RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ YAHIA FARÈS DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

par
SEFRA FATMA

SUR LES SURFACES MINIMALES DANS $\mathbb{R}^3$

Soutenue publiquement devant le jury composé de

Examinateur	N. BENAICHOUCHE	*M.A.A*	Université de Médéa
Examinateur	N. MEKDACHE	*M.A.A*	Université de Médéa
Directeur de mémoire	M.KRIMI	*M.A.A*	Université de Médéa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2019-2020

Remerciements

Au nom de Dieu

le très miséricordieux le plus, miséricordieux, louange à

Allah, par lequel les bonnes actions sont faites ce qui nous a

conduit sur le chemin de la connaissance et des portes de la science,

sans lui rien de tout cela n'aurait peut être, je veux remercier mon superviseur ***Mr. KRIMI*** *à son encouragement, son aide et son suivit pour terminer ce travail.*

Aussi je remercie les membres de jury pour avoir accepté de discuter cette mémoire. Je remercie sincèrement tous mes professeurs qui m'ont accompagné au cours de mes études et aux mes Professeurs à d'université Dr. Yehia Farès de Medea, enfin Merci

à toute ma famille

Dédicace

J*e dédie ce modeste travail*

A *mon cher père qui ma tellement soutenue durant ma vie et ses sacrifices il est l'espoir de mon existence pour réussir dans mes études.*

A *ma très chère mère, qui m'a donne l'amour, la patience , le soutien et le courage.*

A *mon cher mari.*

A *mes chers frères .*

A *toute ma famille.*

A *mes amies.*

S*ans oublier tous les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.*

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude des surfaces minimales dans un espace euclidien de dimension 3. Ce sont des surfaces à courbure moyenne nulle. Nous mentionnons parmi ces surfaces : le caténoïde, l'hélicoïde, surface de Scherk... De plus, nous donnons une formule de représentation pour les surfaces minimales, c'est une généralisation naturelle de la formule de Weierstrass-Enneper pour les surfaces minimales dans un espace euclidien de dimension 3..

abstract

This work is devoted to the study of minimal surfaces in a Euclidean space of dimension 3. These are surfaces with zero mean curvature. We mention among these surfaces : the catenoid, the helicoid, Scherk surface ... In addition, we give a representation formula for the minimal surfaces, this is a natural generalization of the Weierstrass-Enneper formula for minimal surfaces in Euclidean space of dimension 3.

Table des matières

Résumé **3**

abstract **4**

Notations **8**

Introduction **9**

1 Généralités sur les courbes et les surfaces paramétrées **11**

1.1 Courbes paramétrées 11

1.1.1 Vecteur tangent 13

1.1.2 Longueur d'arc 14

1.1.3 Abscisse curviligne 14

1.1.4 courbes planes 15

1.1.5 Courbes dans $\mathbb{R}^3$ 18

1.2 Surfaces paramétrées 20

1.2.1 Surfaces paramétrées dans $\mathbb{R}^3$ 20

1.2.2 Plan tangent et vecteur normal 22

1.2.3 Surface orientée 25

1.2.4 Surfaces réglées 25

1.2.5 Première Forme fondamentale 25

1.2.6 Aire d'une surface paramétrée 26
1.2.7 Application de Gauss 26
1.2.8 Endomorphisme de Weingarten 27
1.2.9 Deuxième forme fondamentale 27
1.3 Applications 30
1.3.1 Le vecteur normal 31
1.3.2 Première Forme fondamentale 31
1.3.3 Deuxième forme fondamentale 32
1.3.4 Les courbures 32

2 Surfaces minimales **35**

2.1 Courbure moyenne et surfaces minimales 35
2.2 Exemples de surfaces minimales 38
2.3 Systèmes de coordonnées isothermes 43
2.4 Quelques rappelles sur l'analyse complexe 45
2.4.1 Fonction holomorphe 45
2.4.2 Conditions de Cauchy-Riemann 46
2.4.3 Fonction méromorphe 46
2.5 Représentation de Weierstrass-Enneper pour les surfaces minimales 47
2.5.1 Théorie préliminaire 47
2.5.2 Définition de la représentation de Weierstrass-Enneper . . . 51
2.6 Applications 52
2.6.1 Le caténoïde et l'hélicoïde 52
2.6.2 La surface d'Enneper 53
2.6.3 Surface minimale de Scherk 54

Bibliographie **56**

Notations

— $\mathbb{R}$: L'ensemble des nombres réels.

— $f_u = \frac{\partial f}{\partial t}$.

— $f_v = \frac{\partial f}{\partial v}$.

— $f_{uu} = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 t}$.

— $f_{vv} = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 v}$.

— $f_{uv} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial v}$.

— $\|.\|$: la norme euclidienne.

— $< . >$: Le produit scalaire.

Introduction

Les surfaces minimales sont d'un grand intérêt dans divers domaines des mathématiques, et actuellement ont beaucoup d'applications en architecture et en biologie, par exemple. Ces surfaces sont des surfaces minimisant ses aires tous en réalisant des contraintes. Elles ont la propriété que leur courbure moyenne est nulle partout. La première tentative connue de prouver l'existence d'une surface minimale est attribuée à Euler. En 1741, il réussit à trouver la caténoïde, une surface de révolution engendrée par une rotation d'une courbe plane, à savoir la caténaire. En 1776, J. B. Meusnier découvrit une seconde surface minimale, l'hélicoïde, c'est la seule surface minimale réglée. Peu de temps après, une troisième surface minimale, la surface de Scherk (H. Scherk, 1834), a été ajoutée aux surfaces minimales déjà connues. En 1863, K. Weierstrass et A. Enneper ont trouvé un moyen de représenter les surfaces minimales en termes de fonctions complexes holomorphes et méromorphes d'une variable complexe. Cette méthode est maintenant connue sous le nom de représentation de Weierstrass-Enneper.

Dans ce travail La plupart des définitions et les résultats citées sont extraites des références suivantes [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10].

Pour mieux comprendre cette notion nous allons d'abord, dans le premier chapitre, on introduit les notions générales nécessaires pour cette étude dans un espace euclidien à trois dimensions. Le deuxième chapitre présente les concepts essentiels

pour l'étude des surfaces minimales avec quelque exemples classiques. La représentation Weierstrass-Enneper et ses préliminaires seront également discutées. Nous allons voir comment la représentation de Weierstrass-Enneper peut être utilisée pour trouver des surfaces minimales.

Chapitre 1

Généralités sur les courbes et les surfaces paramétrées

1.1 Courbes paramétrées

Définition 1.1.1. *Une courbe paramétrée ou un arc paramétrée est une application de classe C^1 :*

$$\gamma : [a, b] \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^n.$$

Le paramétrage γ est dit régulier sur $[a, b]$ si $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$.
L'image $Im\ \gamma = \gamma([a, b])$ est appelée le support de γ.

Exemple 1.1.1. (***Droite dans*** $\mathbb{R}^n$) *La droite dans $\mathbb{R}^2$ passant par Les deux points $(1, 2)$ et $(2, -3)$ peut être paramétrer par :*

$$\gamma(t) = (1, 2) + t(2, -3) = (1 + 2t, 2 - 3t)$$

. `Remarquons` que, $\gamma'(t) = (2, -3) \neq (0, 0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc γ est régulier sur $\mathbb{R}$

Exemple 1.1.2. (**Cercle**) *Le cercle C de rayon 2 et de centre $(1, -1)$ est donné par l'équation :*

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$$

pour trouver un paramétrage pour C on peut prendre

$$x - 1 = 2\cos t \quad et \quad y + 1 = 2\sin t$$

alors

$$x = 1 + 2\cos t \quad et \quad y = 2\sin t - 1$$

on définit

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \gamma(t) = (x(t), y(t)) = (1 + 2\cos t, 2\sin t - 1) \end{array}$$

puisque $\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t) \neq (0, 0)$ *pour tout* $t \in [0, 2\pi]$, *alors* γ *est un paramétrage régulière de* C.

Exemple 1.1.3. (**Ellipse**) *Pour trouver un paramétrage de l'ellipse E donné par l'équation cartésienne :*

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

on pose

$$\frac{x}{2} = \cos t \quad et \quad \frac{y}{3} = \sin t$$

alors

$$x = 2\cos t \quad et \quad y = 3\sin t$$

on peut vérifier facilement que :

$$\begin{array}{rcl} \gamma : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t) \end{array}$$

est un paramétrage de E .

Exemple 1.1.4. (**Graphe d'une fonction**) *Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et Γ_f son graphe alors :*

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \gamma(t) = (t, f(t)) \end{array}$$

est un paramétrage de Γ_f .

1.1.1 Vecteur tangent

Définition 1.1.1. *Soit* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n (n = 2 \quad ou \quad n = 3)$ *un arc paramétré et* $t_0 \in [a,b]$

1.$\gamma'(t)$ *est appelé le vecteur tangent à* γ *au point* $\gamma(t)$.

2. Un point $\gamma(t_0)$ *est dit* ***singulier*** *si* $\gamma'(t) = 0$*(où* 0 *est le vecteur nul de* $\mathbb{R}^n$*).*

3. Un point $\gamma(t_0)$ *est dit* ***régulier*** *si* $\gamma'(t) \neq 0$

4. L'arc paramétré γ *est dit* ***régulier****si tous ses points sont réguliers*

5. Si γ *est de classe* C^2*, le point p=*$\gamma(t_0)$ *est dit* ***birégulier*** *si les deux vecteurs*

$$\gamma'(t_0) = \frac{d\gamma}{dt}(t_0) = (x_1'(t_0), ..., x_n'(t_0))$$

$$\gamma''(t_0) = \frac{d^2\gamma}{d^2t}(t_0) = (x_1''(t_0), ..., x_n''(t_0))$$

sont ***linéairement indépendants*** *dans* $\mathbb{R}^n$

6. L'arc paramétré γ *est dit* ***birégulier*** *si* γ *est de classe* C^2 *et tous ses points sont birégulires .*

Exemple 1.1.5. *L'application* $\gamma(t) = (t^2, t^4)$, $t \in \mathbb{R}$ *est un paramétrage de la parabole*
d'équation $y = x^2$*. C'est un arc paramétré non régulier .En effet :* $\gamma'(t) = (2t, 4t^3)$ *pour* $t = 0, \gamma'(0) = (0,0)$ *donc le point* $\gamma(0) = (0,0)$ *est un point singulier d'où* γ *est non régulier sur* $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1.6. *L'arc paramétré :*

$$\begin{array}{rccl} \gamma & : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) = (t, 3t^2, 2t^3). \end{array}$$

est birégulier. En effet ,$\gamma'(t) = (1, 6t, 6t^2)$ et $\gamma''(t) = (0, 6, 12t)$ sont des vecteurs non nuls et non colinéaires donc linéairement indépendants.

1.1.2 Longueur d'arc

Soit C une courbe dans $\mathbb{R}^2$ (ou dans $\mathbb{R}^3$)

Définition 1.1.2. *La longueur de l'arc de C d'origine $\gamma(a)$ et d'extrémité $\gamma(t)$ est donnée par :*

$$L(\gamma) = \int_a^t \|\gamma'(t)\| dt.$$

Exemple 1.1.7. *Soit un paramétrage d'un cercle C dans le plan*

$$\begin{array}{rcl} \gamma \ : [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \gamma(t) \ = (r\cos t, r\sin t) \end{array}$$

pour $t = \pi$:

$$L(\gamma) = \int_0^{\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{\pi} r dt = r\pi.$$

La longueur du support de γ (la circonférence du cercle) est :

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2r\pi.$$

1.1.3 Abscisse curviligne

Définition 1.1.3. *On appelle **abscisse curviligne** d'origine P= $\gamma(a)$ l'application définie par :*

$$\begin{array}{rcl} \gamma \ : [a, b] & \longrightarrow & [0, L] \\ t & \longmapsto & s(t) \ = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du. \end{array}$$

Remarque 1.1.1. *1. L'abscisse curviligne $s = s(t)$ est une fonction différentiable*

et croissante. En effet :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\int_a^t \|\gamma'(u)\|du = \|\gamma'(u)\| > 0$$

2. Donc $s = s(t)$ est une bijection de $[a, b]$ sur $[0, L]$. Son inverse est $t = t(s)$. De plus

on a :

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}}$$

Définition 1.1.4. *Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un paramétrage d'une courbe C.*

L'arc γ est dit ***paramétré par abscisse curviligne****(par* ***longueur d'arc*** *ou* ***à vitesse unitaire*** *) noté p.a.c si $\gamma'(t)$ est un vecteur* ***unitaire*** *pour tout $t \in [a, b]$.*

Exemple 1.1.8. *Soit un paramétrage d'une droite*

$$\gamma(t) = (1 + t, 2 - 5t).$$

$\gamma'(t) = (1, -5)$. *Alors*

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\|du = \int_0^t \sqrt{26}du = \sqrt{26}t.$$

la fonction inverse est

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{26}}.$$

1.1.4 courbes planes

Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un arc paramétré par abscisse curviligne, nous noterons $T(s)$ son vecteur tangent $\gamma'(s)$, qui dans ce cas est un vecteur unitaire.

Définition 1.1.5. *Soit $\gamma :\longrightarrow \mathbb{R}^2$ un arc paramétré p.a.c. On définit le vecteur normal au*

point $\gamma(s)$:

$$n(s) = J \times T(s), où \;\; J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

remarquons que $\|n(s)\|= 1$.

Exemple 1.1.9. *Un paramétrage d'un cercle*

$$\begin{array}{rcl} \gamma \; : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ s & \longrightarrow & \gamma(s) \;\; = (r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}) \end{array}$$

$T(s) = (-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r})$ *et* $n(s) = (-\cos\frac{s}{r}, -\sin\frac{s}{r})$.

Remarque 1.1.2. *Cette définition est réalisée de telle manière que la famille $\{T(s), n(s)\}$ forme une base orthonormée positivement orientée de $\mathbb{R}^2$. En d'autres termes, le vecteur $n(s)$ est obtenu à partir de $T(s)$ par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens antihoraire.*

Courbure d'une courbe plane

Si $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est un arc paramétré p.a.c pour $s \in I$, on a :

$$< T(s), T(s) >= \|T(s)\|= 1$$

dérivons cette équation :

$$< T'(s), T(s) > + < T(s), T'(s) = 2 < T'(s), T(s) >= 0$$

Ainsi, les deux vecteurs $T(s)$ *et* $T'(s)$ sont perpendiculaires. Par conséquent $T'(s)$ est un multiple du vecteur normal $n(s)$, d'où :

$$T'(s) = \kappa(s).n(s).$$

Définition 1.1.6. *Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un arc paramétré p.a.c. La fonction*

$$\kappa : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

est appelée ***la courbure*** *de γ*

Exemple 1.1.10. *Soit le paramétrage d'un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon r :*

$$\begin{array}{rcl} \gamma : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ s & \longrightarrow & \gamma(s) = (r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}) \end{array}$$

remarquons que $\|T(s)\| = \|(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r})\| = 1$, c-à-d γ est paramétré p.a.c, de plus

$n(s) = (-\cos\frac{s}{r}, -\sin\frac{s}{r})$, on a :$T'(s) = (-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}) = \frac{1}{r} \times n(s)$, d'où $\kappa(s) = \frac{1}{r}$.

Remarque 1.1.3. *1 On peut calculer la courbure par :*

$$\kappa(s) = < T'(s), n(s) > = det(\gamma'(s), \gamma''(s))$$

2 Puisque $\|T'(s)\| = |\kappa(s)|$. La courbure d'une courbe plane est orientée.

Proposition 1.1.1. *Soit γ un arc paramétré régulier. La courbure de γ au point $\gamma(t)$ est :*

$$\kappa(t) = \frac{det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

Preuve : (voir[3]) ∎

Exemple 1.1.11.

$$\begin{array}{rcl} \gamma : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \gamma(t) = (r\cos t, r\sin t) \end{array}$$

$$\gamma'(t) = (-r\sin t, r\cos t) \quad et \quad \gamma''(t) = (-r\cos t, -r\sin t)$$

on obtient :

$$\kappa(t) = \frac{det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

1.1.5 Courbes dans $\mathbb{R}^3$

Dans toute la section,$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est un paramétrage d'une courbe dans $\mathbb{R}^3$. De plus, si $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est p.a.c, on note par $T(s)$ le vecteur tangent $\gamma'(s)$ au point $\gamma(s)$.

Courbure

Définition 1.1.7. *Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est un arc paramétré p.a.c. La fonction*

$$\begin{array}{rccl} \kappa & : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \longmapsto & \kappa(s) = \|T'(s)\| \end{array}$$

est appelée ***la courbure*** *de γ au point $\gamma(s)$.*

Exemple 1.1.12. *1 La droite dans $\mathbb{R}^3$ passant par $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 1)$ et $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ peut être paramétrer par :*

$$\gamma(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 1) + t(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}t, -\frac{1}{\sqrt{2}}t, 1)$$

Remarquons que : $\gamma'(t) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Puisque $\|\gamma'(t)\| = 1$, Alors :

$$\kappa(s) = \|\gamma''(t)\| = \|(0, 0, 0)\|$$

2.

$$\gamma(t) = (\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}), \sin(\frac{t}{\sqrt{2}}), \frac{t}{\sqrt{2}})$$

$$\gamma'(t) = (-\frac{1}{\sqrt{2}} sin(\frac{t}{\sqrt{2}}), \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\frac{t}{\sqrt{2}}), \frac{1}{\sqrt{2}})$$
$$\|\gamma'(t)\| = 1$$

donc γ est p.a.c

$$\gamma''(t) = (-\frac{1}{2} \cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), -\frac{1}{2} sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), 0)$$

$$\kappa(s) = \|\gamma''(s)\| = \frac{1}{2}$$

Définition 1.1.8. *Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est un arc paramétré p.a.c. Si $\kappa(s) \neq 0$ pour tout $s \in I$. on définit le* ***vecteur normal*** *de γ au point $\gamma(s)$ par :*

$$n(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$$

Exemple 1.1.13.

$$\gamma(s) = (\cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), \sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), \frac{s}{\sqrt{2}})$$

d'après l'exemple précédent, γ est p.a.c :

$$\gamma''(s) = (-\frac{1}{2} \cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), -\frac{1}{2} \sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), 0) \quad et \quad \kappa(s) = \|\gamma''(s)\| = \frac{1}{2}$$

d'où :

$$n(s) = \frac{\gamma''(s)}{\kappa(s)} = (-\cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), -\sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), 0).$$

Proposition 1.1.2. *Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un arc paramétré régulier. Alors sa courbure est :*

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

Preuve : (Voir *[2]*, pp 291) ∎

Exemple 1.1.14. *L'hélice circulaire d'axe (zz') est la courbe paramétrée par :*

$$\gamma(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt), t \in \mathbb{R}$$

où a, b sont des réels non nuls

$$\gamma'(t) = (-a\sin(t), a\cos(t), b)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ceci montre que γ est régulier, mais n'est pas p.a.c.

$$\gamma''(t) = (-a\cos(t), -a\sin(t), 0)$$

et

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = (ab\sin(t), -ab\cos(t), a^2)$$

il s'ensuit :

$$\kappa(t) = \frac{\|(ab\sin t, -ab\cos t, a^2)\|}{\|(-a\sin(t), a\cos(t), b)\|^3} = \frac{(a^2b^2 + a^4)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|a|}{a^2 + b^2}.$$

1.2 Surfaces paramétrées

1.2.1 Surfaces paramétrées dans $\mathbb{R}^3$

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$. On utilisera (u, v) comme coordonnées dans l'espace des paramètres U et (x, y, z) comme coordonnées dans $\mathbb{R}^3$

Définition 1.2.1. *Une fonction $\sigma : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est dite lisse sur U si pour tout entier $k \geq 2$, toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continues.*

Définition 1.2.2. *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$. Une application lisse :*

$$\begin{array}{rccc} \sigma & : U & \longrightarrow & \sigma(U) \subset \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & \sigma(u, v) \end{array}$$

*est dite un **paramétrage d'une surface** (ou une **surface paramétrée**) dans $\mathbb{R}^3$ si $\sigma_u \times \sigma_v(u, v) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ pour tout $(u, v) \in U$. $\sigma(U)$ est appelée le support de σ.*

Remarque 1.2.1. *La condition $\sigma_u \times \sigma_v(u,v) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ est équivalente à l'une des deux assertions équivalentes :*

1. *La matrice Jacobienne de σ est de **rang 2** en chaque point de U,*
2. *les deux vecteur σ_t et σ_v sont linéairement indépendants pour tout $(u,v) \in U$.*

Exemple 1.2.1. *Le plan définit par l'équation cartésienne :*

$$3x + 2y - z = 0$$

. De l'équation découle

$$z = 3x + 2y$$

posons $x = u$ et $y = v$ on obtient un paramétrage de ce plan :

$$\begin{array}{rccc} \sigma & : U & \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & & \longmapsto & \sigma(u,v) = (u,v,3u+2v) \end{array}$$

Exemple 1.2.2. (***Graphe d'une fonction lisse***) *Soit la fonction lisse*

$$\begin{array}{rccc} f & : U & \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & & \longmapsto & f(x,y) = z \end{array}$$

Considérons le graphe Γ_f de

$$\begin{array}{rccc} \sigma & : U & \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & & \longmapsto & \sigma(x,y) = (x,y,f(x,y)) \end{array}$$

l'application σ est un paramétrage de la surface $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^3$. En effet, l'application σ de U

dans $\mathbb{R}^3$ vérifie pour tout $(u,v) \in U$:

$$\sigma_u \times \sigma_v(u,v) = (-f_u, -f_v, 1)(u,v) \neq 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Exemple 1.2.3. (***Surface de révolution***)

Soit $\gamma(t) = (y(t), z(t)), t \in [a, b])$ un paramétrage régulier d'une courbe C dans la plan (yz). On suppose que $y(t) > 0$ pour tout t. La surface obtenue par rotation de C autour de l'axe zz' est appelée la surface de révolution autour de l'axe zz'. Le point $\gamma(u) = (y(u), z(u))$ engendre un cercle dans le plan (xy) de centre $(0, 0)$ et de rayon $y(t)$. On peut paramétrer ce cercle par $(y(t)\cos v, y(t)\sin v)$ où $v \in [0, \pi 2]$. En utilisant ce qui précède, on obtient le paramétrage :

$$\begin{array}{rccl} \sigma & : [a,b]\times[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (t,v) & \longmapsto & \sigma(t,v) = (y(t)\cos v, y(t)\sin v, z(t)) \end{array}$$

Vérifions la condition :

$$\sigma_t(t, v) = (y'(t)\cos v, y'(t)\sin v, z'(t))$$

et

$$\sigma_v(t, v) = (-y(t)\sin v, y(t)\cos v, 0)$$

Par conséquent :

$$(\sigma_t \times \sigma_v)(t, v) = (-z'(t)y(t)\cos v, z'(t)y(t)\sin v, y'(t)y(t))$$

et

$$\|(\sigma_t \times \sigma_v)(t, v)\| = y(t)\|\gamma'(t)\| \neq 0$$

donc la surface de révolution de la courbe C est une surface paramétrée dans $\mathbb{R}^3$.

1.2.2 Plan tangent et vecteur normal

Soit $\sigma = \sigma(u, v)$ un paramétrage d'une surface $S = \sigma(U) \subset \mathbb{R}^3$ et

$$\begin{array}{rccl} \gamma & : [a,b] & \longrightarrow & U \subset \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) = (u(t), v(t)) \end{array}$$

un paramérage régulier d'une courbe C. Considérons maintenant

$$\begin{array}{rccc} \sigma & : U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u(t), v(t)) & \longmapsto & \sigma(u(t), v(t)) = \sigma(\gamma(t)) = \rho(t) \end{array}$$

l'image de C sur $S = \sigma(U)$. L'application $\rho = \sigma \circ \gamma$ est lisse car c'est la composée de deux applications lisses, de plus $\frac{d\rho}{dt}(t) \neq 0$ pour tout t.

Définition 1.2.3. *Soit $v \in \mathbb{R}^3$ un vecteur non nul et S une surface de $\mathbb{R}^3$. Le vecteur v est tangent à S en un point $p \in S$ s'il existe une courbe sur S passant par p et paramétrée par β telle que $\frac{d\beta}{dt}(t) \neq v$.*
Si $\beta(t) = \sigma(u(t), v(t))$, alors

$$\frac{d\beta}{dt}(t) = \frac{\partial\sigma}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial\sigma}{\partial v}\frac{dv}{dt} = \sigma_u\frac{du}{dt} + \sigma_v\frac{dv}{dt} = \sigma_u u' + \sigma_v v'$$

d'où la définition :

Définition 1.2.4. *Soit $p = \sigma(u, v) \in S$. l'espace tangent à S au point p, noté T_pS est le plan engendré par les deux vecteurs $\sigma_u(u, v), \sigma_v(u, v)$.*
Pour un point $x \in T_pS$, alors : $x = p + \sigma_u(u, v) + \sigma_v(u, v)$.

Exemple 1.2.4. *Considérons la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Par l'exemple*
précédent, le graphe $\Gamma_f = \{(x, y, x^2 + y^2) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est une surface paramétrée par :

$$\sigma(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$\sigma_u(u, v) = (1, 0, 2u), \sigma_v(u, v) = (0, 1, 2v)$$

et

$$\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v) = (-2u, -2v, 1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$$

pour $p = \sigma(0,0) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$T_pS = Vect\{\sigma_t(0,0), \sigma_v(0,0)\}$$
$$= Vect\{(1,0,0),(0,1,0)\}$$

Définition 1.2.5. *Soit*

$$\begin{array}{rccl} \sigma & : U & \longrightarrow & S = \sigma(U) \in \mathbb{R}^3 \\ & (t,v) & \longmapsto & \sigma(u,v) \end{array}$$

une surface paramétrée régulière. Pour $p = \sigma(u,v) \in U$ *le vecteur* $\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)$ *est un vecteur non nul, orthogonal au plan tangent* T_pS*, on obtient le vecteur unitaire correspondant en prenant*

$$n(u,v) = \frac{\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)}{\|\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)\|}$$

il est appelé ***le vecteur normal unitaire*** *de* S *au poit* $p = \sigma(u,v)$*.*

Exemple 1.2.5. *1. Considérons* $S = \{(u,v,f(u,v))|(u,v) \in \mathbb{R}^2\}$

Si $p = \sigma(u,v) \in S$*, alors :* $\sigma_u(u,v) = (1,0,f_u(u,v)), \sigma_v(u,v) = (0,1,f_v(u,v)$

et

$$n(u,v) = \frac{\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)}{\|\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)\|} = \frac{(-f_t,-f_v,1)}{\|(-f_t,-f_v,1)\|} = \frac{(-f_t,-f_v,1)}{\sqrt{f_v^2+f_v^2+1}}$$

2. Pour $S = \{(x,y,z) \in S^2 | z > 0\}$ *paramétrée par :*

$$\begin{array}{rccl} \sigma: & U = B(0,1) & \longrightarrow & S = \sigma(U) \in \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & \sigma(u,v) = (u,v,\sqrt{1-u^2-v^2}) \end{array}$$

où $B(0,1)$ *est la boule ouverte de* $\mathbb{R}^2$*.*

Le vecteur normal au point $p = \sigma(u,v)$ *est :*

$$n(u,v) = \frac{\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)}{\|\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)\|} = (u,v,\sqrt{1-u^2-v^2}).$$

1.2.3 Surface orientée

Définition 1.2.6. *Soit S une surface régulière de $\mathbb{R}^3$. Un champ de vecteurs normal sur S est une application vectorielle de classe C^∞*

$$n : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

tel que pour tout $p \in S, n(p) \in (T_pS)^\perp$ le plan orthogonal à (T_pS)

Définition 1.2.7. *Une surface régulière de $\mathbb{R}^3$ est **orientée** si elle admet un champ de vecteurs normal unitaires global de classe C^∞.*

1.2.4 Surfaces réglées

Définition 1.2.8. *On appelle C^k-**surfaces réglées** un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^3$ pour lequel il existe une paramètre de la forme :*

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & I \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & \alpha(u) + v\beta(u) \end{array}$$

où I est un intervalle et $\alpha, \beta \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

1.2.5 Première Forme fondamentale

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée par :

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & \sigma(u, v) \end{array}$$

Définition 1.2.9. *la première forme fondamentale de S au point $p = \sigma(u, v)$ est la restriction du produit scalaire de $\mathbb{R}^3$ à T_pS l'espace tangent de S en p, c'est donc la forme bilinéaire symétrique définie positive donnée par :*

$$\begin{array}{rccc} I_p : & T_pS \times T_pS & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u, v) & \longmapsto & I_p(u, v) = \langle u, v \rangle . \end{array}$$

où $\langle ., . \rangle$ *est le produit scalaire de* $\mathbb{R}^3$

et

$$I_p(u, v) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

avec : $E = \| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \|^2, F = \frac{\partial \sigma}{\partial u}.\frac{\partial \sigma}{\partial v},$ *et* $G = \| \frac{\partial \sigma}{\partial v} \|^2$

1.2.6 Aire d'une surface paramétrée

Définition 1.2.10. *Soit* U *un domaine de* $\mathbb{R}^2$ *et* σ *une fonction de* U *dans* $\mathbb{R}^3$. $S = \sigma(U)$ *est appelée surface paramétrique. son aire est donnée par :*

$$\mathcal{A}(S) = \iint_U \mid \sigma_u \wedge \sigma_v \mid dudv.$$

Remarque 1.2.2.

$$\begin{aligned} \| \sigma_u \wedge \sigma_v \|^2 &= \| \sigma_u \|^2 . \| \sigma_v \|^2 \sin^2 \alpha \\ &= \| \sigma_u \|^2 . \| \sigma_v \|^2 (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= \| \sigma_u \|^2 . \| \sigma_v \|^2 - (\sigma_u.\sigma_v)^2 \\ &= EG - F^2 \end{aligned}$$

alors :

$$\| \sigma_u \wedge \sigma_v \| = \sqrt{EG - F^2}$$

1.2.7 Application de Gauss

Soit S une surface orientée et paramétrée par :

$$\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

un paramétrage régulière, $p = \sigma(u, v)$ un point de S.

Définition 1.2.11. *L'application de Gauss de S est l'application définie par :*

$$\begin{array}{rccl} \nu: & S & \longrightarrow & S^2 \\ & p & \longmapsto & \nu(p) = n_p(u,v) = \frac{\sigma_u(u,v)\wedge\sigma_v(u,v)}{\|\sigma_u(u,v)\wedge\sigma_v(u,v)\|} \end{array}$$

Où S^2 est la sphère unité.

1.2.8 Endomorphisme de Weingarten

Soit S une surface orientée et paramétrée par :

$$\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

un paramétrage régulière, $p = \sigma(u,v)$ un point de S.

Définition 1.2.12. *L'endomorphisme de Weingarten est l'application linéaire W_p définie par :*

$$\begin{array}{rccl} W_p: & T_pS & \longrightarrow & T_pS \\ & X & \longmapsto & W_p(X) = -d\nu_p(X). \end{array}$$

où $d\nu_p(X)$ la différentielle de l'application de Gauss

1.2.9 Deuxième forme fondamentale

Définition 1.2.13. *Soit $p = \sigma(u,v)$. La forme bilinéaire symétrique*

$$\begin{array}{rccl} II_p: & T_pS \times T_pS & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (X,Y) & \longmapsto & II_p(X,Y) = \langle W_p(X), Y\rangle = -\langle d\nu_p(X), Y\rangle \end{array}$$

est appelée ***la deuxième forme fondamentale*** *de σ en p.*

On peut l'écrire sous la forme :

$$II_p(X,Y) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

où $L = \frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}.n(u,v)$, $M = \frac{\partial^2\sigma}{\partial u.\partial v}.n(u,v)$ *et* $N = \frac{\partial^2\sigma}{\partial v^2}.n(u,v)$

Proposition 1.2.1. *Pour tout $p \subset S$, l'endomorphisme de Weingarten est une forme bilinéaire symétrique pour le produit scalaire euclidien.*

Preuve : (Voir *[?]*)∎

Proposition 1.2.2. *(Écriture matricielle de l'endomorphisme de Weingarten et de la deuxième forme fondamentale)*

Soient W_p, I_p, et II_p respectivement les matrices de l'endomorphisme de Weingarten, la première et la deuxième forme fondamentale de S au point $p = \sigma(u, v)$ écrivent dans la base $(\sigma_u(u, v), \sigma_v(u, v))$, alors :

$$W_p(X) = I_p^{-1}(X).II_p(X)$$

où $X \in T_pS$.

Démonstration

On sait que $dn_p \in T_pS$, alors $n_u(u, v)$ et $n_v(u, v)$ s'écrivent dans la base $(\sigma_u(u, v), \sigma_v(u, v))$ de T_pS sous la forme :

$$\begin{pmatrix} n_u \\ n_v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} W_{00} & W_{01} \\ W_{10} & W_{11} \end{pmatrix}}_{W_p} \begin{pmatrix} \sigma_u \\ \sigma_v \end{pmatrix}$$

où W_p est la matrice de l'endomorphisme de Weingarten dans la base $(\sigma_u(u, v), \sigma_v(u, v))$.

Les matrices des deux formes fondamentales écrivent dans la base $(\sigma_u(u, v), \sigma_v(u, v))$ sont :

$$I_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, II_p = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

$\forall X, Y \in T_pS$:

$II_p(X, Y) =< W_p(X), Y >$

$$= (Y_u, Y_v) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix}$$

$$= (Y_u, Y_v) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{00} & W_{01} \\ W_{10} & W_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix}$$

alors :

$$\begin{pmatrix} W_{00} & W_{01} \\ W_{10} & W_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} GL - FM & GM - FN \\ EM - FL & EN - FM \end{pmatrix}$$

donc on a :

$$det(W_m) = \frac{det(II_m)}{det(I_m)} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

et

$$tr(W_m) = \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2}$$

Courbures

L'endomorphisme de Weingarten W_p étant symétrique donc diagonalisable dans la base orthonormale (V_1, V_2) de T_pS, où V_1, V_2 sont les vecteurs propres de W_p associés respectivement aux valeurs propres k_1, k_2.

Définition 1.2.14. *On appelle k_1 et k_2.* ***Les courbures principales*** *de S en $p = \sigma(u, v)$*

Remarque 1.2.3. *Si $k_1 = k_2 = k$, alors $W_p(X) = kX$. Si $k_1 \neq k_2$, les deux vecteurs propres sont appelés directions principales de S en $p = \sigma(u, v)$.*

Définition 1.2.15. ***La courbure de Gauss*** *de S en $p = \sigma(u, v)$ est :*

$$K(p) = k_1(p).k_2(p) = det(W_p)$$

Définition 1.2.16. ***La courbure moyenne*** *de S en $p = \sigma(u, v)$ est :*

$$H(p) = \frac{1}{2}(k_1(p) + k_2(p)) = \frac{1}{2}tr(W_p)$$

1.3 Applications

On va appliquer les calculs précédents pour une surface de révolution.

Soit S est une surface de révolution paramétrée par :

$$\sigma(u, v) = (h(u)\cos(v), h(u)\sin(v), g(u)) \tag{1.1}$$

où $u \in]a, b[, v \in]0, 2\pi[$ *et* $h(u) > 0$.

on a :

$$\sigma_u(u, v) = \begin{pmatrix} h'(u)\cos(v) \\ h'(u)\sin(v) \\ g'(u) \end{pmatrix}, \sigma_v(u, v) = \begin{pmatrix} -h(u)\sin(v) \\ h(u)\cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{uu}(u, v) = \begin{pmatrix} h''(u)\cos(v) \\ h''(u)\sin(v) \\ g''(u) \end{pmatrix}, \sigma_{vv}(u, v) = \begin{pmatrix} -h(u)\cos(v) \\ -h(u)\sin(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{uv}(u, v) = \begin{pmatrix} -h'(u)\sin(v) \\ h'(u)\cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.3.1 Le vecteur normal

On a :

$$\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v) = \begin{pmatrix} -h(u)\cos(v)g'(u) \\ -h(u)\sin(v)g'(u) \\ h(u)h'(u) \end{pmatrix}$$

$$\|\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)\| = h(u)\sqrt{g'(u)^2 + h'(u)^2}$$

donc

$$n(u,v) = \frac{\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)}{\|\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)\|} = \frac{1}{\sqrt{g'(u)^2 + h'(u)^2}} \begin{pmatrix} -g'(u)\cos(v) \\ -g'(u)\sin(v) \\ h'(u) \end{pmatrix}$$

1.3.2 Première Forme fondamentale

On a :

$$E = \|\sigma_u(u,v)\|^2 = h'(u)^2 + g'(u)^2.$$

$$G = \|\sigma_v(u,v)\|^2 = h(u)^2.$$

$$F = \langle \sigma_u(u,v), \sigma_v(u,v) \rangle = 0.$$

donc

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h'(t)^2 + g'(u)^2 & 0 \\ 0 & h(u)^2 \end{pmatrix}$$

1.3.3 Deuxième forme fondamentale

On a :

$$L = \sigma_{vv}(u,v).n(u,v) = \frac{1}{\sqrt{g'(u)^2 + h'(u)^2}}(-h''(u)g'(u) + h'(u)g''(u)).$$

$$N = \sigma_{uu}(u,v).n(u,v) = \frac{1}{\sqrt{g'(u)^2 + h'(u)^2}}\left(h(t)g'(u)\right).$$

$$M = \sigma_{uv}(u,v).n(u,v) = 0.$$

donc

$$II = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g'(u)^2 + h'(u)^2}} \begin{pmatrix} -h''(u)g'(u) + h'(u)g''(u) & 0 \\ 0 & h(t)g'(u) \end{pmatrix}$$

1.3.4 Les courbures

Soit S une surface de révolution, les courbures donnée par :

♦ ***les courbures principales :*** *sont les valeurs propres de* $II_p(X,Y)$

$$k_1 = \frac{L}{E} = \frac{1}{(g'(u)^2 + h'(u)^2)^{\frac{3}{2}}}(-h''(u)g'(u) + h'(u)g''(u)).$$

$$k_2 = \frac{N}{G} = \frac{1}{(g'(u)^2 + h'(u)^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{g'(u)}{h(u)}\right).$$

♦ ***la courbure moyenne :***

$$2H = k_1 + k_2 = \frac{L}{E} + \frac{N}{G}$$

$$= \frac{1}{(g'(u)^2 + h'(u)^2)^{\frac{3}{2}}}(-h''(u)g'(u) + h'(u)g''(u)) + \frac{1}{(g'(t)^2 + h'(u)^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{g'(u)}{h(u)}\right).$$

♦ ***la courbure de Gauss :***

$$K = \frac{LN}{EG} = \frac{g'(u)(-h''(u)g'(u) + h'(t)g''(u))}{h(u)(g'(u)^2 + h'(u)^2)^2}.$$

Exemple 1. *Soit S une surface de révolution paramétrée par :*

$$\sigma :]0, \pi[\times]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \longmapsto (f(u)\cos(v), f(u)\sin(v), g(u))$$

avec : $f(u) = \sin(u)$ *et* $g(u) = \cos(u)$.

alors on a :

$$\sigma_u(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(u)\cos(v) \\ \cos(u)\sin(v) \\ -\sin(u) \end{pmatrix}, \sigma_v(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin(v)\sin(u) \\ \cos(v)\sin(u) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{uu}(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin(u)\cos(v) \\ -\sin(u)\sin(v) \\ -\cos(v) \end{pmatrix}, \sigma_{vv}(u, v) = \begin{pmatrix} -\cos(v)\sin(u) \\ -\sin(v)\sin(u) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{uv}(u, v) = \begin{pmatrix} -\cos(u)\sin(v) \\ \cos(u)\cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \|\sigma_u(u, v)\|^2 = f'(u)^2 + g'(u)^2 = \cos^2(u) + \sin^2(u) = 1.$$

$$G = \|\sigma_v(u, v)\|^2 = f(t)^2 = \sin^2(u).$$

$$F = \langle \sigma_u(u, v), \sigma_v(u, v) \rangle = 0.$$

$$n = \frac{\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)}{\|\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)\|} = \frac{1}{\sqrt{g'(u)^2 + f'(u)^2}} \begin{pmatrix} -g'(u)\cos(v) \\ -g'(u)\sin(v) \\ f'(u) \end{pmatrix}$$

$$= (\sin(u)\cos(v), \sin(u)\sin(v), \cos(u)) = \sigma(u,v).$$

$$L = \sigma_{vv}(u,v).n(u,v) = \frac{-f''(u)g'(u) + f'(u)g''(u)}{\sqrt{g'(u)^2 + f'(u)^2}} = -\left(\sin^2(u) + \cos^2(u)\right) = -1.$$

$$N = \sigma_{uu}(u,v).n(u,v) = \frac{1}{\sqrt{g'(t)^2 + f'(u)^2}}\left(f(u)g'(u)\right) = -\sin^2(u).$$

$$M = \sigma_{uv}(u,v).n(u,v) = 0.$$

♦ ***les courbures principales :***

$$k_1 = \frac{L}{E} = \frac{1}{(g'(t)^2 + f'(u)^2)^{\frac{3}{2}}}(-f''(u)g'(u) + f'(t)g''(u)) = -1.$$

$$k_2 = \frac{N}{G} = \frac{1}{(g'(u)^2 + f'(u)^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{g'(u)}{f(u)}\right) = -1.$$

♦ ***la courbure moyenne :***

$$2H = k_1 + k_2 = -1.$$

♦ ***la courbure de Gauss :***

$$K = \frac{LN}{EG} = \frac{g'(u)(-h''(u)g'(u) + h'(u)g''(u))}{h(u)(g'(u)^2 + h'(u)^2)^2} = 1.$$

Chapitre 2

Surfaces minimales

Les surfaces minimales sont des surfaces qui minimisent leurs aires tout en respectant certaines conditions à leurs bords. Elles ont la propriété que leur courbure moyenne est nulle partout.

2.1 Courbure moyenne et surfaces minimales

Une surface minimale est une surface de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ dont sa courbure moyenne H est nulle partout. Nous expliquerons la signification géométrique de la condition $H = 0$.

Proposition 2.1.1. *Une surface orientée S est minimale si et seulement si $H = 0$.*

Preuve . Nous fixons un domaine U dans le plan (u, v) entouré d'une courbe. On note ∂U la courbe qui est la frontière de U. Considérons une surface orientée S paramétrée par

$$\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

.où les paramètres u et v varient dans U. Lorsque (u, v) se déplace sur ∂U, $\sigma(u, v)$ trace une courbe. Nous déformons la surface en fixant la courbe, c'est-à-dire que

nous gardons $\sigma(u,v)$ inchangé sur ∂U.

Soit n un champ vectoriel normal unitaire et f une fonction sur U qui prend la valeur 0 sur la frontière ∂U. Alors fn est un champ vectoriel normal à la surface qui s'annule sur la frontière. Ainsi, si nous définissons

$$\bar{\sigma} = \sigma + \varepsilon f n. \tag{2.1}$$

pour un réel infiniment petit ε, $\bar{\sigma}$ donne une surface qui déforme un peu σ en le gardant fixé sur ∂U.

On note $\mathcal{A}(\varepsilon)$ l'aire $\iint_U \mid \bar{\sigma}_u \wedge \bar{\sigma}_v \mid$ de la surface $\bar{\sigma}(u,v)$ et $\mathcal{A}(0)$ l'aire de la surface d'origine $\sigma(u,v)$. Si nous supposons que l'aire ne diminue pas lorsque nous déformons σ(u,v), l'inégalité

$$\mathcal{A}(0) \leq \mathcal{A}(\varepsilon).$$

est vraie pour toute fonction f et chaque réel $\varepsilon > 0$.

Pour commencer, supposons que $\sigma \in C^2$ sur U, alors

$$n.dn = n.d\sigma = 0. \tag{2.2}$$

D'autre part, en dérivant (2.1) on obtient

$$d\bar{\sigma} = d\sigma + \varepsilon f dn + \varepsilon df n. \tag{2.3}$$

En utilisant (2.2) et (2.3), on trouve

$$\begin{aligned} d\bar{\sigma} \,.\, d\bar{\sigma} &= d\sigma \,.\, d\sigma + 2\varepsilon f d\sigma \,.\, dn + \varepsilon^2 h, \\ &= (E - 2\varepsilon f L)dudu + 2(F - 2\varepsilon f M)dudv + (G - 2\varepsilon f N)dvdv + \varepsilon^2 h. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\varepsilon) &= \iint_U \sqrt{(E - 2\varepsilon f L)(G - 2\varepsilon f N) - (F - 2\varepsilon f M)^2 + \varepsilon^2 h}\; dudv, \\ &= \iint_U \sqrt{EG - F^2 - 2\varepsilon f(EN + LG - 2FM) + \varepsilon^2 h}\; dudv. \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à ε et en posons $\varepsilon = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'(0) &= \iint_U \frac{-f(EN + LG - 2FM)}{EG - F^2}\, dudv, \\ &= -\iint_U fH\sqrt{EG - F^2}\, dudv.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{A}'(0) = -\iint_U fH\sqrt{EG - F^2}\, dudv. \tag{2.4}$$

De cette équation, nous voyons que lorsque $\sigma(u, v)$ est une surface minimale, pour toute fonction f que nous utilisons pour déformer la surface, nous avons $\mathcal{A}'(0) = 0$. Inversement, si $\mathcal{A}'(0) = 0$ pour toute fonction f, alors en remplaçant f par H dans l'équation ci-dessus donne

$$0 = \iint_U H^2\sqrt{EG - F^2}dudv.$$

alors $H = 0$. Si nous voulons nous limiter à des déformations telles que $f = 0$ à la frontière de la région U, nous choisissons une fonction φ qui est positive à l'intérieur de U et 0 à la frontière. Alors en remplaçant f par φH, l'équation (2.4) devient

$$\mathcal{A}'(0) = -\iint_U \varphi H^2\sqrt{EG - F^2}dudv.$$

on obtient $H = 0$ de la même manière. C'est pourquoi nous appelons une surface de courbure moyenne $H = 0$ une «surface minimale». □

Par (2.4). Si $H \neq 0$, on obtient

$$\mathcal{A}'(0) = -\iint_U \varphi H^2\sqrt{EG - F^2}dudv < 0.$$

Par conséquent, nous constatons que la surface diminue pour des ε suffisamment petits si nous déformons la surface dans la direction normale telle que

$$\bar{\sigma} = \sigma + \varepsilon\varphi Hn.$$

Pour une surface $z = f(x, y)$, on obtient

$$H = \frac{f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2)}{2(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}.$$

cela nous dit qu'une surface est minimale si et seulement si

$$f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2) = 0. \tag{2.5}$$

Elle est connue depuis longtemps comme une équation différentielle définissant les surfaces minimales.

Remarque 2.1.1. *L'équation (2.5) est dite équation de Lagrange.*

Définition 2.1.1. *Une surface S dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est minimale si tout point $p \in S$ possède un voisinage $U \subset S$, qui est la surface de moindre aire parmi les surfaces de même frontière ∂U.*

Définition 2.1.2. *Une surface S de $\mathbb{R}^3$ est une surface minimale si et seulement si elle est localement le graphe d'une solution de l'équation*

$$f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2) = 0.$$

Lagrange a remarqué que les fonctions affines

$$f(u, v) = au + bv + c$$

sont des solutions de cette équation. Les surfaces minimales correspondantes sont des plans.

2.2 Exemples de surfaces minimales

Exemple 2.2.1. *Le caténoïde.*

Le caténoïde est la surface de révolution engendrée par une rotation d'une caténaire autour de sa base. Comme la courbure moyenne est nulle en tout point, c'est une surface minimale ; c'est d'ailleurs la seule surface minimale de révolution (voir la figure 2.1).

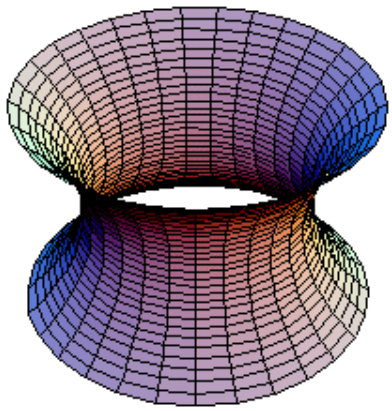


FIGURE 2.1 – Représentation d'un caténoïde

Dans le chapitre 1, nous avons étudié la courbure moyenne d'une surface de révolution paramétrée par (1.1), comme suit

$$2H = \frac{h'(u)g''(u) - h''(u)g'(u)}{(g'(u)^2 + h'(u)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{g'(u)}{h(u)(g'(t)^2 + h'(u)^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{2.6}$$

En exprimant la courbe sur le plan (x, z), on peut soit écrire $x = f(u), z = g(u)$ en choisissant un paramètre u tel que

$$h'(u)^2 + g'(u)^2 = 1. \tag{2.7}$$

Pour simplifier (2.6), on va choisir un paramètre u comme dans (2.7). En utilisant (2.7) et sa dérivation

$$h'(u)h''(u) + g''(u)g'(u) = 0$$

On obtient

$$(h'g'' - h''g')g' = h'g''g' - h''g'g' = -h'h'h'' - h''(1 - h'h') = -h''.$$

Donc

$$2H = \frac{g'}{h} - \frac{h''}{g'}.$$

Soit $H = 0$, *alors on a*

$$hh'' = (g')^2 = 1 - (h')^2.$$

Donc

$$(hh')' = (h')^2 + hh'' = 1.$$

En intégrant cette dernière équation, nous obtenons

$$\frac{1}{2}(h^2)' = hh' = u + c, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

On intègre (2.8) *une fois de plus, on obtient*

$$\begin{aligned} h^2 &= u^2 + 2cu + d, \\ h &= \sqrt{u^2 + 2cu + d}, \qquad \forall\, d \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

De (2.7), *on a*

$$g' = \pm\sqrt{1 - (h')^2} = \pm\sqrt{\frac{d - c^2}{u^2 + 2cu + d}}$$

On pose : $c = 0, d = a^2$ $(a > 0)$, *on trouve*

$$\begin{aligned} x &= h(u) = \sqrt{u^2 + a^2}, \\ z &= g(u) = \pm \int_0^u \frac{a}{\sqrt{t^2 + a^2}} dt = \pm a \sinh^{-1} \frac{u}{a}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Éliminez u *de* (2.9) *pour obtenir*

$$x = a \cosh \frac{z}{a} \tag{2.10}$$

Donc

$$z = a \cosh^{-1} \frac{x}{a}$$

Le caténoïde est obtenue en faisant tourner une caténaire (2.10) *dans Le plan* (x, z) *autour de l'axe* z *(voir la figure 2.2).*

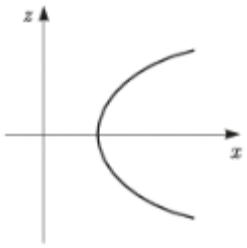


FIGURE 2.2 – Rotation d'une caténaire autour de l'axe z

Exemple 2.2.2. *L'hélicoïde.*

Une hélicoïde est une surface s'appuyant sur une hélice et sur un axe. Elle fut découverte par Jean-Baptiste Meusnier en 1776. C'est, avec le plan, la seule surface minimale réglée (voir la figure 2.3).

Ceci est une surface donnée par la représentation paramétrique

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = av + b.$$

son équation cartésienne est

$$z = a\tan^{-1}\frac{y}{x} + b.$$

sa courbure moyenne est :

$\sigma_u = (\cos v, \sin v, 0),\ \sigma_v = (-u\sin v, u\cos v, a),$

$\sigma_{uu} = (0,0,0),\ \sigma_{uv} = \sigma_{vu} = (-\sin v, \cos v, 0),\ \sigma_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$

$n = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}(a\sin v, -a\cos v, u),$

$E = 1,\ F = 0,\ G = u^2 + a^2,\ EG - F^2 = u^2 + a^2,$

$L = 0,\ M = -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}},\ N = 0,$

alors

$$H = 0.$$

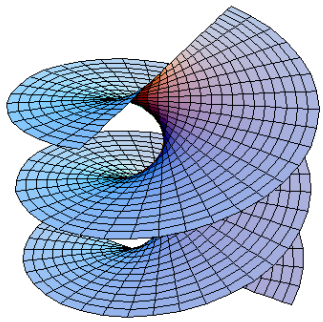


FIGURE 2.3 – Hélicoïde droit

Remarque 2.2.1. *Un hélicoïde droit peut être transformé continûment et isométriquement en un caténoïde, la surface reste constamment minimale (voir la figure 2.4).*

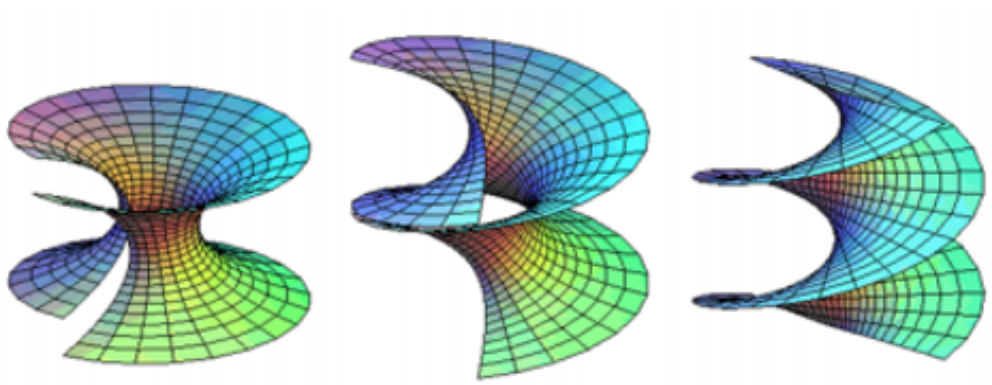


FIGURE 2.4 – Transformation de l'hélicoïde droit en caténoïde

Exemple 2.2.3. *Surface de Scherk.*

La surface de Scherk a été découverte en 1834. Il s'agissait de la première nouvelle surface minimale sans intersection découverte depuis l'hélicoïde (voir la figure 2.5).

La surface de Scherk est définie par l'équation implicite :

$$e^z \cos x = \cos y \tag{2.11}$$

Si on pose $x = u$ *et* $y = v$, *alors*

$$z = \log \frac{\cos v}{\cos u}.$$

La courbure moyenne :

$\sigma_u = (1, 0, \tan u), \quad \sigma_v = (0, 1, -\tan v),$

$\sigma_{uu} = (0, 0, \sec^2 u), \quad \sigma_{uv} = \sigma_{vu} = 0, \quad \sigma_{vv} = (0, 0, -\sec^2 v),$

$n = \dfrac{(-\tan u, \tan v, 1)}{\sqrt{\tan^2 u + \tan^2 v + 1}}$

$E = \sec^2 u, \quad F = -\tan u \tan v, \quad G = \sec^2 v, \quad EG - F^2 = \tan^2 u + \tan^2 v + 1,$

$L = \dfrac{\sec^2 u}{\sqrt{\tan^2 u + \tan^2 v + 1}}, \quad M = 0, \quad N = -\dfrac{\sec^2 v}{\sqrt{\tan^2 u + \tan^2 v + 1}}$

alors

$$H = 0$$

donc la surface de Scherk est une surface minimale.

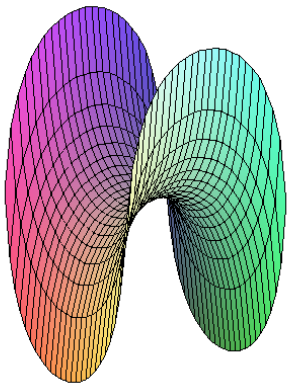


FIGURE 2.5 – La surface de Scherk

2.3 Systèmes de coordonnées isothermes

Définition 2.3.1. *Une application différentiable qui préserve les angles est dite une application conforme (isotherme).*

Définition 2.3.2. *Soit S une surface définie dans $\mathbb{R}^3$, paramétrée par la fonction vectorielle σ telle que :*

$$\sigma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

σ est dite un système de coordonnées isothermes de S si on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\sigma}{\partial u^2} &= \dfrac{\partial^2\sigma}{\partial v^2} \\ \dfrac{\partial\sigma}{\partial u\partial v} &= 0 \end{cases}$$

c-à-d les coefficients de la première forme fondamentale sont telles que : $E = G$ et F =0.

Dans ce cas :

$$\begin{aligned} H &= \frac{EN + EL}{2E^2} \\ &= \frac{N + L}{2E} \\ &= \frac{(\sigma_{uu} + \sigma_{vv}).n}{2E} \\ &= \frac{\triangle\sigma.n}{2E} \end{aligned}$$

alors :

$$\triangle\sigma = (2EH).n$$

Remarque 2.3.1. *La fonction $\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial v^2}$ est notée $\triangle\sigma$ et est appelée «laplacien» de σ.*

Fonction harmonique

Définition 2.3.3. *Soit f une fonction de $U \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs réelles de classe C^2 sur U , on dit que f est harmonique si :*

$$\forall (u,v) \in U \subset \mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$$

Théorème 2.3.1. *Une surface $\sigma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ paramétrée par un système de coordonnées isothermes (u,v) est une surface minimale si et seulement si chaque composante x(u,v), y(u,v) ou z(u,v) est une fonction harmonique, c.-à-d.*

$$\triangle x(u,v) = \triangle y(u,v) = \triangle z(u,v) = 0.$$

Preuve. Soit σ une surface paramétrée par un système de coordonnées isothermes alors

$$\triangle \sigma = 2EHn.$$

Si σ est une surface minimale, c'est-à-dire H=0, alors $\triangle \sigma = 2EHn = 0$, donc x, y, z sont harmoniques.

Inversement. Si x, y, z sont des fonctions harmoniques, $0 = \triangle \sigma = 2EHn$. Comme le vecteur normale n et le coefficient E de la première forme fondamentale sont non nul alors H = 0, donc la surface est minimale. □

2.4 Quelques rappelles sur l'analyse complexe

2.4.1 Fonction holomorphe

Soient U un ouvert du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes et f une fonction de U dans $\mathbb{C}$.

$$\begin{array}{rccc} f & : U \in \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \omega & \longmapsto & f(\omega) \end{array}$$

Posons : $\omega = u + iv$ et $f(\omega) = P(u,v) + iQ(u,v)$, où $P(u,v) = Ref(\omega)$ et $Q(u,v) = Imf(\omega)$, on est donc ramené à une application φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, et ceci en posant $\varphi(u,v) = (P(u,v), Q(u,v))$.

Définition 2.4.1.1. *On dit que f est holomorphe en $\omega_0 \in U$ si et seulement si*

$$\lim_{\omega \to \omega_0} \frac{f(\omega) - f(\omega_0)}{\omega - \omega_0}$$

existe. La limite se note $f'(\omega_0)$ où $\dfrac{\partial f}{\partial \omega}(\omega_0)$ et s'appelle dérivée de f en ω_0.

On dit que f est holomorphe sur l'ouvert U si elle est holomorphe en tout point ω_0 de U.

Remarque 2.4.1. *f est dérivable si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{\omega}} = 0$.*

2.4.2 Conditions de Cauchy-Riemann

Théorème 2.4.2.1. *La fonction $f(\omega) = P(u,v) + iQ(u,v)$ est différentiable dans le champ complexe, au point $\omega_0 = u_0 + iv_0$ si et seulement si, les fonctions $(u,v) \to P(u,v)$ et $(u,v) \to Q(u,v)$ sont différentiables au point (u_0, v_0)et si leurs dérivées vérifient les conditions de Cauchy-Riemann.*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial u}(u_0, v_0) = \dfrac{\partial Q}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \dfrac{\partial P}{\partial v}(u_0, v_0) = -\dfrac{\partial Q}{\partial u}(u_0, v_0) \end{cases}$$

Donc la dérivée en un point ω quelconque est donnée par :

$$\begin{aligned} f\prime(\omega) &= \frac{\partial P}{\partial u}(u,v) + i\frac{\partial Q}{\partial u}(u,v) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial v}(u,v) - i\frac{\partial P}{\partial v}(u,v) \end{aligned}$$

2.4.3 Fonction méromorphe

Une fonction méromorphe est une fonction holomorphe dans tout le plan complexe, sauf éventuellement sur un ensemble de points isolés dont chacun est un pôle pour la fonction.

Théorème 2.4.3.1. *Soit f une fonction holomorphe et telle que $f(\omega) = P(u,v) + iQ(u,v)$, alors les deux fonctions réelles P et Q sont harmoniques.*

Remarque 2.4.2. *Un point ω_0 est un pôle si f tend vers ∞ lorsque ω tend vers ω_0.*

Théorème 2.4.3.2. *Soit P une fonction harmonique de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, alors il existe une fonction f holomorphe de $U \subseteq \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $Re(f) = P$ (ou $Im(f) = P$).*

2.5 Représentation de Weierstrass-Enneper pour les surfaces minimales

En1866, K.Weierstrass introduisit une méthode générale de construction de surfaces minimales en utilisant la théorie des fonctions de la variable complexe. Cette méthode a permis la construction de nombreuses surfaces minimales.

2.5.1 Théorie préliminaire

A partir de maintenant, on va considérer toujours une surface donnée par $\sigma = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ et

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & U \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & \varphi(u,v) = \sigma_u - i\sigma_v. \end{array}$$

tel que

$$\varphi_1(\omega) = \frac{\partial x}{\partial u} - i\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \varphi_2(\omega) = \frac{\partial y}{\partial u} - i\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \varphi_3(\omega) = \frac{\partial z}{\partial u} - i\frac{\partial z}{\partial v}. \quad (2.12)$$

des fonctions complexes avec $\omega = u + iv$.

Théorème 2.5.1.1. *$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont des fonctions holomorphes si et seulement si x(u, v), y(u, v), z(u, v) sont des fonctions harmoniques.*

Preuve. φ_1 est une fonction holomorphe si et seulement si $\frac{\partial x}{\partial u}$ et $\frac{\partial x}{\partial v}$ satisfont les équations de Cauchy-Riemann c-à-d

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= -\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} \end{cases}$$

on a donc

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} = 0$$

alors $x(u, v)$ est une fonction harmonique. De même $y(u, v), z(u, v)$ sont aussi des fonctions harmoniques. □

Lemme 2.5.1.1. *Soit σun système de coordonnées isothermes d'une surface minimale. Alors les fonctions holomorphes $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ définis par (2.12) satisfont aux deux conditions suivantes*

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0 \quad et \quad \varphi \text{ est non nul.}$$

De plus, toutes les fonctions holomorphe φ satisfaisant à ces conditions donnera lieu au système de coordonnées isothermes d'une surface minimale σ par (2.12).

Preuve. En admettant que $\sigma = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ est un système de coordonnées isothermes d'une surface minimale, on voit que

$$\begin{aligned} \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 &= \mid \sigma_u \mid^2 - \mid \sigma_v \mid^2 - 2i < \sigma_u, \sigma_v > \\ &= E - G - 2iF \end{aligned}$$

Puisque σ est un système de coordonnées isothermes, les coefficients de la première forme fondamentale sont :$E = G$ et $F = 0$. Alors

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0.$$

Pour l'inverse, nous supposons que les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ satisfont les conditions données et prouvera que σ est un système de coordonnées isothermes et

minimale. Définissez maintenant

$$\sigma(u,v) = Re\int_{\delta}\varphi(\lambda)d\lambda.$$

où δ est une courbe dans un domaine simplement connecté $U \subseteq C$du point de départ $\omega_0 = u_0 + iv_0$ à un $\omega = u + iv$ arbitraire. On va calculer les dérivées partielles et va utiliser le fait que :

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = \frac{d\sigma}{d\omega} \quad et \quad \frac{\partial\sigma}{\partial v} = i\frac{d\sigma}{d\omega}$$

alors on a

$$\sigma_u = \frac{\partial}{\partial u}Re\left(\int_{\delta}\varphi(\lambda)d\lambda\right) = Re\left(\frac{d}{d\omega}\int_{\delta}\varphi(\lambda)d\lambda\right) = Re\varphi(\omega)$$

$$\sigma_v = \frac{\partial}{\partial u}Re\left(\int_{\delta}\varphi(\lambda)d\lambda\right) = Re\left(\frac{d}{d\omega}i\int_{\delta}\varphi(\lambda)d\lambda\right) = -Im\varphi(\omega)$$

par conséquent

$$\varphi(\omega) = \sigma_u(u,v) - i\sigma_v(u,v).$$

Pour montrer que σ est un système de coordonnées isothermes, on utilise

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = E - G - 2iF = 0$$

Cela implique que

$$E = G \quad et \quad F = 0.$$

La deuxième condition, φ n'est pas nulle. Avec l'identité

$$< \sigma_u, \sigma_u > = < \sigma_v, \sigma_v >$$

cela implique que ni σ_u ni σ_v non nulle. Donc σ est régulier.

□

Théorème 2.5.1.2. *soient $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $g : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction méromorphe tel que $f.g^2$ est une fonction holomorphe. De plus, supposons que si $\eta \in U$ est un pôle d'ordre n de g alors η est un zéro d'ordre $2n$ de f, et ce sont les seuls zéros de f. Alors*

$$\varphi(\omega) = \frac{f(\omega)}{2}((1 - g(\omega)^2), i(1 + g(\omega)^2), 2g(\omega)). \tag{2.13}$$

satisfait les conditions pour φ du lemme 2.2. De plus, pour chacun de ces φ, il existe une fonction holomorphe f et une fonction méromorphe g tel que (2.13) est vraie.

Preuve. Étant donné une fonction φ telle que (2.13) soit vérifiée, nous avons que :

$$\begin{aligned}\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 &= \frac{1}{4}f(\omega)^2(1 - g(\omega)^2)^2 - \frac{1}{4}f(\omega)^2(1 + g(\omega)^2)^2 + f(\omega)^2 g(\omega)^2 \\ &= -f(\omega)^2 g(\omega)^2 + f(\omega)^2 g(\omega)^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

La restriction des zéros et des pôle de f et g, respectivement, implique que

$$f(\omega)g(\omega)^2 \neq 0.$$

Donc, si on fixe ω la première et deuxième coordonnées ne peuvent pas être toutes les deux égales à zéros. Par conséquent, φ est non nul. Ensuite, on suppose que φ est une fonction holomorphe satisfaisant $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$, φ est non nul et soit

$$f(\omega) = \varphi_1(\omega) - i\varphi_2(\omega) \quad et \quad g(\omega) = \frac{\varphi_3(\omega)}{\varphi_1(\omega) - i\varphi_2(\omega)} \tag{2.14}$$

alors f est une fonction holomorphe et g est le quotient des fonctions holomorphes. Si le dénominateur de g est identique à zéro, on laisse à la place

$$g(\omega) = \frac{\varphi_3(\omega)}{\varphi_1(\omega) + i\varphi_2(\omega)}$$

Maintenant, le dénominateur de g n'est pas identiquement nul. Par conséquent, g est une fonction méromorphe. De plus

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0 \tag{2.15}$$

implique que

$$(\varphi_1 + i\varphi_2)(\varphi_1 - i\varphi_2) = -\varphi_3^2$$

Alors

$$\varphi_1 + i\varphi_2 = -fg^2.$$

De(2.14) et de (2.15)

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}f(1-g^2) \ , \ \varphi_2 = \frac{i}{2}f(1-g^2) \ , \ \varphi_3 = fg.$$

Alors

$$\varphi(\omega) = \frac{f(\omega)}{2}((1-g(\omega)^2), i(1+g(\omega)^2), 2g(\omega)).$$

□

Cette relation entre la fonction f,g et la minimalité de σ par l'équation

$$\varphi(\omega) = \sigma_u - i\sigma_v = \frac{f(\omega)}{2}((1-g(\omega)^2), i(1+g(\omega)^2), 2g(\omega)).$$

donnez nous les outils nécessaires pour définir la représentation de Weierstrass-Enneper.

2.5.2 Définition de la représentation de Weierstrass-Enneper

Définition 2.5.2.1. *Soit S une surface minimale non plane définie sur un domaine simplement connexe $D \subset \mathbb{C}$. Soit λ une courbe contenue dans U d'un point fixe z_0 à $z = u + iv$. Soit f une fonction holomorphe, non constamment nulle, et g une fonction méromorphe telle que fg^2 soit holomorphe. De plus, supposons*

qu'à chaque pôle de g d'ordre n, f a un zéro d'ordre $2n$ et que f n'a pas d'autres zéros. Alors

$$\sigma(u,v) = x_0 + Re\left(\int_\lambda \frac{f(\eta)}{2}(1-g(\eta)^2, i(1+g(\eta)^2), 2g(\eta)d\eta)\right).$$

tel que $x_0 \in \mathbb{R}^3$. c'est un paramétrage régulier d'une surface minimale. De plus, pour chaque surface minimale non plane, il existe une telle représentation. C'est ce qu'on appelle ***la représentation de Weierstrass-Enneper*** *des surfaces minimales.*

2.6 Applications

Nous allons maintenant voir comment la représentation de Weierstrass-Enneper peut être utilisée pour trouver des surfaces minimales en intégrant simplement des fonctions complexes.

2.6.1 Le caténoïde et l'hélicoïde

Nous considérons les fonctions holomorphes.

$$f(\omega) = e^{-\omega} \quad et \quad g(\omega) = e^{\omega}.$$

on a

$$\begin{aligned}
\sigma(u,v) &= x_0 + Re\left(\int_0^{\omega} \frac{f(\eta)}{2}(1-g(\eta)^2, i(1+g(\eta)^2), 2g(\eta)d\eta)\right) \\
&= x_0 + Re\left(\int_0^{\omega} \frac{e^{-\eta}}{2}(1-e^{2\eta}, i(1+e^{2\eta}), 2e^{\eta})d\eta\right) \\
&= x_0 + Re\left(\int_0^{\omega} \frac{1}{2}(e^{-\eta}-e^{\eta}, i(e^{-\eta}+e^{\eta}), 2)d\eta\right) \\
&= Re\left(\frac{1}{2}(-e^{-\omega}-e^{\omega}), -\frac{1}{2i}(-e^{-\omega}+e^{\omega}), \omega\right) \\
&= Re\left(-\cosh\omega, i\sinh\omega, \omega\right).
\end{aligned}$$

alors

$$\sigma(u,v) = (-\cosh u\cos v, -\cosh u\sin v, u).$$

2.6.2 La surface d'Enneper

Un autre exemple intéressant d'une surface minimale est la surface d'Enneper. Sa représentation Weierstrass-Enneper s'obtient en choisissant

$$(f(\omega), g(\omega)) = (1, \omega).$$

ona

$$\begin{aligned}
\sigma(u,v) &= Re\left(\frac{1}{2}\int_0^{\omega}((1-\eta^2), i(1+\eta^2), 2\eta)d\eta\right), \\
&= \frac{1}{2}Re\left(\omega - \frac{\omega^3}{3}, i\omega + \frac{i\omega^3}{3}, \omega^2\right).
\end{aligned}$$

alors

$$\sigma(u,v) = \frac{1}{2}\left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v + \frac{v^2}{3} - u^2v, u^2 - v^2\right).$$

qui est la surface d'Enneper.

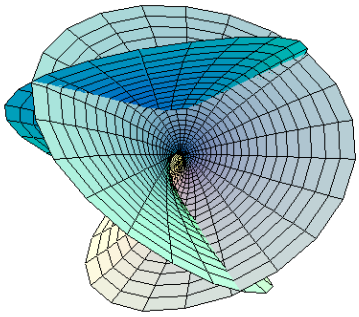


FIGURE 2.6 – Une surface d'Enneper avec intersection.

2.6.3 Surface minimale de Scherk

La surface de Scherk est définie par l'équation

$$e^z = \frac{\cos y}{\cos x}.$$

Nous allons maintenant montrer que sa représentation de Weierstrass-Enneper est donnée par les fonctions $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm 1, \pm i\} \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tel que

$$(f(\omega), g(\omega)) = \left(\frac{2}{1-\omega^4}, \omega\right).$$

On note d'abord que

$$f(1-g^2) = \frac{2}{1+\omega^2} = \frac{i}{\omega+i} - \frac{i}{\omega-i},$$
$$if(1-g^2) = \frac{2i}{1-\omega^2} = \frac{i}{\omega+1} - \frac{i}{\omega-1},$$
$$2fg = \frac{4\omega}{1-\omega^4} = \frac{2\omega}{\omega^2+1} - \frac{2\omega}{\omega^2-1}.$$

On intègre cela, on obtient

$$\sigma(u,v) = Re\left(i\ln\frac{\omega+i}{\omega-i}, i\ln\frac{\omega+1}{\omega-1}, \ln\frac{\omega^2+1}{\omega^2-1}\right)$$

Donc

$$\sigma(u,v) = Re\left(-\arg\frac{\omega+i}{\omega-i}, -\arg\frac{\omega+1}{\omega-1}, \ln\left|\frac{\omega^2+1}{\omega^2-1}\right|\right)$$

On va trouver des expressions pour $\cos x$ et $\cos y$

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos\left(-\arg\frac{\omega+i}{\omega-i}\right),\\ &= \cos\left(\arg\frac{\omega+i}{\omega-i}\right),\\ &= \left|\frac{\omega-i}{\omega+i}\right| Re\left(\frac{\omega+i}{\omega-i}\right),\\ &= \frac{|\omega|^2-1}{|\omega^2+1|}.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\cos y &= \cos\left(-\arg\frac{\omega+1}{\omega-1}\right),\\ &= \frac{|\omega|^2-1}{|\omega^2-1|}.\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\frac{\cos y}{\cos x} = \frac{\omega^2+1}{|\ \omega^2-1\ |} = e^z$$

Par conséquent, les fonctions f et g comme ci-dessus définissent la surface de Scherk.

Bibliographie

[1] Banchoff T., Lovett S., Differential Geometry of curves and surfaces. *2nd ed. Boca Raton, FL : A. K Peters/CRC Press, (2016).*

[2] Berge M., Differential Geometry, Manifolds, curves and surfaces (GTM 115). *Springer, New York, 1988.*

[3] Boris T., Courbes et surfaces, cours, *Université Joseph-Fourier, Grenoble I.*

[4] Costa C., Surfaces minimales dans $\mathbb{R}^3$. *Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 7, Chambéry-Grenoble, (1988-1989).*

[5] Do Carmo M P., Differential Geometry of Curves and Surfaces. *Revised and Updated Second Edition, Dover, 2016.*

[6] Gray A., Modern differential geometry of curves and surfaces with mathematica. *CRC Press, Boca Raton, Florida, (2007).*

[7] Karcher H., Construction of Minimal Surfaces. *Tokyo (1989).*

[8] Kobayashi S., Differential Geometry of Curves and Surfaces. *Mathematics Subject Classification, Tokyo Université of Science Chiba, Japan (2019).*

[9] Oprea J., Differential geometry and its application. *Mathematical Association of America, Washington, 2007.*

[10] Osserman R., A Survey of Minimal Surfaces. *Dover (2002).*