc}Tr(T^bT^aT^c)Tr(\not p_2\gamma(\not p_1-\not p_3)\gamma^\nu \not p_1\gamma^\rho] \\ &\quad [(p_3-p_4)_\rho g_{\mu\nu}+(p_3+2p_4)_\mu g_{\nu\rho}-(p_4+2p_3)_\nu g_{\rho\mu}] \end{aligned} \tag{2.107}$$

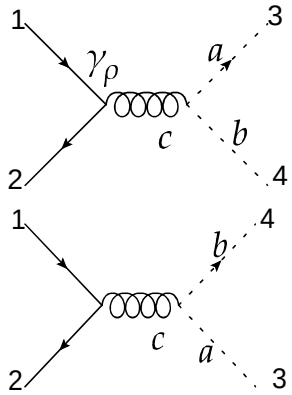
On trouve finalement

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Re}\,\mathcal{M}_1\mathcal{M}_3^* &= g^4 < \frac{C_F N^2}{2} > (-16\frac{t}{s}) \\ \mathrm{Re}\,\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3^* &= g^4 < \frac{C_F N^2}{2} > (-16\frac{u}{s}) \end{aligned} \tag{2.108}$$

donc $\left|\sum \mathcal{M}\right|^2$ s'écrire comme suivant

$$\begin{aligned} \left|\sum \mathcal{M}\right|^2 &= \left|\sum \mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2\right|^2+\left|\sum \mathcal{M}_3\right|^2+2\,\mathrm{Re}\,(\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2)\,\mathcal{M}_3^* \\ &\quad -\left|\sum \mathcal{M}_{gh1}\right|^2-\left|\sum \mathcal{M}_{gh2}\right|^2 \\ &= g^4 < C_F N^2 > 8\left[< C_F > \left(\frac{t}{u}+\frac{u}{t}\right)- < N > \frac{t^2+u^2}{s^2}\right] \end{aligned} \tag{2.109}$$

tel que [5]



$$\equiv \sum \mathcal{M}_{gh1} = (-ig)\overline{v}_2 T^c \gamma_\rho u_1 \left(\frac{-i}{s}\right)(-igf^{cba}p_3^\rho) \tag{2.110}$$

$$\equiv \sum \mathcal{M}_{gh2} = (-ig)\overline{v}_2 T^c \gamma_\rho u_1 \left(\frac{-i}{s}\right)(-igf^{cab}p_4^\rho)$$

Finalement on donne la résume de cette calcule

$q(p_1)+\overline{q}(p_2)\to g_1(p_3)+g_2(p_4)$ il faut multiplier l'équation 2.109 par $\frac{1}{4N^2}$

$$\overline{\sum}\mathcal{M}^2 = g^4\left[\frac{32}{27}\left(\frac{t}{u}+\frac{u}{t}\right)-\frac{8}{3}\frac{t^2+u^2}{s^2}\right] \tag{2.111}$$

[5] Cette contribution doit être soustraite de celle des diagrammes de production de gluons de sorte que l'amplitude carré de $q\overline{q}\to gg$ sommée sur polarisation et couleur est.

$g(p_1) + q(p_2) \to g(p_3) + q(p_3)$ il faut multiplier l'équation (2.109) par $\frac{1}{4N(N^2-1)}$

$$\overline{\sum}\mathcal{M}^2 = g^4 \left[-\frac{4}{9}\left(\frac{s}{u} + \frac{u}{s}\right) - \frac{s^2+u^2}{t^2} \right] \tag{2.112}$$

$g(p_1) + g(p_2) \to q(p_3) + \overline{q}(p_4)$ il faut multiplier l'équation (2.109) par $\frac{1}{4(N^2-1)^2}$

$$\overline{\sum}\mathcal{M}^2 = g^4 \left[\frac{1}{6}\left(\frac{t}{u} + \frac{u}{t}\right) - \frac{8}{3}\frac{t^2+u^2}{s^2} \right] \tag{2.113}$$

La section efficace différentielle [22]

1. le processus $q\overline{q} \to gg$

$$\frac{d\sigma(q\overline{q} \to gg)}{d\Omega} = \frac{8\alpha_s^2}{27s}\left(t^2+u^2\right)\left(\frac{1}{tu} - \frac{9}{4s^2}\right) \tag{2.114}$$

2. le processus $qg \to qg$

$$\frac{d\sigma(qg \to qg)}{d\Omega} = \frac{\alpha_s^2}{9s}\left(s^2+u^2\right)\left(-\frac{1}{su} + \frac{9}{4t^2}\right) \tag{2.115}$$

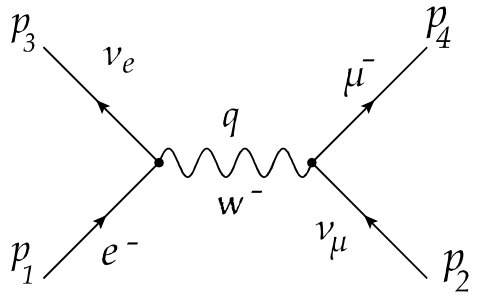
3. le processus $gg \to q\overline{q}$

$$\frac{d\sigma(gg \to q\overline{q})}{d\Omega} = \frac{\alpha_s^2}{24s}\left(t^2+u^2\right)\left(\frac{1}{tu} - \frac{9}{4s^2}\right) \tag{2.116}$$

2.4 Applications pour l'interaction faible

2.4.1 Le processus $\nu_\mu + e^- \to \nu_e + \mu^-$

Ce processus est appelé désintégration inverse du muon et représenté, à l'ordre le plus bas, par le diagramme



(2.117)

on a $q = p_1 - p_3$, $q^2 << M_w^2 c^2$. L'amplitude est

$$\mathcal{M} = -\frac{g_w^2}{8(M_w c)^2} \left[\overline{u}(3)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(1)\right] \left[\overline{u}(4)\gamma_\mu(1-\gamma^5)u(2)\right] \tag{2.118}$$

on applique la relation de Casimir

$$\sum_{tout\ spin} [\overline{u}(a)\gamma^\mu u(b)] [\overline{u}(a)\gamma^\nu u(b)]^* = Tr\left[\gamma^\mu(\not{p}_b + m_b c)\gamma^\nu(\not{p}_a + m_a c)\right] \tag{2.119}$$

on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 &= \left(\frac{g_w^2}{8(M_w c)^2}\right)^2 Tr\left[\gamma^\mu(1-\gamma^5)(\not{p}_1 + m_e c)\gamma^\nu(1-\gamma^5)\not{p}_3\right] \\ &\quad \times Tr\left[\gamma_\mu(1-\gamma^5)\not{p}_2\gamma_\nu(1-\gamma^5)(\not{p}_4 + m_\mu c)\right] \end{aligned} \tag{2.120}$$

on applique le théorème de trace pour la $1^{ièr}$ trace

$$8\left[p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu - g^{\mu\nu}(p_1 \cdot p_3) - i\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} p_{1_\lambda} p_{3_\sigma}\right] \tag{2.121}$$

pour la $2^{ème}$ trace

$$8\left[p_{2_\mu} p_{4_\nu} + p_{2_\nu} p_{4_\mu} - g_{\mu\nu}(p_2 \cdot p_4) - i\epsilon_{\mu\nu\kappa\tau} p_2^\kappa p_4^\tau\right] \tag{2.122}$$

il s'ensuit que

$$\sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 = 4\left(\frac{g_w}{M_w c}\right)^4 (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) \tag{2.123}$$

sachant que l'électron a deux états de spin, mais le neutrino n'en a qu'un seul (à cause de la chiralité)

$$\left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle = 2\left(\frac{g_w}{M_w c}\right)^2 (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4). \tag{2.124}$$

on utilise le référentiel du centre de masse et on néglige la masse de l'électron

$$\left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle = 2\left(\frac{g_w}{M_w c}\right)^2 \left\{1 - \left(\frac{m_\mu c^2}{2E}\right)^2\right\}^2 \tag{2.125}$$

où E est l'énergie incidente des électrons (ou neutrinos). La section efficace différentielle est isotrope

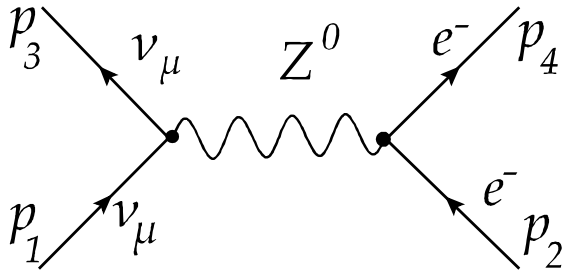
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar c g_w^2 E}{4\pi(M_w c^2)^2}\right)^2 \left\{1 - \left(\frac{m_\mu c^2}{2E}\right)^2\right\}^2 \tag{2.126}$$

la section efficace totale est alors

$$\sigma = \frac{1}{8\pi}\left[\left(\frac{g_w}{M_w c^2}\right)^2 \hbar c E\right]^2 \left\{1 - \left(\frac{m_\mu c^2}{2E}\right)^2\right\}^2 \tag{2.127}$$

2.4.2 Le processus $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$

Nous considérons maintenant une réaction véhiculée par Z^0; la diffusion élastique neutrino-électronique



(2.128)

l'amplitude est

$$\mathcal{M} = \frac{g_Z^2}{8(M_Z c)^2}\left[\overline{u}(3)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(1)\right]\left[\overline{u}(4)\gamma_\mu(c_V - c_A\gamma^5)u(2)\right] \tag{2.129}$$

où g_Z est la constante de couplage neutre, c_V et c_A sont les couplages faibles neutres de l'électron tous ces constantes sont déterminés par un seul paramètre fondamental θ_w, appelé angle de mélange faible [23] ou angle de Weinberg

f	c_V	c_A
ν_e, ν_μ, ν_τ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
e^-, μ^-, τ^-	$-\frac{1}{2} + 2\sin\theta_w$	$-\frac{1}{2}$
u, c, t	$\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\sin^2\theta_w$	$\frac{1}{2}$
d, s, b	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin^2\theta_w$	$-\frac{1}{2}$

(2.130)

$$\begin{aligned}
\left\langle|\mathcal{M}|^2\right\rangle &= 2\left(\frac{g_Z}{4M_Z c}\right)^4 Tr\left\{\gamma^\mu(1-\gamma^5)\not{p}_1\gamma^\nu(1-\gamma^5)\not{p}_3\right\} \\
&\quad \times Tr\left\{\gamma_\mu(c_V - c_A\gamma^5)(\not{p}_2 + mc)\gamma_\nu(c_V - c_A\gamma^5)(\not{p}_4 + mc)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{g_Z}{4M_Z c}\right)^4 \{(c_V + c_A)^2(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4) \\
&\quad + (c_V - c_A)^2(p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3) - (mc)^2(c_V^2 - c_A^2)(p_1\cdot p_3)\}
\end{aligned} \tag{2.131}$$

où m est la masse de l'électron. On utilise référentiel du centre de masse et on néglige la masse de l'électron

$$\left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle = 2\left(\frac{g_Z E}{4M_Z c^2}\right)^4 \left[(c_V + c_A)^2 + (c_V - c_A)^2 \cos^4\frac{\theta}{2}\right] \tag{2.132}$$

où E est l'énergie électronique et θ est l'angle de diffusion. La section efficace de diffusion différentielle est

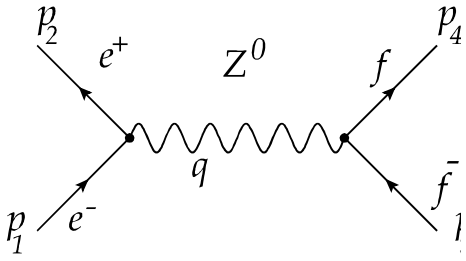
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\left(\frac{\hbar c}{\pi}\right)^2 \left(\frac{g_Z}{4M_Z c^2}\right)^4 E^2 \left[(c_V + c_A)^2 + (c_V - c_A)^2 \cos^4\frac{\theta}{2}\right] \tag{2.133}$$

et la section totale est

$$\sigma = \frac{2}{3\pi}(\hbar c)^2 \left(\frac{g_Z}{4M_Z c^2}\right)^4 E^2 \left(c_V^2 + c_A^2 + c_V c_A\right) \tag{2.134}$$

2.4.3 Le processus $e^- + e^+ \rightarrow f + \overline{f}$

Le processus de diffusion d'électrons-positrons, avec échange de boson Z^0, est décrit par le diagramme



(2.135)

où f est un quark ou un lepton. Cette fois, nous n'utiliserons pas la forme approximative du propagateur de Z^0 : $\frac{ig_{\mu\nu}}{(M_Z c)^2}$, car nous nous intéressons précisément au régime [23] $q_2 = (M_Z c)^2$. L'amplitude est

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= -\frac{g_Z^2}{4(q^2 - (M_Z c)^2)} \left[\overline{u}(4)\gamma^\mu (c_V^f - c_A^f \gamma^5) v(3)\right] \\ &\quad \times \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{(M_Z c)^2}\right) \left[\overline{v}(2)\gamma^\nu (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u(1)\right] \end{aligned} \tag{2.136}$$

où $q = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$. Puisque nous travaillons à proximité de $90 Gev$, nous pouvons nous permettre d'ignorer les masses de lepton et de quark. Dans ce cas, le deuxième terme du propagateur n'a aucune contribution. On a $\not{q} = \not{p}_3 + \not{p}_4$, et $\overline{u}(4)\not{p}_4 = 0$ donc

$$\not{p}_3 (c_V - c_A \gamma^5) v(3) = (c_V - c_A \gamma^5) \not{p}_3 v(3) = 0$$

par conséquent

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= -\frac{g_Z^2}{4\left[q^2-(M_Z c)^2\right]}\left[\overline{u}(4)\gamma^\mu(c_V^f-c_A^f\gamma^5)v(3)\right] \\ &\quad\times\left[\overline{v}(2)\gamma_\mu(c_V^e-c_A^e\gamma^5)u(1)\right]\end{aligned} \tag{2.137}$$

et il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\left\langle|\mathcal{M}|^2\right\rangle &= \left[\frac{g_Z^2}{8(q^2-(M_Z c)^2)}\right]^2 Tr\left\{\gamma^\mu(c_V^f-c_A^f\gamma^5)\not{p}_3\gamma^\nu(c_V^f-c_A^f\gamma^5)\not{p}_4\right\} \\ &\quad\times Tr\left\{\gamma_\mu(c_V^e-c_A^e\gamma^5)\not{p}_1\gamma_\nu(c_V^e-c_A^e\gamma^5)\not{p}_2\right\}.\end{aligned} \tag{2.138}$$

Maintenant, la première trace est

$$(c_V^2+c_A^2)\left[p_3^\mu p_4^\nu+p_3^\nu p_4^\mu-g^{\mu\nu}(p_3\cdot p_4)\right]-2ic_V c_A\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}p_{3_\lambda}p_{4_\sigma} \tag{2.139}$$

et il y a l'expression correspondante pour la deuxième trace, donc on obtient

$$\begin{aligned}\left\langle|\mathcal{M}|^2\right\rangle &= \frac{1}{2}\left[\frac{g_Z^2}{q^2-(M_Z c)^2}\right]^2\left\{\left[\left(c_V^f\right)^2+\left(c_A^f\right)^2\right]\left[(c_V^e)^2+(c_A^e)^2\right]\right. \\ &\quad\times\left[(p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_4)+(p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3)\right] \\ &\quad\left.\times 4c_V^f c_A^f c_v^e c_A^e\left[(p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_4)-(p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3)\right]\right\}\end{aligned} \tag{2.140}$$

Dans le référentiel du centre de masse, l'expression précédente se réduit à

$$\begin{aligned}\left\langle|\mathcal{M}|^2\right\rangle &= \left[\frac{g_Z^2E^2}{(2E)^2-(M_Z c^2)^2}\right]^2\left\{\left[\left(c_V^f\right)^2+\left(c_A^f\right)^2\right]\left[(c_V^e)^2+(c_A^e)^2\right](1+\cos^2\theta)\right. \\ &\quad\left.-8c_V^f c_A^f c_v^e c_A^e\cos\theta\right\}\end{aligned} \tag{2.141}$$

où E est l'énergie de chaque particule et θ est l'angle de diffusion. La section efficace de diffusion différentielle est donc

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left(\frac{\hbar c g_z^2E}{16\pi\left[(2E)^2-(M_z c^2)^2\right]}\right)\left\{\left[\left(c_V^f\right)^2+\left(c_A^f\right)^2\right]\left[(c_V^e)^2+(c_A^e)^2\right](1+\cos^2\theta)\right. \\ &\quad\left.-8c_V^f c_A^f c_v^e c_A^e\cos\theta\right\}\end{aligned} \tag{2.142}$$

et la section efficace totale est

$$\sigma=\frac{1}{3\pi}\left(\frac{\hbar c g_z^2E}{4\left[(2E)^2-(M_z c^2)^2\right]}\right)^2\left[\left(c_V^f\right)^2+\left(c_A^f\right)^2\right]\left[(c_V^e)^2+(c_A^e)^2\right]$$

Chapitre 3

Evaluation des amplitudes et des sections efficaces par FeynCalc

Avec la précision croissante des données expérimentales, des calculs à une boucle sont depuis longtemps indispensables. Faire de tels calculs à la main est pénible, sujet aux erreurs et dans le cas des ordres supérieur de la théorie des perturbations il sont tout simplement impossible. Donc pour certains temps déjà, des logiciels ont été développés pour automatiser ces calculs [24]. Mais il reste un obstacle majeur, ces logiciels ne traitent qu'une partie du problème et il reste encore beaucoup à faire pour les faire fonctionner tout l'ensemble. Nous allons présenter dans ce chapitre, de façon détaillée, les logiciels FeynArts et FeynCalc [24, 25, 26] utilisé, respectivement, pour générer les diagrammes de Feynman et pour le calcul des intégrale de Feynman associés sous Mathematica. Nous présentant les commandes de base ainsi que quelques applications.

3.1 Applications pour l'électrodynamique quantique

3.1.1 Le processus $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$

Utilisation de FeynArts pour générer les diagrammes

In[1]=

```
diags = InsertFields[ CreateTopologies[0, 2 -> 2],
{F[2, {1}], V[1]} -> {F[2, {1}], V[1]},
InsertionLevel -> {Classes},
Restrictions -> QEDOnly];
Paint[diags, ColumnsXRows -> {2, 1},
Numbering -> Simple,
SheetHeader -> None,
```

ImageSize -> {512, 256}];

Out[1]=



Evaluation de l'amplitude du processus

In[2]=

amp[0] = FCFAConvert[CreateFeynAmp[diags],

IncomingMomenta -> {p, k},

OutgoingMomenta -> {p1, k1},

UndoChiralSplittings -> True,

ChangeDimension -> 4,

TransversePolarizationVectors -> {k, k1},

List -> False, SMP -> True, Contract -> True]

Out[2]=

$$\frac{-e^2\left(\varphi(\overline{p1},m_e)\right).(\overline{\gamma}.\overline{\epsilon}(k)).\left(\overline{\gamma}.\left(\overline{p1}-\overline{k}\right)\right)+m_e\right).(\overline{\gamma}.\overline{\epsilon}^*(k)).(\varphi(\overline{p},m_e))}{(\overline{k}-\overline{p1})^2-m_e^2} -$$
$$\frac{e^2\left(\varphi(\overline{p1},m_e)\right).(\overline{\gamma}.\overline{\epsilon}^*(k1)).\left(\left(\overline{\gamma}.(\overline{k1}+\overline{p1}\right)+m_e\right).(\overline{\gamma}.\overline{\epsilon}(k)).(\varphi(\overline{p},m_e))}{(-\overline{k1}-\overline{p1})^2-m_e^2}$$

Introduction des variables Mandelstam

In[3]=

FCClearScalarProducts[];

SetMandelstam[s, t, u, p, k, -p1, -k1,

SMP["m_e"], 0, SMP["m_e"], 0];

Mise au carré de l'amplitude

In[4]=

ampSquared[0] = Simplify[(TrickMandelstam[#1, {s, t, u, 2*SMP["m_e"]^2}]

&)[DiracSimplify[(FermionSpinSum[#1,

ExtraFactor -> 1/2^2] &)[(DoPolarizationSums[#1, k1, 0]

&)[(DoPolarizationSums[#1, k, 0] &)

[FeynAmpDenominatorExplicit[amp[0]

*ComplexConjugate[amp[0]]]]]]]]

Out[4]=

$$\frac{2e^4(-m_e^4(3s^2+14su+3u^2)+m_e^2(s^3+7s^2u+7su^2+u^3)+6m_e^8-su(s^2+u^2))}{(s-m_e^2)^2(u-m_e^2)^2}$$

3.1.2 Le processus $\mu^+ + \mu^- \rightarrow e^+ + e^-$

Utilisation de FeynArts pour générer les diagrammes

In[1]=

diags = InsertFields[CreateTopologies[0, 2 -> 2],

{F[2, {2}], -F[2, {2}]} -> {F[2, {1}], -F[2, {1}]},

InsertionLevel -> {Classes},

Restrictions -> QEDOnly];

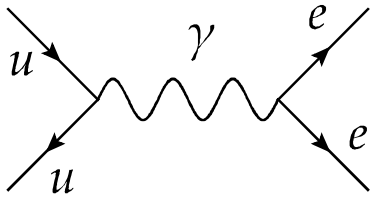
Paint[diags, ColumnsXRows -> {1, 1},

Numbering -> Simple,

SheetHeader -> None,

ImageSize -> {256, 256}];

Out[1]=



Evaluation de l'amplitude du processus

In[2]=

amp[0] = FCFAConvert[CreateFeynAmp[diags],

IncomingMomenta -> {p1, p2},

OutgoingMomenta -> {q1, q2},

UndoChiralSplittings -> True,

ChangeDimension -> 4,

List -> False,

SMP -> True,

Contract -> True]

Out[2]=

$$\frac{-e\left(\varphi(\overline{q}1, m_e).\overline{\gamma}^{\mu}.\varphi(-\overline{q2}, me)\right)\left(\varphi(-\overline{p2}, m_{\mu}).\overline{\gamma}_{\mu}.\varphi(p1, m_{\mu})\right)}{(\overline{q1}+\overline{q2})^2}$$

Introduction des variables Mandelstam

In[3]=

FCClearScalarProducts[];

SetMandelstam[s, t, u, p1, p2, -q1, -q2,

SMP["m_e"], SMP["m_e"], SMP["m_mu"], SMP["m_mu"]];

Mise au carré de l'amplitude

In[4]=

ampSquared[0] = Simplify[DiracSimplify[(FermionSpinSum[#1, ExtraFactor -> 1/2^2]

&)[FeynAmpDenominatorExplicit[amp[0]*ComplexConjugate[amp[0]]]]]]

Out[4]=

$$\frac{2e^4(2m_e^2(6m_{\mu}^2+s-t-u)-2m_e^4-2m_{\mu}^4+2m_{\mu}^2(s-t-u)+t^2+u^2)}{s^2}$$

In[5]=

ampSquaredPolarized[0] = Simplify[DiracSimplify[FermionSpinSum

[FeynAmpDenominatorExplicit[ampPolarized[0]*

ComplexConjugate[ampPolarized[0]]]]]

Out[5]=

$$\frac{4e^4(m_e^2+m_{\mu}^2-u)^2}{s^2}$$

In[6]=

ampSquaredMassless1[0] = (#1 /. {SMP["m_e"] -> 0} &)[ampSquared[0]]

Out[6]=

$$\frac{2e^4(-2m_\mu^4 + 2m_\mu^2(s-t-u) + t^2 + u^2}{s^2}$$

In[7]=

```
ampSquaredMassless2[0] = Simplify[(#1 /. {SMP["m_e"] -> 0,
SMP["m_mu"] -> 0} &)[ ampSquared[0]]]
```

Out[7]=

$$\frac{2e^4(t^2+u^2)}{s^2}$$

In[8]=

```
ampSquaredPolarizedMassless[0] = Simplify[(#1 /. {SMP["m_e"] -> 0,
SMP["m_mu"] -> 0} &)[ampSquaredPolarized[0]]]
```

Out[8]=

$$\frac{4e^4u^2}{s^2}$$

Calcul de la section efficac différentielle

In[9]=

```
prefac1 = 1/(64*Pi^2*s);
integral1 =  Factor[ampSquaredMassless2[0] /. {t -> (-s/2)*(1 - Cos[θ]),
u -> (-s/2)*(1 + Cos[θ]), SMP["e"]^4 -> (4*Pi*SMP["alpha_fs"])^2}]
```

Out[9]=

$$16\pi^2\alpha^2(\cos^2(\theta)+1)$$

3.2 Applications pour la chromodynamique quantique

3.2.1 Le processus $e^+ + e^- \rightarrow q + \overline{q}$

Utilisation de FeynArts pour générer les diagrammes

In[1]=

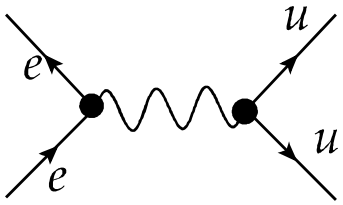
```
MakeBoxes[l1, TraditionalForm] = "\!\(\*SubscriptBox[\(l\), \(1\)]\)";
MakeBoxes[l2, TraditionalForm] = "\!\(\*SubscriptBox[\(l\), \(2\)]\)";
```

```
MakeBoxes[q1, TraditionalForm] = "\!\(\*SubscriptBox[\(q\), \(1\)]\)";
MakeBoxes[q2, TraditionalForm] = "\!\(\*SubscriptBox[\(q\), \(2\)]\)";
```

Out[2]=

```
diags = InsertFields[ CreateTopologies[0, 2 -> 2],
{F[2, {1}], -F[2, {1}]} -> {F[3, {1}], -F[3, {1}]},
InsertionLevel -> {Classes},
Model -> "SMQCD",
ExcludeParticles -> {S[_], V[2]}];
Paint[diags, ColumnsXRows -> {2, 1},
Numbering -> Simple,
SheetHeader -> None,
ImageSize -> {512, 256}];
```

Out[2]=



Evaluation de l'amplitude du processus

In[3]=

```
amp[0] = FCFAConvert[CreateFeynAmp[diags],
IncomingMomenta -> {l1, l2},
OutgoingMomenta -> {q1, q2},
UndoChiralSplittings -> True,
ChangeDimension -> 4,
List -> False,
SMP-> True,
Contract -> True,
DropSumOver -> True,
Prefactor -> (3/2)*SMP["e_Q"],
FinalSubstitutions -> {SMP["m_u"] -> SMP["m_q"]}
```

Out[3]=

$$\frac{e^2 e_Q \delta_{\mathrm{col}\,3\,\mathrm{col}\,4}(\varphi(-\overline{l_2}, m_e)).\overline{\gamma}^{Lor2}.(\varphi(\overline{l_1}, m_e))(\varphi(\overline{q_1}, m_q)).\overline{\gamma}^{Lor2}.\varphi(-\overline{q_2}, m_q)}{(\overline{q_1} + \overline{q_2})^2}$$

Introduction des variables Mandelstam

In[4]=

```
FCClearScalarProducts[];
SetMandelstam[s, t, u, l1, l2, -q1, -q2, SMP["m_e"]^2,
SMP["m_e"]^2, SMP["m_q"]^2, SMP["m_q"]^2];
```

Mise au carré de l'amplitude

In[5]=

```
ampSquared[0] =
Simplify[(TrickMandelstam[#1, {s, t, u, 2*SMP["m_q"]^2 + 2*SMP["m_e"]^2}]
&)[ DiracSimplify[(FermionSpinSum[#1, ExtraFactor -> 1/2^2]
&)[(SUNSimplify[#1,Explicit -> True, SUNNToCACF -> False]
&)[ FeynAmpDenominatorExplicit[amp[0]
*ComplexConjugate[amp[0]]]]]]]]
```

Out[5]=

$$\frac{1}{s^2}2e^2Ne_Q^2(-2m_e^4(-m_q^4+2m_q^2+t+u-2)-2m_e^2(2m_q^4-8m_q^2+t+u)+$$
$$+2m_e^8-2m_q^4(t+u-2)-2m_q^2(t+u)+2m_q^8+t^2+u^2)$$

In[6]=

```
ampSquaredMassless[ 0] = (TrickMandelstam[#1, {s, t, u, 0}]
&)[(#1 /.{SMP["m_q" | "m_e"] -> 0} &)[ampSquared[0]]]
```

Out[6]=

$$\frac{2e^4Ne_Q^2(t^2+u^2)}{s^2}$$

In[7]=

```
ampSquaredMasslessSUNN3[0] = ampSquaredMassless[0] /. SUNN -> 3
```

Out[7]=

$$\frac{6e^4e_Q^2(t^2+u^2)}{s^2}$$

Calcul de la section efficac totale

In[8]=

```
2*Pi*Integrate[diffXSection1*Sin[\[Theta]], {\[Theta], 0, Pi}]
crossSectionTotal = 2*Pi*Integrate[diffXSection2, {t, -s, 0}]
```

out[8]=

$$\frac{4\pi\alpha^2 e_Q^2}{s}$$

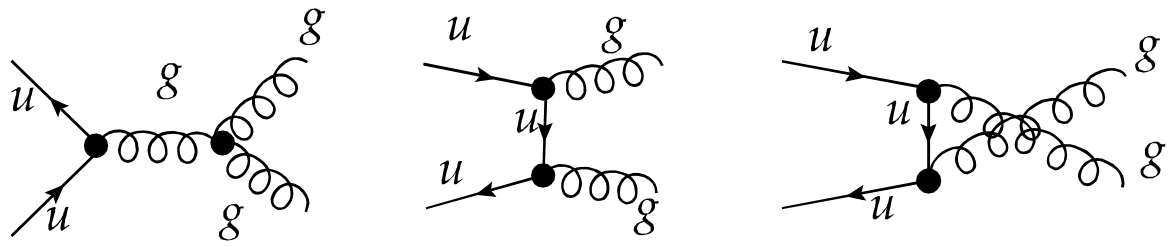
3.2.2 Le processus $q + \overline{q} \rightarrow g + g$

Utilisation de FeynArts pour générer les diagrammes

In[1]=

```
diags = InsertFields[ CreateTopologies[0, 2 -> 2],
{F[3, {1}], -F[3, {1}]} -> {V[5], V[5]},
InsertionLevel -> {Classes},
Model -> "SMQCD"];
Paint[diags, ColumnsXRows -> {2, 1},
Numbering -> Simple,
SheetHeader -> None,
ImageSize -> {512, 256}];
```

Out[1]=



Evaluation de l'amplitude du processus

In[2]=

```
amp[0] = FCFAConvert[CreateFeynAmp[diags],
IncomingMomenta -> {p1, p2},
OutgoingMomenta -> {k1, k2},
UndoChiralSplittings -> True,
ChangeDimension -> 4,
TransversePolarizationVectors -> {k1, k2},
```

List -> False,

SMP -> True,

Contract -> True,

DropSumOver -> True]

Out[2]=

$$\frac{g_s^2 T^{Gh_1 3}_{Col5Col1} T^{Gh_1 4}_{Col2Col5} (\varphi(-\overline{p_2}, m_\mu)).(\overline{\gamma}.\overline{\epsilon}^*(\overline{k_2})).(\overline{\gamma}.(\overline{k_2} - \overline{p_2}) + m_\mu).(\overline{\gamma}.\overline{\epsilon}^*(k_1))(\varphi(\overline{p}_1, m_\mu))}{(\overline{p_2} - \overline{k_2})^2 - m_\mu} -$$

$$\frac{g_s^2 T^{Gh_1 4}_{Col5Col1} T^{Gh_1 3}_{Col2Col5} (\varphi(-\overline{p_2}, m_\mu)).(\overline{\gamma}.\overline{\epsilon}^*(k_1)).(\overline{\gamma}.(\overline{k_1} - \overline{p_2}) + m_\mu).(\overline{\gamma}.\overline{\epsilon}^*(k_2))(\varphi(\overline{p}_1, m_\mu))}{(\overline{p_2} - \overline{k_1})^2 - m_\mu} -$$

$$\frac{2 i g_s^2 T^{Gh_1 5}_{Col2Col1} f^{Gh_1 3 Gh_1 4 Gh_1 5}.(\overline{k_1}.\overline{\epsilon}^*(k_2)).(\varphi(-\overline{p_2}, m_\mu)).(\overline{\gamma}.\overline{\epsilon}^*(k_1))(\varphi(\overline{p}_1, m_\mu))}{(\overline{k_1} + \overline{k_2})^2} +$$

$$\frac{2 i g_s^2 T^{Gh_1 5}_{Col2Col1} f^{Gh_1 3 Gh_1 4 Gh_1 5}.(\overline{k_2}.\overline{\epsilon}^*(k_1)).(\varphi(-\overline{p_2}, m_\mu)).(\overline{\gamma}.\overline{\epsilon}^*(k_2))(\varphi(\overline{p}_1, m_\mu))}{(\overline{k_1} + \overline{k_2})^2} +$$

$$\frac{2 i g_s^2 T^{Gh_1 5}_{Col2Col1} f^{Gh_1 3 Gh_1 4 Gh_1 5}.(\overline{\epsilon}^*(k_1).\overline{\epsilon}^*(k_2)).(\varphi(-\overline{p_2}, m_\mu)).(\overline{\gamma}.(\overline{k_1} - \overline{k_2}))(\varphi(\overline{p}_1, m_\mu))}{(\overline{k_1} + \overline{k_2})^2}$$

Introduction des variables Mandelstam

In[3]=

FCClearScalarProducts[ ];

SetMandelstam[s, t, u, p1, p2, -k1, -k2,

SMP["m_u"], SMP["m_u"], 0, 0];

Mise au carré de l'amplitude

In[4]=

ampSquared[0] = Simplify[(TrickMandelstam[#1, {s, t, u, 2*SMP["m_u"]^2}]

&)[(DoPolarizationSums[#1, k2, k1] &)[(DoPolarizationSums[#1, k1, k2]

&)[DiracSimplify[(FermionSpinSum[#1, ExtraFactor -> 1/2^2]

&)[(SUNSimplify[#1, Explicit -> True,SUNNToCACF -> False]

&)[FeynAmpDenominatorExplicit[(1/SUNN^2)*(amp[0]

*ComplexConjugate[amp[0]])]]]]]]]

Out[4]=

$$\frac{(N^2-1)g_s^4}{2N^3s^2(u-m_\mu^2)^2(t-m_\mu^2)} \times$$
$$[(m_\mu^4(3t^2+14tu+3u^2)-m_\mu^2(t^3+7t^2u+u^3)-6m_\mu^8+tu(t^2+u^2))$$
$$\times(-2N^2m_\mu^2(t+u)+2N^2m_\mu^4+N^2(t^2+u^2)-s^2))]$$

In[5]=

```
ampSquaredMassless[ 0] = (TrickMandelstam[#1, {s, t, u, 0}]
&)[(#1 /. {SMP["m_u"] -> 0} &)[ampSquared[0]]]
```

Out[5]=

$$\frac{(1-N^2)g_s^4(t^2+u^2)(-N^2t^2-N^2u^2+s^2)}{2N^3s^2tu}$$

In[6]=

```
ampSquaredMasslessSUNN3[0] = ampSquaredMassless[0] /. SUNN -> 3
```

Out[6]=

$$-\frac{4g_s^4(t^2+u^2)(s^2-9t^2-9u^{2)}}{27s^2tu}$$

3.3 Applications pour l'interaction faible

3.3.1 Le processus $e+\nu_\mu \to \nu_e+\mu$

Pour éviter de traiter les bosons de Goldstone, nous faisons le calcul dans la jauge unitaire

In[1]=

```
MakeBoxes[q1, TraditionalForm] = "\!\(\*SubscriptBox[\(q\), \(1\)]\)";
MakeBoxes[q2, TraditionalForm] = "\!\(\*SubscriptBox[\(q\), \(2\)]\)";
```

In[2]=

```
InitializeModel[{SM, UnitarySM},
GenericModel -> {Lorentz, UnitaryLorentz}];
```

Utilisation de FeynArts pour générer les diagrammes

In[3]=

```
diags = InsertFields[ CreateTopologies[0, 2 -> 2], {F[2, {1}],
F[1, {2}]} -> {F[1, {1}], F[2, {2}]},
InsertionLevel -> {Classes},
```

Model -> {SM, UnitarySM},

GenericModel -> {Lorentz, UnitaryLorentz}];

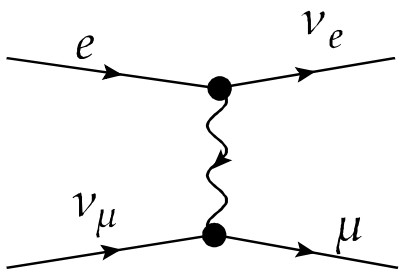
Paint[diags, ColumnsXRows -> {2, 1},

Numbering -> Simple,

SheetHeader -> None,

ImageSize -> {512, 256}];

Out[3]=



Evaluation de l'amplitude du processus

In[4]=

amp[0] =

FCFAConvert[CreateFeynAmp[diags,

GaugeRules -> {FAGaugeXi[W | Z] -> Infinity}],

IncomingMomenta -> {p, q1},

OutgoingMomenta -> {q2, k},

ChangeDimension -> 4,

List -> False,

SMP -> True,

Contract -> True,

DropSumOver -> True,

FinalSubstitutions -> {SMP["e"] ->

Sqrt[(8/Sqrt[2])*SMP["G_F"]*SMP["m_W"]^2*SMP["sin_W"]^2]}]

Out[4]=

$$\frac{-2\sqrt{2}G_F m_W^2(\varphi(\overline{q}_2)).\overline{\gamma}^{Lor1}.\overline{\gamma}^7.(\varphi(\overline{p},m_e))(\varphi(\overline{k},m_\mu)).\overline{\gamma}^{Lor1}.\overline{\gamma}^7.(\varphi(\overline{q}_1))}{(\overline{k}-\overline{q}_1)^2-m_W^2} -$$
$$\frac{2\sqrt{2}G_F(\varphi(\overline{k},m_\mu)).(\overline{\gamma}.(\overline{k}-\overline{q_1})).\overline{\gamma}^7.(\varphi(\overline{q_1}))(\varphi(\overline{q_2})).(\overline{\gamma}(\overline{q_1}-\overline{k})).\overline{\gamma}^7.(\varphi(\overline{p},m_e))}{(\overline{k}-\overline{q}_1)^2-m_W^2}$$

Introduction des variables Mandelstam

In[4]=

```
FCClearScalarProducts[];
SetMandelstam[s, t, u, p, q1, -q2, -k, SMP["m_e"], 0, 0, SMP["m_mu"]];
```

Mise au carré de l'amplitude

In[5]=

Il n'y a pas de moyenne de polarisation pour les neutrinos ici, car les neutrinos droitiers n'interagissent pas

```
ampSquared[0] = Factor[DiracSimplify[(FermionSpinSum[#1, ExtraFactor -> 1/2]
&)[amp[0]*ComplexConjugate[amp[0]]]]]
```

Out[5]=

$$4G_F^2(-2m_e^2m_\mu^6 + 2sm_e^2m_\mu^4 - 2stm_e^2m_\mu^2 2sm_e^2m_\mu^2m_W^2 - 4sm_e^2m_W^4 + t^2m_e^2m_\mu^2 + tm_e^2m_\mu^4 - 2tum_e^2m_\mu^2 - 2tm_e^2m_\mu^2m_W^2 + 2um_e^2m_\mu^4 + 6um_e^2m_\mu^2m_W^2 + 4m_e^2m_\mu^2m_W^4 - m_\mu^8 - s^2m_\mu^4 + s^2tm_\mu^2 - 2s^2m_\mu^2m_W^2 + 4s^2m_W^4 + 2sm_\mu^6 - 2stm_\mu^4 + 2stum_\mu^2 - 2sum_\mu^4 - 4sum_\mu^2m_W^2 + 2sm_\mu^4m_W^2 - 4sm_\mu^2m_W^4 - t^3m_\mu^2 + t^2m_\mu^4 + 2t^2m_\mu^2m_W^2 + tm_\mu^6 + tu^2m_\mu^2 - 2tum_\mu^4 - 2tm_\mu^4m_W^2 - u^2m_\mu^4 - 2u^2m_\mu^2m_W^2 + 2um_\mu^6 + 2um_\mu^4m_W^2)\left(\frac{1}{\left(\overline{k}-\overline{q_1}\right)^2 - m_W^2}\right)^2$$

Dans ce qui suit, nous négligeons l'impulsion du boson W par rapport à sa masse. C'est une très bonne approximation aux basses énergies, dans ce cas $(k-q_1)^2 <= m_\mu^2 << m_W^2$.

In[6]=

```
ampSquared[1] =
Normal[(Series[#1, {SMP["m_W"], Infinity, 0}] &)[
FeynAmpDenominatorExplicit[(#1 /. {k - q1 -> 0} &)[
FCE[ampSquared[0]]]]]]
```

Out[6]=

$$16m_e^2G_F^2m_\mu^2 - 16sm_e^2G_F^2 - 16sG_F^2m_\mu^2 + 16s^2G_F^2$$

Calcul de la section efficace totale

In[7]=

```
prefac = 4*(Pi/(64*Pi^2*s))*(Sqrt[(s - SMP["m_mu"]^2)^2]/
```

Sqrt[(s - SMP["m_e"]^2)^2])

Out[7]=

$$\frac{\sqrt{(s-m_\mu^2)^2}}{16\pi s\sqrt{(s-m_e^2)^2}}$$

In[8]=

crossSectionTotal = PowerExpand[prefac*ampSquared[1]]

Out[8]=

$$\frac{(s-m_\mu^2)(16m_e^2G_F^2m_\mu^2-16sm_e^2G_F^2-16G_F^2m_\mu^2+16s^2G_F^2)}{16\pi s(s-m_e^2)}$$

3.3.2 Le processus $\pi^-(d+\overline{u}) \longrightarrow e^- + \overline{\nu}_e$

Pour éviter de traiter les bosons de Goldstone, nous faisons le calcul dans la jauge unitaire. nous activant aussi le mixage CKM.

In[1]=

description = "Anel El -> Qubar Qd, EW, total cross section, tree";

If[$FrontEnd === Null, $FeynCalcStartupMessages = False;

Print[description];];

If[$Notebooks === False, $FeynCalcStartupMessages = False];

$LoadAddOns = {"FeynArts"};

Get["FeynCalc`"]

$FAVerbose = 0;

$CKM = True;

InitializeModel[{SM, UnitarySM}, GenericModel -> {Lorentz, UnitaryLorentz}];

Utilisation de FeynArts pour générer les diagrammes

In[2]=

diags = InsertFields[CreateTopologies[0, 2 -> 2],

{-F[3, {1}], F[4, {1}]} -> {F[2, {1}], -F[1, {1}]},

InsertionLevel -> {Classes},

Model -> {SM, UnitarySM},

GenericModel -> {Lorentz, UnitaryLorentz}];

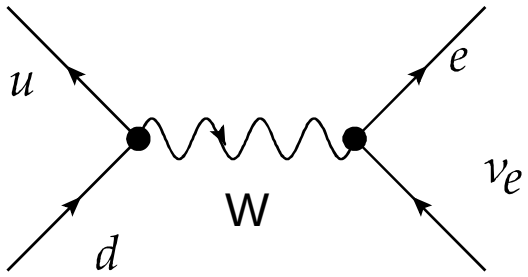
Paint[diags, ColumnsXRows -> {2, 1},

Numbering -> Simple,

SheetHeader -> None,

ImageSize -> {512, 256}];

Out[2]=



(3.1)

Evaluation de l'amplitude du processus

In[3]=

```
amp[0] =
FCFAConvert[ CreateFeynAmp[diags,
GaugeRules -> {FAGaugeXi[W | Z] -> Infinity}],
DropSumOver -> True,
IncomingMomenta -> {q, pe},
OutgoingMomenta -> {l1, l2},
ChangeDimension -> 4,
List -> False, SMP -> True,
Contract -> True,
FinalSubstitutions ->
{SMP["e"] -> Sqrt[(8/Sqrt[2])*SMP["G_F"]
*SMP["m_W"]^2*SMP["sin_W"]^2]}]
```

Out[3]=

$$\frac{2\sqrt{2}G_F m_W^2 V_{ud}\delta_{Col1Col2}(\varphi(\overline{l1},m_e)).\overline{\gamma}^{Lor1}.\overline{\gamma}^7.(\varphi(-\overline{l2}))(\varphi(-\overline{q},m_u)).\overline{\gamma}^{Lor1}.\overline{\gamma}^7.(\varphi(\overline{p_e},m_d))}{(\overline{l1}+\overline{l2})^2-m_W^2}+$$
$$\frac{2\sqrt{2}G_F V_{ud}\delta_{Col1Col2}(\varphi(\overline{l1},m_e)).(\overline{\gamma}.(\overline{l1}+\overline{l2})).\overline{\gamma}^7.(\varphi(-\overline{l2})).(\varphi(-\overline{q},m_u)).(\overline{\gamma}.(-\overline{l1}-\overline{l2})).\overline{\gamma}^7.(\varphi(\overline{p_e},m_d))}{(\overline{l1}+\overline{l2})^2-m_W^2}$$

Introduction des variables Mandelstam

In[4]=

```
FCClearScalarProducts[];
SetMandelstam[s, t, u, q, pe, -l1, -l2, 0, SMP["m_e"], SMP["m_u"],
SMP["m_d"]];
```

Mise au carré de l'amplitude

Il n'y a pas une moyenne sur la polarisation pour les neutrinos, car les neutrinos droitiers n'interagissent pas

In[5]=

ampSquared[0] =

Factor[DiracSimplify[(FermionSpinSum[#1, ExtraFactor -> 1/2]

&)[amp[0]*ComplexConjugate[amp[0]]]]]

Out[5]

$$-4\left(\frac{1}{(\overline{l1}+\overline{l2})^2+m_W^2}\right)^2 G_F^2 \times$$
$$(m_d^8+2m_e^2m_d^6-sm_d^6-2tm_d^6-2um_d^6-2m_u^4m_d^4-s^2m_d^4+t^2m_d^4+u^2m_d^4-sm_e^2m_d^4-2tm_e^2m_d^4-$$
$$2um_e^2m_d^4-2m_e^2m_u^2m_d^4-3sm_u^2m_d^4+2tm_u^2m_d^4+2um_u^2m_d^4+8m_u^2m_W^2m_d^4+2sm_W^2m_d^4-2tm_W^2m_d^4-$$
$$2um_W^2m_d^4+2stm_d^4+2sum_d^4+2tum_d^4-2m_e^2m_u^4m_d^2-3sm_u^4m_d^2+2tm_u^4m_d^2+2um_u^4m_d^2-4m_u^2m_W^4m_d^2+$$
$$4tm_W^4m_d^2+s^3m_d^2-st^2m_d^2-su^2m_d^2-s^2m_e^2m_d^2+2stm_e^2m_d^2+2sum_e^2m_d^2+2s^2m_u^2m_d^2-2t^2m_u^2m_d^2-$$
$$2u^2m_u^2m_d^2-6sm_e^2m_u^2m_d^2+4tm_e^2m_u^2m_d^2+4um_e^2m_u^2m_d^2+4stm_u^2m_d^2+4sum_u^2m_d^2-4tum_u^2m_d^2+$$
$$8m_u^4m_W^2m_d^2-2s^2m_W^2m_d^2+2t^2m_W^2m_d^2+2u^2m_W^2m_d^2+2sm_e^2m_W^2m_d^2-6tm_e^2m_W^2m_d^2-2um_e^2m_W^2m_d^2+$$
$$16m_e^2m_u^2m_W^2m_d^2-4sm_u^2m_W^2m_d^2-12tm_u^2m_W^2m_d^2-12um_u^2m_W^2m_d^2+4tum_W^2m_d^2-2stum_d^2+m_u^8+$$
$$2m_e^2m_u^6-sm_u^6-2tm_u^6-2um_u^6-s^2m_u^4+t^2m_u^4+u^2m_u^4-sm_e^2m_u^4-2tm_e^2m_u^4-2um_e^2m_u^4+2stm_u^4+$$
$$2sum_u^4+2tum_u^4-4t^2m_W^4+4tm_e^2m_W^4-4m_e^2m_u^2m_W^4+4tm_u^2m_W^4+s^3m_u^2-st^2m_u^2-su^2m_u^2-$$
$$s^2m_e^2m_u^2+2stm_e^2m_u^2+2sum_e^2m_u^2-2stum_u^2+2sm_u^4m_W^2-2tm_u^4m_W^2-2um_u^4m_W^2-2s^2m_u^2m_W^2+$$
$$2t^2m_u^2m_W^2+2u^2m_u^2m_W^2+2sm_e^2m_u^2m_W^2-2tm_e^2m_u^2m_W^2-6um_e^2m_u^2m_W^2+4tum_u^2m_W^2)V_{ud}^*V_{ud}\delta_{Col1Col2}^2$$

Dans ce qui suit, nous négligeons l'impulsion du boson W par rapport à sa masse. C'est une très bonne approximation aux basses énergies, dans ce cas $(pm-q2)\hat{}2 <= m_mu\hat{}2 << m_W\hat{}2$

In[6]=

ampSquared[1] =

Normal[(Series[#1, {SMP["m_W"], Infinity, 0}]

&)[FeynAmpDenominatorExplicit[(#1 /. {l1 + l2 -> 0}

&)[FCE[ampSquared[0]]]]]

Out[6]=

$$16G_F^2V_{ud}^*V_{ud}\delta_{Col1Col2}^2(-tm_d^2+m_d^2m_u^2-tm_e^2+m_e^2m_u^2+-tm_u^2+t^2)$$

Calcul de la section efficace totale

Nous devons effectuer l'intégration angulaire, spécifions donc les valeurs des composantes temporelles et spatiales des quadrivecteurs

In[7]=

```
TC[pe] = (s + SMP["m_e"]^2)/(2*Sqrt[s]);
TC[l1] = (s + (SMP["m_u"]^2 - SMP["m_d"]^2))/(2*Sqrt[s]);
CSP[pe] = (s - SMP["m_e"]^2)^2/(4*s);
CSP[l1] =((s - SMP["m_u"]^2 - SMP["m_d"]^2)^2 - 4
*SMP["m_u"]^2*SMP["m_d"]^2)/(4*s);
```

In[8]=

```
prefac = 2*(Pi/(64*Pi^2*s))*(Sqrt[CSP[l1]]/Sqrt[CSP[pe]]);
```

In[9]=

```
integral =Simplify[SUNSimplify[FRH[(Integrate[#1, {x, -1, 1}]
&)[Collect2[ ampSquared[1] /.u -> SMP["m_e"]^2 + SMP["m_u"]^2 -2
*(TC[l1]*TC[pe] - Sqrt[CSP[l1]]
*Sqrt[CSP[pe]]*x), x,IsolateNames -> KK]]]]
```

Out[9]=

$$32 C_A G_F^2 V_{ud}^* V_{ud} (t - m_u^2)(-m_d^2 - m_e^2 + t)$$

La section **efficace** transversale totale est alors

In[10]=

```
crossSectionTotal = Factor2[PowerExpand[integral*prefac]]
```

Out[10]=

$$\frac{C_A G_F^2 V_{ud}^* V_{ud} (t - m_u^2)(-m_d^2 - m_e^2 + t)\sqrt{(-2m_d m_u - m_d^2 - m_u^2 + s)(2m_d m_u - m_d^2 - m_u^2 + s)}}{\pi s (s - m_e^2)}$$

Conclusion

Nous avons revue dans ce mémoire de Master les éléments de base du modèle standard de la physique des particules. Nous nous somme particulièrement intéressé à la formulation mathématique du lagrangien de la théorie et aux groupes de symétries associés. Nous avons expliqué et détaillé le calcul relatif à l'invariance du lagrangien par le groupe de jauge qui a comme conséquence de faire apparaître systématiquement les interactions fondamentales. La brisure spontanée de la symétrie à été étudiée, et on a pu voir comment les masses des particules sont générées par le mécanisme de Higgs.

Le lien entre l'aspect théorique et expérimental du modèle standard peut être mis en évidence à travers le calcul des sections efficaces des processus physique pour les comparer ensuit avec les données expérimentales. Le calcul des sections efficaces est une tache très difficile pour les processus à hautes énergies, et ce même avec un ordinateur. La difficulté de calcul augmente de façon exponentielle avec l'ordre du développement en théorie des perturbation et devient rapidement impossible à faire les calcul à la main au-delà du deuxième ordre, d'où l'importance de faire les calculs par ordinateur.

Nous avons développé les calculs des sections efficaces pour des processus relevant des trois interactions fondamentales : électromagnétique, nucléaire faible et nucléaire forte. Nous avons compléter le calcul analytique par des calculs assistés par ordinateur à l'aide des logiciels FeynArts, qui génère les diagrammes de Feynman associés au processus, et FeynCalc, qui calcul les amplitudes et les sections efficaces associés du processus.

Les calculs ont été réalisés pour des processus à l'ordre d'arbre (l'ordre zéro du développement perturbatif), nous avons espérer d'aller plus loin dans le calcul en considérant le premier ordre en boucle qui fait appel aux corrections radiatives et aux techniques de renormalisations, qui rendent les calculs de plus en plus difficiles à faire. Mais faute de temps nous n'avons pas pu réaliser cet objectif, nous espérons qu'il y aura dans le future une continuité et une suite pour faire ces calculs.

Algèbre de Dirac

Les matrices de Dirac vérifient la relation fondamentale d'une algèbre de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I_4 \tag{3.2}$$

où I_4 est la matrice identité 4×4, cette relation est souvent écrite $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ et $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ est le tenseur métrique sur l'espace de Minkowski

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \text{avec;}\ \ \mu, \nu &= 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Nous définissons

$$\begin{aligned} \gamma_5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \\ \gamma_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Ce qui conduit à $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$.

Les matrices de Dirac vérifient les identités suivantes

$$\begin{aligned} \gamma^\mu\gamma_\mu &= 4, \\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu &= -2\gamma^\nu, \\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu &= 4g^{\nu\rho}, \\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu &= -2\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma. \end{aligned} \tag{3.6}$$

ainsi que identités de trace suivantes

$$\begin{aligned} Tr\left[\gamma^5\right] &= Tr\left[\gamma^\mu\right] = Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\right] = 0 \\ Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\right] &= 4g^{\mu\nu}, \\ Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right] &= 4g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - 4g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + 4g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}, \\ Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5\right] &= -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Les projecteurs chirals (gauche et droite) sont écrits en fonction de la matrice γ_5

$$P_L = \frac{1-\gamma_5}{2} \quad , \quad P_R = \frac{1+\gamma_5}{2} \tag{3.8}$$

où $\gamma_5\ \psi_L\ = -\psi_L$ et $\gamma_5\psi_R\ = \psi_R$.

Un spineur de Dirac dans la représentation $\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)$ est écrit sous la forme

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Les relations de fermetures pour les spineurs de bases sont

$$\sum_{s=1}^{2} u_s(p)\overline{u}_s(p) = \not{k} + m \tag{3.10}$$

et

$$\sum_{s=1}^{2} v_s(p)\overline{v}_s(p) = \not{k} - m \tag{3.11}$$

aussi

$$\overline{u}_\sigma\ (p)\gamma^\mu u_{\sigma'}(p) = 2\delta_{\sigma\sigma'}p^\mu \tag{3.12}$$

Chapitre 4

Diffusion de hadrons et de leptons

L'expression général de l'amplitude est

$$\mathcal{M}(lh \to l^{'}X) = \left\langle l^{'} \mid J_{\mu} \mid l \right\rangle g_{lV} \frac{-\eta^{\mu\nu}}{q^2 - M_V^2} g_{hV} \left\langle X \mid J_{\nu} \mid h \right\rangle \tag{4.1}$$

J_{μ} et J_{ν} courants leptoniques et hadroniques et V bosons vecteurs ($\gamma, w^{\pm}$ et z). La section efficace de diffusion des hadrons lepton

$$d\sigma^{lh} = \frac{1}{4l.p} \frac{(g_{lv} g_{hv})^2}{(Q^2 + M_v^2)^2} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} (4\pi) \frac{dl^{'}}{2E_{l^{'}}(2\pi)^3} \tag{4.2}$$

avec, $L_{\mu\nu}$tenseur leptonique et $H^{\mu\nu}$ tenseur hadronique

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left\langle l \mid J_{\mu}^{\dagger} \mid l^{'} \right\rangle \left\langle l^{'} \mid J \mid l \right\rangle \\ H^{\mu\nu} &= \frac{1}{2.4\pi} \sum_{X} \left\langle h \mid J^{\dagger\mu} \mid X \right\rangle \left\langle X \mid J^{\nu} \mid h \right\rangle (2\pi)^4 \delta^{(4)}(pX - k - p) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Formule d'espace et de section efficace

Nous considérons le processus général $p_a + p_b \rightarrow p_1 + ... + p_n$ dont la section efficace est donnée schématiquement par

$$d\sigma = \frac{1}{f} \times |\mathcal{M}|^2 \times d\Phi_n \tag{4.4}$$

où

$$\begin{aligned} f &= 4\sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - (m_a m_b)^2} \\ &= 4\left|p_a^*\right|\sqrt{s} = 4\left|p_a^{lab}\right| m_b \\ &\approx 2s \end{aligned} \tag{4.5}$$

Où $s = (p_a + p_b)^2$. Un élément différentiel de l'espace de phase à n corps invariant de Lorentz pour les particules sortantes est donné par

$$d\Phi(p_a + p_b p_1 + ... + p_n) = (2\pi)^4 \left(p_a + p_b - \sum_{i=1}^{n} p_i\right) \prod_{i=1}^{n} \{ \begin{array}{c} \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^3} \delta^{(+)}(p_i^2 - m_i^2) \\ \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}. \end{array} \tag{4.6}$$

Bibliographie

[1] W Cottingham and D Greenwood. *An introduction to the standard model of particle physics*. Cambridge university press, 2007.

[2] L Lee, C Ohm, A Soffer, and T Yu. Collider searches for long-lived particles beyond the standard model. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 106:210–255, 2019.

[3] T Ahmed. Qcd radiative corrections to higgs physics. *arXiv preprint arXiv:1704.01031*, 2017.

[4] J Woithe, G Wiener, and F Van der Veken. Let's have a coffee with the standard model of particle physics! *Physics Education*, 52(3):034001, 2017.

[5] A Chapelain. *Mesure de l'asymétrie de charge des paires de quarks top-antitop dans les états finals dileptoniques auprès des détecteurs D0 et ATLAS*. PhD thesis, Paris 7, 2014.

[6] S Brochet. *Recherche de physique au-delà du Modèle Standard dans le secteur du quark top et calibration de l'échelle en énergie des jets avec l'expérience CMS du LHC*. PhD thesis, Université Claude Bernard-Lyon I, 2014.

[7] L Gauthier. *Etudes dans le canal avec deux leptons de même signe de la physique du top au-dela du Modele Standard*. PhD thesis, Université Paris Sud- Paris XI, 2012.

[8] M Achour. *Etude le phénomène de la brisure spontanée de La symétrie (Le cas du modèle standard) dans l'espace non commutatif*. PhD thesis, Université Mohamed BOUDIAF de M'Sila, 2013.

[9] M Chaichian and N Nelipa. *Introduction to gauge field theories*. Springer Science & Business Media, 2012.

[10] H Fritzsch. *Lectures on the standard model of particle physics*. University of Cape Town, 2011.

[11] P. W. Higgs. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Physical Review Letters*, 13(16):508–509, oct 1964.

[12] F. Englert and R. Brout. Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons. *Physical Review Letters*, 13(9):321–323, aug 1964.

[13] P Langacker. Introduction to the standard model and electroweak physics. *arXiv preprint arXiv:0901.0241*, 2009.

[14] P Aurenche, J Guillet, and E Pilon. *QED et QCD en pratique*. Cours doctoral. Beyrout, Liban, 2016.

[15] M Maggiore. *A modern introduction to quantum field theory*, volume 12. Oxford university press, 2005.

[16] H Menigher. *Au-delà du modèle standard et applications*. PhD thesis, Mémoire de Magister, Université de Constantine, 2018.

[17] J Romao and J Silva. A resource for signs and feynman diagrams of the standard model. *International Journal of Modern Physics A*, 27(26):1230025, 2012.

[18] G Dissertori, I Knowles, and M Schmelling. *Quantum chromodynamics: high energy experiments and theory*, volume 115. Oxford University Press, 2003.

[19] J Derendinger. *Théorie quantique des champs*. PPUR presses polytechniques, 2001.

[20] V Radovanovic. *Problem book in quantum field theory*. Springer, 2006.

[21] M. E. Peskin and D. V. Schroeder. *Quantum field theory*. Perseus Books Publishing, 1995.

[22] R Cahn. Cross-section formulae for specific processes. *The European Physical Journal. C, Particles and Fields.*, 15(1-4):215–217, 2000.

[23] D Griffiths. *Introduction to elementary particles*. John Wiley & Sons, 2008.

[24] R Mertig, M Böhm, and A Denner. Feyn calc-computer-algebraic calculation of feynman amplitudes. *Computer Physics Communications*, 64(3):345–359, 1991.

[25] V Shtabovenko, R Mertig, and F Orellana. New developments in feyncalc 9.0. *Computer Physics Communications*, 207:432–444, 2016.

[26] V Shtabovenko, R Mertig, and F Orellana. Feyncalc 9.3: New features and improvements. *Computer Physics Communications*, 256:107478, 2020.