الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة المدية
كلية العلوم

ملخّص دروس و مسائل في مادة السلاسل و المعادلات التفاضلية

وفق البرنامج الدراسي الرّسمي للسنة الثانية ليسانس فيزياء

أسامة حوحو

أستاذ محاضر بقسم علوم المادة

صادق عليه المجلس العلمي لكلية العلوم بتاريخ 09 ماي 2022

الرقم التسلسلي: .....

السنة الجامعية 2021-2022

راجع مادة هذه المطبوعة و قام بتحكيمها كل من:

1. د. ضيف الله عيساوي، أستاذ محاضر بقسم الرياضيات و الإعلام الآلي بكلية العلوم جامعة المدية.
2. د. نصر الدين زغو، أستاذ محاضر بالمدرسةالعليا للأساتذة بقسنطينة.

إهداء

أهدي هذا العمل المتواضع إلى أبي و أمي.

شكر و عرفان

أود أن أشكر كلا من الأستاذين و الزميلين، د. ضيف الله عيساوي، أستاذ محاضر بقسم الرياضيات و الإعلام الآلي بكلية العلوم جامعة المدية، و د. نصر الدين زغو أستاذ محاضر بالمدرسة العليا للأساتذة بقسنطينة، على قبولهما قراءة و مراجعة هذه المادة و على ملاحظاتهما القيّمة التي ساهمت في إخراج هذا المطبوع في شكله الحالي.

المحتويات

إهداء v

شكر و عرفان vii

تمهيد xvii

1 التكامل البسيط، المضاعف و الثلاثي 1

1.1 مفهوم التكامل 1

2.1 مجموع ريمان 4

3.1 تكامل ريمان 5

4.1 حساب تكامل ريمان 5

5.1 بعض خصائص التكامل 7

6.1 المُبرهنة الأساسية للتفاضل و التكامل 8

7.1 بعض تطبيقات حساب التكامل 8

1.7.1 القيمة المتوسطة لدالة على مجال 8

2.7.1 طول منحني دالة 9

3.7.1 المساحة المحصورة بين منحنيين 10

4.7.1 حساب حجم مجسّم دوراني 12

5.7.1 حجم مجسم كيفي 16

8.1 التكامل المضاعف 17

9.1 تحويل متغيرات التكامل المضاعف 20

10.1 الاحداثيات القطبية لحساب بعض التكاملات المضاعفة 21

11.1 التكامل الثلاثي 22

12.1 تحويل متغيرات التكامل الثلاثي 22

13.1 الاحداثيات الكروية لحساب بعض التكاملات الثلاثية 23

14.1 التكامل المتعدد 25

15.1 تمارين الباب 1 27

التمرين 1.1: مفهوم تكامل ريمان 27

التمرين 2.1: بعض خصائص تكامل ريمان 27

التمرين 3.1: المُبرهنة الأساسية للتفاضل و التكامل 28
التمرين 4.1: الدالة الأصلية 28
التمرين 5.1: مجموع ريمان 28
التمرين 6.1: التكامل و حساب المساحة (1) 28
التمرين 7.1: التكامل و حساب المساحة (2) 29
التمرين 8.1: المساحة المحصورة بين منحنيين 29
التمرين 9.1: القيمة المتوسطة لدالة على مجال (1) 29
التمرين 10.1: القيمة المتوسطة لدالة على مجال (2) 29
التمرين 11.1: طول منحني دالة (1) 29
التمرين 12.1: طول منحني دالة (2) 29
التمرين 13.1: حجم مجسم دوران حول محور الفواصل 30
التمرين 14.1: التكامل الثنائي 30
التمرين 15.1: التكامل الثنائي - الاحداثيات القطبية 30
التمرين 16.1: التكامل الثلاثي - الإحداثيات الكروية 30

2 التكامل المعتل **31**
1.2 مفهوم التكامل المعتل 31
2.2 حساب التكامل المعتل من النوع الأول 34
3.2 حساب التكامل المعتل من النوع الثاني 35
4.2 مفهوم تقارب/تباعد التكامل المعتل 36
5.2 دراسة تقارب التكامل المعتل من النوع الأول 37
6.2 دراسة تقارب التكامل المعتل من النوع الثاني 43
7.2 تمارين الباب 2 49
التمرين 1.2: حساب التكامل المعتل 49
التمرين 2.2: التكامل المعتل من النوع 1 و 2 49
التمرين 3.2: المساحة و الحجم 49
التمرين 4.2: القيمة الرئيسية لـ كوشي للتكامل المعتل 49
التمرين 5.2: دراسة تقارب بعض التكاملات المعتلة 49
التمرين 6.2: تقارب التكامل-p من النوع الأول 50
التمرين 7.2: تقارب التكامل-p من النوع الثاني 50
التمرين 8.2: التقارب المطلق - التقارب الشرطي 50
التمرين 9.2: التقارب المطلق 50
التمرين 10.2: التقارب الشرطي 50

3 المعادلات التفاضلية العادية **51**
1.3 المعادلات التفاضلية العادية 51
2.3 المعادلات التفاضلية العادية من الدرجة الأولى 52

3.3 طريقة فصل المتغيرات 54
4.3 المعادلة التفاضلية التامة 55
5.3 المعاملات التكاملية 58
6.3 المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى 59
7.3 المعادلة التفاضلية المتجانسة 61
8.3 طريقة التعويض 63
9.3 معادلة برنولي 66
10.3 الشرط الابتدائي 68
11.3 المعادلات التفاضلية الخطية 69
12.3 المعادلات التفاضلية الخطية بمعاملات ثابتة 72
13.3 طريقة المعاملات غير المحددة 75
14.3 طريقة تغاير الوسائط 79
15.3 تمارين الباب 3 83
التمرين 1.3: مبرهنة فصل المتغيرات 83
التمرين 2.3: طريقة فصل المتغيرات 83
التمرين 3.3: المعادلة التفاضلية المتجانسة 83
التمرين 4.3: المعادلة التفاضلية التامة 83
التمرين 5.3: المعاملات التكاملية 83
التمرين 6.3: معادلة برنولي 84
التمرين 7.3: المعادلة المميزة 84
التمرين 8.3: طريقة المعاملات غير المحددة 84
التمرين 9.3: طريقة تغاير الوسيط 84

4 السلاسل العددية 85
1.4 السلسلة العددية اللانهائية 85
2.4 مفهوم تقارب/تباعد سلسلة لا نهائية 86
3.4 السلسلة الهندسية 86
4.4 السلسلة-p 88
5.4 التقارب المطلق 89
6.4 اختبارات تقارب السلاسل 90
1.6.4 اختبار المقارنة 90
2.6.4 اختبار مقارنة النهاية 91
3.6.4 اختبار التكامل 92
4.6.4 اختبار السلسلة المتناوبة 93
5.6.4 اختبار النسبة 94
6.6.4 اختبار الجذر 95
7.4 سلسلة القوى 96
8.4 سلسلة القوى و الدوال 98
9.4 سلسلة فوريه 102
10.4 تمارين الباب 4 107

التمرين 1.4: نهاية الحد العام لمتتالية عددية 107
التمرين 2.4: نهاية حدود سلسلة متقاربة/متباعدة 107
التمرين 3.4: السلسلة الهندسية 107
التمرين 4.4: التقارب المطلق 107
التمرين 5.4: اختبار المقارنة 108
التمرين 6.4: اختبار مقارنة النهاية مع السلسلة-p 108
التمرين 7.4: تقارب السلسلة-p 108
التمرين 8.4: اختبارات التقارب 108
التمرين 9.4: سلسلة القوى 109
التمرين 10.4: نصف قطر تقارب سلسلة القوى 109
التمرين 11.4: نصف قطر تقارب مشتقة سلسلة القوى 109
التمرين 12.4: سلسلة القوى المرفقة بدالة 109
التمرين 13.4: نصف قطر تقارب تكامل سلسلة القوى 110
التمرين 14.4: نصف قطر تقارب بعض الدوال الشهيرة 110
التمرين 15.4: نصف قطر تقارب سلسلة النشر الحدّاني 110
التمرين 16.4: معاملات سلسلة فوريه 110
التمرين 17.4: معاملات سلسلة فوريه لدالة زوجية أو فردية 110
التمرين 18.4: سلسلة فوريه لدالة دورية 110

5 تحويل فوريه 113
1.5 الدوال الكمولة 113
2.5 جداء التزاوج 115
3.5 تحويل فوريه 116
4.5 بعض خصائص تحويل فوريه 117
5.5 تحويل فوريه العكسي 120
6.5 تحويل فوريه لحلّ المعادلات التفاضلية 121
7.5 تمارين الباب 5 127
التمرين 1.5: جداء التزاوج 127
التمرين 2.5: تحويل فوريه كمول 127
التمرين 3.5: تحويل فوريه للانسحاب 127
التمرين 4.5: تحويل فوريه لجداء دالة كمولة مع الدالة الأسية 128
التمرين 5.5: تحويل فوريه للتمدد 128
التمرين 6.5: تحويل فوريه لمشتقة دالة 128
التمرين 7.5: تحويل فوريه لجداء دالة بالدالة x^n 128
التمرين 8.5: تحويل فوريه لجداء تزاوج دالتين كمولتين 128
التمرين 9.5: بعض خواص تحويل فوريه 129
التمرين 10.5: تحويل فوريه 129
التمرين 11.5: تحويل فوريه العكسي 1 129
التمرين 12.5: تحويل فوريه العكسي 2 129

6 تحويل لابلاس **131**
1.6 عبارة تحويل لابلاس 131
2.6 وُجود تحويل لابلاس للدوال من النوع الأسّي 132
3.6 خصائص تحويل لابلاس 133
1.3.6 تحويل لابلاس خطّي 133
2.3.6 تحويل لابلاس لمشتقة دالة 134
3.3.6 مشتقة تحويل لابلاس 134
4.3.6 تحويل لابلاس لانسحاب دالة - قاعدة الانسحاب 135
5.3.6 انسحاب تحويل لابلاس - مبرهنة الانسحاب 135
6.3.6 تحويل لابلاس لتكامل دالة 135
7.3.6 تحويل لابلاس لجداء تزاوج دالتين 136
4.6 تحويل لابلاس العكسي 136
5.6 تطبيق تحويل لابلاس في حل المعادلات التفاضلية 137
6.6 تمارين الباب 6 139
التمرين 1.6: تحويل لابلاس للدوال من النوع الأسّي-a 139
التمرين 2.6: خطّية تحويل لابلاس 139
التمرين 3.6: تحويل لابلاس لمشتقة دالة 139
التمرين 4.6: اشتقاق تحويل لابلاس 139
التمرين 5.6: تحويل لابلاس لانسحاب دالة 140
التمرين 6.6: انسحاب تحويل لابلاس 140
التمرين 7.6: تحويل لابلاس لتكامل دالة 140
التمرين 8.6: تحويل لابلاس لجداء تزاوج دالتين 140
التمرين 9.6: تحويل لابلاس لبعض الدوال الشهيرة 140
التمرين 10.6: تحويل لابلاس لحل المعادلات التفاضلية 141

قائمة الأشكال

1.1 علاقة التكامل بالمساحة المحصورة بين المنحنى البياني لدالة و محور الفواصل: حالة الدالة الموجبة. 2
2.1 علاقة التكامل بالمساحة المحصورة بين المنحنى البياني لدالة و محور الفواصل: حالة الدالة السالبة. 3
3.1 علاقة التكامل بالمساحة المحصورة بين المنحنى البياني لدالة و محور الفواصل: حالة الدالة التي تغير إشارتها في مجال التكامل. 3
4.1 مجموع ريمان: حساب المساحة المحصورة بين المنحني و المحور الفواصل. 4
5.1 التقسيم المنتظم لمجال التكامل. 6
6.1 المساحة المحصورة بين منحنيين أحدهما فوق الآخر. 10
7.1 المساحة المحصورة بين منحنيين يتقاطعان في نقطة. 11
8.1 مجسم الدوران. 13
9.1 مجسم الدوران - أمثلة 14
10.1 مجسم كيفي محصور بين مستويين 17
11.1 حساب حجم كرة 18

1.4 شروط ديريكليه - مثال. 103

تمهيد

هذا ملخص دروس في السلالسل العددية و المعادلات التفاضلية، أعطيت على شكل محاضرات لطلبة السنة الثانية ليسانس فيزياء بقسم علوم المادة، كلية العلوم، جامعة المدية بين عامي 2018 و 2022.

إنّ هذه المادة استمرار لمادة التحليل التي درسها الطلبة خلال السنة الأولى بالجامعة، حيث ستوظف العديد من المفاهيم التي درسها الطالب في مادة التحليل من أجل دراسة و فهم مواضيع جديدة و مهمة يحتاجها الطالب في عدة مواد أخرى يدرسها أو سيدرسها خلال مساره الدراسي أو البحثي.

تشمل هذه المادة مواضيع مختلفة لكنها مترابطة و متكاملة فيما بينها. سندرس التكاملات الصحيحة و المعتلة و بعض تطبيقاتها، بعض أنواع المعادلات التفاضلية و طرق حلّها، دراسة تقارب السلالسل العددية، ثم في الأخير نتطرق إلى بعض خصائص و تطبيقات تحويلي لابلاس[1] و فوريه[2].

[1] Pierre-Simon Laplace, 1749-1827.
[2] Jean-Baptiste Joseph Fourier, 1768-1830.

باب 1

التكامل البسيط، المضاعف و الثلاثي

نهتم في هذا الباب بدراسة تكامل الدوال الحقيقية لمتغيرات حقيقية. نبدأ بتعريف تكامل ريمان[1] ثم نستعرض بعض تطبيقات التكامل لحساب الطول، المساحة، الحجم و القيم المتوسطة لدالة ما على مجال. و بعد ذلك نتطرق إلى كيفية حساب التكاملات المضاعفة و الثلاثية أين سنعطي أمثلة عن استعمال الاحداثيات الكارتزية، القطبية و الكروية.

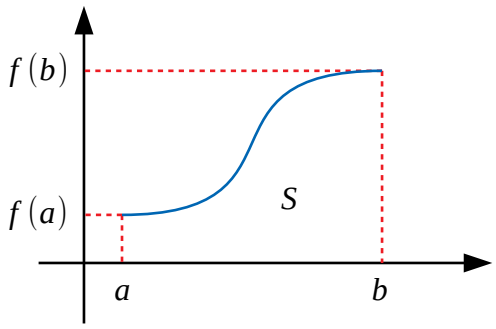
1.1 مفهوم التكامل

تعريف

لتكن f دالة حقيقية لمتغير حقيقي، معرفة و مستمرة على المجال $[a,b]$ حيث a و b عددان حقيقيان. نفرض أن الدالة f تأخذ دومًا قيمًا موجبةً على هذا المجال، كما هو مُوضّح في الشكل 1.1.
نسمّي المساحة المحصورة بين منحني الدالة f و محور الفواصل بين النقطتين a و b بـ تكامل f على المجال $[a,b]$، و يُرمز له بـ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$، و نكتب:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \equiv S \ . \tag{1}$$

[1] Bernhard Riemann, 1826-1866.



شكل 1.1: علاقة التكامل بالمساحة المحصورة بين المنحنى البياني لدالة و محور الفواصل: حالة الدالة الموجبة.

ملاحظة:
التعريف أعلاه يخص الدوال التي تحافظ على إشارة موجبة في مجال مُعطى. يُمكن أيضا تعريف تكامل دالة سالبة أو التي تغير من إشارتها على مجال التكامل، و ذلك كما يلي:

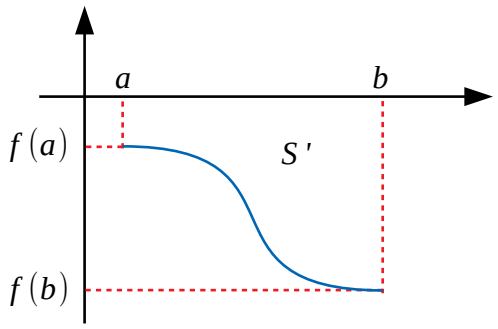
1. إذا كانت إشارة الدالة f سالبة دوما على المجال $[a,b]$ فإنّه يُعرّف تكاملها على ذلك المجال بالمساحة المحصورة بين بيان هذه الدالة و محور الفواصل بين النقطتين a و b، لكن بإشارة سالبة، أنظر الشكل 2.1، و نكتب حينئذٍ :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \equiv -S' \,. \tag{2}$$

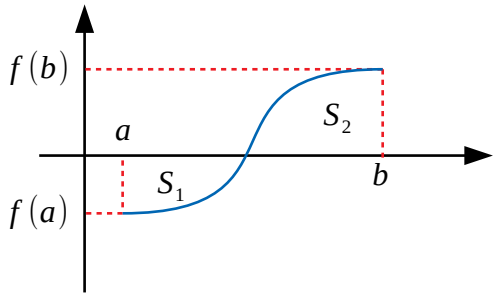
2. أمّا إذا كانت الدالة f تغيّر من إشارتها في المجال $[a,b]$، أنظر مثلا الشكل 3.1، فإن تكاملها على هذا المجال يساوي الفرق بين المساحة الموجودة فوق محور الفواصل و تلك الموجودة أسفله :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \equiv -S_1 + S_2 \,. \tag{3}$$

و على العموم، عندما تغير الدالة f من إشارتها على عدد كيفي من المجالات الجزئية من مجال التكامل، فإن تكامل هذه الدالة على مجال التكامل لا يمثل في هذه الحالة المساحة المحصورة بين بيان الدالة المكاملة و محور الفواصل و إنّما يساوي المجموع الجبري للمساحات المحصورة بين بيان الدالة و محور الفواصل في كل مجال جزئي مع الأخذ في الحسبان إشارة المساحة (موجبة/سالبة) حسب إشارة قيم الدالة على تلك المجالات الجزئية.



شكل 2.1: علاقة التكامل بالمساحة المحصورة بين المنحنى البياني لدالة و محور الفواصل: حالة الدالة السالبة.



شكل 3.1: علاقة التكامل بالمساحة المحصورة بين المنحنى البياني لدالة و محور الفواصل: حالة الدالة التي تغير إشارتها في مجال التكامل.

مثال

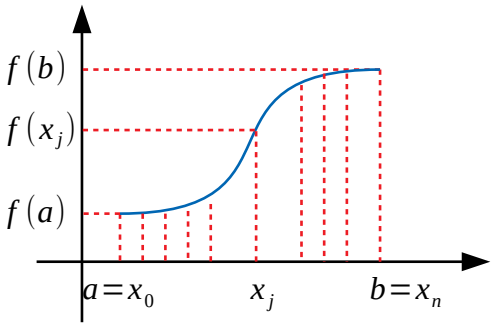
لتكن f دالة خطية معرفة على المجال $[a,b]$ بـ $f(x)=\alpha x+\beta$، α و β حقيقيان. نعلم أن منحني هذه الدالة عبارة عن خط مستقيم يربط النقطتين $P_a\equiv(a,f(a))$ و $P_b\equiv(b,f(b))$ حيث $f(a)=\alpha a+\beta$ و $f(b)=\alpha b+\beta$. يمكن حساب المساحة التي تقع بين قطعة

المستقيم $[P_a, P_b]$ و محور الفواصل بالعبارة التالية:

$$\frac{1}{2}\left(f(b)+f(a)\right)(b-a) = \frac{1}{2}\alpha(b^2-a^2)+\beta(b-a) \equiv \int_a^b [\alpha x+\beta]\mathrm{d}x \ .$$

2.1 مجموع ريمان

نعتبر الدالة f المعرفة و المستمرة على المجال $[a,b]$. نقسم المجال $[a,b]$ إلى n مجال من الشكل $[x_j, x_{j+1}]$ حيث $j = 0,\ 1, \ldots, n-1$، أنظر الشكل 4.1.



شكل 4.1: مجموع ريمان: حساب المساحة المحصورة بين المنحني و المحور الفواصل.

تعريف

يُعرّف مجموع ريمان بالمقدار S_n المُعطى بالعبارة التالية:

$$S_n \equiv \sum_{j=0}^{n-1}(x_{j+1}-x_j)f(t_j) \ , \qquad (4)$$

حيث t_j عبارة عن قيم نختارها بصورة كيفية داخل المجال $[x_j, x_{j+1}]$.

إن مجموع ريمان ما هو إلا مساحة جميع المستطيلات التي عرضها $x_{j+1}-x_j$ و ارتفاعها $f(t_j)$، انظر الشكل 4.1.

3.1 تكامل ريمان

نعتبر مرة أخرى الشكل 4.1. كما قلنا سابقا فإن تكامل الدالة f على المجال $[a,b]$ يساوي المساحة المحصورة بين بيان الدالة و محور الفواصل بين a و b. يُمكن الحصول على قيمة تقريبية لهذه المساحة من خلال حساب مساحة المستطيلات التي عرضها $x_{j+1}-x_j$ و ارتفاعها $f(t_j)$. بعبارة أخرى فإن مجموع ريمان S_n الذي عرّفناه سابقا هو قيمة تقريبية لهذا التكامل، فكلّما كان عدد المستطيلات، n، كبيرا فإنّ المجموع S_n يقترب من القيمة الفعلية للمساحة أسفل بيان الدالة f.

تعريف

تكامل ريمان هو مجموع ريمان لمّا $n \longrightarrow \infty$،

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\longrightarrow\infty} S_n \ . \tag{5}$$

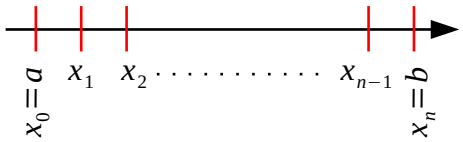
يقال عن الدالة f أنها قابلة للتكامل (حسب مفهوم ريمان) إذا كانت النهاية في المعادلة (5) موجودة (أي لها قيمة وحيدة و منتهية).

4.1 حساب تكامل ريمان

انطلاقا من المعادلة (5) و باعتبار تقسيم منتظم للمجال $[a,b]$، لاحظ الشكل 5.1، فإننا نحصل على علاقة التكامل التالية (البرهان مطلوب في التمرين (1.1)):

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(a+j\frac{b-a}{n}\right) \ . \tag{6}$$

في ما يلي أمثلة عن كيفية حساب مجموع ريمان لبعض الدوال:



شكل 5.1: التقسيم المنتظم لمجال التكامل.

مثال

لتكن الدالة الثابتة $f \equiv c$، c ثابت، دالة ثابتة. بتطبيق العلاقة (6) نجد ما يلي:

$$\begin{aligned}\int_a^b c\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} c \\ &= c\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{b-a}{n} n \\ &= (b-a)c \\ &\equiv F(b)-F(a) \qquad , \; F(x) = cx\ .\end{aligned}$$

مثال

نعتبر الآن $f(x) = \alpha x$، حيث α ثابت. بتطبيق العلاقة (6) نجد ما يلي:

$$\begin{aligned}\int_a^b \alpha x \, \mathrm{d}x &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha \left(a + j\frac{b-a}{n}\right) \\ &= \alpha \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{b-a}{n} \left(na + \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} j\right) \\ &= \frac{1}{2}\alpha(b^2 - a^2) \\ &\equiv F(b) - F(a) \qquad , \; F(x) = \frac{1}{2}\alpha x^2 \; .\end{aligned}$$

5.1 بعض خصائص التكامل

يُمكننا البرهان على العلاقات التالية و ذلك باستخدام المعادلة (6)، أنظر حل التمرين (2.1)

$$\int_a^b cf(x) \, \mathrm{d}x = c \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \; ; \; c \in \mathbb{R} \tag{7}$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x \tag{8}$$

$$\forall c \in [a,b] : \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \, \mathrm{d}x \tag{9}$$

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = -\int_b^a f(x) \, \mathrm{d}x \tag{10}$$

$$\int_a^a f(x) \, \mathrm{d}x = 0 \tag{11}$$

6.1 المُبرهنة الأساسية للتفاضل و التكامل

نعتبر التكامل $F(x) \equiv \int^{x} f(t)\mathrm{d}t$، حيث $x \in [a,b]$. واضح أن هذا التكامل هو دالة للمتغير x.

تعريف

تُسمّى الدالة F بـ الدالة الأصلية لـ f.

المُبرهنة الاساسية للتفاضل و التكامل

تنص المُبرهنة الاساسية للتفاضل و التكامل على

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \equiv F(x)\Big|_{a}^{b}, \tag{12}$$

حيث F هي الدالة الأصلية لـ f:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)\ . \tag{13}$$

يُطلب في التمرين (3.1) إثبات المبرهنة أعلاه.

7.1 بعض تطبيقات حساب التكامل

1.7.1 القيمة المتوسطة لدالة على مجال

تعريف

ليكن n عدد طبيعي غير معدوم. القيمة المتوسطة للدالة f عند النقاط $x_1, \ldots, x_n$ هي المقدار الذي نرمز له بـ $\bar{f}_n$ و المعرّف بالعلاقة

$$\bar{f}_n \equiv \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\ . \tag{14}$$

القيمة المتوسطة لدالة على مجال

عندما يصبح عدد النقاط كبيراً $(n \longrightarrow \infty)$ فإننا نتكلم عن القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a,b]$ و التي نرمز لها بـ $\bar{f}$ حيث :

$$\bar{f} \equiv \lim_{n\longrightarrow\infty} \bar{f}_n = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ . \tag{15}$$

للبرهان على العلاقة (15) أنظر حل التمرين (9.1).

مثال

نعتبر الدالتين $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sin x$ المعرفتين على المجالين $[0,1]$ و $[0,2\pi]$ على التوالي. تُحسب القيمتان المتوسطتان لهاتين الدالتين على المجالين السابقين كما يلي:

$$\bar{f} = \frac{1}{1-0}\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \ ,$$

$$\bar{g} = \frac{1}{2\pi-0}\int_0^{2\pi} \sin x\mathrm{d}x = \frac{-1}{2\pi}\cos x\Big|_0^{2\pi} = 0 \ .$$

2.7.1 طول منحني دالة

طول منحني دالة

لتكن f دالة حقيقية لمتغير حقيقي معرفة، مستمرة و قابلة للاشتقاق على المجال $[a,b]$.
إنّ طول المنحي الذي ترسمه الدالة f على المجال $[a,b]$ هو

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ \mathrm{d}x \ . \tag{16}$$

للبرهان على العلاقة المعادلة (16) أنظر حل التمرين (11.1).

مثال

نعتبر الدالة $f(x) = \alpha x$ حيث α ثابت حقيقي. نبحث عن طول منحني هذه الدالة على مجالٍ مُعطى $[a, b]$. نطبق المعادلة (16) فنحصل على

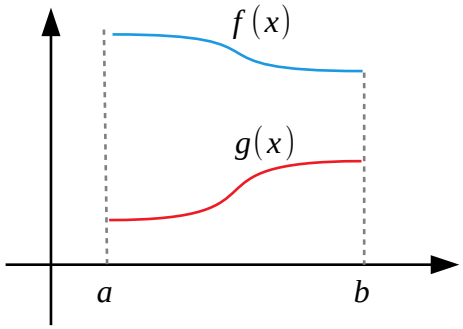
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, \mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1 + \alpha^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{1 + \alpha^2}\, (b - a)\ .$$

3.7.1 المساحة المحصورة بين منحنيين

نعتبر دالتين حقيقيتين f و g معرفتين و مستمرتين على المجال $[a, b]$. نفرض، إضافة إلى ذلك، أن المنحني البياني للدالة f دوما فوق منحنى الدالة g، أي أن:

$$\forall x \in [a, b] :\ g(x) \leq f(x)\ ,$$

لاحظ (الشكل 6.1).



شكل 6.1: المساحة المحصورة بين منحنيين أحدهما فوق الآخر.

نريد حساب المساحة المحصورة بين منحنيي الدالتين f و g. نرمز لهذه المساحة بـ S. من الواضح أنه

يمكن التعبير عن S بالفرق بين المساحتين المحددتين بمنحني الدالتين f و g كما يلي:

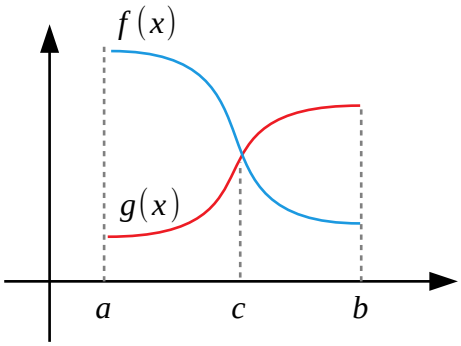
$$S = S_f - S_g = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \; - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \; ,$$
$$= \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, \mathrm{d}x \; , \qquad (17)$$

حيث S_f و S_g هما على التوالي المساحتان المحصورتان بين منحني الدالتين f و g و محور الفواصل.

كما تبقى العلاقة (17) صحيحة إذا كان كل من المنحنيين تحت محور الفواصل $(g \leq f \leq 0)$ و أيضا إذا كان أحدهما فوق محور الفواصل و الآخر تحته $(g \leq 0 \leq f)$.

أما إذا كان منحنى الدالة f ليس دوما يقع فوق منحنى الدالة g بحيث يقطعه في نقطة على الأقل فإن العبارة (17) لا تعطينا المساحة المحصورة بينهما، و يجب علينا تعديلها كما سيأتي.

نعتبر منحنيي الدالتين كما في الشكل 7.1.



شكل 7.1: المساحة المحصورة بين منحنيين يتقاطعان في نقطة.

بما أن منحني الدالة f موجود فوق منحني الدالة g على المجال $[a, c]$، و عكس ذلك على المجال $[c, b]$،

$$\forall x \in [a, c] : g(x) \leq f(x) \; ,$$
$$\forall x \in [c, b] : f(x) \leq g(x) \; ,$$

فإننا نكتب عبارة المساحة المحصورة بين المنحنيين كما يلي:

$$S = \int_a^c \big(f(x) - g(x)\big)\, \mathrm{d}x \; + \int_c^b \big(g(x) - f(x)\big)\, \mathrm{d}x \; . \qquad (18)$$

يُمكن تعميم المعادلة (18) من أجل أكثر من نقطة تقاطع للمنحنيين. يُترك ذلك كتمرين للقارئ.

مثال

نعتبر الدالتين $f(x) = \cos^2 x$ و $g(x) = \sin^2 x$ على المجال $[0, \pi/2]$. يتقاطع منحنيا الدالتين عند النقطة التي فاصلتها c حيث:

$$f(c) = g(c) \Leftrightarrow \cos^2 c = \sin^2 c \Rightarrow c = \frac{\pi}{4} .$$

لدينا أيضا:

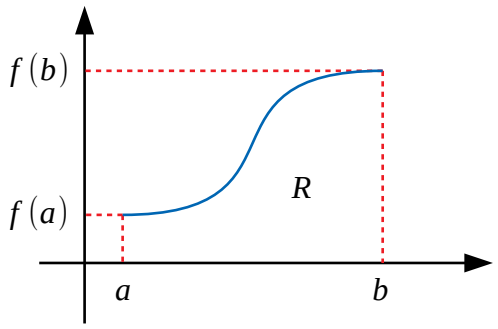
$$\sin^2 x \leq \cos^2 x : \ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} ,$$
$$\cos^2 x \leq \sin^2 x : \ \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} .$$

و عليه فإن المساحة المحصورة بين المنحنيين تُكتب

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \cos^2 x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \ \mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\sin 2x \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\sin 2x \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 . \end{aligned}$$

4.7.1 حساب حجم مجسّم دوراني

نعتبر الدالة الحقيقية لمتغير حقيقي f معرفة و مستمرة على على المجال $[a, b]$. في ما يلي نعتبر f موجبة، $f(x) \geq 0$ من أجل $\forall x \in [a, b]$, لاحظ الشكل 8.1. لنرمز للحيز المحدود بمنحني المعادلة f و محور الفواصل بين النقطتين a و b بالرمز $\mathcal{R}$.



شكل 8.1: مجسم الدوران.

تعريف

بتدوير الحيز $\mathcal{R}$ حول محور الفواصل فإنه يُحصل على مجسم ثلاثي الأبعاد نُسميه مجسم دوران.

مثال

نعتبر المنحنيات الموضحة في الشكل 9.1.

المنحني a : موضح منحني الدالة

$$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2} \; ; \; -a \leq x \leq a \; .$$

مجسم الدوران الذي نحصل عليه هو الكرة التي مركزها المبدأ و نصف قطرها a.

المنحني b : و هو يمثل منحني الدالة

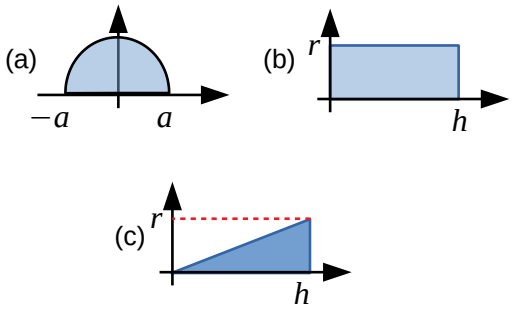
$$f(x) = r \; ; \; 0 \leq x \leq h \; .$$

مجسم الدوران الموافق لهذا المنحي هو الأسطوانة التي ارتفاعها h و نصف قطر قاعدتها r.

المنحني c : يعبر عن بيان الدالة

$$f(x) = \frac{r}{h}\, x \; ; \; 0 \leq x \leq h \; .$$

يمكن ملاحظة أن مجسم الدوران الناتج هو المخروط الذي ارتفاعه h و نصف قطر قاعدته r.



شكل 9.1: مجسم الدوران - أمثلة

حجم مجسم دوران حول محور الفواصل

إنّ حجم مجسم الدوران الناتج عن تدوير الحيّز $\mathcal{R}$ حول محور الفواصل يُكتب

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\ . \tag{19}$$

راجع حل التمرين (13.1) للبرهان على المعادلة (19).

مثال

نعتبر مرة أخرى الشكل 9.1، و نطبق المعادلة (21) لحساب حجم مجسمات الدوران.

الكرة:

$$V_1 = \pi \int_{-a}^{a} \left(a^2 - x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\pi a^3\ .$$

الأسطوانة:

$$V_2 = \pi \int_0^h r^2 \mathrm{d}x = \pi r h^2\ .$$

المخروط:

$$V_3 = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\pi h r^2 \ .$$

من السهل تبيان صحة المُبرهنة التالية:

الحجم المحصور بين مجسمي دوران

لتكن f و g دالتين معرفتين و مستمرتين على المجال $[a,b]$ حيث

$$\forall x \in [a,b] : \ 0 \leq g(x) \leq f(x) \ .$$

إنّ حجم مجسم الدوران الناتج عن تدوير الحيّز المحصور بين منحني الدالتين f و g حول محور الفواصل يُكتب من الشكل

$$V = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right) \ \mathrm{d}x \ . \tag{20}$$

مثال

نبحث عن حجم الحيز المحصور بين مجسمي الدوران للدالتين $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x$ على المجال $[0,1]$. نطبق المعادلة (20) فنحصل على

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^2) \ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{6} \ .$$

حجم مجسم دوران حول محور التراتيب

إنّ حجم مجسم الدوران الناتج عن تدوير الحيّز $\mathcal{R}$ حول محور التراتيب يُكتب

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{21}$$

مثال

نريد حساب حجم مجسم الدوران حول محور التراتيب الموافق للدالة $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ حيث $x \in [0, r]$ و r حقيقي موجب. لدينا ما يلي:

$$V = 2\pi \int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi r^3}{3}\,.$$

5.7.1 حجم مجسم كيفي

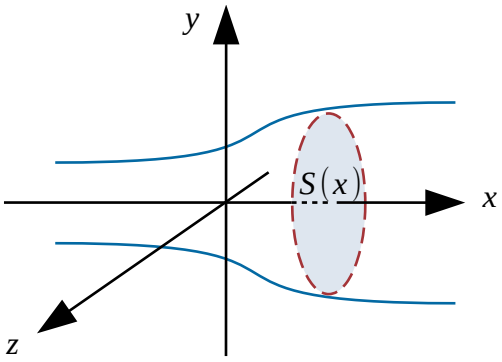
نعتبر مجسما ثلاثي الأبعاد، ليس بالضرورة مجسم دوران، محدود بالمستويين $x = a$ و $x = b$ كما هو موضح في الشكل 10.1.

نأخذ مقطعا من هذا المجسم عند المستوي x سمكه $\mathrm{d}x$. إذا كانت مساحة هذا المقطع هي $S(x)$ فإن حجم هذا العنصر هو

$$\mathrm{d}V = S(x)\mathrm{d}x\,. \tag{22}$$

يُمكن حساب حجم المجسم بين المستويين $x = a$ و $x = b$ بجمع أحجام كل المقاطع العنصرية من أجل $x \in [a, b]$، و نكتب عندئذ

$$V = \int_a^b \mathrm{d}V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x\,. \tag{23}$$



شكل 10.1: مجسم كيفي محصور بين مستويين

مثال

لنحسب حجم كرة نصف قطرها r. نأخذ مقطعا عموديا عند النقطة x كما هو موضح في الشكل 11.1. نكتب عبارة مساحة المقطع $S(x)$ كما يلي:

$$S(x) = \pi R^2(x) \ ,$$

حيث R هو طول ضلع المثلث القائم عند النقطة ذات الفاصلة x و طول وتره يساوي r، كما هو واضح في الشكل. بتطبيق مبرهنة فيثاغورس نستطيع كتابة

$$R^2(x) = r^2 - x^2 \ ,$$

و عليه تصبح عبارة المساحة

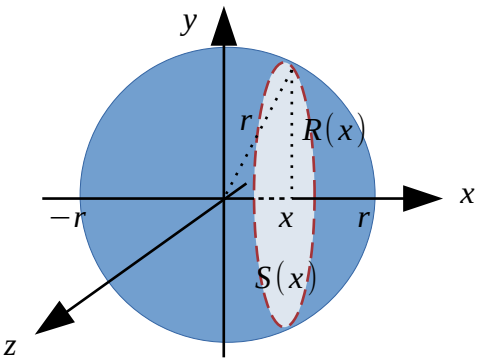
$$S(x) = \pi(r^2 - x^2) \ ,$$

و التي بعد مكاملتها نحصل على عبارة حجم الكرة،

$$V = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\pi r^3 \ .$$

8.1 التكامل المضاعف

لتكن f دالة حقيقية لمتغيرين حقيقيين، معرفة و مستمرة على الميدان $\mathcal{D}$ من $\mathbb{R}^2$.



شكل 11.1: حساب حجم كرة

تعريف

التكامل المضاعف (أو التكامل الثنائي) للدالة f على الميدان $\mathcal{D}$ هو المقدار الذي نرمز له بـ

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ , \tag{24}$$

و الذي يمثل حجم الحيز المحصور بين المستوي (xy) و السطح الذي ترسمه الدالة f عندما يتغير x و y في الميدان $\mathcal{D}$.
نُسمّي $\mathcal{D}$ بـ ميدان التكامل (أو مجال التكامل).

يُحسب التكامل المضاعف كما يلي. أولا، تُكامل الدالة f بالنسبة إلى أحد المتغيرين مع اعتبار المتغير الآخر ثابتا، و من ثَمّ تُكامل النتيجة بالنسبة إلى المتغير الآخر، و نكتب:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x_l}^{x_r}\left(\int_{y_\beta(x)}^{y_\tau(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\ , \tag{25}$$

أو

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{y_b}^{y_t}\left(\int_{x_\lambda(y)}^{x_\rho(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\ . \tag{26}$$

في المعادلة (25) كاملنا على المتغير y أولا و من ثمّ كاملنا النتيجة بالنسبة إلى x. تمثل x_l و x_r، على التوالي، أصغر و أكبر قيمة لـ x على الميدان $\mathcal{D}$. أمّا $y_\beta(x)$ و $y_\tau(x)$ فهما نقطتي تقاطع المستقيم الذي معادلته $y = x$ (المستقيم العمودي) مع حافة ميدان التكامل. و بالمثل فإنه في المعادلة (26) كاملنا على المتغير x أولا و من ثمّ كاملنا النتيجة بالنسبة إلى y. تمثل y_b و y_t، على التوالي، أصغر و أكبر قيمة لـ y على الميدان $\mathcal{D}$. أمّا $x_\lambda(y)$ و $x_\rho(y)$ فهما نقطتي تقاطع المستقيم الذي معادلته $x = y$ (المستقيم الأفقي) مع حافة ميدان التكامل.

مثال

نبحث عن تكامل الدالة $f(x, y) = 1 + xy$ على الميدان $\mathcal{D}$ المتمثل في المستطيل المعرّف بـ $\mathcal{D} = [-1, 1] \times [0, 3]$. لدينا ما يلي:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} (1 + xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \left(\int_{0}^{3} \mathrm{d}y(1 + xy) \right) \\
&= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \left(\int_{0}^{3} \mathrm{d}y \; + \; x \int_{0}^{3} \mathrm{d}y \; y \right) \\
&= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \left(\Big[y \Big]_0^3 \; + \; \Big[\frac{1}{2} x y^2 \Big]_0^3 \right) \\
&= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \left(3 + \frac{9}{2} x \right) \\
&= \Big[3x + \frac{9}{4} x^2 \Big]_{-1}^{1} = 6 \; .
\end{aligned}$$

مثال

نحسب التكامل $\iint_{\mathcal{D}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ حيث ميدان التكامل هو القرص الذي مركزه المبدأ و نصف قطره الوحدة:

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1\} \; .$$

لنكامل أولا بالنسبة إلى y ثم بالنسبة إلى x. عندما نُكامل بالنسبة إلى y فإننا نعتبر x ثابت.

لدينا في هذه الحالة المستقيم الذي معادلته $y = x$ يقطع حافة ميدان التكامل في النقطتين $\pm\sqrt{1-x^2}$. إضافة إلى ذلك فإن القيم الحدّية للمتغير x على الميدان $\mathcal{D}$ هي ± 1. و عليه نكتب

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y$$
$$= 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\ .$$

نضع $x = \cos\theta$ و عليه يصبح التكامل الاخير يُكتب

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{0}^{\pi} \sqrt{1-\cos^2\theta}\,\sin\theta\mathrm{d}\theta$$
$$= 2\int_{0}^{\pi} \sin^2\theta\mathrm{d}\theta = \pi\ .$$

9.1 تحويل متغيرات التكامل المضاعف

في بعض الأحيان يكون من السهل اعتبار تحويل لمتغيرات التكامل لتبسيط حساب التكامل. أي نعتبر تحويلا

$$(x,y) \longrightarrow \Big(u(x,y), v(x,y)\Big)\ , \tag{27}$$

حيث u و v هما المتغيرات الجديدة.

يعقوبية التحويل - التكامل المضاعف

في نظام المتغيرات الجديدة u و v فإن التكامل المضاعف يُكتب من الشكل

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{R}} f\Big(x(u,v), y(u,v)\Big)|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\ , \tag{28}$$

حيث $\mathcal{R}$ هو ميدان التكامل الذي نحصل عليه بتحويل الميدان $\mathcal{D}$ وفق $u(x,y)$ و $v(x,y)$، و $|J|$ هو محدد مصفوفة التحويل، التي نطلق عليها اليعقوبية :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} , \tag{29}$$

حيث ∂ هو رمز الاشتقاق الجزئي، أي الاشتقاق بالنسبة إلى أحد المتغيرات مع اعتبار المتغيرات الأخرى ثابتة.

10.1 الاحداثيات القطبية لحساب بعض التكاملات المضاعفة

تُكتب الاحداثيات الكارتزية بدلالة الاحداثيات القطبية بالعلاقتين التاليتين:

$$x = \rho\cos\phi , \tag{30}$$
$$y = \rho\sin\phi , \tag{31}$$

حيث تحقق الاحداثيتان ρ و ϕ الشرطين

$$0 \leq \rho , \tag{32}$$
$$\phi \in [0, 2\pi[. \tag{33}$$

يُكتب التكامل المضاعف باعتبار تحويل المتغيرات الكارتزية - القطبية كما يلي:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{R}} f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)|J|\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi , \tag{34}$$

حيث تُحسب يعقوبية التحويل بالعلاقات التالية:

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\phi \tag{35}$$
$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = -\rho\sin\phi \tag{36}$$
$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\phi \tag{37}$$
$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = \rho\cos\phi . \tag{38}$$

و عليه نجد محدد مصفوفة التحويل:

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\rho\sin\phi & \rho\cos\phi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\phi + \rho\sin^2\phi = \rho\ . \qquad (39)$$

و بالتالي تصبح عبارة التكامل الثنائي في الإحداثيات القطبية من الشكل:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{R}} f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\ . \qquad (40)$$

مثال

لنحسب التكامل المُعطى في المثال السابق:

$$\iint_{\mathcal{D}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \rho\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = 2\rho\Big|_0^1 \frac{1}{2}\phi\Big|_0^{2\pi} = \pi\ .$$

11.1 التكامل الثلاثي

لتكن f دالة حقيقية للمتغيرات الحقيقية x، y، و z، معرفة و مستمرة على ميدان $\mathcal{D}$ من $\mathbb{R}^3$.

تعريف

يُكتب التكامل الثلاثي للدالة $f(x,y,z)$ على الميدان $\mathcal{D}$ على الشكل

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ . \qquad (41)$$

12.1 تحويل متغيرات التكامل الثلاثي

كما ذكرنا سابقا فإنه يكون أحيانا من السهل اعتبار تحويل لمتغيرات التكامل لتبسيط حساب التكامل. نعتبر التحويل:

$$(x,y,z) \longrightarrow \Big(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)\Big)\ , \qquad (42)$$

حيث u، v و w هي المتغيرات الجديدة.

يعقوبية التحويل - التكامل الثلاثي

تُكتب يعقوبية التحويل هذه المرة من الشكل:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} , \tag{43}$$

و يُكتب عندئذ التكامل الثلاثي كما يلي:

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\mathcal{R}} f\Big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\Big)|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \ . \tag{44}$$

13.1 الاحداثيات الكروية لحساب بعض التكاملات الثلاثية

تُكتب الاحداثيات الكارتزية بدلالة الاحداثيات الكروية بالعلاقات التالية:

$$x = r\sin\theta\cos\phi \ , \tag{45}$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi \ , \tag{46}$$
$$z = r\cos\theta \ , \tag{47}$$

حيث :

$$0 \leq r \ , \tag{48}$$
$$\theta \in [0, \pi[\ , \tag{49}$$
$$\phi \in [0, 2\pi[\ . \tag{50}$$

يُكتب التكامل ثلاثي بعد تحويل الاحداثيات كما يلي:

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\mathcal{R}} f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)|J|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\ . \tag{51}$$

نحسب محدد يعقوبية التحويل كما يلي:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi \tag{52}$$
$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\phi \tag{53}$$
$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = -r\sin\theta\sin\phi \tag{54}$$
$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta\sin\phi \tag{55}$$
$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta\sin\phi \tag{56}$$
$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = r\sin\theta\cos\phi \tag{57}$$
$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta \tag{58}$$
$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta \tag{59}$$
$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = 0 \tag{60}$$

$$\Rightarrow |j| = r^2\sin\theta\ . \tag{61}$$

و بالتالي تصبح عبارة التكامل الثلاثي

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\mathcal{R}} f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\ . \tag{62}$$

مثال

يمكن إيجاد حجم نصف كرة من خلال حساب التكامل التالي:

$$\iiint_{\mathcal{D}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \ ,$$

حيث $\mathcal{D}$ هو نصف الكرة التي مركزها المبدأ و نصف قطرها R و المتواجدة بالنصف العلوي للفضاء (فوق المستوي xy):

$$\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2+y^2+z^2 \leq R; \ x,y \in [-R,R]; \ 0 \leq z \leq R\} \ .$$

باعتبار الاحداثيات الكروية فإن ميدان التكامل يُصبح:

$$\mathcal{R} = \{(r,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 0 \leq r \leq R; \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \ 0 \leq \phi \leq 2\pi;\} \ .$$

إذن يُحسب التكامل الثلاثي في هذا المثال بالعبارة التالية:

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{D}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iiint_{\mathcal{R}} r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^R r^2\mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{3}r^3\Big|_0^R \ (-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \ \phi\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{2}{3}\pi R^3 \ .
\end{aligned}$$

14.1 التكامل المتعدد

لتكن f دالة حقيقية للمتغيرات الحقيقية $x_1, \ldots, x_n$، معرفة و مستمرة على ميدان $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}^n$.

تعريف

التكامل المتعدد من الرتبة n للدالة f على الميدان $\mathcal{D}$ هو المقدار الذي نرمز له بـ

$$\int_{\mathcal{D}} f(x_1,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\ , \tag{63}$$

و الذي يمكن حسابه باعتبار جميع المتغيرات ثابتة باستثناء متغير واحد، و المكاملة على هذا الأخير. ثم نعيد نفس الحساب بتثبيت ما بقي من المتغيرات باستثناء أحدها، و المكاملة عليه. بتكرار هذه العملية على جميع المتغيرات يُحصل على قيمة التكامل المتعدد.

ملاحظة:
التكاملات البسيط، المضاعف، و الثلاثي هي حالات خاصة من التكامل المتعدد توافق الرتب $n=1$، $n=2$ و $n=3$ على التوالي.

يعقوبية التحويل - التكامل المتعدد

عند تحويل متغيرات التكامل،

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1(x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ y_n(x_1,\ldots,x_n) \end{pmatrix}\ , \tag{64}$$

فإن عبارة التكامل المتعدد تُصبح من الشكل

$$\int_{\mathcal{D}} f(x_1,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \int_{\mathcal{R}} f\Big(x_1(y_1,\ldots,y_n),\ldots,x_n(y_1,\ldots,y_n)\Big)|J|\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n\ , \tag{65}$$

حيث تُعطى اليعقوبية بالمصفوفة

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}\ . \tag{66}$$

15.1 تمارين الباب 1

التمرين 1.1: مفهوم تكامل ريمان

برهن على العلاقة

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) .$$

التمرين 2.1: بعض خصائص تكامل ريمان

باستخدام العلاقة (6) برهن على ما يلي:

1.
$$\int_a^b cf(x)\ \mathrm{d}x = c \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

2.
$$\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \ \pm \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$$

3.
$$\forall c \in [a,b] : \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

4.
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x$$

5.
$$\int_a^a f(x)\ \mathrm{d}x = 0$$

التمرين 3.1: المُبرهنة الأساسية للتفاضل و التكامل

برهن أنه إذا كان $F(x) \equiv \int^{x} f(t)\mathrm{d}t$ فإن $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)$، ثمّ استنتج أن :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\ .$$

التمرين 4.1: الدالة الأصلية

أوجد التكاملات التالية:

1. $\int (\sqrt[3]{x} + 2x^2)\ \mathrm{d}x$
2. $\int \frac{\sqrt{x}+x^{\frac{3}{2}}}{x}\ \mathrm{d}x$
3. $\int \sec^2 x\ \mathrm{d}x$
4. $\int (x^2+x+1)^3(2x+1)\ \mathrm{d}x$
5. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$
6. $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x$

التمرين 5.1: مجموع ريمان

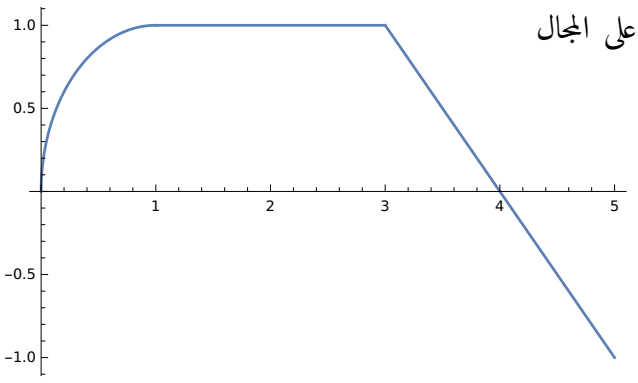
- برهن على ما يلي:

1. $\forall x \in [a,b] : f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geq 0$
2. $\forall x \in [a,b],\ \forall \lambda \in \mathbb{R} :\ \int_a^b\ \lambda f(x)\ \mathrm{d}x = \lambda \int_a^b\ f(x)\ \mathrm{d}x$
3. $\forall x \in [a,b] :\ \int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b\ f(x)\ \mathrm{d}x\ \pm\ \int_a^b\ g(x)\ \mathrm{d}x$

- أوجد التكاملات التالية: $\int_a^b\ x\ \mathrm{d}x$,$\int_a^b\ x^2\mathrm{d}x$ و $\int_a^b\ x^3\mathrm{d}x$

التمرين 6.1: التكامل و حساب المساحة (1)

يظهر الشكل المقابل بيان دالة f على المجال $[0,5]$. أوجد تكامل f على هذا المجال.



التمرين 7.1: التكامل و حساب المساحة (2)

أوجد مساحة الحيز المحصور بين منحنى الدالة f و محور الفواصل، و ذلك في الحالات التالية:

1. $f(x) = (x-1)^2$,$0 \leq x \leq 2$.
2. $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$,$-1 \leq x \leq 1$.
3. $f(x) = \sin^2 x \cos x$,$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
4. $f(x) = x^2(x^3-2)$,$1 \leq x \leq 2$.

التمرين 8.1: المساحة المحصورة بين منحنيين

أوجد مساحة الحيز المحصور بين منحنى الدالة $f = x^3$ و منحنى الدالة $g = 2x$ حيث $x \in [0,1]$.

التمرين 9.1: القيمة المتوسطة لدالة على مجال (1)

برهن على العلاقة

$$\bar{f} \equiv \lim_{n \longrightarrow \infty} \bar{f}_n = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \ .$$

التمرين 10.1: القيمة المتوسطة لدالة على مجال (2)

أحسب القيمة المتوسطة للدالة f من أجل

1. $f(x) = \sqrt{x}$,$0 \leq x \leq 1$.
2. $f(x) = \sec^2 x$,$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
3. $f(x) = \sin x + \cos x$,$0 \leq x \leq \pi$.
4. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$,$0 \leq x \leq 1$.

التمرين 11.1: طول منحني دالة (1)

لتكن f دالة حقيقية لمتغير حقيقي معرفة، مستمرة و قابلة للاشتقاق على المجال $[a,b]$. بيّن أن طول المنحني البياني الذي ترسمه الدالة f في هذا المجال يُعطى بالعبارة

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \, \mathrm{d}x \ .$$

التمرين 12.1: طول منحني دالة (2)

أوجد طول بيان الدالة $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^{-1}$ من أجل $1 \leq x \leq 2$.

التمرين 13.1: حجم مجسم دوران حول محور الفواصل

نعتبر الدالة الحقيقية لمتغير حقيقي f معرفة و مستمرة على على المجال $[a,b]$. ليكن $\mathcal{R}$ الحيز المحدود بمنحني المعادلة f و محور الفواصل بين النقطتين a و b.

برهن على أنّ حجم مجسم الدوران الناتج عن تدوير الحيّز $\mathcal{R}$ حول محور الفواصل يُكتب كما يلي :

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

التمرين 14.1: التكامل الثنائي

أوجد التكاملات التالية:

1. $\int_{\mathcal{D}}(1+xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \mathcal{D}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2:\ -1\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$.
2. $\int_{\mathcal{D}} y\sin x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \mathcal{D}=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2:\ 0\le x\le \frac{\pi}{2},\ 0\le y\le 1\right\}$.
3. $\int_{\mathcal{D}} xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \mathcal{D}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2:\ x^2\le y\le x,\ 0\le x\le 1\}$.
4. $\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \mathcal{D}=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2:\ 0\le y\le x^2,\ \frac{\pi}{2}\le x\le \pi\right\}$.

التمرين 15.1: التكامل الثنائي - الاحداثيات القطبية

أوجد التكاملات التالية بالانتقال إلى نظام الإحداثيات القطبية:

1. $\int_{\mathcal{D}} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \mathcal{D}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 1,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$.
2. $\int_{\mathcal{D}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \mathcal{D}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2:\ 1\le x^2+y^2\le 4\}$.

التمرين 16.1: التكامل الثلاثي - الإحداثيات الكروية

إن التكامل الثلاثي $\int_{\mathcal{D}}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ يمثل حجم المجسم المُمثّل بالميدان ثلاثي الأبعاد $\mathcal{D}$. استخدم الإحداثيات الكروية من أجل إيجاد حجم كرة نصف قطرها R.

باب 2

التكامل المعتل

نهتم في هذا الباب بدراسة نوع خاص من التكامل، أين يكون أحد أو كلا طرفي مجال التكامل غير محدود، أو للدالة المراد مكاملتها نقاط شاذة على مجال التكامل.

1.2 مفهوم التكامل المعتل

تعريف

عندما يكون مجال التكامل غير محدود من أحد طرفيه أو كليهما، أو لمّا تكون للدالة المُكاملة نقاط شاذة (غير معرّفة عند تلك النقاط) على مجال التكامل، فإنه يُقال عن التكامل حينئذ أنه مُعتلّ (أو تكامل غير صحيح).

مثال

التكاملات التالية هي تكاملات معتلة:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x \ . \qquad , \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \qquad , \qquad \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

تعريف

لنعتبر دالة حقيقية لمتغير حقيقي، $f(x)$. تُصنف التكاملات المعتلة إلى ثلاث أنواع:

النوع الأول: عندما يكون

- مجال التكامل غير محدود من الأعلى، من الأسفل، أو من الطرفين،
- الدالة المُكاملة f معرفة و مستمرة على مجال التكامل،

فإن التكامل معتل من النوع الأول.

النوع الثاني: عندما يكون

- مجال التكامل محدود
- تملك الدالة المُكاملة f نقاطا شاذة على مجال التكامل (دالة غير معرفة على نقطة أو أكثر من مجال التكامل)،

فإن التكامل معتل من النوع الثاني.

النوع الثالث: عندما يكون

- مجال التكامل غير محدود من الأعلى، من الأسفل، أو من الطرفين،
- تملك الدالة المُكاملة f نقاطا شاذة على مجال التكامل (دالة غير معرفة على نقطة أو أكثر من مجال التكامل)،

فإن التكامل معتل من النوع الثالث. أي أن التكامل المعتل من النوع الثالث هو خليط بين النوعين الأول و الثاني.

مثال

في ما يلي بعض الأمثلة عن التكاملات المعتلة من النوع الأول، الثاني، و الثالث:

النوع الأول:

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x \quad , \quad \int_{-\infty}^{1} \ln(x^2+1)\mathrm{d}x \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-1)^2}\mathrm{d}x \; .$$

النوع الثاني:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x \quad , \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \ .$$

النوع الثالث:

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x \ .$$

ملاحظة:
يُمكن دوما كتابة التكامل المعتل من النوع الثالث على شكل مجموع تكاملات معتلة من النوعين الأول و الثاني.

مثال

التكامل $\int_0^\infty \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x$ هو من النوع الثالث، لأن:

- مجال التكامل غير محدود،
- للدالة المُكاملة، $\frac{x}{x^2-1}$، نقطة شاذة عند $x=1$ و التي تنتمي إلى مجال التكامل.

نستطيع كتابة التكامل أعلاه من الشكل:

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x + \int_a^\infty \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x \ ,$$

حيث a ثابت أكبر من الواحد، $a>1$. لاحظ أن الطرف الثاني هو مجموع تكاملين معتلين، فالحد الأول هو تكامل معتل من النوع الثاني لأن مجال التكامل محدود و يحتوي على نقطة شاذة للدالة المُكاملة. أما الحد الثاني فهو تكامل معتل من النوع الأول لكون مجال التكامل غير محدود و ليس للدالة المُكاملة أي نقطة شاذة على هذا المجال.

ملاحظة:
يُمكن دوما التعبير عن التكامل المعتل من النوع الأول بدلالة تكامل معتل من النوع الثاني. كما أن العكس صحيح. (أنظر التمرين (2.2))

2.2 حساب التكامل المعتل من النوع الأول

لتكن f دالة معرفة و مستمرة على المجال $[a,\infty[$.

إن تكامل الدالة f على المجال $[a,\infty[$ هو تكامل معتل من النوع الأول، و الذي يُعبر عنه بدلالة تكامل صحيح (غير معتل) كما يلي:

$$\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\ell\to\infty}\int_a^{\ell} f(x)\mathrm{d}x\ , \tag{1}$$

أي أننا نحسب التكامل الصحيح بدلالة ℓ ثم نبحث عن النهاية لمّا هذا الأخير يؤول إلى ما لا نهاية.

باستخدام العلاقة أعلاه، يمكن استنتاج ما يلي:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\ell\to\infty}\int_{-\ell}^{a} f(x)\mathrm{d}x\ , \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\ell\to\infty}\lim_{\ell'\to\infty}\int_{-\ell}^{\ell'} f(x)\mathrm{d}x\ . \tag{3}$$

مثال

نبحث في هذا المثال عن قيمة التكامل المعتل $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$. لدينا ما يلي:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\ell\to\infty}\int_1^{\ell}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{\ell\to\infty}\frac{-1}{x}\Big]_1^{\ell} = \lim_{\ell\to\infty}(\frac{-1}{\ell}+1)\\ &= 1\ .\end{aligned}$$

مثال

نبحث الآن عن قيمة التكامل المعتل $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. لدينا ما يلي:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\ell\to\infty} \int_1^{\ell} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\ell\to\infty} \ln x\Big]_1^{\ell} = \lim_{\ell\to\infty} (\ln \ell - \ln 1) \\ &= \infty\ .\end{aligned}$$

لاحظ أن لهذا التكامل المعتل قيمة غير منتهية.

3.2 حساب التكامل المعتل من النوع الثاني

لتكن f دالة معرفة و مستمرة على المجال $]a,b]$، حيث a هي نقطة شاذة لهذه الدالة.

إن تكامل الدالة f على المجال $]a,b]$ هو تكامل معتل من النوع الثاني و الذي يُعبر عنه بدلالة تكامل صحيح (غير معتل) كما يلي:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\ell\to a^+} \int_{\ell}^b f(x)\mathrm{d}x\ , \tag{4}$$

أي أننا نحسب التكامل الصحيح بدلالة ℓ ثم نبحث عن النهاية لمّا هذا الأخير يؤول إلى النقطة الشاذة a بقيم أكبر.

ملاحظة:

إذا كانت النقطة الشاذة هي الحد الأعلى لمجال التكامل، فإننا نكتب:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\ell\to b^-} \int_a^{\ell} f(x)\mathrm{d}x\ . \tag{5}$$

مثال

نعتبر التكامل المعتل $\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}x$. لدينا ما يلي:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\ell\to 0^+}\int_\ell^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\ell\to 0^+} \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big]_\ell^1 = \lim_{\ell\to 0^+}(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\ell^{\frac{2}{3}}) \\ &= \frac{3}{2}\,.\end{aligned}$$

4.2 مفهوم تقارب/تباعد التكامل المعتل

تعريف

يُقال عن تكامل معتل أنه متقارب إذا كانت قيمته منتهية. و في المقابل، يكون التكامل المعتل متباعدا إذا كانت قيمته غير موجودة أو غير منتهية.

مثال

في مثال سابق، وجدنا

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$$

أي أن هذا التكامل متقارب. كما أننا وجدنا أيضا

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \infty$$

و عليه يكون هذا التكامل الأخير متباعدا.

5.2 دراسة تقارب التكامل المعتل من النوع الأول

حسب التعريف السابق، فإن التكامل المعتل يكون متقاربا إذا كانت قيمته منتهية. و يُمكن الحكم على تقارب أو تباعد التكامل المعتل من خلال حساب نهاية التكامل الصحيح ،بإيجاد الدالة الأصلية، كما بيّنا ذلك سابقا. لكن في بعض الأحيان لا نستطيع إيجاد الدالة الأصلية أو يكون ذلك صعبا، و كل ما يُهمّنا هو معرفة تقارب أو تباعد هذا التكامل المعتل. في هذا الفصل (و أيضا في الفصل (6.2)) سنتعرّف على طريقة الحكم على تقارب أو تباعد تكامل معتل دون الحاجة إلى إيجاد الدالة الأصلية أو حساب النهاية، و هذا من خلال مجموعة من اختبارات التقارب.

تعريف

التكامل-p من النوع الأول هو التكامل المعتل التالي:

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x\ , \tag{6}$$

حيث $a > 0$ و p عدد حقيقي كيفي.

تقارب التكامل-p

يكون التكامل-p من النوع الأول متقاربا إذا و فقط إذا كان $p > 1$. (و متباعدا من أجل $p \leq 1$).

يُبرهن في التمرين (6.2) على هذه النتيجة.

مثال

نريد معرفة تقارب/تباعد التكامل $\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$ و هذا دون إيجاد قيمته. نعتبر تحويل متغير التكامل التالي:

$$y = x - 1 \quad ; \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}x\ ,$$

و عليه نكتب التكامل على الشكل:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y\ .$$

لاحظ أن هذا التكامل الأخير عبارة عن التكامل-p يوافق القيمة $p=2$، أي أن $p>1$ و بالتالي يكون التكامل متقاربا.

اختبار المقارنة

نعتبر دالتين حقيقيتين لمتغير حقيقي، f و g، تحققان الشرط

$$\forall x \geq a:\ 0 \leq f(x) \leq g(x)\ , \tag{7}$$

و هذا من أجل قيمة مُعطاة لـ a. لدينا ما يلي:

- إذا كان التكامل $\int_a^{\infty} g(x)\mathrm{d}x$ متقاربا فإن التكامل $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ متقارب أيضا.
- إذا كان التكامل $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ متباعدا فإن التكامل $\int_a^{\infty} g(x)\mathrm{d}x$ متباعد أيضا.

مثال

نريد دراسة تقارب التكامل المعتل $\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. لدينا ما يلي:

$$\forall x \geq 1:\ 0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x} \Rightarrow 0 \leq \int_1^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_1^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x\ .$$

و من جهة أخرى لدينا:

$$\int_1^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\ell\to\infty} \int_1^{\ell} e^{-x}\,\mathrm{d} = \lim_{\ell\to\infty} \Big[-e^{-x}\Big]_1^{\ell} = e^{-1}\ ,$$

أي أن هذا التكامل الأخير متقارب. و بالتالي عند تطبيق اختبار المقارنة نستنتج أن التكامل $\int_1^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ متقارب أيضا، و هذا واضح من المتراجحة التالية:

$$0 \leq \int_1^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_1^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \int_1^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leq e^{-1}\,.$$

لاحظ أن التكامل قيد الدراسة له قيمة محصورة بين الصفر و e^{-1} فقيمته منتهية. بهذا نكون عرفنا أن التكامل متقارب دون معرفة الدالة الأصلية لـ e^{-x^2}.

مثال

ندرس تقارب/تباعد التكامل $\int_2^\infty \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$. من جهة لدينا

$$\forall x \geq 2: \ \frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \int_2^\infty \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x > \int_2^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \ > 0\,,$$

و من جهة أخرى نعلم أن $\int_2^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ هو تكامل-p موافق لـ $p = 1$، أي أنه متباعد. و بالتالي عند تطبيق اختبار المقارنة نستنتج أن التكامل $\int_2^\infty \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$ متباعد أيضا.

تعريف

نعتبر دالتين حقيقيتين لمتغير حقيقي، f و g، معرفتين و مستمرتين على المجال $[a, \infty[$ و تحققان الشرط

$$\forall x \geq a: \ f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0\,, \tag{8}$$

حيث a ثابت مُعطى. نضع

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \equiv c\,. \tag{9}$$

- نقول عن f و g أنهما متساويتان تقاربيا (asymptotic) إذا كان $c = 1$، و نكتب عندئذ $f \sim g$. كما يمكن كتابة $f \sim cg$ من أجل $c \neq 0$ و $c \neq \infty$.
- نقول عن f أنها أصغر من g بصفة تقاربية إذا كان $c = 0$.
- و نقول عن f أنها أكبر من g بصفة تقاربية إذا كان $c = \infty$.

اختبار مقارنة النهاية

نعتبر نهاية النسبة c بين الدالتين f و g المعرّف أعلاه. إضافة إلى ذلك نضع:

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \equiv I_f \quad , \quad \int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x \equiv I_g \ .$$

لدينا ما يلي:

أولا، $c \neq 0$ و $c \neq \infty$:
أي أن c مقدار منتهٍ. في هذه الحالة يكون للتكاملين المعتلين I_f و I_g نفس السلوك، أي أنهما إما يتقاربان معا أو يتباعدان معا.

ثانيا، $c = 0$:
و هنا يكون لدينا ما يلي

- إذا كان I_g متقاربا فإنه يستلزم I_f متقارب أيضا.
- و إذا كان I_f متباعدا فإنه يستلزم I_g متباعد أيضا.

ثالثا، $c = \infty$:
يُمكن استنتاج التالي:

- إذا كان I_f متقاربا فإنه يستلزم I_g متقارب أيضا.
- و إذا كان I_g متباعدا فإنه يستلزم I_f متباعد أيضا.

مثال

لندرس تقارب التكامل المعتل $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3} \mathrm{d}x$. لدينا

$$\forall x \geq 1 : \ \ln x \leq x \Rightarrow \frac{\ln x}{x^3} \leq \frac{x}{x^3} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x^3} \leq \frac{1}{x^2} \ ,$$

حيث $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln x}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} = 0$. لكن $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x$ هو تكامل-p موافق لـ $p = 2$ أي أنه متقارب $(p > 1)$ و عليه يكون، حسب اختبار مقارنة النهاية، التكامل قيد الدراسة، $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^3} \mathrm{d}x$، متقاربا.
لاحظ أننا استطعنا مرة أخرى الحكم على تقارب هذا التكامل دون الحاجة إلى إيجدا الدالة الأصلية.

يُمكن إعادة صياغة اختبار مقارنة النهاية من أجل الحالة الخاصة أين تكون الدالة g من الشكل: $g(x) = \frac{1}{x^p}$ حيث p عدد حقيقي. فيكون لدينا حينئذ

$$c = \lim_{x\to\infty} x^p f(x) \ , \tag{10}$$

و ما يلي:

- I_f يتقارب إذا كان c منتهٍ و $p > 1$.
- I_f يتباعد إذا كان $c \neq 0$ و $p \leq 1$.

مثال

نعتبر التكامل $\int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}} \mathrm{d}x$ و لندرس تقاربه.
لدينا $c = \lim_{x\to\infty} x\frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}} = 1$ و عليه فإن التكامل أعلاه يتباعد $(c \neq 0$ و $p = 1)$.

مثال

ندرس تقارب التكامل $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1} \mathrm{d}x$.

لدينا $c = \lim_{x\to\infty} x^2 \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}} = 1$ و عليه فإن التكامل يكون متقاربا (c منتهٍ و $p > 1$).

تعريف

- يُقال عن التكامل $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ أنه متقارب مطلقًا إذا كان $\int_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x$ متقاربًا.
- أما إذا كان $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ متقاربا لكن $\int_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x$ متباعد، فإنه يُقال عن التكامل $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ متقارب شرطيا.

مُبرهنة التقارب المطلق

إذا كان التكامل $\int_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x$ متقاربا فإنه يستلزم التكامل $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ متقارب هو أيضا.

نُبرهن في التمرين (8.2) على المبرهنة أعلاه.

ملاحظة:

العكس ليس دوما صحيح، فأحيانا نجد التكامل $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ متقاربا إلا أن التكامل $\int_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x$ متباعد (التقارب الشرطي).

مثال

نبحث عن إن كان التكامل $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x$ متقاربا أو متباعدا. لدينا ما يلي:

$$|\cos x| \le 1 \Rightarrow \left|\frac{\cos x}{x^2+1}\right| \le \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow \int_0^\infty \left|\frac{\cos x}{x^2+1}\right|\mathrm{d}x \le \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x\ .$$

هذا من جهة، لكن لدينا من جهة أخرى

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \frac{1}{x^2+1} = 1 \qquad ;\ (c = 1, p = 2)\ ,$$

أي أن التكامل $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$ متقارب. و حيث أننا كتبنا أعلاه $\int_0^{\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2+1}\right| \mathrm{d}x \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$ فهذا يعني أن التكامل $\int_0^{\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2+1}\right| \mathrm{d}x$ متقارب أيضا. و هذا يستلزم، حسب نص مبرهنة التقارب المطلق أعلاه، التكامل $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x$ متقارب أيضا (متقارب مطلقا).

6.2 دراسة تقارب التكامل المعتل من النوع الثاني

سندرس هنا اختبارات تقارب التكاملات المعتلة من النوع الثاني. سنتبع نفس الدراسة التي بيّناها في الفصل (5.2) مع بعض التغييرات البسيطة جدا.

تعريف

التكامل-p من النوع الثاني هو التكامل المعتل المُعطى بالعبارة:

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,\mathrm{d}x\,, \tag{11}$$

حيث p عدد حقيقي كيفي.
و يُمكن أيضا تعريف التكامل-p من النوع الثاني بدلالة الحد الأعلى لمجال التكامل كما يلي:

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,\mathrm{d}x\,, \tag{12}$$

تقارب التكامل-p

يكون التكامل-p من النوع الثاني متقاربا إذا و فقط إذا كان $p < 1$. (و متباعدا من أجل $p \geq 1$).
يُبرهن في التمرين (7.2) على هذه النتيجة.

اختبار المقارنة

نعتبر دالتين حقيقيتين لمتغير حقيقي، f و g، معرفتان و مستمرتان على المجال $]a,b]$ حيث a هي نقطة شاذة لكليهما، و تحققان الشرط

$$\forall x \in]a,b] : \ 0 \leq f(x) \leq g(x) \ . \tag{13}$$

لدينا ما يلي:

- إذا كان التكامل $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ متقاربا فإن التكامل $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ متقارب أيضا.
- و إذا كان التكامل $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ متباعدا فإن التكامل $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ متباعد أيضا.

مثال

ندرس تقارب التكامل $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,\mathrm{d}x$. لاحظ أن للدالة المكاملة نقطة شاذة عند $x = 1$. لدينا ما يلي:

$$\forall x \in]1,5] : \ 0 \leq \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow \int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,\mathrm{d}x \leq \int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x \ .$$

لكن التكامل $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$ هو تكامل-p موافق للقيمة $p = \frac{1}{2}$، و هو ما يعني أنه تكامل متقارب (لأن $p < 1$). و بالتالي يكون، حسب اختبار المقارنة، التكامل $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,\mathrm{d}x$ متقاربا هو أيضا.

مثال

نعتبر التكامل $\int_3^b \frac{\ln x}{(x-3)^4}\,\mathrm{d}x$، حيث $b > 3$ وسيط حقيقي. في ما يلي دراسة تقارب هذا التكامل.

من جهة لدينا

$$\forall x \in]3,b] : \ \frac{\ln x}{(x-3)^4} > \frac{1}{(x-3)^4} > 0$$
$$\Rightarrow \int_3^b \frac{\ln x}{(x-3)^4}\,\mathrm{d}x > \int_3^b \frac{1}{(x-3)^4}\,\mathrm{d}x \ > 0\ .$$

و من جهة أخرى نعلم أن $\int_3^b \frac{1}{(x-3)^4}\,\mathrm{d}x$ هو تكامل-p موافق لـ $p=4$، أي أنه متباعد (لأن $p>1$). و بالتالي عند تطبيق اختبار المقارنة نستنتج أن التكامل $\int_3^b \frac{\ln x}{(x-3)^4}\,\mathrm{d}x$ متباعد أيضا.

اختبار مقارنة النهاية

نعتبر الدالتين f و g مستمرتان على المجال $]a,b]$، و $x=a$ نقطة شاذة لكل منهما. في ما يلي نضع:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \equiv c\ . \tag{14}$$

و نعتبر التكاملين المعتلين

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \equiv I_f \qquad , \qquad \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \equiv I_g\ .$$

لدينا ما يلي:

أولا، $c \neq 0$ و $c \neq \infty$:
أي أن c مقدار منته. في هذه الحالة يكون للتكاملين المعتلين I_f و I_g نفس السلوك، أي أنهما إما يتقاربان معا أو يتباعدان معا.

ثانيا، $c = 0$:
و هنا يكون لدينا ما يلي

- إذا كان I_g متقاربا فإنه يستلزم I_f متقارب أيضا.
- و إذا كان I_f متباعدا فإنه يستلزم I_g متباعد أيضا.

ثالثا، $c = \infty$:
يُمكن استنتاج التالي:

- إذا كان I_f متقاربا فإنه يستلزم I_g متقارب أيضا.
- و إذا كان I_g متباعدا فإنه يستلزم I_f متباعد أيضا.

مثل ما قمنا به سابقا، يُمكننا إعادة صياغة اختبار مقارنة النهاية أعلاه عندما تكون الدالة g من الشكل: $g(x) = \frac{1}{(x-a)^p}$ حيث p عدد حقيقي. تُكتب نهاية النسبة بين الدالتين عند النقطة الشاذة كما يلي:

$$c = \lim_{x \to a^+} (x-a)^p f(x) \ . \tag{15}$$

بتطبيق اختبار المقارنة يُمكننا أن نخلص إلى النتيجة التالية:

- إذا كان c منتهٍ و $p < 1$، فإن I_f يتقارب.
- و إذا كان $c \neq 0$ و $p \geq 1$، فإن I_f يتباعد.

أما إذا كانت للدالة المُكاملة نقطة شاذة عند الحد الأعلى لمجال التكامل، أي عند النقطة b فإن المقدار c يُعرّف بالعلاقة

$$c = \lim_{x \to b^-} (b-x)^p f(x) \ . \tag{16}$$

و اختبار المقارنة في هذه الحالة يبقى نفسه دون تغيير كما هو موضح أعلاه.

مثال

نعتبر التكامل $\int_0^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} \mathrm{d}x$. واضح أن للدالة المُكاملة نقطة شاذة عند الطرف الأعلى لمجال التكامل. لندرس تقارب هذا التكامل.
لدينا $c = \lim_{x \to 3^-} (3-x)\frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ و عليه فإن التكامل أعلاه يتباعد ($c \neq 0$ و $p = 1$).

التقارب المطلق

نعتبر دالة حقيقية معرفة و مستمرة على المجال $]a,b]$ و تملك نقطة شاذة عند $x=a$.
إذا كان التكامل $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ متقاربا فإنه يستلزم التكامل $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ متقارب هو أيضا.

ملاحظة:
العكس ليس دوما صحيح، فأحيانا نجد التكامل $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ متقاربا إلا أن التكامل $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ متباعد (التقارب الشرطي).

مثال

ندرس في ما يلي تقارب التكامل $\int_\pi^{4\pi} \frac{\sin x}{(x-\pi)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x$. لاحظ أن $x=\pi$ نقطة شاذة للدالة المُكاملة.
لدينا ما يلي:

$$\forall x \in]\pi, 4\pi] : \ 0 \leq |\sin x| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \left|\frac{\sin x}{(x-\pi)^{\frac{1}{3}}}\right| \leq \frac{1}{(x-\pi)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_\pi^{4\pi} \left|\frac{\sin x}{(x-\pi)^{\frac{1}{3}}}\right| \mathrm{d}x \leq \int_\pi^{4\pi} \frac{1}{(x-\pi)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x \ .$$

لكن التكامل الأخير، $\int_\pi^{4\pi} \frac{1}{(x-\pi)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x$، هو تكامل-p موافق للقيمة $p=\frac{1}{3}$ فهو متقارب (لأن $p<1$). و عليه يكون التكامل $\int_\pi^{4\pi} \left|\frac{\sin x}{(x-\pi)^{\frac{1}{3}}}\right| \mathrm{d}x$ متقاربا أيضا (حسب اختبار المقارنة). و بالتالي يكون التكامل $\int_\pi^{4\pi} \frac{\sin x}{(x-\pi)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x$ متقاربا (و هذا حسب مبرهنة التقارب المطلق أعلاه).

7.2 تمارين الباب 2

التمرين 1.2: حساب التكامل المعتل

أوجد التكاملات التالية:

1. $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$
2. $\int_0^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$
3. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$
4. $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
5. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

التمرين 2.2: التكامل المعتل من النوع 1 و 2

1. بين كيف يمكن التعبير عن تكامل معتل من النوع الأول بدلالة تكامل معتل من النوع الثاني.
2. أجب على نفس السؤال لكن بالنسبة إلى التكامل المعتل من النوع الثاني بدلالة النوع الأول.

التمرين 3.2: المساحة و الحجم

أوجد مساحة الحيز المحصور بين بيان الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ و محور الفواصل و ذلك من أجل $x \geq 1$. أوجد أيضا حجم مجسم الدوران حول محور الفواصل.

التمرين 4.2: القيمة الرئيسية لـ كوشي للتكامل المعتل

أوجد القيمة الرئيسية للتكاملات التالية:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x$
2. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$
3. $\int_{-1}^{5} \frac{1}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$

التمرين 5.2: دراسة تقارب بعض التكاملات المعتلة

أدرس تقارب التكاملات المعتلة التالية:

1. $\int_1^{\infty} \frac{x}{3x^4+5x^2+1}\,\mathrm{d}x$
2. $\int_2^{\infty} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+16}}\,\mathrm{d}x$
3. $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$
4. $\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x+a}\,\mathrm{d}x\,, \quad a>0$
5. $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$
6. $\int_0^{1} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$

7. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 8. $\int_2^3 \frac{1}{x^2(x^3-8)^{2/3}}\,\mathrm{d}x$ 9. $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x$

التمرين 6.2: تقارب التكامل-p من النوع الأول

برهن على أن التكامل المعتل

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x \quad , \ a>0,\ p\in\mathbb{R}\,,$$

يكون متقاربا إذا و فقط إذا كان $p>1$.

التمرين 7.2: تقارب التكامل-p من النوع الثاني

برهن على أن التكامل المعتل

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x \quad , \ p\in\mathbb{R}\,,$$

يكون متقاربا إذا و فقط إذا كان $p<1$.

التمرين 8.2: التقارب المطلق - التقارب الشرطي

برهن أنه إذا كان التكامل $\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ متقاربا فإن التكامل $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ متقارب (التقارب المطلق).

التمرين 9.2: التقارب المطلق

بين أن التكامل $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ متقارب مطلقا.

التمرين 10.2: التقارب الشرطي

بين أن التكامل $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ متقارب شرطيا.

باب 3

المعادلات التفاضلية العادية

إن موضوع المعادلات التفاضلية مهم جدا في الكثير من العلوم كالرياضيات، الفيزياء، البيولوجيا، ...حيث عادة ما يُوصف تطور حالة نظامٍ ما بمعادلة تفاضلية أو أكثر. فمثلا، نستطيع معرفة موضع و سرعة متحرك ما في كل لحظة زمنية من خلال حل معادلة الحركة التي تصفه، و هي معادلة تفاضلية بالنسبة للزمن و الاحداثيات.

نهتم في هذا الباب بطرق حل بعض المعادلات التفاضلية العادية (Ordinary differential equations)، حيث سنركز في دراستنا على المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبتين الأولى و الثانية. إلا أننا سنطرق باختصار لبعض المعادلات التفاضلية الشهيرة من رتبٍ أعلى.

1.3 المعادلات التفاضلية العادية

تعريف

لتكن y دالة حقيقية للمتغير الحقيقي x. نفرض أن الدالة y مستمرة على مجال مُعطى $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$.
إضافة إلى ذلك نفرض أن $y(x)$ تقبل الاشتقاق n مرة، و أن جميع هذه المشتقات معرفة و مستمرة على المجال $\mathcal{I}$.
نعتبر دالة حقيقية، F، للمتغيرات x، $y(x)$، $y'(x)$، ...، $y^{(n)}(x)$، حيث $y^{(j)}(x)$ هي المشتقة من الرتبة j للدالة $y(x)$ بالنسبة إلى x $(j = 0, \ldots, n)$.
تُسمّى المعادلة

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

بـ **معادلة تفاضلية عادية** من الرتبة n.

ملاحظة:

1. الهدف من دراسة المعادلات التفاضلية هو إيجاد الدالة $y(x)$ التي تحقق المعادلة (1).
2. يُقصد بالمعادلات التفاضلية العادية أن الدالة المجهولة المطلوب إيجادها، $y(x)$، هي دالة لمتغير واحد فقط، و المعادلة التفاضلية إذن تحتوي على مشتقاتها بالنسبة لمتغيرها. و في المقابل، عندما تكون الدالة المُراد إيجادها ذات أكثر من متغير، فإن المعادلة التفاضلية ستحتوي على مشتقاتها الجزئية (أي الاشتقاق بالنسبة إلى مُختلف المتغيرات). عندئذ نقول أنه لدينا **معادلة تفاضلية بمشتقات جزئية**. سنتطرق في الباب (5) إلى بعض أشكال هذا النوع من المعادلات التفاضلية و أيضا كيفية حلّها.
3. في ما يلي سنشير إلى المعادلات التفاضلية العادية بـ المعادلات التفاضلية اختصارا.

مثال

في ما يلي بعض الأمثلة عن المعادلات التفاضلية:

$$yy' - x\mathrm{e}^{y^2} = 0 \ ,$$
$$xy\cos xy + \sin xy + (x^2\cos xy + \mathrm{e}^y)y' = 0 \ ,$$
$$y^{(4)} - y'' = \mathrm{e}^x \cos 2x \ .$$

2.3 المعادلات التفاضلية العادية من الدرجة الأولى

تعريف

عندما تحتوي المعادلة (1) على المشتقة الأولى فقط $(n = 1)$، فإنه يُحصل على معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى.
تأخذ المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى الشكل العام التالي:

$$y' = f(x, y) \ , \qquad (2)$$

حيث f دالة حقيقية لمتغيرين، معرفة على الميدان $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$. يُسمّى هذا الأخير **ميدان المعادلة التفاضلية**.

تعريف

الحل الخاص:
نقول عن $y(x)$ أنه **حل خاص** (particular solution) للمعادلة (2) إذا تحقق ما يلي:

- $y(x)$ معرفة و تقبل الاشتقاق على المجال $\mathcal{I}$.
- $$\forall x \in \mathcal{I} : \ (x, y(x)) \in \mathcal{D} \ .$$
- $y(x)$ حل للمعادلة التفاضلية، أي أن

$$\forall x \in \mathcal{I} : \ y'(x) = f(x, y(x)) \ .$$

الحل العام:
تُشكل جميع الحلول الخاصة للمعادلة التفاضلية **لحل العام** (general solution).

مثال

نعتبر المعادلة التفاضلية $y' = f(x)$ حيث f دالة للمتغير x. نستطيع إيجاد الحل العام لهذه المعادلة كما يلي:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{I} : \quad & y'(x) = f(x) \\ \Rightarrow \quad & y(x) = \int_{x \in \mathcal{I}} f(x)\mathrm{d}x \ + \lambda \ \equiv \ y_\lambda(x) \ , \end{aligned}$$

حيث الوسيط الحقيقي λ هو ثابت التكامل.
من أجل كل قيمة للوسيط λ فإنه يُحصل على حل خاص للمعادلة التفاضلية.

تعريف

إذا كان $y(x)$ حلا للمعادلة التفاضلية (2) فإن بيان الدالة $y(x)$ من أجل $x \in \mathcal{I}$ يُسمّى **منحني تكامل** (integral curve). إن جميع منحنيات التكامل تنتمي إلى ميدان المعادلة التفاضلية.

في ما يلي بعض طرق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى.

3.3 طريقة فصل المتغيرات

عندما يُمكننا كتابة الطرف الأيمن للمعادلة (2) على شكل جداء دالتين،

$$f(x,y) = g(x)h(y)\ , \tag{3}$$

حيث g و h دالتان حقيقيتان معرّفتان على المجالين $\mathcal{I}$ و $\mathcal{J}$ على التوالي، فإننا نكتب المعادلة التفاضلية من الشكل:

$$y' = g(x)h(y)\ . \tag{4}$$

نفرض أن $h(y) \neq 0$ على المجال $\mathcal{J}$. يُحصل على حل المعادلة التفاضلية الأخيرة بطريقة فصل المتغيرات كما يلي.

مُبرهنة فصل المتغيرات

يكون y حلا عامًّا للمعادلة (4) إذا و فقط إذا كان

$$\forall x \in \mathcal{I}:\ H(y) = G(x) + \lambda\ , \tag{5}$$

حيث λ هو ثابت حقيقي كيفي، و

$$G(x) = \int g(x)\ \mathrm{d}x\ , \tag{6}$$

$$H(y) = \int \frac{1}{h(y)}\ \mathrm{d}y\ . \tag{7}$$

إذا أردنا الحصول على عبارة الحل $y(x)$ فإننا نبحث عن الدالة العكسية لـ H و نكتب

$$y(x) = H^{-1}\left(G(x) + \lambda\right)\ . \tag{8}$$

للبرهان على هذه المبرهنة، يُرجى مراجعة التمرين (1.3).

مثال

نبحث في ما يلي عن الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$yy' = x\mathrm{e}^{y^2}\ .$$

لدينا ما يلي:

$$yy' = xe^{y^2} \Leftrightarrow y' = x\frac{e^{y^2}}{y} \Leftrightarrow g(x) = x \quad , \quad h(y) = \frac{e^{y^2}}{y}$$
$$\Rightarrow G(x) = \int g(x)dx = \int xdx = \frac{1}{2}x^2$$
$$H(y) = \int \frac{1}{h(y)}dy = \int ye^{-y^2}dy = -\frac{1}{2}e^{-y^2}$$

$$H(y) = G(x) + \lambda \Leftrightarrow e^{-y^2} + x^2 + 2\lambda = 0 \ .$$

واضح أنه يجب على الوسيط λ أن يكون سالبا، و لنكتبه من الشكل

$$2\lambda = -\rho^2 \ ,$$

حيث ρ وسيط حقيقي كيفي. يُمكننا كتابة الحل العام من الشكل:

$$y_\rho(x) = \pm\sqrt{\ln\frac{1}{\rho^2 - x^2}} \ ,$$

حيث $x \in [\sqrt{\rho^2 - 1}, \rho[$.

4.3 المعادلة التفاضلية التامة

في هذا الفصل، نبحث عن حل معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى من الشكل

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0 \ , \tag{9}$$

حيث P و Q دالتان حقيقيتان لمتغيرين حقيقيين. نستطيع كتابة المعادلة (9) على الشكل التفاضلي التالي:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \ , \tag{10}$$

أين استعملنا تعريف الاشتقاق: $y' = \frac{dy}{dx}$ للوصول إلى هذه المعادلة الأخيرة.
نعتبر دالة حقيقية لمتغيرين حقيقيين، $U(x,y)$. يُكتب تفاضلها الكلي كما يلي:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy \ . \tag{11}$$

لو أننا نضع

$$\frac{\partial U}{\partial x} \equiv P(x,y)\ , \tag{12}$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} \equiv Q(x,y)\ , \tag{13}$$

فإننا نحصل على

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\ . \tag{14}$$

حصلنا على العلاقة الأخيرة باشتقاق المعادلة (12) بالنسبة إلى y و اشتقاق المعادلة (13) بالنسبة إلى x ثم مساواة النتيجتين.

تعريف

يُقال عن المعادلة (9) أنها **معادلة تامّة** إذا كانت المعادلة (14) محققة.

مثال

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية:

$$xy\cos xy\ + \sin xy\ +\ y'(x^2\cos xy\ + \mathrm{e}^y) = 0\ . \tag{15}$$

بمقارنة هذه الأخيرة بالعلاقة (9) فإننا نستنتج أن

$$P(x,y) = xy\cos xy\ + \sin xy\quad ,\quad Q(x,y) = x^2\cos xy\ + \mathrm{e}^y\ .$$

هل هذه المعادلة التفاضلية تامة ؟ للإجابة على هذا السؤال نحسب المشتقات الجزئية كما في المعادلة (14):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x\cos xy\ - x^2y\sin xy\ + x\cos xy = 2x\cos xy\ - x^2y\sin xy\ ,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\cos xy\ - x^2y\sin xy\ .$$

لاحظ أن المعادلة (14) محققة، و عليه، حسب التعريف أعلاه، فإن المعادلة (15) معادلة تفاضلية تامة.

إذا كانت (9) معادلة تفاضلية تامة فإن حلّها يكون كما يلي.

1. نفرض وجود دالة $U(x,y)$ تحقق العلاقتين (12) و (13). هذا معناه

$$\mathrm{d}U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0\ , \qquad (16)$$

أي أن U دالة ثابتة:

$$U(x,y) = \lambda \equiv \text{constant}\ . \qquad (17)$$

2. نبحث عن $U(x,y)$ من خلال المعادلتين (12) و (13)، أي أنه إما أن نُكامل U بالنسبة إلى x حسب المعادلة (12) ثم النتيجة نعوضها في المعادلة (13)، أو العكس و هذا حسب سهولة الحساب.

3. بإيجاد عبارة $U(x,y)$ نكون بذلك قد حصلنا على علاقة تربط الحل y بالمتغير x.

مثال

نعتبر المعادلة التفاضلية (15) المعطاة في المثال السابق. نعلم الآن أن هذه المعادلة تامة. نبحث في ما يلي عن حلّها.

نبحث أولا عن الدالة $U(x,y)$ حيث نستعمل مثلا المعادلة (12):

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y) \Rightarrow U(x,y) &= \int P(x,y)\mathrm{d}x \ + \ \mu(y) \\ &= \int \left(xy\cos xy \ + \sin xy\right)\mathrm{d}x \ + \ \mu(y) \\ &= x\sin xy \ + \ \mu(y)\ ,\end{aligned}$$

حيث ظهرت الدالة $\mu(y)$ بعد المكاملة بالنسبة إلى x أين اعتبرنا y ثابت.

نعوض الآن في المعادلة (13) فنحصل على معادلة تفاضلية للدالة $\mu(y)$:

$$\mu'(y) = \mathrm{e}^y \Rightarrow \mu(y) = \int \mathrm{e}^y\mathrm{d}y = \mathrm{e}^y\ .$$

و بالتالي تكون الدالة $U(x,u)$ هي

$$U(x,y) = x\sin xy \ + \ \mathrm{e}^y\ ,$$

و التي نضعها مساوية لثابت:

$$U(x,y) = x\sin xy \ + \ \mathrm{e}^y = \lambda\ ,$$

و هذه المعادلة الأخيرة تُعطينا العلاقة بين حل المعادلة التفاضلية قيد الدراسة، y، و المتغير x:

$$\mathrm{e}^y = \lambda - x \sin xy \ .$$

5.3 المعاملات التكاملية

نعتبر مرة أخرى المعادلة التفاضلية (9):

$$P(x,y) + y'Q(x,y) = 0 \ . \tag{18}$$

كما رأينا في الفصل (4.3) فإنه إذا كانت المعادلة (14) فإننا نحل هذه المعادلة التفاضلية بطريقة المعادلة التامة. لكن ماذا لو لم يكن هذا الشرط محققا، أي عندما يكون

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} \ , \tag{19}$$

هل ما زلنا نستطيع إيجاد الحل ؟ سنبين في ما يلي أنه يُمكننا دوما الحصول على معادلة تامة انطلاقا من المعادلة (9) حتى لو كانت هذه الأخيرة غير تامة.

بضرب طرفي المعادلة (9) في دالة حقيقية $\mu(x,y)$ فإننا نحصل على معادلة تفاضلية أخرى لكن لها نفس حلول المعادلة (9):

$$\mu(x,y)P(x,y) + \mu(x,y)Q(x,y)y' = 0 \ . \tag{20}$$

نُعرف الدالتين $\tilde{P}$ و $\tilde{Q}$ بالعلاقتين:

$$\tilde{P}(x,y) = \mu(x,y)P(x,y) \ , \tag{21}$$

$$\tilde{Q}(x,y) = \mu(x,y)Q(x,y) \ . \tag{22}$$

نبحث الآن عن الدالة μ التي تجعل المعادلة (20) تامة، أي يجب أن يتحقق الشرط:

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} \ , \tag{23}$$

و الذي يمكن كتابته من الشكل التالي:

$$\mu(x,y)\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y} \ . \tag{24}$$

تعريف

الدالة $\mu(x,y)$ التي تجعل المعادلة (20) معادلة تفاضلية تامة، تُسمّى **المعامل التكاملي**.

في ما يلي، نعتبر حالات بسيطة لعبارة المعامل التكاملي μ:

أولا، المعامل التكاملي دالة للمتغير x فقط: $\mu = \mu(x)$.

بالتعويض في المعادلة (24) نجد:

$$\mu(x)\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q(x,y)\mu'(x) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathrm{d}x \ . \tag{25}$$

لاحظ أن الطرف الأيمن للمعادلة الأخيرة هو دالة للمتغير x فقط، و بالتالي يجب على الطرف الأيمن أن لا يتعلق بالمتغير y. إن كان ذلك صحيحا، فإننا نستطيع إيجاد عبارة المعامل التكاملي على الشكل:

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathrm{d}x} \ . \tag{26}$$

ثانيا، المعامل التكاملي دالة للمتغير y فقط: $\mu = \mu(y)$.

بنفس الطريقة المتبعة في الحالة الأولى، نستطيع الوصول إلى العبارة

$$\mu(y) = \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{P(x,y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathrm{d}y} \ , \tag{27}$$

على افتراض أن المقدار داخل التكامل هو دالة للمتغير y فقط.

نخلاصة، فإنه بعد إيجاد عبارة المعامل التكاملي μ نكون بذلك قد حصلنا على معادلة تفاضلية تامة، المعادلة (20)، و التي نحلها بالطريقة المبينة في الفصل (4.3). و كما قلنا قبل قليل، فإن الحلول المُتحصل عليها هي حلول أيضا للمعادلة التفاضلية (18) أعلاه.

كمثال، نعتبر في الفصل (6.3) عائلة من المعادلات التفاضلية التي تُحل بطريقة المعامل التكاملي. هذه الفئة تُسمّى المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى.

6.3 المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

تعريف

نقول عن معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى أنها خطية إذا كانت تحتوي على y و y' بصفة خطية، أي أس كل منهما هو الواحد.
الشكل العام لمعادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى هو:

$$y' + A(x)y = B(x)\ , \tag{28}$$

حيث A و B دالتان للمتغير x فقط.

نستطيع أن نكتب المعادلة (28) على الشكل النظامي كما في المعادلة (18) بوضع

$$P(x,y) = A(x)y - B(x)\ , \tag{29}$$
$$Q(x,y) = 1\ . \tag{30}$$

نبحث عن حلول المعادلة (28) كما يلي:

حل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

هل المعادلة (28) تامة ؟ إن كانت الإجابة نعم نتبع طريقة المعادلة التامة. أمّا إن كانت الإجابة لا نتبع طريقة المعامل التكاملي. في هذه الحالة الأخيرة، يُكتب المعامل التكاملي بالعبارة:

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int A(x)\mathrm{d}x}\ . \tag{31}$$

مثال

لنبحث عن الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية التالية:

$$y' + (1 + \frac{1}{x})y = \frac{1}{x}\ ,$$

أي أن

$$A(x) = 1 + \frac{1}{x} \quad , \quad B(x) = \frac{1}{x}\ .$$

و عليه يكون المعامل التكاملي هو

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int (1+\frac{1}{x})\mathrm{d}x} = x\mathrm{e}^{x}\ .$$

و بالتالي يكون لدينا

$$\tilde{P} = ((x+1)y - 1)\,\mathrm{e}^x \quad , \quad \tilde{Q} = x\mathrm{e}^x \ .$$

نبحث عن الدالة $U(x,y)$ التي تحقق

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \tilde{P} = ((x+1)y - 1)\,\mathrm{e}^x \ , \tag{32}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \tilde{Q} = x\mathrm{e}^x \ . \tag{33}$$

بمكاملة المعادلة (33) بالنسبة إلى y نحصل على

$$U(x,y) = xy\mathrm{e}^x \ + \lambda(x) \ ,$$

و من ثم نعوض في المعادلة (32) فنجد

$$\lambda' = -\mathrm{e}^x \Leftrightarrow \lambda = -\mathrm{e}^x \ ,$$

و يكون بذلك

$$U(x,y) = xy\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x \equiv \lambda \qquad ; \lambda \in \mathbb{R} \ .$$

و في الأخير نجد عبارة حل المعادلة التفاضلية:

$$y = \frac{1 + \lambda \mathrm{e}^{-x}}{x} \ .$$

7.3 المعادلة التفاضلية المتجانسة

تعريف

المعادلة التفاضلية المتجانسة هي معادلة من الشكل:

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right) \ , \tag{34}$$

حيث F دالة حقيقية لمتغير حقيقي.

لحل المعادلة المتجانسة، نضع

$$t = \frac{y}{x} \,, \tag{35}$$

يكون لدينا ما يلي:

$$y = tx \Rightarrow \mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial y}{\partial t}\mathrm{d}t = t\mathrm{d}x + x\mathrm{d}t \,. \tag{36}$$

و من جهة أخرى، لدينا من المعادلة (34) العلاقة:

$$\mathrm{d}y = F(t)\mathrm{d}x \,. \tag{37}$$

بمقارنة المعادلتين (36) و (37) نستنتج أن

$$\begin{aligned} & F(t)\mathrm{d}x = t\mathrm{d}x + x\mathrm{d}t \\ & \Rightarrow \Big(F(t) - t\Big)\mathrm{d}x = x\mathrm{d}t \\ & \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}t}{F(t) - t} \\ & \Rightarrow x = \lambda \mathrm{e}^{\int \frac{\mathrm{d}t}{F(t)-t}} \,, \end{aligned} \tag{38}$$

حيث λ ثابت كيفي. بعد المكاملة على t في المعادلة (38) ثم تعويض t بـ $\frac{y}{x}$ فإننا نحصل على علاقة تربط الحل y بالمتغير x.

مثال

لنبحث عن حل المعادلة التفاضلية

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} \,.$$

لاحظ أنه يمكننا كتابة هذه المعادلة من الشكل

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \equiv F\left(\frac{y}{x}\right) \,,$$

حيث

$$F(t) = t + \frac{1}{t} \,,$$

و $t = \frac{y}{x}$. إذن لدينا معادلة تفاضلية متجانسة، حلها يُكتب كما في المعادلة (38) على الشكل التالي:

$$x = \lambda \mathrm{e}^{\int t \mathrm{d}t} = \lambda \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2} = \lambda \mathrm{e}^{\frac{y^2}{2x^2}} \ .$$

مثال

نهدف في هذا المثال إلى حل المعادلة التفاضلية

$$(x^3 + 3xy^2)y' + 3x^2y + y^3 = 0 \ .$$

لاحظ أن هذه المعادلة متجانسة حيث

$$y' = -\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^3 + 3\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2} \equiv F(t) \ ,$$

حيث $t = \frac{y}{x}$. بتطبيق المعادلة (38) نجد

$$x = \lambda \mathrm{e}^{\frac{-1}{4}\int \frac{1+3t^2}{t+t^3}\mathrm{d}t} = \lambda \mathrm{e}^{\frac{-1}{4}\ln|t+t^3|} \ ,$$

و بعد التعويض بعبارة t نجد $xy^3 + x^3y = c$ (c ثابت يتعلق بـ λ).

8.3 طريقة التعويض

نعتبر مجددا المعادلة التفاضلية (18):

$$P(x,y) + y'Q(x,y) = 0 \ , \tag{39}$$

و التي يُمكن كتابتها أيضا على الشكل

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0 \ . \tag{40}$$

في بعض الأحيان، يكون من السهل حل المعادلة التفاضلية باعتبار تحويل للمتغيرات. ليكن التحويل التالي:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} \ , \tag{41}$$

حيث x و y دوال للمتغيرات μ و ν:

$$x = x(\mu, \nu) \qquad ; \qquad y = y(\mu, \nu) \ .$$

نحسب التفاضل الكلي للمتغيرين x و y:

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial \mu}\mathrm{d}\mu + \frac{\partial x}{\partial \nu}\mathrm{d}\nu \ , \tag{42}$$

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial \mu}\mathrm{d}\mu + \frac{\partial y}{\partial \nu}\mathrm{d}\nu \ . \tag{43}$$

نعوض الآن بعبارتي $\mathrm{d}x$ و $\mathrm{d}y$ في المعادلة (40) و بعد ترتيب الحدود نحصل على:

$$\tilde{P}\mathrm{d}\mu + \tilde{Q}\mathrm{d}\nu = 0 \ , \tag{44}$$

أين عرفنا المقدارين $\tilde{P}$ و $\tilde{Q}$ بـ:

$$\tilde{P} = \frac{\partial x}{\partial \mu}P + \frac{\partial y}{\partial \mu}Q \ , \tag{45}$$

$$\tilde{Q} = \frac{\partial x}{\partial \nu}P + \frac{\partial y}{\partial \nu}Q \ . \tag{46}$$

إذا كان حل المعادلة (44) يحقق العلاقة

$$H(\mu, \nu) = 0 \ , \tag{47}$$

فإن حل المعادلة (39) يحقق هو أيضا المعادلة (47) و ذلك بعد تعويض عبارة كل من μ و ν بدلالة x و y:

$$H\Big(\mu(x, y), \nu(x, y)\Big) \ .$$

مثال

نعتبر المعادلة التفاضلية

$$3x^2 y\mathrm{e}^y + x^3\mathrm{e}^y(1 + y)y' = 0 \ .$$

نكتب هذه الأخيرة من الشكل التفاضلي التالي:

$$(3x^2 y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}x + x^3\mathrm{e}^y(1 + y)\mathrm{d}y \ .$$

نعتبر التحويل التالي:

$$\mu = x^3 \qquad , \ \nu = y\mathrm{e}^y \ ,$$

فيكون لدينا

$$\mathrm{d}\mu = 3x^2\mathrm{d}x \quad , \ \mathrm{d}\nu = \mathrm{e}^y(1+y)\mathrm{d}y \ .$$

بمقارنة هاتين العلاقتين الأخيرتين بالمعادلة التفاضلية (الشكل التفاضلي أعلاه) فإننا نستنتج مباشرة ما يلي:

$$\nu\mathrm{d}\mu + \mu\mathrm{d}\nu = 0 \ ,$$

و التي نحلها بكل سهولة بطريقة فصل المتغيرات أو طريقة المعادلة التامة. لنتبع طريقة فصل المتغيرات لسهولتها:

$$\frac{\mu}{\mu} = -\frac{\mathrm{d}\nu}{\nu} \Rightarrow \mu = \frac{\lambda}{\nu} \Leftrightarrow \mu\nu = \lambda \ , \ \lambda \in \mathbb{R} \ .$$

عندما نعوض بعبارتي μ و ν بدلالة x و y نحصل على العلاقة التي يحققها حل المعادلة التفاضلية قيد الدراسة:

$$x^3y\mathrm{e}^y = \lambda \ .$$

مثال

نعتبر الآن المعادلة التفاضلية التالية:

$$2x - 3y - 3xy' = 0 \ ,$$

و التي تُكتب أيضا على الشكل التفاضلي

$$(2x-3y)\mathrm{d}x - 3x\mathrm{d}y = 0 \ .$$

بوضع $\mu = x^2 - 3xy$ فإن

$$\mathrm{d}\mu = \frac{\partial\mu}{\partial x}\mathrm{d}x = \frac{\partial\mu}{\partial y}\mathrm{d}y = (2x-3y)\mathrm{d}x - 3x\mathrm{d}y \ .$$

لكن أليس الطرف الأيمن للمعادلة الأخيرة هو الطرف الأول للمعادلة التفاضلية قيد الدراسة ؟ و عليه فهو معدوم:

$$\mathrm{d}\mu = 0$$

أي أن μ مقدار ثابت و ليكن λ:

$$\mu = x^2 - 3xy = \lambda \Rightarrow y = \frac{-\lambda + x^2}{3x} \ .$$

لاحظ أننا لم نحتج إلى استعمال تحويل ثانٍ ν في هذا المثال.

9.3 معادلة برنولي

تعريف

تُعطى معادلة برنولي التفاضلية (Bernoulli's equation) بالعلاقة التالية:

$$y' + \Psi(x)y = \Phi(x)y^{\eta} \ , \tag{48}$$

حيث Ψ و Φ دالتان حقيقيتان لمتغير حقيقي، معرفتان و مستمرتان على مجال معطى، و η عدد حقيقي.

نحل معادلة برنولي باتباع ما يلي:

1. إذا كان $\eta = 0$ أو $\eta = 1$ فإن معادلة برنولي تُختزل إلى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى، حيث يمكن كتابتها من الشكل

$$y' + A(x)y = B(x) \ . \tag{49}$$

الحالة $\eta = 0$: لدينا

$$A(x) \equiv \Psi(x) \ , \tag{50}$$
$$B(x) \equiv \Phi(x) \ . \tag{51}$$

نحل المعادلة التفاضلية بطريقة المعاملات التكاملية كما هو مبيّن في الفصلين 6.3 و 5.3.

الحالة $\eta = 1$: لدينا هذه المرة

$$A(x) \equiv \Psi(x) - \Phi(x) \ , \tag{52}$$
$$B(x) \equiv 0 \ . \tag{53}$$

يمكن حل هذه المعادلة التفاضلية بطريقة المعاملات التكاملية، إلا أن استخدام طريقة فصل المتغيرات أسهل بكثير (راجع الفصل (3.3)). نستطيع إيجاد الحل العام كما يلي:

$$y' + y\Big(\Psi(x) - \Phi(x)\Big) = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = \Big(\Phi(x) - \Psi(x)\Big)\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow y(x) = \lambda \mathrm{e}^{\int (\Phi(x) - \Psi(x))\mathrm{d}x} \ , \tag{54}$$

حيث λ ثابت حقيقي كيفي.

2. أمّا إذا كان $\eta \neq 0$ و $\eta \neq 1$ فإننا نتبع طريقة التعويض التي بيّناها في الفصل (8.3). نضع $t = y^{1-\eta}$ فيكون التفاضل هو

$$\mathrm{d}t = (1-\eta)y^{-\eta}\mathrm{d}y \Rightarrow \mathrm{d}y = \frac{1}{1-\eta}\, y^{\eta}\mathrm{d}t \ , \tag{55}$$

و بقسمة طرفي المعادلة الأخيرة على $\mathrm{d}x$ نجد:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1-\eta}\, y^{\eta}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \equiv \frac{1}{1-\eta}\, y^{\eta}t' \ . \tag{56}$$

ثم بالتعويض في المعادلة (48) نستطيع أن نصل إلى:

$$t' + A(x)t = B(x) \ , \tag{57}$$

حيث الدالتين A و B معرفتان بالعلاقتين:

$$A(x) = (1-\eta)\Psi(x) \ , \tag{58}$$
$$B(x) = (1-\eta)\Phi(x) \ . \tag{59}$$

إذن حصلنا على معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى، و التي يمكن حلها بطريقة المعاملات التكاملية مثلا. بعد إيجاد العلاقة التي يحققها المتغير t نعوض بعبارته $t = y^{1-\eta}$ لكي نجد العلاقة التي يحققها حل معادلة برنولي.

مثال

نريد إيجاد حل معادلة برنولي

$$y' + \frac{y}{2x} = \frac{-y^2}{2x^2} \ .$$

لدينا ما يلي:

$$\Psi(x) = \frac{1}{2x} \ , \ \Phi(x) = \frac{-1}{2x^2} \ , \ \eta = 2 \ .$$

نضع $t = y^{1-\eta} = \frac{1}{y}$، فنحصل على المعادلة التفاضلية الخطية التالية:

$$t' - \frac{t}{2x} = \frac{1}{2x^2} \ , \tag{60}$$

و التي سنحلها بطريقة المعاملات التكاملية. باستخدام المعادلة (26) يمكن بسهولة كتابة المعامل

التكاملي كما يلي:

$$\mu = \mathrm{e}^{\int \frac{-1}{2x}\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln x} = \frac{1}{\sqrt{x}} .$$

الآن، نحصل على معادلة تامة بضرب طرفي المعادلة (60) في المعامل التكاملي الذي حصلنا عليه، و التي نحلها بطريقة المعادلة التامة نجد:

$$t = \frac{-1}{3x} + \lambda\sqrt{x} \ , \ \lambda \in \mathbb{R} .$$

نعوض الآن بعبارة $t = \frac{1}{y}$ نحصل على حل معادلة برنولي أعلاه:

$$y = \frac{-3x}{1 - 3\lambda x^{\frac{3}{2}}} .$$

10.3 الشرط الابتدائي

كما رأينا في الفصول السابقة، فإن الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى يُكتب دوما بدلالة وسيط حقيقي واحد، و الذي رمزنا له مرارًا λ. نرمز للحل العام بـ $y(x) \equiv y_\lambda(x)$. كما قلناه في الفصل (2.3) فإن (x, y_λ) تنتمي إلى ميدان المعادلة التفاضلية $\mathcal{D}$. يُمكن الحصول على حلٍّ خاصٍ بفرض أن منحني التكامل يمر من نقطة مُعطاة في $\mathcal{D}$، و لتكن هذه النقطة هي $\big(x_0, y(x_0)\big)$. يُطلق على هذه النقطة **الشرط الابتدائي**. إذن نستطيع تحديد قيمة الوسيط λ الموافقة لهذا الشرط الابتدائي بحل المعادلة الجبرية:

$$y_\lambda(x_0) = y(x_0) . \tag{61}$$

مثال

لنبحث عن حل خاص للمعادلة التفاضلية

$$y' + \frac{y}{2x} = \frac{-y^2}{2x^2} ,$$

و الذي يحقق الشرط الابتدائي $y(1) = -3$.
وجدنا في مثال سابق الحل العام لهذه المعادلة، و الذي كتبناه:

$$y_\lambda(x) = \frac{-3x}{1 - 3\lambda x^{\frac{3}{2}}} .$$

لدينا الشرط الابتدائي $y_\lambda(1) = -3$ و الذي من خلاله نستخرج قيمة λ كما يلي:

$$y_\lambda(1) = -3 \Leftrightarrow \frac{-3}{1-3\lambda} = -3 \Rightarrow \lambda = 0 \ ,$$

فيكون بذلك الحل الخاص الذي منحنيه التكاملي يمر من النقطة $(1,-3)$ (الشرط الابتدائي) هو

$$y(x) = -3x \ .$$

11.3 المعادلات التفاضلية الخطية

درسنا في الفصل (6.3) المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى. في هذا الفصل نتطرق إلى الحالة العامة للمعادلات التفاضلية الخطية من رتبٍ أعلى. و من ثمّ نهتم بما يُعرف بالمعادلات التفاضلية الخطية بمعاملات ثابتة حيث سندرس بعض طرق إيجاد الحل العام لهذا النوع من المعادلات التفاضلية.

تعريف

نُسمّي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة n كل معادلة تفاضلية من الشكل:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y(x) = b(x) \ , \qquad (62)$$

حيث a_j، $(j = 0, \ldots, n)$، و b دوال حقيقية لمتغير حقيقي، و $n \geq 1$ عدد طبيعي.
عندما يكون الطرف الأيمن للمعادلة أعلاه معدوما $(b = 0)$ فنحصل حينئذٍ على **معادلة تفاضلية خطية متجانسة**

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y(x) = 0 \ . \qquad (63)$$

و في المقابل، عندما يكون b دالةً غير معدومةٍ فنقول عندئذ أنه لدينا **معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة.**

التركيب الخطي لحلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة

لتكن $\{y_1(x), y_2(x), \ldots\}$ حلولاً للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (63).

يُبرهن على أنه **كلّ** تركيب خطي للحلول،

$$y_G(x) \equiv \sum_k c_k y_k(x) \ , \tag{64}$$

هو دوما حلٌّ للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة، أي:

$$a_0(x)y_G^{(n)} + a_1(x)y_G^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y_G(x) = 0 \ . \tag{65}$$

تعريف

نقول عن الدوال

$$y_1(x),\ y_2(x), \ldots,\ y_n(x)$$

أنها **مستقلة خطّيًا** إذا تحقق ما يلي:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x) = 0 \ \Rightarrow \ c_1 = \ldots = c_n = 0 \ . \tag{66}$$

عمليا، كيف نحكم على مجموعة دوال إن كانت مستقلة خطيا أم لا ؟ في ما يلي، مُبرهنة نستطيع من خلالها الإجابة على هذا السؤال. و لكن قبل ذلك، نُعطي تعريف **رونسكي** (Wronsky) مجموعة دوال مُعطاة.

تعريف

نعتبر الدوال

$$y_1(x),\ y_2(x), \ldots,\ y_n(x)$$

و التي نفرض أن تكون مستمرة و قابلة للاشتقاق باستمرار n مرة على الأقل، و ذلك على المجال $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$.

رونسكي هذه الدوال هو الدالة التي نرمز لها بـ $W(x)$ و المعرفة بالمحدد التالي:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \ . \tag{67}$$

الاستقلال الخطي للدوال

تكون الدوال

$$y_1(x),\ y_2(x), \ldots,\ y_n(x)$$

مستقلة خطيا إذا و فقط إذا تحقق:

$$\exists x \in \mathcal{I} :\ W(x) \neq 0\ . \tag{68}$$

و في المقابل، تكون هذه الدوال مرتبطة خطيا إذا و فقط إذا

$$\forall x \in \mathcal{I} :\ W(x) = 0\ . \tag{69}$$

مثال

نريد معرفة إن كانت الدوال e^{mx}، حيث $m = 0, 1, 2$، مستقلة خطيا. نحسب رونسكي هذه الدوال:

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \mathrm{e}^{x} & \mathrm{e}^{2x} \\ 0 & \mathrm{e}^{x} & 2\mathrm{e}^{2x} \\ 0 & \mathrm{e}^{x} & 4\mathrm{e}^{2x} \end{vmatrix} = 2\mathrm{e}^{3x}\ .$$

من الواضح أن رونسكي الدوال أعلاه لا ينعدم من أجل جميع الأعداد الحقيقية، $\forall x \in \mathbb{R}$.
إذن نخلص إلى أنه هذه الدوال مستقلة خطيا، حسب نص المبرهنة أعلاه.

الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة

إذا كانت

$$y_1(x),\ y_2(x), \ldots,\ y_n(x)$$

حلولا مستقلة خطيا للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (63)، فإن التركيب الخطي لها

$$y_G(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)\ , \tag{70}$$

حيث c_k وسائط حقيقية، هو حل للمعادلة (63).
إضافة إلى ذلك، إذا كان $y_P(x)$ حلّا للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة (62)، فإن

$$y(x) = y_G(x) + y_P(x) \tag{71}$$

هو كذلك حل للمعادلة غير المتجانسة.

12.3 المعادلات التفاضلية الخطية بمعاملات ثابتة

عندما تكون المعاملات $a_k(x)$ في المعادلة (63) ثابتة فإنه يُمكن التعبير عن الحل العام بصورة نظامية كما سنرى هذا بعد قليل.

تعريف

عندما تكون المعاملات $a_k(x)$ في المعادلة التفاضلية (62) ثابتة فإنه يقال حينئذٍ أنه لدينا **معادلة تفاضلية خطية بمعاملات ثابتة**، و نكتب:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y(x) = b(x) \; . \tag{72}$$

نهتم الآن بالمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة بمعاملات ثابتة، و نترك دراسة المعادلة غير المتجانسة للفصلين 13.3 و 14.3.

تُكتب المعادلة الخطية المتجانسة بمعاملات ثابتة على الشكل:

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n y(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(n-k)}(x) = 0 \; . \tag{73}$$

نعتبر الدالة

$$y_m(x) = \mathrm{e}^{mx} \; , \tag{74}$$

حيث m وسيط مستقل عن x.

تكون الدالة $y_m(x)$ حلًّا للمعادلة (73) إذا كان:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k y_m^{(n-k)}(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k m^{n-k} \mathrm{e}^{mx} = 0 \; . \tag{75}$$

لكن نعلم أن الدوال e^{mx} مستقلة خطيا، كما رأينا ذلك في مثال سابق، و بالتالي نحصل على المعادلة الجبرية التالية:

$$a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \; . \tag{76}$$

تعريف

تُسمّى المعادلة (76) **المعادلة المميزة** المرفقة بالمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة بمعاملات ثابتة (73).

إذن لكي نحصل على حلول المعادلة (73) و التي كتبناها e^{mx} يجب أولا إيجاد جذور المعادلة المميزة. في الحالة العامة هذه الجذور قد تكون أعدادا مركبة، و عددها مع احتساب تكرار كل جذر هو دوما n. في ما يلي نُعطي شكل حلول المعادلة (73) بدلالة جذور المعادلة المميزة.

نفرض أنه يوجد n_r جذرا حقيقيا مختلفا للمعادلة المميزة. لنرمز لتكرار الجذر الحقيقي m_j بـ g_j، حيث $j = 1, \ldots, n_r$. إضافة إلى ذلك نفرض وُجود n_i زوجا مختلفا لجذور مركبة مترافقة للمعادلة المميزة، و التي نكتبها من الشكل $\lambda_j \pm i\mu_j$ حيث $j = 1, \ldots, n_i$، و $\lambda_j, \mu_j \in \mathbb{R}$. ليكن تكرار الزوج j هو $\tilde{g}_j$.

الحل العام للمعادلة الخطية المتجانسة

يُكتب الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة بمعاملات ثابتة، المعادلة (73)، كما يلي:

$$y_G(x) = \sum_{j=1}^{n_r} \sum_{k=1}^{g_j} c_{jk} x^{k-1} \mathrm{e}^{m_j x} + \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{\tilde{g}_j} x^{k-1} \mathrm{e}^{\lambda_j x} \left(d_{jk} \cos \mu_j x \ + e_{jk} \sin \mu_j x \right) \ , \qquad (77)$$

حيث c_{jk}، d_{jk}، و e_{jk} هي وسائط حقيقية مستقلة عن المتغير x.

مثال

يُرفق بالمعادلة التفاضلية

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

المعادلة المميزة التالية

$$m^2 - 3m + 2 = 0 \ ,$$

و التي تملك الجذرين $m_1 = 1$ و $m_2 = 2$. و بالتالي يُكتب الحال العام للمعادلة التفاضلية

أعلاه من الشكل:

$$y_G(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} ,$$

حيث c_1 و c_2 وسيطين حقيقيين كيفيين، يتعلقان بالشروط الابتدائية. فمثلا، لو تُعطى الشروط الابتدائية بـ

$$y(0) = 0 \quad , \ y'(0) = 1$$

فإننا نحصل على عبارة هذين الوسيطين كما يلي:

$$c_1 = -1, \ c_2 = 1 .$$

مثال

نعتبر المعادلة التفاضلية

$$y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y^{(3)} - y'' = 0 .$$

المعادلة المميزة المرفقة بها هي

$$m^5 - 3m^4 + 3m^3 - m^2 = 0 ,$$

و التي تملك جذرين حقيقيين هما $m1 = 0$ بتكرار $g_1 = 2$ و $m_2 = 1$ بتكرار $g_2 = 3$. و عليه يُكتب الحل العام للمعادلة التفاضلية أعلاه كما يلي:

$$y_G(x) = c_1 + c_2 x + e^x(c_3 + c_4 x + c_5 x^2) .$$

مثال

نعتبر الآن المعادلة التفاضلية

$$y^{(4)} + 4y^{(3)} + 8y'' + 8y' + 4y = 0 .$$

تُكتب المعادلة المميزة المرفقة بهذه الأخيرة على الشكل

$$m^4 + 4m^3 + 8m^2 + 8m + 4 = 0 ,$$

و التي تملك الجذرين المترافقين $1 \pm i$ حيث أن تكرار هذا الزوج هو $\tilde{g} = 2$. و بالتالي نستطيع كتابة الحل العام للمعادلة التفاضلية قيد الدراسة على الشكل

$$y_G(x) = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x) .$$

13.3 طريقة المعاملات غير المحددة

نهدف في هذا الفصل إلى إيجاد الحل العام لمعادلة تفاضلية خطية غير متجانسة و بمعاملات ثابتة، المعادلة (72)، و التي نعيد كتابتها في ما يلي:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y(x) = b(x) \ , \tag{78}$$

و ذلك من أجل بعض الحالات أين يأخذ الطرف الثاني $b(x)$ شكلا خاصا، سنتكلم عنه بعد قليل.

بهدف تسهيل كتابة المعادلات و التعبير عنها، نعتمد الكتابة الاصطلاحية التالية. بتعريف مؤثر الاشتقاق،

$$D \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ , \tag{79}$$

فإنه يُمكننا إعادة كتابة المعادلة (78) على الشكل

$$\begin{aligned}
& a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y(x) = b(x) \ , \\
\Rightarrow \quad & \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(n-k)} = b(x) \ , \\
\Rightarrow \quad & \sum_{k=0}^{n} a_k D^{n-k} y(x) = b(x) \ , \\
\Rightarrow \quad & \sum_{k=0}^{n} \left(a_k D^{n-k} \right) y(x) = b(x) \ , \\
\Rightarrow \quad & P_n(D) y(x) = b(x) \ , \qquad (80)
\end{aligned}$$

حيث عرّفنا دالة مؤثر الاشتقاق بالعلاقة

$$P_n(D) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^{n-k} \ , \tag{81}$$

أي أن P_n هو كثير حدود من الرتبة n لمؤثر الاشتقاق.

عندما يكون الطرف الثاني، $b(x)$، للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة بمعاملات ثابتة، المعادلة (78)، حلّا لمعادلة تفاضلية خطية متجانسة بمعاملات ثابتة، فإنه يُمكن اتباع **طريقة المعاملات غير المحددة** من أجل إيجاد عبارة الحل العام للمعادلة (78).

تتضمن طريقة المعاملات غير المحددة الخطوات التالية:

1. إيجاد الحل العام للمعادلة المتجانسة،

$$P_n(D)y = 0 \ , \tag{82}$$

و لنرمز لهذا الحل بـ y_p.

2. نبحث المعادلة التفاضلية التي يحققها $b(x)$، أي أننا نبحث عن كثير حدود، $Q_\ell(D)$، للمؤثر D الذي يحقق

$$Q_\ell(D)b(x) = 0 \ , \tag{83}$$

حيث ℓ يُمثل درجة كثير الحدود Q_ℓ.

3. نضرب طرفي المعادلة (80) من جهة اليسار في المؤثر Q_ℓ فنحصل على

$$Q_\ell(D)P_n(D)y = Q_\ell(D)b(x) = 0 \ , \tag{84}$$

لأن $b(x)$ يحقق المعادلة (83).

4. لاحظ أن المعادلة (84) هي معادلة تفاضلية خطية متجانسة بمعاملات ثابتة، و التي يُمكن إيجاد حلها العام بطريقة المعادلة المميزة التي بيّناها في الفصل (12.3). يُكتب هذا الحل العام على الشكل

$$y_G(x) = y_p(x) + y_q(x) \ , \tag{85}$$

حيث y_G هو حل لمعادلة تفاضلية من الرتبة $n+\ell$ و عليه فإن عبارته تُكتب بدلالة $n+\ell$ معاملات كيفية. من بين هذه المعاملات، y_p يحتوي على n معامل، و بقية المعاملات التي عددها ℓ توجد في عبارة y_q، و هي غير محددة حتى الآن. من هنا جاءت تسمية هذه الطريقة بالمعاملات غير المحددة.

5. الحل العام للمعادلة التفاضلية (80) هو

$$y_G(x) = y_p(x) + y_q(x) \ . \tag{86}$$

تذكّر أن الحد y_q يحتوي على معاملات غير محددة و التي يجب إيجاد عبارتها، و هذا من خلال تعويض y_G في المعادلة (80). إذن، يكون لدينا ما يلي:

$$P_n(D)y_G(x) = P_n(D)\Big(y_p(x) + y_q(x)\Big) = b(x) \ . \tag{87}$$

لكن $P_n(D)y_p(x) = 0$ و هذا حسب المعادلة (82). و بالتالي نحصل على المعادلة

$$P_n(D)y_q(x) = b(x) \ , \tag{88}$$

و التي تمكننا من تحديد قيمة المعاملات الموجودة في عبارة $y_q(x)$. و بذلك نكون وجدنا عبارة الحل العام y_G الذي يحقق المعادلة التفاضلية قيد الدراسة، المعادلة (80).

مثال

لنبحث عن الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' + 4y = 4\sin^2 x \ .$$

في هذا المثال لدينا ما يلي:

$$f(D) = D^2 + 4 \ ,$$
$$b(x) = 4\sin^2 x \ .$$

هذه معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة بمعاملات ثابتة. لنرى إن كان بإمكاننا حلها بطريقة المعاملات غير المحددة. لاحظ أن الطرف الثاني، $b(x)$ يُمكن كتابته من الشكل:

$$b(x) = 2 - 2\cos 2x \ .$$

إن الحدين الأول و الثاني من العبارة الأخيرة يوافقان جذرين لمعادلة مميزة نبحث عنها. الحد الأول ثابت فهو يوافق الجذر $m_1 = 0$، أما الحد الثاني فهو دالة جيبية أي أنه يوافق جذرين مركبين مترافقين $m_{\pm} = \pm 2i$. يُحصل على هاتين النتيجتين بعكس الخطوات التي تُتبع لحل معادلة تفاضلية متجانسة بمعاملات ثابتة. بحصولنا على جذور المعادلة المميزة فإننا نستطيع أن نكتبها من الشكل:

$$(m - m_1)(m - m_+)(m - m_-) = 0 \Leftrightarrow m(m - 2i)(m + 2i) = 0 \ .$$

و عليه فإن الطرف الثاني، $b(x)$، أعلاه يحقق المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة بمعاملات ثابتة التالية:

$$Q_2(D)y = D(D - 2i)(D + 2i)y = 0 \ ,$$

أي أن $Q_2(D) = D(D-2i)(D+2i)$. إذن نستطيع تطبيق طريقة المعاملات غير المحددة للبحث عن الحل العام للمعادلة التفاضلية قيد الدراسة.
نتبع الخطوات التالية:

1. المعادلة المتجانسة المرفقة بالمعادلة التفاضلية قيد الدراسة هي:

$$y'' + 4y = 0 \Leftrightarrow P_2(D)y = 0 \ ,$$

حيث $P_2(D) = D^2 + 4$. نكتب إذن المعادلة المميزة على الشكل:

$$P_2(m) = m^2 + 4 = 0$$

و التي تملك جذرين مترافقين هما $\pm 2i$. و بالتالي يكون الحل العام للمعادلة المتجانسة أعلاه هو

$$y_p(x) = c_1 \cos 2x \ + \ c_2 \sin 2x \ ,$$

حيث c_1 و c_2 ثابتين كيفيين.

2. وجدنا قبل قليل المعادلة التفاضلية التي يحققها الطرف الثاني، $b(x)$، حيث حصلنا على

$$Q_2(D) = D(D-2i)(D+2i) = D(D^2+4)^2 \ .$$

3. نبحث الآن عن y_q، حل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة

$$Q_2(D)P_2(D)y_q = 0 \ .$$

لنحلها بطريقة المعادلة المميزة:

$$Q_2(m)P_2(m) = 0 \Leftrightarrow m(m^2)^2 = 0 \ .$$

لهذه المعادلة المميزة الجذور التالي: $m_1 = 0$ و زوج الجذور المترافقة $m_\pm = \pm 2i$ بتكرار $\tilde{g} = 2$. و بالتالي يُكتب الحل العام على الشكل:

$$y_q(x) = y_p(x) + y_q(x) \ ,$$

حيث

$$y_q(x) = A + x(B\cos 2x \ + \ C\sin 2x) \ ,$$

حيث A، B و C هي المعاملات غير المحددة و التي نبحث في ما يلي عن قيمتها.

4. نعوض الآن بعبارة y_q التي حصلنا عليها أعلاه في المعادلة التفاضلية قيد الدراسة، و ذلك للحصول على المعاملات غير المحددة:

$$\begin{aligned}
y_q'' + 4y_q &= 4\sin^2 x = 2 - 2\cos 2x \\
y_q' &= (B+2Cx)\cos 2x \ + \ (C-2Bx)\sin 2x \\
y_q'' &= 4(C-Bx)\cos 2x \ - \ 4(B+Cx)\cos 2x \\
\Rightarrow \quad & 4A + 4(B+C-Bx)\cos 2x + 4(-B+C+Cx)\sin 2x = 2 - 2\cos 2x \\
\Rightarrow \quad & A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2},\ C = 0
\end{aligned}$$

إذن الحل العام المعادلة التفاضلية قيد الدراسة هو

$$y_G(x) = c_1\cos 2x \ + \ c_2\sin 2x \ + \ \frac{1}{2}(1 - x\cos 2x) \ .$$

14.3 طريقة تغاير الوسائط

قلنا في الفصل (13.3) أنه إذا كان الطرف الثاني للمعادلة التفاضلية يحقق معادلة تفاضلية خطية متجانسة بمعاملات ثابتة، فإنه يمكن حل المعادلة (78) بطريقة المعاملات غير المتجانسة. لكن ماذا لو لم يكن الطرف الثاني من شكل يسمح لنا بإيجاد معادلته التفاضلية التي يحققها ؟ في هذه الحالة نلجأ إلى طرق أخرى لإيجاد الحل العام. في هذا الفصل نعتبر طريقة تمكننا من إيجاد الحل عام لمعادلات تفاضلية خطية بمعاملات ثابتة، و ذلك من أجل طرف ثانٍ، $b(x)$، كيفي. هذه الطريقة تُسمّى **تغاير الوسائط.**

من أجل تقديم فكرة هذه الطريقة بصورة مبسّطة، فإننا سنعتبر معادلات تفاضلية خطية بمعاملات ثابتة من الرتبة الثانية. إلّا أن تعميم هذه الطريقة لمعادلات ذات رتب أعلى هو أمر سهل.

نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية بمعاملات ثابتة من الرتبة الثانية:

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = b(x)\ , \tag{89}$$

حيث $a_0 \neq 0$.

في طريقة تغاير الوسائط، نتبع الخطوات التالية:

1. نبحث عن حل المعادلة المتجانسة:

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0\ . \tag{90}$$

نحل هذه الأخيرة بطريقة المعادلة المميزة، و نحصل على حل من الشكل:

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)\ , \tag{91}$$

حيث y_1 و y_2 يمثلان الحلين المستقلين للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة أعلاه، و c_1 و c_2 هما وسيطين كيفيين.

2. لإيجاد الحل العام للمعادلة (89) فإننا نعتبر الوسيطين c_1 و c_2 دالتين للمتغير x:

$$c_1 = c_1(x),\ c_2 = c_2(x)\ . \tag{92}$$

و من ثمّ نعوض بعبارة y الظاهرة في المعادلة (91) أعلاه في المعادلة التفاضلية غير المتجانسة:

$$y' = c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_1y_1' + c_2y_2'\ , \tag{93}$$

$$y'' = c_1''y_1 + c_2''y_2 + 2c_1'y_1' + 2c_2'y_2' + +c_1y_1'' + c_2y_2''\ . \tag{94}$$

بالتعويض في المعادلة (89) نحصل على:

$$\begin{aligned} &c_1(a_0y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + c_2(a_0y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2) \\ &+ c_1'(2a_0y_1' + a_1y_1) + c_2'(2a_0y_2' + a_1y_2) \\ &+ c_1''a_0y_1 + c_2''a_0y_2 = b(x)\ . \end{aligned} \tag{95}$$

لكن معامل كل من c_1 و c_2 في المعادلة أعلاه يكون معدوما لأن كلا من y_1 و y_2 عبارة عن حلين للمعادلة التفاضلية المتجانسة (91). و عليه نصل إلى العبارة التالية:

$$c_1'(2a_0y_1' + a_1y_1) + c_2'(2a_0y_2' + a_1y_2) + c_1''a_0y_1 + c_2''a_0y_2 = b(x) \ . \quad (96)$$

3. نفرض الآن أن

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \ . \quad (97)$$

باشتقاق طرفي هذه المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$c_1''y_1 + c_2''y_2 = -c_1'y_1' - c_2'y_2' \ , \quad (98)$$

و من ثم التعويض في المعادلة (96) فإننا نحصل على

$$a_0(c_1'y_1' + c_2'y_2') + a_1(c_1'y_1 + c_2'y_2) = b(x) \ . \quad (99)$$

لكن معامل a_1 في المعادلة الأخيرة معدوم، و هذا حسب المعادلة (97). إذن نحصل على المعادلة التالية:

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = \frac{b(x)}{a_0} \ . \quad (100)$$

4. إذن، حصلنا على جملة المعادلتين (97) و (100)، و التي بحلها بالنسبة إلى الوسيطين c_1' و c_2' و من ثمّ مكاملة النتيجة فإننا نجد عبارتي c_1 و c_2. في الأخير نعوض في عبارة الحل، المعادلة (91)، فنكون بذلك قد وصلنا إلى عبارة الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة بمعاملات ثابتة من الدرجة الثانية.

مثال

نبحث في هذا المثال عن الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' - 3y' + 2y = \sin \mathrm{e}^{-x} \ .$$

المعادلة المتجانسة تُكتب

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \ ,$$

و المعادلة المميزة:

$$m^2 - 3m + 2 = 0 \ .$$

جذور هذه الأخيرة هي

$$m_1 = 1, \ m_2 = 2 \ ,$$

فيكون بذلك الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$y = c_1 \mathrm{e}^{x} + c_2 \mathrm{e}^{2x}$$

أي أن

$$y_1 = \mathrm{e}^{x},\ y_2 = \mathrm{e}^{2x}\ .$$

تُكتب جملة المعادلتين (97) و (100):

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{x} c_1' + \mathrm{e}^{2x} c_2' &= 0 \\ \mathrm{e}^{x} c_1' + 2\mathrm{e}^{2x} c_2' &= \sin \mathrm{e}^{-x} \end{cases} .$$

حل هذه الجملة هو

$$\begin{cases} c_1' = -\mathrm{e}^{-x} \sin \mathrm{e}^{-x} \\ c_2' = \mathrm{e}^{-2x} \sin \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = A - \cos \mathrm{e}^{-x} \\ c_2 = B + \mathrm{e}^{-x} \cos \mathrm{e}^{-x} - \sin \mathrm{e}^{-x} \end{cases} ,$$

حيث A و B يمثلان ثابتي تكامل. و بالتعويض في عبارة الحل أعلاه نجد

$$y = A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{2x} + 2\sinh x\ \cos \mathrm{e}^{-x}\ -\ \mathrm{e}^{2x} \sin \mathrm{e}^{-x}\ .$$

15.3 تمارين الباب 3

التمرين 1.3: مبرهنة فصل المتغيرات

برهن على أن $y(x)$ يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y' = g(x)h(y)$$

إذا و فقط إذا كان

$$H(y) = G(x) + \lambda \ ,$$

حيث يُطلب إيجاد عبارة H و G بدلالة g و h.

التمرين 2.3: طريقة فصل المتغيرات

أوجد حلول المعادلات التفاضلية التالية:

1. $y' = \cos^2 x \cos y$
2. $y' = e^{-x-y}$
3. $y' = (y-1)(y-2)$
4. $y' = xy^2 + y^2 + xy + y$
5. $\sin x \cos y + y' \tan y \cos x = 0$
6. $(e^{2x}+4)y' = y$

التمرين 3.3: المعادلة التفاضلية المتجانسة

حل المعادلات التفاضلية التالية:

1. $xy' - y = xe^{\frac{y}{x}}$
2. $y' = \frac{x-y}{x+y}$

التمرين 4.3: المعادلة التفاضلية التامة

تأكد من أن المعادلات التفاضلية التالية تامة ثم أوجد الحل:

1. $\cos x \cos y - \cot x - y' \sin x \sin y = 0$
2. $2xy^2 + 2xye^{2x} + ye^{2x} + y'(2x^2y + xe^{2x}) = 0$

التمرين 5.3: المعاملات التكاملية

- أوجد المعامل التكاملي ثم أبحث عن حل المعادلات التفاضلية التالية:

1. $3(y + e^x y^{\frac{2}{3}}) + xy' = 0$ 2. $\sin y + x^2 + 2x + y' \cos y = 0$

• حل المعادلة التفاضلية الخطية التالية: $y' + \frac{y}{x} = 2$

التمرين 6.3: معادلة برنولي

حل المعادلتين التفاضليتين التاليتين:

1. $y' + xe^{-2x}y^3 - y = 0$ 2. $y' + x^2y^2 \cos x + \frac{2y}{x} = 0$

التمرين 7.3: المعادلة المميزة

• أوجد المعادلة المميزة ثم أكتب الحلول للمعادلات التالية:

1. $y'' - 5y' + 6y = 0$ 2. $y'' - 2y' + 2y = 0$ 3. $y^{(4)} - 2y^{(3)} + y'' + 2y' - 2y = 0$ 4. $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y^{(3)} + y'' - 4y' + 2y = 0$

• أكتب المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة بمعاملات ثابتة التي تحققها الدوال التالية:

1. $y = 7e^{-x} \sin 2x$ 2. $y = \frac{1}{6}\, x \cos 3x$ 3. $y = 2 \cosh x$ 4. $y = 4x - 2x^2 + \sin^3 x$

التمرين 8.3: طريقة المعاملات غير المحددة

حل المعادلات التفاضلية التالية:

1. $y'' - y' - 2y = 6x + 6e^{-x}$ 2. $y'' + y = 12 \cos^2 x$

التمرين 9.3: طريقة تغاير الوسيط

حل المعادلات التفاضلية التالية:

1. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ 2. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$

باب 4

السلاسل العددية

ندرس في هذا الباب السلاسل العددية، حيث سنهتم بالسلاسل العددية اللانهائية و ندرس تقاربها من خلال استخدام بعض اختبارات التقارب تشبه تلك التي رأيناها في الباب (2).

1.4 السلسلة العددية اللانهائية

لتكن $\{a_0, \ldots, a_n\}$ متتالية عددية حيث a_k $(k \in \{0, \ldots, n\})$ هو عبارة حدها العام.

تعريف

يُسمّى المجموع S_n حيث :

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \ , \tag{1}$$

بـ سلسلة عددية للمتتالية العددية $\{a_0, \ldots, a_n\}$.
لمّا يكون عدد الحدود لا نهائي في السلسلة العددية فإنّها تُسمّى حينئذ سلسلة لا نهائية، و نكتب:

$$S := \lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \ . \tag{2}$$

ملاحظة:
في ما يلي سنكتفي بمصطلح السلسلة للدلالة على السلسلة اللانهائية، إلا إذا أُشير إلى غير ذلك.

2.4 مفهوم تقارب/تباعد سلسلة لا نهائية

بما أن السلسلة اللانهائية تحتوي على عدد غير منتهٍ من الحدود فإنه من البديهي طرح السؤال : هل قيمة هذه السلسلة منتهية أم لا ؟ و هل توجد قيمة واحدة لها أم أنها غير مُحدّدة ؟

تعريف

- يُقال عن سلسلة أنها متقاربة إذا و فقط إذا كانت لديها قيمة منتهية و وحيدة.
- و في المقابل، فإنه يُقال عن سلسلة أنها متباعدة إذا كانت لها قيمة لا نهائية أو ليست لها قيمة محددة.

نهاية حدود سلسلة متقاربة

إذا كانت السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ متقاربة فإنّ

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0 \,. \tag{3}$$

3.4 السلسلة الهندسية

نعتبر متتالية هندسية حدّها الأول $a_0 = a \neq 0$ و أساسها $r \neq \pm 1$. يُكتب الحد العام للمتتالية الهندسية بالعبارة

$$a_k = ar^k \,. \tag{4}$$

تعريف

تُكتب السلسلة الهندسية بالعبارة

$$S^{\text{geometric}} := \sum_{k=0}^{\infty} a_k = a \sum_{k=0}^{\infty} r^k \,. \tag{5}$$

يمكن إيجاد قيمة السلسلة الهندسية كما يلي :

$$\begin{aligned} S^{\text{geometric}} &= a \sum_{k=0}^{\infty} r^k \\ &= a \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} r^k \\ &= a \lim_{n\to\infty} (1 + r + r^2 + \cdots + r^n) \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 + r + \cdots + r^n)(1 - r) &= 1 - r^{n+1} \\ \Rightarrow (1 + r + \cdots + r^n) &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \ . \qquad (6) \\ \Rightarrow S^{\text{geometric}} &= a \lim_{n\to\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \ . \qquad (7) \end{aligned}$$

لاحظ أنّ قيمة السلسلة الهندسية تتعلّق بالأساس r حيث :

$$\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = \begin{cases} 0 & : \ |r| < 1 \ , \\ \pm\infty & : \ |r| > 1 \ . \end{cases} \qquad (8)$$

و بالتالي نجد عبارة السلسلة الهندسية كما يلي :

$$S^{\text{geometric}} = \begin{cases} \dfrac{a}{1 - r} & : \ |r| < 1 \ , \\ \pm\infty & : \ |r| > 1 \ . \end{cases} \qquad (9)$$

إذن نخلص إلى النتيجة التالية :

تقارب السلسلة الهندسية

تكون السلسلة الهندسية متقاربة إذا و فقط إذا كانت طويلة الأساس أقل تماما من الواحد، $|r| < 1$ و تتباعد إذا و فقط إذا: $|r| \geq 1$.

مثال

نعتبر السلسلة

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots .$$

إن المجموع أعلاه عبارة عن سلسلة هندسية حدها الأول هو الواحد و أساسها يساوي النصف :

$$a = 1 \ , \ r = \frac{1}{2} \ ,$$

و بالتالي فهي سلسلة متقاربة لأن أساسها أقل من الواحد : $r < 1$.

4.4 السلسلة-p

تعريف

تُسمّى السلسلة

$$S^{(p)} := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \ , \qquad p \in \mathbb{R} \ , \tag{10}$$

بـ السلسلة-p.

تقارب السلسلة-p

تتقارب السلسلة-p من أجل $p > 1$ و تتباعد من أجل $p \leq 1$.

يمكن الرجوع إلى البرهان على هذه المبرهنة في حل التمرين (7.4).

مثال

السلسلة

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

هي سلسلة-p حيث $p = 2$. إذن السلسلة أعلاه متقاربة لأن $p > 1$.

5.4 التقارب المطلق

التقارب المطلق

إذا كانت السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ متقاربة فإن السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ متقاربة أيضا.

يمكن الاطلاع على البرهان على هذه القضية في حل التمرين (4.4).

ملاحظة:

القضية العكسية ليست دوما صحيحة، أي أنه أحيانا نجد السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ متقاربة بينما $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ سلسلة متباعدة. و هذا ما يُسمّى التقارب الشرطي.

مثال

نعتبر السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$. يمكن البرهان على أن هذه السلسلة متقاربة مطلقا، كما يلي.

نضع $a_k = \frac{(-1)^k}{k^2}$. و عليه فإن السلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

ما هي إلّا سلسلة-p توافق $p = 2$. و بالتالي فهي سلسلة متقاربة (لأن $p > 1$). و حسب مبرهنة التقارب المطلق أعلاه تكون السلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k)}{k^2}$$

متقاربة أيضا.

6.4 اختبارات تقارب السلاسل

أحينا ما نهتم بمعرفة إن كانت سلسلة ما متقاربة أو متباعدة دون الحاجة إلى إيجاد القيمة الفعلية لها. في ما يلي بعض اختبارات تقارب السلاسل العددية التي تمكّننا من الحكم على تقارب أو تباعد سلسلة معطاة دون إيجاد العبارة الحرفية أو العددية للسلسلة. سيُلاحظ أن العديد من اختبارات التقارب لدراسة السلاسل العددية هي نفسها المستخدمة في دراسة تقارب التكاملات المعتلة المدروسة في الباب (2).

1.6.4 اختبار المقارنة

نعتبر المتتاليتين $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ و $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ حيث يكون ما يلي محقّقا :

$$\exists N \in \mathbb{N} : \ \forall k \geq N,\ 0 \leq a_k \leq b_k \ . \tag{11}$$

اختبار المقارنة

إذا كانت السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ متقاربة فإنّ السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ متقاربة.
و إذا كانت السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ متباعدة فإنّ السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ متباعدة.

يوجد البرهان على هاتين القضيتين في حل التمرين (5.4).

ملاحظة:
عكس القضيتين أعلاه ليس دوما صحيح، فلو كانت السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ متقاربة فإنه لا يمكن الحكم على تقارب أو تباعد السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$. و أيضا لو كانت السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ متباعدة فإننا لا نستطيع معرفة إن كانت السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ متقاربة أو متباعدة.

مثال

نريد دراسة تقارب السلسلة $S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$. لدينا ما يلي :

$$\forall k \geq 0 : \ 0 < \frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n} \ .$$

بما أنّ السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ متقاربة، لأنها سلسلة هندسية أساسها $r = \frac{1}{2}$ أصغر من الواحد، فإنه،

حسب اختبار المقارنة، تكون السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ متقاربة أيضا.

2.6.4 اختبار مقارنة النهاية

نعتبر المتتاليتين $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ و $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ تحققان المتراجحتين التاليتين :

$$\exists N \in \mathbb{N} : \ \forall k \geq N,\ a_k \geq 0\ ,\ b_k \geq 0\ . \tag{12}$$

نضع

$$C := \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}\ . \tag{13}$$

اختبار مقارنة النهاية

1. إذا كان C مقدارًا منتهٍ و غير معدوم، أي أنّ $C \neq 0$ و $C \neq \infty$، فإنه يكون للسلسلتين $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ و $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ نفس السلوك، فهما إمّا تتقاربان أو تتباعدان في آنٍ واحدٍ.
2. إذا كان $C = 0$، فإن القضية التالية صحيحة :
   إذا كانت السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ متقاربة فإن السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ متقاربة.
3. و إذا كان $C = \infty$، فإن ما يلي محقق :
   إذا كانت السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ متباعدة فإن السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ متباعدة.

يمكن تطبيق المبرهنة أعلاه في حالة كون أحد السلستين هي السلسلة-p : $b_k \equiv \frac{1}{k^p}$ ($k \geq 1$ و $p \in \mathbb{R}$)، و ذلك كما يلي (أنظر حل التمرين (6.4)) :

اختبار مقارنة النهاية مع السلسلة-p

- إذا كان C منتهٍ و $p > 1$ فإنّ السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ تتقارب.

• و إذا كان C غير معدوم (قد يكون C غير منتهٍ) و $p \leq 1$ فإنّ السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ تتباعد.

مثال

ندرس تقارب السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{4n^3-2}$. لدينا ما يلي :

$$C \equiv \lim_{k\to\infty} n^2 \, \frac{n}{4n^3-2} = \frac{1}{4} \, .$$

إذن لدينا C منتهٍ مع $p \equiv 2 > 1$ و بالتالي حسب المبرهنة الأخيرة فإن السلسلة قيد الدراسة تكون متقاربة.

مثال

نهدف إلى دراسة تقارب السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$. بما أنّ

$$C \equiv \lim_{k\to\infty} n^{\frac{1}{2}} \, \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}} = \infty \, ,$$

حيث $p = \frac{1}{2}$ فإنه حسب مبرهنة اختبار مقارنة النهاية مع السلسلة-p تكون السلسلة المدروسة هنا متباعدة.

3.6.4 اختبار التكامل

نعتبر المتتالية العددية $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ و الدالة الحقيقية f حيث

$$\exists N \in \mathbb{N}, \ \forall k \geq N : \ a_k = f(k) \, . \tag{14}$$

اختبار التكامل

السلسلة $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ و التكامل المعتل $\int_N^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ لهما نفس السلك: إمّا يتقاربان أو يتباعدان في آنٍ واحدٍ.

يمكن استخدام هذه المبرهنة للبرهان على تقارب/تباعد السلسلة-p، كما هو موضح في الفصل (4.4) و في التمرين (7.4).

4.6.4 اختبار السلسلة المتناوبة

تعريف

نقول عن السلسلة $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ (حيث $N \in \mathbb{N}$) أنّها متناوبة إذا و فقط إذا كان

$$\forall k \geq N : \ a_k a_{k+1} < 0 \ . \tag{15}$$

اختبار تقارب السلسلة المتناوبة

تكون السلسلة المتناوبة $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ متقاربة إذا و فقط إذا كان :

$$\forall k \geq N : \ |a_{k+1} \leq |a_k| \ , \tag{16}$$

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0 \ . \tag{17}$$

مثال

نعتبر السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ حيث $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$. لاحظ أنّ هذه سلسلة متناوبة.

لدينا ما يلي :

$$\forall k \geq 1 : \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{|a_{k+1}|} < \underbrace{\frac{1}{k}}_{|a_k|} ,$$

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^k}{k} = 0 ,$$

أي أنّ شروط تقارب السلسلة المتناوبة محققة و بالتالي فإنّ السلسلة أعلاه متقاربة.

تقريب سلسلة متناوبة

لتكن $S_n \equiv \sum_{k=N}^{n} a_k$ سلسلة متناوبة. إذا كانت السلسلة اللانهائية $S \equiv \lim_{n\to\infty} S_n$ متقاربة فإن :

$$\forall n \geq N : \ |S - S_n| < |a_{n+1}| . \tag{18}$$

مثال

نعتبر السلسلة $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$. وجدنا في مثال سابق أن هذه السلسلة المتناوبة متقاربة.
حسب المبرهنة الأخيرة فإن أكبر قيمة ممكنة للخطأ المرتكب في حساب القيمة التقريبية لهذه السلسلة الموافقة للحدود n الأولى هي δ_n حيث:

$$|S - S_n| < \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right| \equiv \delta_n \quad \Rightarrow \quad \delta_n = \frac{1}{n+1} .$$

5.6.4 اختبار النسبة

نعتبر السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ و نعرّف النهاية

$$L := \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| . \tag{19}$$

اختبار النسبة

1. إذا كان $L < 1$ فإنّ السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ متقاربة مطلقا.
2. إذا كان $L > 1$ فإن السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ متباعدة.
3. و إذا كان $L = 1$ فإنّه لا يمكن الحكم على تقارب السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$: فقد تكون متقاربة أو متباعدة، و يجب اللجوء إلى طرق أخرى لمعرفة ذلك.

مثال

لندرس تقارب السلسلتين

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ , \qquad a_k = (-1)^k \frac{k}{2^k} \ ,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \ , \qquad b_k = \frac{(2n)!}{n^3} \ .$$

نحسب النهايتين L_1 و L_2 :

$$L_1 = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{1}{2} \ ,$$
$$L_2 = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{b_{k+1}}{b_k} \right| = \infty \ .$$

حسب مبرهنة اختبار النسبة فإن السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ متقاربة $(L_1 < 1)$ و السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ متباعدة $(L_2 > 1)$.

6.6.4 اختبار الجذر

نعتبر السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ و نعرّف النهاية

$$L := \lim_{k\to\infty} \left(|a_k|\right)^{\frac{1}{n}} \ . \qquad (20)$$

اختبار النسبة

1. إذا كان $L < 1$ فإنّ السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ متقاربة مطلقا.
2. إذا كان $L > 1$ فإن السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ متباعدة.
3. و إذا كان $L = 1$ فإنّ السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$: قد تكون متقاربة أو متباعدة، و يجب استخدام طرق أخرى لمعرفة ذلك.

مثال

ندرس تقارب السلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ , \ a_k = \frac{2^{3k+1}}{k^k} \ .$$

لدينا ما يلي :

$$L = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} 2^3 \frac{2^{\frac{1}{k}}}{k} = 0 \ ,$$

أي أنّ هذه السلسلة متقاربة مطلقا $(L < 1)$.

7.4 سلسلة القوى

تعريف

سلسلة قوى هي كل سلسلة من الشكل

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k \ , \tag{21}$$

حيث a و c_k ثوابت حقيقية و x متغير حقيقي.

ملاحظة:
يمكن التعبير أيضا عن سلسلة القوى بالعبارة

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k \ , \tag{22}$$

و التي يُحصل عليها انطلاقا من (21) بعد نشر الحدود $(x-a)^k$ ثمّ إعادة ترتيب الحدود المتشابهة x^k.
راجع حل التمرين (9.4).

تقارب سلسلة قوى

شرط تقارب سلسلة قوى :

$$\exists R \geq 0 : \ \forall |x| < R \Rightarrow \text{سلسلة القوى متقاربة} \ . \tag{23}$$

شرط تباعد سلسلة قوى :

$$\exists R \geq 0 : \ \forall |x| > R \Rightarrow \text{سلسلة القوى متباعدة} \ . \tag{24}$$

أمّا إذا كان $|x| = R$ فيمكن أن تكون السلسلة متقاربة أو متباعدة، و يجب حينئذ استخدام أحد اختبارات التقارب التي درسناها سابقا.

تعريف

يُسمّى العدد الحقيقي الموجب R الذي يظهر في المعادلة (23) بـ نصف قطر تقارب سلسلة القوى، و يُسمّى مجال المتغيّر x الذي من أجله تتقارب سلسلة القوى بـ مجال التقارب (مثلا $-R \leq x < R$).

ملاحظة:
عادة ما يُستخدم اختبار النسبة لإيجاد نصف قطر تقارب سلسلة القوى.

مثال

نعتبر سلسلة القوى $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ و نبحث عن نصف قطر التقارب و أيضا مجال التقارب.

نضع $a_k(x) = \frac{x^k}{k}$ و ندرس تقارب السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$. باستخدام اختبار النسبة :

$$a_k(x) = \frac{x^k}{k} \Rightarrow a_{k+1}(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} .$$
$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{k}{k+1}\, x\right| = |x| .$$

حسب اختبار النسبة فإن السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ تتقارب إذا كان $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ أي من أجل $|x| < 1$ و عليه فإن نصف قطر التقارب هو $R = 1$. و عليه فإن سلسلة القوى تتقارب من أجل $\forall |x| < 1$، لكن هل تتقارب هذه السلسلة من أجل $|x| = R = 1$ ؟ لدينا حالتين بالنسبة لقيمة x :

الحالة الأولى $x = 1$: ندرس تقارب السلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} ,$$

و التي هي سلسلة-p من أجل $p = 1$. و بالتالي فهي سلسلة متباعدة لأن $p \leq 1$ (راجع شرط تقارب السلسلة-p في الفصل (4.4)).

الحالة الثانية $x = -1$: ندرس الآن تقارب السلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(-1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} ,$$

و التي هي سلسلة متناوبة (انظر الفصل (4.6.4)). باستخدام اختبار السلسلة المتناوبة نجد أن هذه السلسلة متقاربة.

إذن كخلاصة فإن السلسلة قيد الدراسة تتقارب من أجل $-1 \leq x < 1$ و هو مجال التقارب الذي نبحث عنه.

8.4 سلسلة القوى و الدوال

نعتبر سلسلة القوى $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ و التي نفرض أنّها متقاربة من أجل $|x - a| < R$.

نعرّف الدالة f حيث

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k \ . \tag{25}$$

نصف قطر تقارب مشتقة سلسلة القوى

السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ و مشتقتها بالنسبة للمتغير x،

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x-a)^{k-1} \ , \tag{26}$$

هما سلسلتي قوى لهما نفس نصف قطر التقارب.

يمكن الاطلاع على إثبات صحة المبرهنة أعلاه في حلّ التمرين (11.4)

سلسلة القوى المرفقة بدالة

يُعبّر عن الدالة f بسلسلة القوى مساوية للسلسة $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ حيث تكون السلسلة متقاربة من أجل $|x-a| < R$ و هي نفسها مجموعة تعريف الدالة f و أيضا يكون :

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \ , \tag{27}$$

حيث $f^{(k)}$ هو مشتقة الدالة f من الرتبة k :

$$f^{(k)}(a) \equiv \left. \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k} \right|_{x=a} \ .$$

عندئذ تُكتب الدالة على شكل سلسلة قوى كما يلي :

$$\forall x : \ |x-a| < R, \ f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \ (x-a)^k \ . \tag{28}$$

يُبرهن على المعادلة (27) في حل التمرين (12.4).

نصف قطر تقارب تكامل سلسلة القوى

السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ و تكاملها بالنسبة للمتغير x،

$$\int_a^{t+a} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} \, t^{k+1} \, , \tag{29}$$

هما سلسلتي قوى لهما نفس نصف قطر التقارب.

يمكن الاطلاع على برهان المعادلة (29) في حلّ التمرين (13.4).
في ما يلي نص مبرهنة تايلور[1] و التي تمكننا من كتابة دالة ما بدلالة سلسلة منتهية. لتكن f دالة مستمرة على مجال $\mathcal{I}$ و كذلك مشتقاتها إلى غاية الرتبة $n+1$ $(n \in \mathbb{N})$. نعتبر النقطة a من هذا المجال.

مبرهنة تايلور

تُكتب الدالة f بجوار النقطة $x = a$ وفق الصيغة :

$$\forall x \in \mathcal{I}, \ \exists \xi \in \mathcal{I} : \ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \, (x-a)^k \ + \ R_n(x,a,\xi) \, , \tag{30}$$

حيث R_n يُسمّى الباقي و هو مُعطى بالعبارة :

$$R_n(x,a,\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \, (x-a)^{n+1} \, . \tag{31}$$

إضافة إلى ذلك فإنّ النهاية التالية محققة :

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x,a,\xi) = 0 \, , \tag{32}$$

فيُعبر حينئذ عن الدالة f بسلسلة القوى

$$\exists R > 0, \ \forall x : \ |x-a| < R : \ f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \, (x-a)^k \, , \tag{33}$$

و التي تُسمّى سلسلة تايلور للدالة f بجوار النقطة a.

[1] Brook Taylor, 1685-1731.

تعريف

عندما يكون a معدوما في المعادلة (33) فإننا نحصل على سلسلة القوى التي تُسمّى سلسلة ماكلورين.

تُكتب إذن سلسلة ماكلورين [2] للدالة f بجوار النقطة a بسلسلة القوى التالية :

$$\exists R>0,\ \forall |x|<R:\ f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k\ . \tag{34}$$

مثال

في ما يلي سلسلة ماكلورين و نصف قطر تقاربها لبعض الدوال الشهيرة :

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,x^{2k+1}\ , \qquad R=\infty\ , \tag{35}$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\,x^{2k}\ , \qquad R=\infty\ , \tag{36}$$

$$\mathrm{e}^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\ , \qquad R=\infty\ . \tag{37}$$

و في ما يلي سلسلة ماكلورين للدالة $x+1$ و التي تُعرف بـ سلسلة النشر الحدّاني :

$$\begin{aligned}(x+1)^p&=1+px+\frac{p(p-1)}{2!}x^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3+\cdots\\&\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}\,x^k\ ,\end{aligned} \tag{38}$$

حيث مجال تقاربها يعتمد على قيمة العدد الحقيقي p كما يلي :

1. إذا كان p عددا طبيعيا فإنّه يُحصل على سلسلة منتهية.
2. أمّا إذا كان p غير طبيعي فإن نصف قطر التقارب هو $R=1$ و مجال التقارب هو كما يلي :

   (ا) إذا كان $p>0$ فإن مجال التقارب هو $-1\le x\le 1$.

[2] Colin Maclaurin, 1698-1746.

(ب) إذا كان $-1 < p < 0$ فإن مجال التقارب هو $-1 < x \leq 1$.
(ج) إذا كان $p \leq -1$ فإن مجال التقارب هو $-1 < x < 1$.

يمكن الاطلاع على البرهان على نتائج المثال السابق في حل التمرينين (14.4) و(15.4).

9.4 سلسلة فوريه

تعريف

لتكن f دالة حقيقية لمتغير حقيقي تحقق ما يلي :

1. الدالة f معرفة على المجال $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ باستثناء عدد منتهٍ من النقاط الشاذة (صفر أو أكثر).
2. الدالة f و مشتقتها f' مستمرتان على المجال $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ (مع الأخذ في الحسبان النقاط الشاذة داخل المجال).
3. الدالة f دورية و دورها هو T.

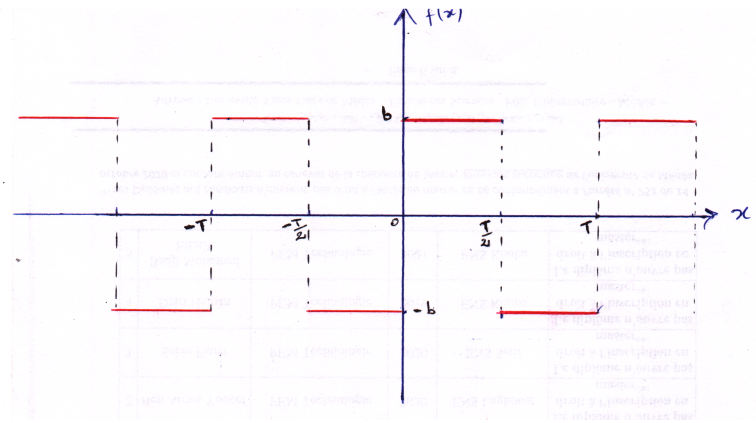
تُسمّى هذه الشروط الثلاث بـ شروط ديريكليه

ملاحظة:
نقطة شاذة لدالة ما هي نقطة تكون هذه الدالة غير معرفة عندها.
نأخذ في ما يلي مثالا يوَضح شروط ديريكليه[3]

مثال

يمثّل الشكل 1.4 بيان دالة f. هذه الدالة غير معرّفة عند النقاط $\frac{kT}{2}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ (نقاط شاذة).
واضح أن هذه الدالة معرّفة على المجال $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ باستثناء النقاط 0 و $\frac{\pm T}{2}$ (الشرط 1 محقق).
كما أنها دالة دورية حيث دورها هو T (الشرط 3 محقق).
بقي التحقق من الشرط 2. واضح أن الدالة f مستمرة على المجال $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ (طبعا باستثناء النقاط الشاذة المذكورة أعلاه). لكن ماذا عن الدالة المشتقة ؟ هل هي مستمرة أيضا ؟ بما

[3] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859.



شكل 1.4: شروط ديريكليه - مثال.

أنّ f تساوي ± 1 فإن $f' = 0$ عند جميع نقاط تعريف الدالة f، و عليه فإنّها مستمرة أيضا (الشرط 2 محقق).

تعريف

تُعرّف سلسلة فوريه للدالة f بالسلسلة اللانهائية التالية :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi}{T} x \ + \ b_k \sin \frac{2k\pi}{T} x \right) \ , \tag{39}$$

حيث a_k و b_k ثوابت حقيقية تُعطى بالعبارتين:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos \frac{2k\pi}{T} x \ \mathrm{d}x \ , \tag{40}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin \frac{2k\pi}{T} x \ \mathrm{d}x \ . \tag{41}$$

يمكن البرهان على أنّ المعاملات a_k أو b_k التي تظهر في سلسلة فوريه (المرفقة بدالة تحقق شروط ديريكليه) تنعدم في حالة كون الدالة زوجية أو فردية و هذا كما يلي (انظر حل التمرين (17.4)) :

- إذا كانت الدالة f زوجية فإنّ

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\frac{2k\pi}{T}x\,\mathrm{d}x\,, \tag{42}$$

$$b_k = 0\,. \tag{43}$$

- أمّا إذا كانت الدالة f فردية فإنه يكون لدينا :

$$a_k = 0\,, \tag{44}$$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\frac{2k\pi}{T}x\,\mathrm{d}x\,. \tag{45}$$

(46)

تقارب سلسلة فوريه

إذا كانت الدالة f تحقق شروط ديريكليه فإنّ سلسلة فوريه المرفقة بها تتقارب نحو قيمة الدالة f كما يلي :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{2k\pi}{T}x \;+\; b_k\sin\frac{2k\pi}{T}x\right) = \begin{cases} f(x) & : \text{إذا كانت } f \text{ مستمرة عند } x \\ \dfrac{1}{2}\big(f(x+0^-)+f(x+o^+)\big) & : \text{إذا كانت } f \text{ مستمرة عند } x\,. \end{cases} \tag{47}$$

مثال

نعتبر الدالة المعرفة بـ

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 && : -\pi \le x \le \pi \\ f(x+2\pi) &= f(x) && : \forall x \notin [-\pi,\pi] \end{aligned}$$

يمكن إثبات أن هذه الدالة تحقق شروط ديريكليه بكل سهولة. إضافة إلى ذلك فإن هذه الدالة زوجية و بالتالي فإن جميع المعاملات b_k معدومة. نحسب المعاملات a_k :

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos k\pi x \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{2}{3}\pi^2 & : \ k = 0 \\ \frac{4(-1)^k}{k^2} & : \ k \neq 0 \end{cases}$$

و بالتالي نستطيع أن نكتب الدالة f كما يلي :

$$\forall x \in [-\pi, \pi] : \ f(x) \equiv x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx \ .$$

مثال

نعتبر الدالة المعرفة بـ

$$\begin{aligned} f(x) &= |x| && : \ -\pi \leq x \leq \pi \\ f(x + 2\pi) &= f(x) && : \ \forall x \notin [-\pi, \pi] \end{aligned}$$

يمكن أيضا إثبات أن هذه الدالة تحقق شروط ديريكليه. كما أنّها دالة زوجية و بالتالي فإن جميع المعاملات b_k معدومة. نحسب إذن المعاملات a_k :

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos k\pi x \, \mathrm{d}x \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \pi & \\ a_{2k} = 0 & : \ k = 1, 2, \ldots \\ a_{2K+1} = \frac{-4}{\pi(2k+1)^2} & : \ k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

و عليه يمكن التعبير عن الدالة f كما يلي :

$$\forall x \in [-\pi, \pi] : \ f(x) \equiv |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} \ .$$

مثال

نعتبر الآن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R} - \{k\pi\}_{k\in}$ حيث :

$$\begin{aligned} f(x) &= -1 && : \ -\pi < x < 0 \\ f(x) &= 1 && : \ 0 < x < \pi \\ f(x+2\pi) &= f(x) && : \ \forall x \notin [-\pi, \pi] \end{aligned}$$

يُترك للقارئ إثبات أن هذه الدالة تحقق شروط ديريكليه، و أنّها دالة فردية. إذن تكون جميع المعاملات a_k معدومة، و المعاملات b_k تساوي

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin k\pi x \ \mathrm{d}x = \frac{2}{k\pi} \left(1 - (-1)^k\right) \ .$$

إذن يُعبّر عن الدالة f بالعبارة :

$$\forall x \in]0, \pi[: \ f(x) \equiv 1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} \ .$$

10.4 تمارين الباب 4

التمرين 1.4: نهاية الحد العام لمتتالية عددية

1. لتكن $\{a_n\}$ متتالية عددية. برهن أن $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. أوجد - إن أمكن ذلك - النهاية $\lim_{n\to\infty} a_n$ حيث:

(ا) $a_n = \frac{(-1)^n(1-2n^3)}{n+n^2+n^3}$ (ج) $a_n = n^{1/n}$ (هـ) $a_n = n\sin\frac{1}{n}$

(ب) $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$ (د) $a_n = (-2)^n n^{-2}$ (و) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}$

التمرين 2.4: نهاية حدود سلسلة متقاربة/متباعدة

1. برهن أنه إذا كانت السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ متقاربة فإن $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. نعتبر المتتالية $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. بين أن $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ بينما السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ متباعدة.

التمرين 3.4: السلسلة الهندسية

1. أوجد عبارة السلسلة $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$ ثم استنتج إن كانت $\lim_{n\to\infty} S_n$ متقاربة أو متباعدة.

2. أكتب العدد $1.571428\,571428\cdots$ على شكل سلسلة لا نهائية ثم استنتج كتابة كسرية له.

التمرين 4.4: التقارب المطلق

1. برهن أنه إذا كانت السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ متقاربة فإن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ متقاربة أيضا.

2. أدرس التقارب المطلق و الشرطي للسلاسل التالية:

(ا) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (ج) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}$ (د) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\ln^2 n}$

التمرين 5.4: اختبار المقارنة

لتكن $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ و $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ حيث :

$$\exists N \in \mathbb{N} : \ \forall k \geq N, \ 0 \leq a_k \leq b_k \ .$$

برهن على القضيتين التاليتين :

1. إذا كانت السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ متقاربة فإنّ السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ متقاربة.
2. و إذا كانت السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ متباعدة فإنّ السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ متباعدة.

التمرين 6.4: اختبار مقارنة النهاية مع السلسلة-p

نعتبر المتتالية $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ حيث :

$$\exists N \in \mathbb{N} : \ \forall k \geq N, \ a_k \geq 0 \ .$$

نعرّف النهاية $C = \lim_{k\to\infty} k^p a_k$ حيث p ثابت حقيقي. برهن على صحة ما يلي :

- إذا كان C منتهٍ و $p > 1$ فإنّ السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ تتقارب.
- و إذا كان C غير معدوم (منتهٍ أو غير ذلك) و $p \leq 1$ فإنّ السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ تتباعد.

التمرين 7.4: تقارب السلسلة-p

باستخدام اختبار التكامل، برهن على أنّ السلسلة-p تتقارب من أجل $p > 1$ و تتباعد من أجل $p \leq 1$.

التمرين 8.4: اختبارات التقارب

باستخدام أحد اختبارات التقارب، بين إن كانت السلاسل التالية متقاربة أو متباعدة:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^{4/3}}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{n^2}}$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^3+1}$

التمرين 9.4: سلسلة القوى

ما هي العلاقة بين المعاملات c_n و d_n حتى يكون لدينا

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \ .$$

التمرين 10.4: نصف قطر تقارب سلسلة القوى

1. أوجد نصف قطر و مجال تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n}$ و كذلك سلسلة المشتقات الموافقة للسلسة السابقة.
2. أوجد سلسلة تايلور للدالة $\arctan x$ ثم حدد مجال تقاربها. استنتج عبارة للعدد $\pi/4$.
3. نريد حساب تقريبي للتكامل $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$:

(ا) أكتب سلسلة تايلور للدالة e^x بجوار الصفر، و أوجد مجال تقاربها. استنتج سلسلة تايلور للدالة e^{-x^2}.

(ب) أوجد سلسلة التكامل على المجال $[0,1]$ الموافقة للسلسلة الأخيرة، ثم استنتج قيمة تقريبية للتكامل أعلاه أين يكون الخطأ أصغر من 10^{-3}.

التمرين 11.4: نصف قطر تقارب مشتقة سلسلة القوى

بيّن أنّه إذا كانت السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ متقاربة فإنّ مشتقتها بالنسبة للمتغير x،

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x-a)^{k-1} \ ,$$

متقاربة أيضا و لها نفس نصف قطر التقارب.

التمرين 12.4: سلسلة القوى المرفقة بدالة

برهن أنّه إذا كانت السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ متقاربة و نصف قطر تقاربها هو R فإنّ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k \ \Rightarrow \ c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \ .$$

التمرين 13.4: نصف قطر تقارب تكامل سلسلة القوى

بيّن أنّه إذا كانت السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ متقاربة فإنّ تكاملها بالنسبة للمتغير x،

$$\int_a^{t+a} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k \, \mathrm{d}x \ ,$$

متقاربة أيضا و لها نفس نصف قطر التقارب.

التمرين 14.4: نصف قطر تقارب بعض الدوال الشهيرة

أوجد سلسلة ماكلورين و نصف قطر تقارب الدوال التالية : $\sin x$، $\cos x$ و e^x.

التمرين 15.4: نصف قطر تقارب سلسلة النشر الحدّاني

أكتب سلسلة ماكلورين للدالة $(1+x)^p$ $(p \in \mathbb{R})$ و أوجد مجال تقاربها تبعا لقيمة p.

التمرين 16.4: معاملات سلسلة فوريه

نفرض أن السلسلة $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x\right)$ تتقارب نحو الدالة $f(x)$ من أجل $|x| < L$ ، حيث a_n ، b_n و L ثوابت حقيقية. بين أن:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x \, \mathrm{d}x \quad , \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x \, \mathrm{d}x$$

التمرين 17.4: معاملات سلسلة فوريه لدالة زوجية أو فردية

أوجد عبارة معاملات سلسلة فوريه المرفقة بدالة

1. زوجية.
2. فردية.

التمرين 18.4: سلسلة فوريه لدالة دورية

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 & ; \ 0 < x < 2\pi \\ f(x+2\pi) = f(x) \end{cases} .$$

1. أوجد سلسلة فوريه الموافقة للدالة f.
2. أوجد قيمة السلسلة من أجل $x = 0$ ثم $x = 2\pi$.
3. استنتج عبارة للعدد $\pi^2/6$.

باب 5

تحويل فورييه

سندرس في هذا الباب تحويل فورييه[1]، و هو أحد التحويلات المهمة في الرياضيات التي لها العديد من التطبيقات في كثير من الميادين مثل حل المعادلات التفاضلية، ميكانيكا الأمواج، الإلكترونيك، ...

لكن قبل إعطاء تعريف تحويل فورييه، نتطرق أولا إلى بعض المفاهيم الأولية: مفهوم الدالة الكمولة و جداء التزاوج. ثمّ بعد معرفة تحويل فورييه لدالة ما و التحويل العكسي لفورييه، نقوم بإعطاء أحد تطبيقات تحويل فورييه في بعض مسائل المعادلات التفاضلية بمشتقات جزئية.

1.5 الدوال الكمولة

تعريف

نقول عن الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ أنّها **دالة كمولة** على $\mathbb{R}$ إذا تحقق

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \mathrm{d}x < \infty . \qquad (1)$$

نرمز لمجموعة الدوال الكمولة على $\mathbb{R}$ بـ $L^1(\mathbb{R})$.

[1] Fourier transform.

مثال

نعتبر الدالتين f و g حيث

$$f(x) = \begin{cases} x^{-\frac{2}{3}} : & x \in]0,1[\\ 0 : & x \notin]0,1[\end{cases} ,$$
$$g(x) = \begin{cases} x^{-\frac{2}{3}} : & x > 1 \\ 0 : & x \leq 1 \end{cases} .$$

نحسب تكامل هاتين الدالتين على كل مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \mathrm{d}x = \int_{0}^{1} x^{-\frac{2}{3}} \mathrm{d}x = 3 ,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| \mathrm{d}x = \int_{1}^{\infty} x^{-\frac{2}{3}} \mathrm{d}x = \infty .$$

لاحظ أن تكامل الدالة f على كلّ $\mathbb{R}$ له قيمة منتهية، و بالتالي تكون هذه الدالة حسب التعريف أعلاه دالة كمولة، $f \in L^1(\mathbb{R})$. و في المقابل، الدالة g غير كمولة لأن تكاملها على $\mathbb{R}$ غير منتهٍ، و نكتب $g \notin L^1(\mathbb{R})$.

تعريف

يُقال عن دالة ما f أنّها ذات **مربّع كمولٍ** إذا كان ما يلي مُحقّق:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x \ < \infty . \qquad (2)$$

يُرمز لمجموعة جميع الدوال ذات مربع كمول على مجموعة الأعداد الحقيقية بـ $L^2(\mathbb{R})$.

مثال

لنعتبر الدالتين المعرّفتين في المثال السابق، و نحسب تكامل المربع على $\mathbb{R}$ فنجد:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_{0}^{1} x^{-\frac{4}{3}} \mathrm{d}x = \infty \ ,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_{1}^{\infty} x^{-\frac{2}{3}} \mathrm{d}x = 3 \ .$$

إذن و حسب التعريف الأخير فإنّه يمكن أن نقول أنّ الدالة f ليست ذات مربع كمول بينما g دالة ذات مربع كمول: $f \notin L^2(\mathbb{R})$ و $g \in L^2(\mathbb{R})$.

ملاحظة:
قد توجد دالة كمولة على $\mathbb{R}$ بينما هي ليست ذات مربع كمول. و العكس أيضا صحيح، أي قد تكون الدالة ذات مربع كمول بينما هي ليست كمولة. و كمثال على هذا المثالان السابقان، أين وجدنا

$$f \in L(\mathbb{R}) \ , \ f \notin L^2(\mathbb{R})$$
$$g \in L^2(\mathbb{R}) \ , \ g \notin L(\mathbb{R}) \ .$$

2.5 جداء التزاوج

يمكن أن نبيّن أنّ جداء دالتين كمولتين على $\mathbb{R}$ ليس دوما كمولا. فمثلا، الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^{-\frac{2}{3}} & : x \in]0,1[\\ 0 & : x \notin]0,1[\end{cases}$$

التي درسناها في المثالين السابقين، هي دالة كمولة. لكن تكامل جداء هذه الدالة مع نفسها على $\mathbb{R}$ هو دالة غير كمولة على $\mathbb{R}$ كما رأينا ذلك في المثال السابق.

نريد في ما يلي تعريف جداء للدوال الكمولة بحيث تكون الدالة الناتجة دوما كمولة.

تعريف

يُعرّف **جداء التزاوج**، و الذ ي يُرمز له بـ $\star$، للدالتين الكمولتين f و g بالعلاقة التالية:

$$(f \star g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \ . \tag{3}$$

جداء التزاوج دالة كمولة

إنّ جداء التزاوج لدالتين كمولتين على مجموعة الأعداد الحقيقية هو دومًا دالة كمولة على $\mathbb{R}$:

$$\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}) : \ f \star g \ \in L^1(\mathbb{R}) \ . \tag{4}$$

يمكن الاطلاع على البرهان على هذه المبرهنة في حل التمرين (1.5).

3.5 تحويل فوريه

تعريف

تحويل فوريه للدالة الكمولة $f \in L^1(\mathbb{R})$ هو التابعية المعرّفة كما يلي:

$$\mathbf{F}[f](\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x \ . \tag{5}$$

مثال

نعتبر الدالة f حيث $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$. يمكن أن نبيّن أنذ هذه الدالة كمولة على $\mathbb{R}$ على النحو التالي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 2 \ .$$

نبحث الآن عن تحويل فوريه للدالة f كما يلي:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}[f](\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|x|-i\xi x}\mathrm{d}x \ , \\
&= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{x-i\xi x}\mathrm{d}x \ + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x-i\xi x}\mathrm{d}x \ , \\
&= \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(1-i\xi)x}\mathrm{d}x \ + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(1+i\xi)x}\mathrm{d}x \ , \\
&= \frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} \ , \\
&= \frac{2}{1+\xi^2} \ .
\end{aligned}$$

تحويل فوريه دالةٌ كمولةٌ

إنّ تحويل فوريه لدالة كمولة هو دومًا دالة كمولة:

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) : \ \mathbf{F}[f] \in L^(\mathrm{R}) \ . \tag{6}$$

يُبرهن على هذه المبرهنة في حل التمرين (2.5).

4.5 بعض خصائص تحويل فوريه

الانسحاب

تعريف

يُعرّف الانسحاب بالمقدار $h \in \mathbb{R}$ للدالة f بالدالة

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ (\mathbf{T}_h f)(x) := f(x-h) \ . \tag{7}$$

تحويل فوريه للانسحاب

تحويل فوريه لانسحاب دالة كمولة هو

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) : \ \mathbf{F}[\mathbf{T}_h f](\xi) = \mathrm{e}^{-i\xi h}\mathbf{F}[f](\xi) \ . \qquad (8)$$

أنظر حل التمرين (3.5) للاطلاع على البرهان على هذه المبرهنة.

الضرب في الدالة الأسية

يمكن إيجاد البرهان على ما يلي في حل التمرين (4.5)

تحويل فوريه لجداء دالة بالدالة الأسية

يُكتب تحويل فوريه لجداء دالة كمولة على $\mathbb{R}$ بالدالة الأسية وفق العبارة

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R} : \ \mathbf{F}[\mathrm{e}^{i\lambda x} f(x)](\xi) = \mathbf{T}_\lambda \mathbf{F}[f](\xi) \ . \qquad (9)$$

التمدد

تعريف

تمدد الدالة f بالمقدار $h > 0$ هو الدالة التي نرمز إليها بـ $\delta_h f$ و المعرّفة بالعلاقة:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ (\delta_h f)(x) := \frac{1}{\sqrt{h}}\, f\left(\frac{1}{h}x\right) \ . \qquad (10)$$

تحويل فوريه لتمدد دالة كمولة

تحويل فوريه لتمدد دالة كمولة هو

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}),\ \forall h > 0 : \ \mathbf{F}[\delta_h f](\xi) = \left(\delta_{\frac{1}{h}} \mathbf{F}[f]\right)(\xi) \ . \qquad (11)$$

أنظر حل التمرين (5.5) لإثبات صحّة هذه المبرهنة.

الاشتقاق

تحويل فوريه للدالة المشتقة

إذا كانت الدالتان f و مشتقتها f' كمولتين على $\mathbb{R}$ فإنّ

$$\mathbf{F}[f'](\xi) = i\xi\mathbf{F}[f](\xi)\ . \tag{12}$$

إضافة إلى ما سبق، فإنّه إذا كانت جميع المشتقات حتى الرتبة n كمولة على $\mathbb{R}$ فإن تحويل فوريه للدالة $f^{(n)}$ يُكتب:

$$\mathbf{F}[f^{(n)}](\xi) = (i\xi)^n\mathbf{F}[f](xi)\ . \tag{13}$$

أنظر حل التمرين (6.5) للبرهان على المبرهنة أعلاه.

الضرب في x^n

يُبرهن على ما يلي في حل التمرين (7.5)

تحويل فوريه لجداء دالة بالدالة x^n

يُكتب تحويل فوريه لجداء دالة كمولة على $\mathbb{R}$ بالدالة x^n كما يلي:

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}),\ \forall n \in \mathbb{N}:\ \mathbf{F}[x^n f(x)](\xi) = i^n\ \frac{\mathrm{d}^n\mathbf{F}[f](\xi)}{\mathrm{d}\xi^n}\ . \tag{14}$$

جداء التزاوج

تحويل فوريه لجداء تزاوج دالتين كمولتين

إذا كانت الدالتان f و g كمولتين على $\mathbb{R}$ فإنّ

$$\mathbf{F}[f \star g](\xi) = \mathbf{F}[f](\xi)\cdot\mathbf{F}[g](\xi)\ . \tag{15}$$

يُمكن إيجاد البرهان على صحة العلاقة أعلاه في حل التمرين (8.5).

5.5 تحويل فوريه العكسي

نفرض في ما يلي أنّ f دالة مستمرة و كمولة على $\mathbb{R}$.

تعريف

يُعرّف تحويل فوريه العكسي للدالة f بالعلاقة

$$\mathbf{F}^{-1}[f](x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{i\xi x}\mathrm{d}\xi \ . \tag{16}$$

تركيب تحويل فوريه و تحويل فوريه العكسي

تركيب تحويل فوريه مع تحويل فوريه العكسي للدالة الكمولة هو التطبيق الحيادي،

$$\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1} = \mathbb{1} \ , \tag{17}$$

حيث ما يلي محقق:

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) : \ \mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}[f] = f \ . \tag{18}$$

استنادا على المبرهنة أعلاه يمكن بسهولة تبيان أنّ

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F} = \mathbb{1} \ . \tag{19}$$

يوجد البرهان على العلاقة الأخيرة و المبرهنة أعلاه في حل التمرين (11.5).

مثال

وجدنا في مثال سابق

$$\mathbf{F}[\mathrm{e}^{-|x|}](\xi) = \frac{2}{1+\xi^2} \ .$$

بتطبيق تحويل فوريه العكسي على طرفي هذه المعادلة نجد:

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}[\mathrm{e}^{-|x|}](x) = \mathbf{F}^{-1}\left[\frac{2}{1+\xi^2}\right] .$$

لكن تحويل فوريه العكسي لتحويل فوريه هو التطبيق الحيادي، كما هو موجود في المبرهنة أعلاه، فإننا نكتب:

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}[\mathrm{e}^{-|x|}](x) = \mathrm{e}^{-|x|} .$$

و عليه يكون لدينا:

$$\mathbf{F}^{-1}\left[\frac{2}{1+\xi^2}\right](x) = \mathrm{e}^{-|x|} .$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة في المعامل 2π ثمّ بتبديل x بـ ξ (و العكس) فإنّنا نحصل على التحويل $\mathbf{F}$ بدل $\mathbf{F}^{-1}$:

$$\mathbf{F}\left[\frac{2}{1+x^2}\right](\xi) = 2\pi\mathrm{e}^{-|\xi|} \Leftrightarrow \mathbf{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right](\xi) = \pi\mathrm{e}^{-|\xi|} .$$

6.5 تحويل فوريه لحلّ المعادلات التفاضلية

كتطبيق لتحويل فوريه، سنحل صنف من المعادلات التفاضلية بمشتقات جزئية. و على وجه التخصيص، سنحل معادلة الموجة و أيضا معادلة لابلاس.

معادلة الموجة

تعريف

معادلة الموجة هي معادلة تفاضلية من الشكل

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 , \qquad (20)$$

حيث u دالة للمتغيرين الحقيقيين $t \geq 0$ و $x \in \mathbb{R}$. إضافة إلى المعادلة التفاضلية أعلاه، تُعطى الشروط الابتدائية (أي عبارة u عند اللحظة الابتدائية $t = 0$) بالعبارتين:

$$u(x,0) = f(x)\ , \tag{21}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)\ , \tag{22}$$

أين f و g دالتان معروفتان.

الهدف من هذا الفصل هو إيجاد حل شكلي[2]. و من أجل ذلك نستخدم تحويل فوريه كما يلي.
نرمز في ما يلي إلى تحويل فوريه للمقدار $u(x,t)$ بالنسبة للمتغير الأول بالكتابة $\tilde{u}(y,t)$:

$$\tilde{u}(y,t) \equiv \mathbf{F}[u(x,t)](y) = \int_{\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ixy} u(x,t)\ \mathrm{d}x\ . \tag{23}$$

بهذا يصبح ممكنا كتابة معادلة الموجة (20)، بعد تطبيق تحويل فوريه على طرفيها، على الشكل

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - (icy)^2 \tilde{u} = 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} + (cy)^2 \tilde{u} = 0\ , \tag{24}$$

أين قمنا باستغلال خاصية تحويل فوريه لمشتقة دالة. بالإضافة إلى ما سبق، يمكننا أيضا التعبير عن الشروط الابتدائية بعد تطبيق تحويل فوريه كما يلي:

$$\left.\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\right|_{t=0} = \mathbf{F}[g(x)](y) \equiv \tilde{g}(y)\ , \tag{25}$$

$$\tilde{u}(y,0) = \mathbf{F}[f(x)](y) \equiv \tilde{f}(y)\ . \tag{26}$$

إنّ العلاقة (24) معادلةٌ تفاضلية خطّيّة بالنسبة للمتغير t و بمعاملات ثابتة، حلّها هو

$$\tilde{u}(y,t) = A(y)\cos(cty)\ +\ B(y)\sin(cty)\ , \tag{27}$$

حيث A و B دالتان للمتغير y يُبحث عن عبارتيهما من خلال الشروط الابتدائية (25) و (26):

$$\tilde{u}(y,0) = A(y) = \tilde{f}(y)\ , \tag{28}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = cyB(y) = \tilde{g}(y)\ \Rightarrow\ B(y) = \frac{\tilde{g}(y)}{cy}\ . \tag{29}$$

[2] أي الحل يكون مُعبّر عنه بدلالة f و g.

إذن، يُكتب حل معادلة الموجة $\tilde{u}$ كما يلي:

$$\tilde{u}(y,t) = \tilde{f}(y)\cos(cty) \ + \ \tilde{g}(y)\ \frac{\sin(cty)}{cy}\ . \tag{30}$$

كلّ ما علينا القيام به الآن هو إيجاد الحل u بتطبيق تحويل فوريه العكسي، كما سنرى بعد قليل. بكتابة المعادلة (30) على الصورة

$$\tilde{u}(y,t) = \frac{1}{2}\tilde{f}(y)\left(\mathrm{e}^{icty} + \mathrm{e}^{-icty}\right) \ + \ \frac{\tilde{g}(y)}{2c}\ 2\frac{\sin(cty)}{y}\ , \tag{31}$$

فإنّنا نلاحظ أنّ $2\frac{\sin(cty)}{y}$ هو تحويل فوريه للدالة $\Pi_a(x)$ المعرّفة بـ

$$\Pi_a(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & : |x| < a \\ 0 & : |x| \geq a \end{array} \right. , \tag{32}$$

أنظر حل التمرين (10.5)، و نكتب إذن:

$$\mathbf{F}[\Pi_a(x)](y) = 2\frac{\sin(cty)}{y}\ . \tag{33}$$

كما أنّه لدينا

$$\tilde{f}(y)\mathrm{e}^{\pm icty} = \mathbf{F}[\mathbf{T}_{\mp ct} f]\ , \tag{34}$$

أين استخدمنا خاصية تحويل فوريه لانسحاب دالة. ثمّ باستغلال خاصية الخطّية لتحويل فوريه، أنظر التمرين (9.5)، و خاصية تحويل فوريه لجداء التزاوج، فإنّه يمكننا كتابة الحل $\tilde{u}$ وفق الصيغة

$$\tilde{}(y,t) = \mathbf{F}\left[\frac{1}{2}\mathbf{T}_{-ct} f + \frac{1}{2}\mathbf{T}_{ct} f + \frac{1}{2c}\Pi_{ct} \star g\right](y)\ . \tag{35}$$

للحصول على حل معادلة الموجة يكفي تطبيق تحويل فوريه العكسي على طرفي المعادلة (35) للحصول على العبارة

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\mathbf{T}_{-ct} f(x) + \frac{1}{2}\mathbf{T}_{ct} f(x) + \frac{1}{2c}\left(\Pi_{ct} \star g\right)(x)\ . \tag{36}$$

في الأخير نصل إلى عبارة حل معادلة الموجة التالية:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\mathbf{T}_{-ct} f(x) + \frac{1}{2}\mathbf{T}_{ct} f(x) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\mathrm{d}y\ , \tag{37}$$

و هذا بحساب جداء التزاوج $\Pi_{ct} \star g$ كما يلي:

$$(\Pi_{ct} \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_{ct}(x-y)g(y)\mathrm{d}y = \int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\mathrm{d}y \ . \tag{38}$$

ملاحظة:
تُسمّى العبارة (37) بحل دالمبير[3] لمعادلة الموجة.

معادلة لابلاس

تعريف

تُكتب معادلة لابلاس من الشكل

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ , \tag{39}$$

حيث u دالة للمتغيرين $x \in \mathbb{R}$ و $y > 0$، $u \equiv u(x,y)$. يُرفق أيضا بالمعادلة التفاضلية أعلاه الشرط الحدّي

$$u(x,0) \equiv f(x) \ , \tag{40}$$

حيث f دالة مُعطاة.

ملاحظة:
يُمكن أيضا التعبير عن معادلة لابلاس بالكتابة

$$\Delta u(x,y) = 0 \ , \tag{41}$$

حيث $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ يُسمّى مؤثر لابلاس أو اللابلاسي.
نبحث في ما يلي عن الحل الشكلي لمعادلة لابلاس، و هذا بتطبيق تحويل فوريه على طرفي المعادلة التفاضلية ثمّ نبحث عن تحويل فوريه العكسي للحل الذي نحصل عليه.
بتطبيق تحويل فوريه بالنسبة للمتغير الأول، x، على طرفي المعادلة (39) نحصل على

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} - \xi^2 \tilde{u} = 0 \ , \tag{42}$$

[3] Jean-Baptiste le Rond d'Alembert, 1717-1783.

حيث $\tilde{u}(\xi, y)$ هو تحويل فوررية للدالة $u(x, y)$ بالنسبة للمتغير الأول:

$$\tilde{u}(\xi, y) = \mathbf{F}[u](\xi, y) \ . \tag{43}$$

كما يمكن كتابة تحويل فوريه للشرط الحدي وفق العلاقة

$$\tilde{u}(\xi, 0) = \mathbf{F}[f](\xi) \equiv \tilde{f}(\xi) \ . \tag{44}$$

إنّ حل المعادلة (42) بالنسبة إلى المتغير y بسيط و يُكتب

$$\tilde{}(\xi, y) = A(\xi)\mathrm{e}^{\xi y} + B(\xi)\mathrm{e}^{-\xi y} \ , \tag{45}$$

أين A و B دالتان يمكن إيجادهما من خلال استخدام الشرط الحدي. لدينا ما يلي:

$$A(\xi) + B(\xi) = \tilde{f}(\xi) \ . \tag{46}$$

بوضع $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = g(x)$ فإنّ تحويل فوريه لهذه العبارة الأخيرة يُكتب:

$$\left.\frac{\partial \tilde{u}(\xi, y)}{\partial y}\right|_{y=0} = \tilde{g}(\xi) \ . \tag{47}$$

باشتقاق الحل المُعطى في المعادلة (45) ثمّ وضع $y = 0$ نحصل على

$$A(\xi) - B(\xi) = \frac{\tilde{g}(\xi)}{\xi} \ . \tag{48}$$

من خلال المعادلتين (46) و (48) نجد عبارتي الدالتين A و B:

$$A(\xi) = \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(\xi) + \frac{\tilde{g}(\xi)}{\xi}\right) \ , \tag{49}$$

$$B(\xi) = \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(\xi) - \frac{\tilde{g}(\xi)}{\xi}\right) \ . \tag{50}$$

تجدر الإشارة الآن إلى أنّ الحل $\tilde{u}$ يجب أن يكون محدودا في جميع نقاط الفضاء، و بالأخص عندما $\xi \to \pm\infty$. و عليه نحصل على

$$\xi \to \infty \ \Rightarrow \ A(\xi) = 0 \ \Rightarrow \ \tilde{g}(\xi) = -\xi\tilde{f}(\xi) \ , \tag{51}$$

$$\xi \to -\infty \ \Rightarrow \ B(\xi) = 0 \ \Rightarrow \ \tilde{g}(\xi) = \xi\tilde{f}(\xi) \ , \tag{52}$$

$$\tag{53}$$

أو بعلاقة واحدة تعبّر عن المعادلتين السابقتين كما يلي

$$\tilde{g}(\xi) = -|\xi|\tilde{f}(\xi)\ . \tag{54}$$

و بالتالي تصبح عبارة الحل $\tilde{u}$، بعد التعويض بعبارتي A و B، تكتب من الشكل

$$\tilde{u}(\xi, y) = \mathrm{e}^{-|\xi|}\tilde{f}(\xi)\ . \tag{55}$$

لاحظ أنّ $\mathrm{e}^{-|\xi|y}$ هو تحويل فوريه للدالة $\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}$، أنظر التمرين (12.5). و بالتالي يمكننا كتابة الحل u بعد تطبيق تحويل فوريه العكسي على $\tilde{u}$ كما يلي:

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)} \star f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\pi((x-s)^2+y^2)}\ f(s)\ \mathrm{d}s\ , \tag{56}$$

و بهذا نكون قد وصلنا إلى عبارة الحل الشكلي لمعادلة لابلاس.

7.5 تمارين الباب 5

التمرين 1.5: جداء التزاوج

1. برهن على أن جداء التزاوج لدالتين كمولتين على $\mathbb{R}$ هو دالة كمولة:

$$\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}) : \ f \star g \ \in L^1(\mathbb{R}) \ .$$

2. بين أن جداء التزاوج تبديلي، أي $\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}) : \ f * g = g * f$.

3. بين أن جداء التزاوج خطي:

$$\forall f, g, h \in L^1(\mathbb{R}),\ \forall \lambda, \rho \in \mathbb{R} : \ f * (\lambda g + \rho h) = \lambda f * g + \rho f * h$$

4. أوجد جداء التزاوج بين f و g حيث:

(ا) $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$,$g(x) = \sin x$.
(ب) $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$,$g \equiv H$.
(ج) $f(x) = \mathrm{e}^{-x} H(x), g = \sin x$.

H هي دالة هيفيساید[4].

التمرين 2.5: تحويل فوريه كمول

برهن أن تحويل فوريه لأي دالة كمولة على $\mathbb{R}$ هو دالة كمولة دوما:

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) : \ \mathbf{F}[f] \in L^(\mathrm{R}) \ .$$

التمرين 3.5: تحويل فوريه للانسحاب

برهن أن انسحاب كل دالة كمولة على مجموعة الأعداد الحقيقية هو دالة كمولة، ثمّ بيّن صحّة العلاقة

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) : \ \forall h \in \mathbb{R};\ \mathbf{F}[\mathbf{T}_h f](\xi) = \mathrm{e}^{-i\xi h} \mathbf{F}[f](\xi) \ .$$

[4] Oliver Heaviside, 1850-1925.

التمرين 4.5: تحويل فوريه لجداء دالة كمولة مع الدالة الأسية

برهن على صحة ما يلي:

1.
$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}:\ (\mathrm{e}^{i\lambda x} f) \in L^1(\mathbb{R})\ .$$

2.
$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}:\ \mathbf{F}[\mathrm{e}^{i\lambda x} f(x)](\xi) = \mathbf{T}_\lambda \mathbf{F}[f](\xi)\ .$$

التمرين 5.5: تحويل فوريه للتمدد

برهن أن تمدد كل دالة كمولة على $\mathbb{R}$ هو دومًا دالة كمولة، ثمّ برهن على صحة ما يلي:

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}),\ \forall h > 0:\ \mathbf{F}[\delta_h f](\xi) = \left(\delta_{\frac{1}{h}} \mathbf{F}[f]\right)(\xi)\ .$$

التمرين 6.5: تحويل فوريه لمشتقة دالة

1. بيّن أنّه إذا كانت الدالة f و مشتقتها الأولى كمولتين على $\mathbb{R}$ فإنّ
$$\mathbf{F}[f'](\xi) = i\xi \mathbf{F}[f](\xi)\ .$$

2. اعتمادًا على نتيجة السؤال السابق، برهن على صحة القضية:

$$f, f', \ldots, f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R}) \ \Rightarrow\ \mathbf{F}[f^{(n)}](\xi) = (i\xi)^n \mathbf{F}[f](xi)\ .$$

التمرين 7.5: تحويل فوريه لجداء دالة بالدالة x^n

1. بيّن أنّ
$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}),\ \forall n \in \mathbb{N}:\ x^n f\ \in L^1(\mathbb{R})\ .$$

2. أثبت صحة العلاقة التالية:

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}),\ \forall n \in \mathbb{N}:\ \mathbf{F}[x^n f(x)](\xi) = i^n\ \frac{\mathrm{d}^n \mathbf{F}[f](\xi)}{\mathrm{d}\xi^n}\ .$$

التمرين 8.5: تحويل فوريه لجداء تزاوج دالتين كمولتين

برهن على أنّ
$$\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}):\ \mathbf{F}[f \star g](\xi) = \mathbf{F}[f](\xi) \cdot \mathbf{F}[g](\xi)\ .$$

التمرين 9.5: بعض خواص تحويل فوريه

برهن على ما يلي:

1. $\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} :\ F[\lambda f + \rho g] = \lambda F[f] + \mu F[g]$.
2. $\forall f \in L^1(\mathbb{R}),\ \forall x \in \mathbb{R} :\ F[f](x) = 2\pi F^{-1}[f](-x)$
3. $\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}) :\ F[fg] = 2\pi F[f] * F[g]$

التمرين 10.5: تحويل فوريه

أوجد تحويل فوريه للدوال التالية:

1. $\Pi_a(x) = \begin{cases} 1 & : |x| < a \\ 0 & : |x| > a \end{cases}$
2. $\mathrm{e}^{-\alpha x} H(x)$
3. $\mathrm{e}^{-\alpha x^2}$

حيث $\alpha, a > 0$ و H هي دالة هيفيساید.

التمرين 11.5: تحويل فوريه العكسي 1

باستخدام تعريف تحويل فوريه العكسي، بيّن أنّ

$$\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{F} = \mathbb{1}$$

حيث $\mathbb{1}$ هو التطبيق الحيادي.

التمرين 12.5: تحويل فوريه العكسي 2

أوجد تحويل فوريه للدالة $\mathrm{e}^{-\alpha|x|}$ حيث α عدد حقيقي موجب. استنتج تحويل فوريه للدالة $\frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)}$.

باب 6

تحويل لابلاس

إضافة إلى تحويل فوريه الذي درسناه في الباب (5)، فإننا سنتعرف في هذا الباب إلى تحويل آخر، هو تحويل لابلاس[1] . سوف نرى أنّ الشروط الواجب توفرها في الدالة المُراد إيجاد تحويل لابلاس لها تختلف عن تلك الشروط بالنسبة لتحويل فوريه. و بالأخص إسقاط شرط دورية الدالة.

في هذا الباب سنتطرق أولا إلى تعريف تحويل لابلاس، و بعد استعراض لبعض خصائصه نرى كيفية الاستفادة من هذا التحويل في حل بعض المعادلات التفاضلية.

1.6 عبارة تحويل لابلاس

تعريف

تحويل لابلاس للدالة

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} , \tag{1}$$

هو الدالة المركبة $\mathbf{L}[f]$ لمتغير مركب:

$$\mathbf{L}[f] : \mathbb{C} \to \mathbb{C} , \tag{2}$$

و المعرّفة بالعبارة $(s \in \mathbb{C})$

$$\mathbf{L}[f](s) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\, \mathrm{d}t . \tag{3}$$

[1] Laplace transform.

إنّ التكامل المُعطى في المعادلة (3) لا يكون دوما موجودا و إنّما يتقارب من أجل قيم s ضمن مجال محدد.

مثال

لنبحث في هذا المثال عن تحويل لابلاس للدالة الأسية $f(t) = \mathrm{e}^{at}$ حيث a وسيط حقيقي. لدينا ما يلي:

$$\mathbf{L}[\mathrm{e}^{at}](s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{at}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{(a-s)t}\mathrm{d}t \ .$$

وجود التكامل الأخير يعتمد على قيم s كما يلي:

1. إذا كان $\Re(a-s) \geq 0$ فإنّ التكامل متباعد.
2. أمّا إذا كان $\Re(a-s) < 0$ فإنّ التكامل متقارب و يكون بذلك تحويل لابلاس للدالة الأسية أعلاه هو:

$$\mathbf{L}[\mathrm{e}^{at}](s) = \frac{1}{s-a} \ .$$

من خلال هذا المثال نقول أن تحويل لابلاس للدالة الأسية e^{at} يكون معرّفا (موجودا) من أجل $\Re s > a$. كما يمكن تعميم هذه النتيجة من أجل a عدد مركب و نكتب حينئذ شرط وجود تحويل لابلاس: $\Re s > \Re a$.

2.6 وُجود تحويل لابلاس للدوال من النوع الأسّي

تعريف

يُقال عن الدالة f أنّها من النوع الأسّي-a، $a \in \mathbb{R}$، إذا تحقق:

$$\exists M > 0,\ \forall t \geq 0 :\ |f(t)| < M\mathrm{e}^{at} \ . \qquad (4)$$

مثال

الدوال التالية من النوع الأسي-a توافق قيم a و M كما يلي:

$$\begin{aligned}
f(t) = \mathrm{e}^{at} \quad &\Rightarrow \quad \forall t \geq 0 \ |f(t)| < 2\mathrm{e}^{at} , \qquad M = 2, \ \forall a \in \mathbb{R} . \\
f(t) = 1 \quad &\Rightarrow \quad \forall t \geq 0 \ |f(t)| < \frac{3}{2}\mathrm{e}^{0t} , \qquad M = \frac{3}{2}, \ a = 0 . \\
f(t) = \sin \omega t \quad &\Rightarrow \quad \forall t \geq 0 \ |f(t)| \leq 1 , \qquad M = 1, \ a = 0 . \\
f(t) = t \quad &\Rightarrow \quad \forall t \geq 0 \ |f(t)| \leq \frac{\mathrm{e}^{at}}{a} , \qquad M = \frac{1}{a}, \ \forall a \in \mathbb{R} .
\end{aligned}$$

تقارب تحويل لابلاس للدالة من النوع الأسي-a

إذا كانت f دالة من النوع الأسّي-a فإنّ تحويل لابلاس $\mathbf{L}[f](s)$ يتقارب مطلقا من أجل $\Re s > a$.

إثبات صحة المبرهنة أعلاه موجود في حل التمرين (1.6).

مثال

من دون إيجاد التكامل $\mathbf{L}[\sin \omega t](s)$ نعلم أنه موجود، و هذا لكون الدالة الجيبية عبارة عن دالة من النوع الأسي-a حيث $a = 0$ (راجع المثال السابق).

3.6 خصائص تحويل لابلاس

1.3.6 تحويل لابلاس خطّي

يُطلب في التمرين (2.6) البرهان على أنّ تحويل لابلاس تحويلٌ خطّيٌ: من أجل الدالتين f و g يكون ما يلي محقق:

$$\forall \lambda, \rho \in \mathbb{R} : \ \mathbf{L}[\lambda f + \rho g] = \lambda \mathbf{L}[f] + \rho \mathbf{L}[g] . \tag{5}$$

مثال

باستخدام خاصية الخطّية لتحويل لابلاس يمكننا إيجاد عبارة تحويل لابلاس لكثير حدود من الرتبة n كما يلي:

$$\mathbf{L}\left[\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x^k\right]=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\,\mathbf{L}[x^k]\;.$$

يمكن الاطلاع على حل التمرين (3.6) لإثبات وجود $\mathbf{L}[x^k]$ و إيجاد عبارته.

2.3.6 تحويل لابلاس لمشتقة دالة

سنبرهن في التمرين (3.6) على أنّ تحويل لابلاس لمشتقة دالة من النوع الأسي-a يُكتب:

$$\forall s\in\mathbb{C}:\ \Re s>a\Rightarrow\mathbf{L}[f'(t)](s)=s\mathbf{L}[f(t)](s)-f(0)\;. \tag{6}$$

مثال

بمعرفة أنّ $\mathbf{L}[1](s)=\frac{1}{s}$ من أجل $\forall s>1$، فإنّه يمكننا إيجاد عبارة $\mathbf{L}[t](s)$ و ذلك باستغلال قاعدة تحويل لابلاس لمشتقة الدالة $f(t)=t$:

$$\forall s>1:\ \mathbf{L}[1](s)=s\mathbf{L}[t](s)\Rightarrow\mathbf{L}[t](s)=\frac{1}{s^2}\;.$$

يمكن تعميم العلاقة (6) لكتابة تحويل لابلاس للدوال المشتقة من رتب أعلى كما يلي (التمرين (3.6)):

$$\mathbf{L}[f^{(n)(t)}](s)=s^n\mathbf{L}[f(t)](s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^k f^{(n-k-1)}(0)\;. \tag{7}$$

3.3.6 مشتقة تحويل لابلاس

لتكن f دالة من النوع الأسّي-a. يُبرهن على أنّ مشتقة تحويل لابلاس للدالة f تُكتب (أنظر حل التمرين (4.6)):

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}[f](s)}{\mathrm{d}s}=-\mathbf{L}[tf(t)](s)\;. \tag{8}$$

كما يمكن تعميم هذه العلاقة من أجل مشتقات من رتب أعلى:

$$\frac{\mathrm{d}^n\mathbf{L}[f(t)](s)}{\mathrm{d}s^n}=(-1)^n\mathbf{L}[t^n f(t)](s)\;. \tag{9}$$

4.3.6 تحويل لابلاس لانسحاب دالة - قاعدة الانسحاب

تحويل لابلاس لانسحاب[2] الدالة من النوع الأسّي هو

$$\mathbf{L}[\mathbf{T}_a f(t)](s) \equiv \mathbf{L}[f(t-a)](s) = \mathrm{e}^{-as}\mathbf{L}[f(t)](s)\ . \tag{10}$$

أنظر التمرين (5.6) للبرهان على هذه العلاقة.

مثال

باستغلال قاعدة الانسحاب أعلاه، يمكن كتابة علاقة بين تحويلي لابلاس للدالتين sin و cos. من جهة لدينا

$$\forall t \geq \frac{\pi}{2}:\ \cos(t-\frac{\pi}{2}) = \sin t\ ,$$

و عليه يكون:

$$\mathbf{L}[\cos(t-\frac{\pi}{2})](s) = \mathbf{L}[\sin t](s)\ .$$

لكن من جهة أخرى لدينا

$$\mathbf{L}[\cos(t-\frac{\pi}{2})](s) \equiv \mathbf{L}[\mathbf{T}_{\frac{\pi}{2}}\cos t](s) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}s}\mathbf{L}[\cos t](s)\ .$$

و بالتالي نصل إلى العلاقة المنشودة:

$$\mathbf{L}[\sin t](s) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}s}\mathbf{L}[\cos t](s)\ .$$

5.3.6 انسحاب تحويل لابلاس - مبرهنة الانسحاب

يُعطى انسحاب تحويل لابلاس لدالة من النوع الأسّي بالعلاقة التالية (التمرين (6.6)):

$$T_{-a}\mathbf{L}[f(t)](s) \equiv \mathbf{L}[f(t)](s+a) = \mathbf{L}[\mathrm{e}^{-at}f(t)](s)\ . \tag{11}$$

6.3.6 تحويل لابلاس لتكامل دالة

بافتراض أنّ الدالة الأصلية للدالة من النوع الأسي f هي أيضا دالة من النوع الأسّي، فإن تحويلي لابلاس للدالة و دالتها الأصلية ترتبطان بالمعادلة:

$$\mathbf{L}[\int_0^t f(x)\mathrm{d}x](s) = \frac{1}{s}\mathbf{L}[f(t)](s)\ . \tag{12}$$

[2] يمكن الرجوع إلى تعريف الانسحاب في المعادلة (7) من الباب (5).

يُبرهن على هذه العلاقة في حل التمرين (7.6).

7.3.6 تحويل لابلاس لجداء تزاوج دالتين

لتكن f و g دالتين من النوع الأسّي. نفرض أنّ جداء التزاوج $f \star g$ هو من النوع الأسّي أيضا. يُكتب تحويل لابلاس لجداء التزاوج[3] هذا كما يلي (التمرين (8.6)):

$$\mathbf{L}[f \star g] = \mathbf{L}[f] \cdot \mathbf{L}[g] \ . \tag{13}$$

4.6 تحويل لابلاس العكسي

لتكن f دالة مستمرة على مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $\mathbb{R}^+$. إضافة إلى ذلك، نفرض أنّ f دالة من النوع الأسّي-a. تحويل لابلاس هو تطبيق خطّي يُرفق بالدالة f الدّالة المركبة h حيث:

$$h(s) \equiv \mathbf{L}[f](s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t) \mathrm{d}t \ . \tag{14}$$

التطبيق الذي يُرفق بالدالة h الدالة f يُسمّى **تحويل لابلاس العكسي** و يُرمز له بـ $\mathbf{L}^{-1}$:

$$h(s) \equiv \mathbf{L}[f](s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t) \mathrm{d}t \ \Leftrightarrow \ f(t) = \mathbf{L}^{-1}[h](t) \ . \tag{15}$$

من العلاقة الأخيرة يمكن استنتاج أنّ

$$\mathbf{L}[\mathbf{L}^{-1}] = \mathbb{1}_{\mathbb{C}} \ , \tag{16}$$
$$\mathbf{L}^{-1}[\mathbf{L}] = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} \ , \tag{17}$$

حيث $\mathbb{1}_{\mathbb{C}}$ و $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$ هما على التوالي الدالتان الحياديتان في $\mathbb{C}$ و $\mathbb{R}^+$ على التوالي.
المبرهنة التالية، و المعروفة بمبرهنة بروموبتش [4] تُعطينا عبارة تحويل لابلاس العكسي.

---

[3] راجع التعريف (3) في الباب (5).
[4] Thomas John I'Anson Bromwich, 1875-1929.

مبرهنة التحويل العكسي - مبرهنة بروميتش

لتكن f دالة من النوع الأسّي-a، و لتكن دالتها المشتقة f' مستمرة على $\mathbb{R}^+$.
إذا كانت $h \equiv \mathbf{L}[f]$ هي تحويل لابلاس للدالة f فإنّ هذه الأخيرة تُكتب بدلالة h كما يلي:

$$f(t) \equiv \mathbf{L}^{-1}[h](t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{c-iT}^{c+iT} \mathrm{e}^{st} h(s)\mathrm{d}s \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{e}^{st} h(s)\mathrm{d}s \ , \tag{18}$$

حيث $c > a$.

5.6 تطبيق تحويل لابلاس في حل المعادلات التفاضلية

من بين استعمالات تحويل لابلاس هو إيجاد حلول المعادلات التفاضلية. سنستخدم في ما يلي خصائص تحويل لابلاس التي تطرّقنا إليها إلى غاية الآن من أجل الوصول إلى الحل.

كمثال، نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية بطرف ثانٍ التالية:

$$y'' + \omega^2 y = f(t) \ ,$$

مع الشروط الابتدائية $y(0) = \lambda$ و $y'(0) = \rho$. في ما يلي نفرض أنّ f دالة من النوع الأسّي-a.

نُطبّق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة التفاضلية أعلاه فنحصل على

$$(s^2Y - s\lambda - \rho) \ + \ \omega^2 Y = F(s) \ , \tag{19}$$

أين عرّفنا المقدارين Y و F:

$$Y(s) \equiv \mathbf{L}[y](s) \ , \tag{20}$$
$$F(s) \equiv \mathbf{L}[f](s) \ . \tag{21}$$

لاحظ أنّ المعادلة (19) عبارة عن معادلة جبرية، المجهول فيها هو الدالة Y، و التي يمكن إيجاد عبارتها بكل سهولة:

$$Y(s) = \lambda \frac{s}{s^2+\omega^2} + \rho \frac{1}{s^2+\omega^2} + \frac{F(s)}{s^2+\omega^2} \ . \tag{22}$$

سنبيّن في التمرين (9.6) أنّ:

$$\frac{s}{s^2+\omega^2} = \mathbf{L}[\cos \omega t](s) \ , \tag{23}$$
$$\frac{1}{s^2+\omega^2} = \frac{1}{\omega}\mathbf{L}[\sin \omega t](s) \ . \tag{24}$$

و عليه تُكتب Y كما يلي:

$$Y(s) = \lambda \mathbf{L}[\cos \omega t](s) + \frac{\rho}{\omega}\mathbf{L}[\sin \omega t](s) + \frac{1}{\omega}F(s)\mathbf{L}[\sin \omega t](s) \ . \tag{25}$$

كما إنّه يمكن كتابة الحد الأخير من المعادلة الأخيرة على شكل تحويل لابلاس لجداء تزاوج:

$$F(s)\mathbf{L}[\sin \omega t](s) = \mathbf{L}[f](s)\mathbf{L}[\sin \omega t](s) = \mathbf{L}[f \star \sin \omega t](s) \ . \tag{26}$$

إذن يُكتب Y وفق العلاقة التالية:

$$Y(s) = \mathbf{L}\left[\lambda \cos \omega t \ + \ \frac{\rho}{\omega} \sin \omega t \ + \ \frac{1}{\omega} f \star \sin \omega t\right] \ , \tag{27}$$

و التي تمكننا من إيجاد عبارة $y(t)$ و ذلك بتطبيق تحويل لابلاس العكسي على طرفيها:

$$y(t) = \mathbf{L}^{-1}[Y(s)](t) = \lambda \cos \omega t \ + \ \frac{\rho}{\omega} \sin \omega t \ + \ \frac{1}{\omega} f \star \sin \omega t \ . \tag{28}$$

تجدر الإشارة إلى أن جداء التزاوج في هذه العلاقة الأخيرة يُكتب:

$$f \star \sin \omega t = \int_0^t f(u) \sin \omega (t-u) \mathrm{d}u \ . \tag{29}$$

6.6 تمارين الباب 6

التمرين 1.6: تحويل لابلاس للدوال من النوع الأسّي-a

بيّن أنّه إذا كانت f دالة من النوع الأسّي-a فإنّ تحويل لابلاس $\mathbf{L}[f](s)$ يتقارب مطلقا من أجل $\Re s > a$.

التمرين 2.6: خطّية تحويل لابلاس

نعتبر دالتين f و g حيث $\mathbf{L}[f]$ و $\mathbf{L}[g]$ موجودتين. برهن على أنّ تحويل لابلاس تحويل خطي:

$$\forall \lambda, \rho \in \mathbb{R} : \ \mathbf{L}[\lambda f + \rho g] = \lambda \mathbf{L}[f] + \rho \mathbf{L}[g] \ .$$

التمرين 3.6: تحويل لابلاس لمشتقة دالة

لتكن f دالة من النوع الأسّي-a.

1. بيّن أنّ:

$$\forall s \in \mathbb{C} : \ \Re s > a \Rightarrow \mathbf{L}[f'(t)](s) = s\mathbf{L}[f(t)](s) - f(0) \ .$$

2. برهن بالتراجع على أنّ

$$\mathbf{L}[f^{(n)(t)}](s) = s^n \mathbf{L}[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \ .$$

3. بيّن أنّ $\mathbf{L}[t^n]$ متقارب ثمّ أوجد عبارته.

التمرين 4.6: اشتقاق تحويل لابلاس

إذا كانت f دالة ن النوع الأسّي-a بيّن أنّ:

1. $\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}[f](s)}{\mathrm{d}s} = -\mathbf{L}[tf(t)](s)$

2. $\frac{\mathrm{d}^n\mathbf{L}[f(t)](s)}{\mathrm{d}s^n} = (-1)^n\mathbf{L}[t^n f(t)](s)$

التمرين 5.6: تحويل لابلاس لانسحاب دالة

لتكن f دالة من النوع الأسّي.

1. بيّن أنّ انسحاب f بالمقدار a دالة من النوع الأسّي.
2. برهن على صحة العلاقة

$$\mathbf{L}[\mathbf{T}_a f(t)](s) \equiv \mathbf{L}[f(t-a)](s) = \mathrm{e}^{-as}\mathbf{L}[f(t)](s) \ .$$

التمرين 6.6: انسحاب تحويل لابلاس

1. برهن على العلاقة التالية:

$$T_{-a}\mathbf{L}[f(t)](s) \equiv \mathbf{L}[f(t)](s+a) = \mathbf{L}[\mathrm{e}^{-at}f(t)](s) \ .$$

2. باستخدام العلاقة السابقة أوجد $\mathbf{L}[f(t)\sin\omega t](s)$ و $\mathbf{L}[f(t)\cos\omega t](s)$.

التمرين 7.6: تحويل لابلاس لتكامل دالة

لتكن الدالة f و دالتها الأصلية من النوع الأسي. برهن على:

$$\mathbf{L}[\int_0^t f(x)\mathrm{d}x](s) = \frac{1}{s}\mathbf{L}[f(t)](s) \ .$$

التمرين 8.6: تحويل لابلاس لجداء تزاوج دالتين

برهن على أنّ

$$\mathbf{L}[f \star g] = \mathbf{L}[f]\cdot\mathbf{L}[g] \ ,$$

حيث f و g و $f \star g$ جميعها دوال من النوع الأسّي.

التمرين 9.6: تحويل لابلاس لبعض الدوال الشهيرة

أوجد عبارة تحويل لابلاس للدوال التالية:

1. دالة هيفيسايد.
2. توزيعة ديراك.
3. الدوال الدورية.
4. $\sin\omega t$ و $\cos\omega t$.
5. e^{at}.

التمرين 10.6: تحويل لابلاس لحل المعادلات التفاضلية

استعمل تحويل لابلاس لحل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y'' - y = 1$$

مع الشروط الابتدائية $y(0) = y'(0) = 0$.

المصادر

[1] رمضان محمد جهيمة، و أحمد عبد العالي هبّ الرّيح: التفاضل و التكامل. الجزء الأول. دار الكتاب الجديد المتحدة. (2002)

[2] رمضان محمد جهيمة، و أحمد عبد العالي هبّ الرّيح: التفاضل و التكامل. الجزء الثاني. دار الكتاب الجديد المتحدة. (2002)

[3] مندلسون و آخرون: حساب التفاضل و التكامل. ملخصات إيزي شوم. الدار الدولية للاستثمارات الثقافية. مصر (2001)

[4] ج. أ. فريدي. ترجمة أحمد صادق القرماني و رمضان محمد إجهيمة: نظرية حساب التفاضل و التكامل. منشورات جامعة الفاتح. طرابلس (1991)

[5] William E. Boyce, Richard C. DiPrima, Douglas B. Meade: Elementary differential equations and boundary value problems. John Wiley and Sons. (2021)

[6] Ronald Newbold Bracewell, Ronald N. Bracewell: The Fourier transform and its applications. New York: McGraw-hill. (1986)

[7] Gerald B. Folland: Fourier analysis and its applications. American Mathematical Soc. (2009)

[8] محمود عبد الرحمان البرعي و آخرون: معجم المصطلحات العلمية. مكتبة الأنجلو المصرية. (2008)

[9] أبو بكر خالد سعد الله: معجم الرياضيات. ديوان المطبوعات الجامعية. (2013)

[10] محمد بن قادة و آخرون: معجم الرياضيات. المعهد التربوي الوطني. (1972)

[11] لجنة الرياضيات بمجمع اللغة العربية: معجم الرياضيات. مجمع اللغة العربية. (2003)