République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr.Yahya Farès de Médéa

Faculté des Sciences -Département de Mathématiques & Informatique

MÉMOIRE

Diplôme de Master en Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationelle

L'étude de broadcast indépendance dans certains classes de graphes

Par

SLIMANI AMIRA

Devant le jury composé de :

BENDALI BRAHAM Amel	MCB	U.Médéa	Présidente
BOUZEFRANE Mohamed	MCB	U.Médéa	Examinateur
ZEMIRE Mohamed	MCB	U.Médéa	Encadreur

Date de soutenance

29 Juin 2025

RESUME

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n où V est l'ensemble des sommets, et E est l'ensemble des arêtes. Une fonction $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, ..., diam(G)\}$ est un broadcast sur le graphe non trivial connexe G si pour tout sommet $v \in V(G)$, $f(v) \leq e(v)$, où $diam(G)$ représente le diamètre de G et $e(v)$ représente l'excentricité du sommet v. Le nombre de broadcast indépendance $\beta_b(G)$ est la valeur maximal de $\sum_{v \in V(G)} f(v)$ sur tous les broadcast f qui satisfont $d(u, v) > \max\{f(u), f(v)\}$ pour chaque paire de sommets distinct u, v avec les valeurs positives.

Dans ce mémoire nous déterminons cet invariant pour la classe des graphes $P_m \square P_n$ où $\square$ représente le produit cartésien de deux chaînes P_m et P_n de longueur m et n respectivement, avec $m \leq n$ et $m = 2, 3$ et 4.

ABSTRACT

Let $G = (V, E)$ be a simple graph of order n, where V is the set of vertices and E is the set of edges. We say that a fonction $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, ..., diam(G)\}$ is a broadcast on a nontrivial connected graph G if for every vertex $v \in V(G)$, $f(v) \leq e(v)$, where $diam(G)$ denotes the diameter of G and $e(v)$ denotes the eccentricity of the vertex v. The broadcast independence number $\beta_b(G)$ is the maximum value of $\sum_{v \in V(G)} f(v)$ over all broadcasts f that satisfy $d(u, v) > max\{f(u),f(v)\}$ for every pair of distinct vertices u, v with positive values.

In this memory, we determine this invariant for some classes of graphs $P_m \square P_n$, where $\square$ denotes the cartesian product of two paths P_m and P_n of longuer m and n respectively, with $m \leq n$ and $m = 2$,3 and 4.

REMERCIEMENTS

Je remercie, en premier lieu, **Allah**, le tout puissant, de m'avoir permis et d'avoire donné la patience et le courage de faire ce travail.

Toute mes reconnaissance et ma gratitude à Monsieur **M. ZEMIR**, qui a dirigé ce travail avec beaucoup de patience, pour sa confiance qui m'a été accordée. Je le remercie également pour ses précieux conseils, ses encouragement, son aide et sa présence constante.

Je voudrais exprimer ma gratitude envers Madame **A. BENDALI BRAHAM**, qui m'a fait l'honneur d'accepter d'être la présidente du jury de ce mémoire.

Je remercie les membres de jury : Monsieur **M. BOUZEFRANE**, qui m'a honoré en accepté d'évaluer mon travail, et qui m' a permis de l'enrichir grâce à leurs précieux remarques.

Je voudrais également à exprimer ma gratitude à tous les enseignants du département M.I de l'université Dr. YAHIA FARES de Médéa.

je voudrais aussi remercier toutes les personnes qui m' ont aidé par leur soutien et leur encouragements et qui m' ont permis d'accomplir mon travail à son terme.

Un grand merci à ma famille qui ont été là pour m' encourager et me pousser à donner le meilleur de moi-même.

Table des matières

RESUME **i**

ABSTRACT **ii**

RESUME EN ARABE **iii**

REMERCIEMENTS **iv**

INTRODUCTION **10**

1 Notions générales sur les graphes **13**

1.1 Concepts fondamentaux 13

1.1.1 Définitions et notations 13

1.1.2 Voisinage, degré d'un sommet 14

1.1.3 Sous-graphe, Sous-graphe induit 15

1.1.4 Chaîne et cycle 16

1.1.5 Concept de minimalité, maximalité, minimum et maximum 16

1.1.6 Distance, excentricité, diamètre et rayon 17

1.2 Quelques classes de graphes 17

1.2.1 Invariants de graphes 19

1.3 Quelques opérations dans les graphes 20
1.3.1 Produit cartésien 20
1.3.2 Produit tensoriel 20
1.3.3 Produit fort 21
1.4 Aperçu sur la domination dans les graphes 22
1.4.1 Domination dans les graphes 23
1.4.2 Indépendance dans les graphes 24
1.4.3 Packing 25
1.4.4 Domination efficace dans les graphes 25

2 Broadcasts dans les graphes **26**
2.1 Notions fondamentales sur les broadcasts 26
2.2 Bornes inférieures du nombre de broadcast domination 29
2.3 Graphes avec un petit nombre de broadcast domination 30
2.4 Invariants de broadcast 32
2.4.1 Broadcast indépendant 33
2.4.2 Broadcast dominant indépendant 36
2.4.3 Broadcast efficace 37
2.4.4 Broadcast packing 38

3 Nombre de Broadcast independance d'un produit cartésien **40**
3.1 Nombre de broadcast domination du produit cartésien de deux graphes . . 41
3.2 Calcul de β_b pour la classe des grilles $G_{m,n}$ 42
3.2.1 Calcul du $\beta_b(G_{m,n})$ pour $m = 2, 3, 4$ 44

Conclusion **60**

Bibliographie **61**

Table des figures

1.1 Un graphe simple G d'ordre 8 et de taille 10. 14

1.2 Un sous graphe de G induit par S = {a, b,c, d, e} 15

1.3 Un cycle C_8 et une chaîne P_6 16

1.4 Un graphe G avec $diam(G) = 2$, $rad(G) = 1$ 17

1.5 Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$ 18

1.6 Le graphe biparti complet $K_{2,3}$ 18

1.7 Un graphe complet K_5 18

1.8 Un graphe et son subdivision 19

1.9 Le graphe $P_4 \square P_5$ 20

1.10 Le graphe $P_4 \times P_5$ 21

1.11 Le graphe $P_4 \boxtimes P_5$ 21

1.12 Le graphe $K_{2,3}$ avec $\gamma(K_{2,3}) = 2$ 23

1.13 Un graphe G avec $\gamma(G) = 2$ et $\Gamma(G) = 4$ 24

2.1 Graphe G avec $\gamma_b(G) = 2$ et $\Gamma_b(G) = 3$. 28

2.2 Deux broadcast dominants sur G 28

2.3 le graphe C_n avec $\gamma(C_6) = 2$ et $rad(G_n) = 3$ 31

2.4 Graphe $S(K_{1,n})$, $n \geq 3$ 31

2.5 Graphe G avec $\gamma_b(G) = 3$ et $min\{\gamma(G), rad(G)\} = 4$ 32

2.6 Graphe de Petersen 34

2.7 Broadcasts efficaces sur P_5 37

2.8 Un packing maximal qui n'est pas un broadcast packing maximal 39

Introduction

La recherche opérationnelle est une discipline moderne qui vise à offrir des méthodes de résolution s'appuyant sur des notion et des instruments mathématiques.

Fréquemment, lorsque l'on souhaite visualiser certaines situations ou des relations entre les éléments d'un système donné, la méthode la plus pratique consiste à dessiner des points et à les relier par des traits. Ce schéma prend le nom de « graphe », où les points et les traits sont respectivement appelés sommets et arêtes (ou arcs lorsque les traits ont une direction). La théorie des graphes joue un rôle essentiel dans de nombreux domaines des sciences appliquées, notamment l'ingénierie, l'informatique, la biologie, la génétique et les sciences sociales. Elle se penche généralement sur des problèmes pratiques de nature combinatoire, où la recherche de structures optimales spécifiques est fréquente, telles que clique maximum, stable maximum, coloration minimale ou dominant minimum.

L'un des domaines les plus florissants en théorie des graphes est le concept de la domination, qui a fait l'objet d'une étude intensive au cours des trois dernières décennies. Ses origines semblent remonter au $16^{ème}$ siècle en Inde, où elle était abordée comme un problème lié au jeu d'échec [18]. L'idée fondamentale est d'occuper toutes les cases de l'échiquier avec un ensemble de pièces du jeu. Au début des années 1850 [21], les passionnés d'échecs se sont penchés sur la recherche du nombre minimum de reines nécessaires à disposer sur un échiquier de manière à ce que chaque case soit occupée par une reine, soit puisse être occupée en un seul mouvement par l'une des reines.

Plus d'un siècle plus tard, en 1962, Ore [22] a été le premier à publier sur la domination

dans les graphes et donna l'appelation actuelle du nombre de domination. La domination a connue sa véritable expansion après les travaux de Cockayne et Hedetniemi en 1977 [8]. Les deux livres de Haynes, et Hedetniemi Slater [16, 17] témoignent de la pertinence et de l'intérêt accru de ce sujet dans les dernières années.

Un dominant dans un graphe est un sous ensemble de sommets, où tout sommet du graphe est ou bien dans cet ensemble ou bien adjacent à un sommet de cet ensemble.Le cardinal minimum d'un tel ensemble est appelé le nombre de domination. Plusieurs types de domination sont définis sur la base de la définition précédente en imposant des propriétés supplémentaires sur les ensembles dominants.

Le problème de la broadcast domination est une variante du problème de domination. Ce problème a été introduit en 2001 par D. J. Erwin [10] et consiste à attribuer des entiers positifs (poids) aux sommets du graphe de sorte que tout sommet de poids nul soit broadcast-dominé par un sommet de poids strictement positif, et que la somme des poids de tous les sommets soit minimum. Formellement, cela revient à d´efinir une application f à valeurs entières sur l'ensemble des sommets telle que tout sommet du graphe se trouve au plus à une distance $f(v)$ d'au moins un sommet v avec $f(v) > 0$, et telle que la somme des poids soit minimum. Ce minimum s'appelle nombre de broadcast domination du graphe.

Une des applications de la broadcast domination est la localisation de stations radio FM dans une zône donnée, où les sites à localiser sont les sommets d'un graphe représentant la zône en question. En pratique, les transmetteurs ne sont pas identiques. Une station radio FM se distinque d'un côté par sa fréquence de transmission et d'un autre côté par la puissance apparente rayonnée (ERP). En général, il n'est pas nécessaire que tous les transmetteurs du réseau aient le même ERP. Un transmetteur avec un plus haut ERP peut couvrir une grande zone mais sa construction et son fonctionnement sont plus coûteux. Il est alors utile de minimiser la somme des ERP qui correspond à la minimisation du coût du broadcast.

Cependant, il y a encore beaucoup à faire dans ce domaine, ce mémoire est une contri-

bution à l'étude et la détermination du nombre de broadcast indépendance dans ceratains classes de graphes.

Cette mémoire s'articule sur trois chapitres dont voici une description.

Le premier chapitre contient les concepts fondamentaux de la théorie des graphes essentiels à la compréhension de cette mémoire. Ensuite, nous aborderons de manière concise le concept de la domination dans les graphes.

Dans le deuxième chapitre, nous énonçons l'essentiel des résultas établis sur les invariants de broadcast.

Le troisième chapitre est consacré à la détermination des valeurs exactes du nombre de broadcast indépendance dans la classe des graphes $P_m \square P_n$ où $\square$ représente le produit cartésien de deux chaînes P_m et P_n de longueur m et n respectivement,avec $m \leq n$ et $m = 2, 3$ et 4.

Nous clôturons cette mémoire par une conclusion, accompagnée de quelques perspectives pour les futurs travaux dans ce domaine.

Chapitre 1

Notions générales sur les graphes

Dans ce chapitre, nous introduisons les différentes notations de base de la théorie des graphes, qui nous serviront tout au long de ce mémoire. Nous exposons également un aperçu sur la domination dans les graphes et nous présentons quelques invariants de domination. Les différentes définitions et les principaux résultats employés dans ce chapitre sont inspirés des livres de références [4] et [16].

1.1 Concepts fondamentaux

1.1.1 Définitions et notations

Un **graphe non orienté** $G = (V, E)$ est la donnée de deux ensembles finis, un ensemble de **sommets** V et un ensemble d'**arêtes** E. Le cardinal de V est appelé l'**ordre** de G, noté $n(G)$ et le cardinal de E est appelé **la taille** de G, notée $m(G)$. Une arête $e \in E$ est une paire de sommets u, v notée par $e = uv$, où u et v sont les extrémités de e. On dira dans ce cas que u et v sont **adjacents** ou **voisins** et que e est incidente à u et v. Si $n = 1$ on dit que G est **trivial.**

Une **boucle** est une arête dont les deux extrémités sont confondues. Un graphe **simple**

est un graphe dont tout couple de sommets est relié par au plus une arête et toute arête de G a ses extrémités distinctes.

Un graphe G est dit p-**graphe** si le nombre d'arête uv entre deux sommets u et v est inférieur ou égal à p. Un **graphe simple** est un 1-graphe sans boucle.

Tous les graphes considérés dans ce mémoire sont simples et finis. La *Figure* 1.1 montre un graphe simple $G = (V, E)$ dont l'ensemble des sommets est $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ et l'ensemble des arêtes est $E = \{ac, bc, cd, ce, df, eg, fh, gh, de, fg\}$.

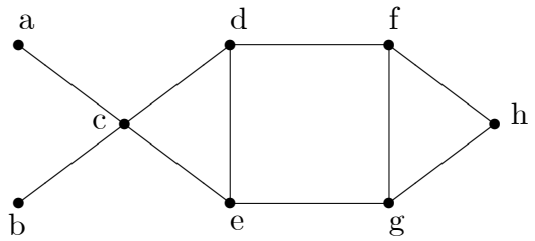


FIG. 1.1 – Un graphe simple G d'ordre 8 et de taille 10.

1.1.2 Voisinage, degré d'un sommet

Le **voisinage ouvert** d'un sommet v est $N_G(v) = \{u \in V : uv \in E\}$ et le **voisinage fermé** de v est $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Pour un sous-ensemble $S \subseteq V$, **le voisinage ouvert** est $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$ et le **voisinage fermé** $N_G[S] = N_G(S) \cup S$ s'il n'y a aucun risque de confusion, nous écrirons $N(V)$, $N[V]$, $N(S)$ et $N[S]$ au lieu de $N_G(v)$, $N_G[v]$, $N_G(S)$ et $N_G[S]$ respectivement.

Le **degré** d'un sommet $v \in V$, noté $d_G(v)$ (ou simplement $d(v)$), est le nombre de ses voisins. On notera par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$, respectivement, le **degré maximum** et le **degré minimum** dans G. S'il n'y a pas de risque de confusion, nous écrirons $d(v)$, Δ et δ pour désigner $d_G(v)$, $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ respectivement. Un sommet de degré nul sera dit **isolé**, et un sommet de degré un sera dit **pendant (feuille)** tandis qu'un sommet adjacent à un sommet pendant sera dit **support**.

La Figure 1.1 montre un graphe simple $G = (V, E)$ dont l'ensemble des sommets est $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ et l'ensemble des arêtes est $E = \{ac, bc, cd, ce, df, eg, fh, gh, de, fg\}$. Le voisinage ouvert du sommet c est $N_G(c) = \{a, b, d, e\}$ et son voisinage fermé est $N_G[c] = \{c, a, b, d, e\}$. Le voisinage ouvert de l'ensemble $S = \{a, f\}$ est $N_G(S) = \{c, d, g, h\}$ et son voisinage fermé est $N_G[S] = \{a, f, c, d, g, h\}$. Le sommet c est un sommet support et les sommets a et b sont des sommets pendants. Le degré minimum de G est $\delta(G) = 1$ et son degré maximum est $\Delta(G) = 4$.

1.1.3 Sous-graphe, Sous-graphe induit

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

Pour un sous-ensemble $U \subseteq E$, *le* **graphe partiel** de G défini par U, noté G_U, est le graphe dont les ensembles de sommets et d'arêtes sont respectivement V et U.

Le graphe H est dit **sous-graphe** du graphe G lorsque $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. Un sous-graphe H de G est dit **induit** si $E(H)$ contient toutes les arêtes de G dont les deux extrémités sont dans $V(H)$. Pour définir un sous-graphe induit de G il suffit de considérer un sous-ensemble S de G. En outre, ce sous-graphe induit sera désigné par $G[S]$ ou $\langle S \rangle$ On dira aussi que $S \subseteq V(G)$ engendre ou induit le sous-graphe correspondant.

Exemple 1.1.1 *Le sous graphe de G induit par $\{a, b, c, d, e\}$ est illustré dans la* Figure *1.2.*

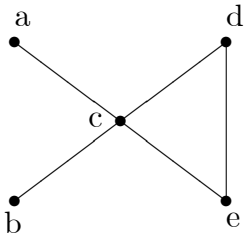
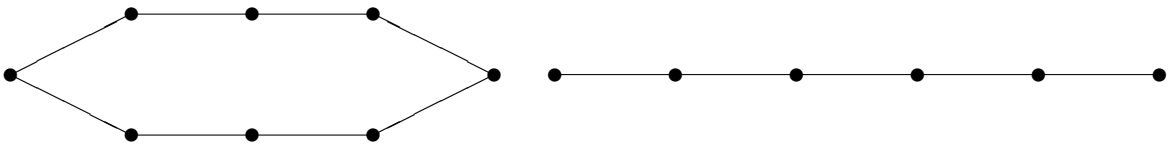


FIG. 1.2 – Un sous graphe de G induit par S = {a, b,c, d, e}

1.1.4 Chaîne et cycle

Dans un graphe $G = (V, E)$, une **chaîne** P est une séquence finie de sommets $v_1, v_2, ..., v_k$ de V telle que $v_i v_{i+1} \in E$ pour tout $1 \leq i \leq k-1$. La longueur de la chaîne P (au sens des arêtes) est indiquée par l'entier $k-1$ et les deux sommets v_1 et v_k sont désignés respectivement comme extrémité initiale et extrémité finale de la chaîne P.(voir la *Figure* 1.3-(b)). Une chaîne est dite **élémentaire** (respectivement, **simple**) si tous ses sommets sont distincts (respectivement, toutes ses arêtes sont distinctes). Une arête reliant deux sommets non consécutifs d'une chaîne est appelée **corde**. Une chaîne élémentaire sans cordes est une **chaîne minimale** induite par n sommets et notée P_n.

Un **cycle** est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues. Un cycle élémentaire C_n induit par n sommets est un cycle dont les sommets sont distincts.(voir la *Figure* 1.3-(a)).



(b) Un cycle C_8 (a) La chaine P_6

FIG. 1.3 – Un cycle C_8 et une chaîne P_6

1.1.5 Concept de minimalité, maximalité, minimum et maximum

On dit qu'un sous-ensemble S de V est **minimal** (resp. **maximal**) par rapport à une propriété $\mathcal{P}$ s'il n'existe pas d'ensemble $B \subset S$ (respectivement, $B \supset S$) tel que $G[B]$ vérifie $\mathcal{P}$.

On dit qu'un sous-ensemble S de V est **minimum** ou de **taille minimale** (respectivement, **maximum** ou de **taille maximale**) par rapport à une propriété $\mathcal{P}$ s'il n'existe pas

un sous-ensemble $B \subset V$ tel que $G[B]$ vérifie $\mathcal{P}$ et $|S| > |B|$ (respectivement, $|B| > |S|$).

1.1.6 Distance, excentricité, diamètre et rayon

La **distance** entre deux sommets u et v d'un graphe G, notée $d_G(u, v)$, est la longueur de la plus courte chaîne joignant u et v. **L'excentricité** d'un sommet v dans un graphe $G(V, E)$, est $e(v) = max\{d(v, w), w \in V\}$. Le **diamètre** de G noté $diam(G)$, c'est-à-dire :$diam(G) = max\{e(v), v \in V\}$ et le **rayon** de G noté $rad(G)$, c'est-à-dire : $rad(G) = min\{e(v), v \in V\}$. Un sommet de G ayant une excentricité minimum est appelé **centre**. Pour le graphe G illustré dans la *Figure* 1.4, $d(c, f) = 2$, $diam(G) = 2$, $rad(G) = 1$ et $e(G) = 2$.

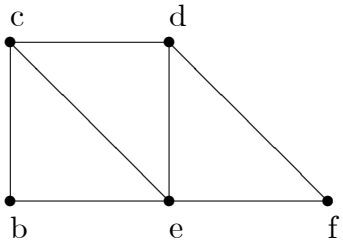


FIG. 1.4 – Un graphe G avec $diam(G) = 2$, $rad(G) = 1$

1.2 Quelques classes de graphes

Le graphe **complémentaire** de G, noté $\overline{G}$, est un graphe ayant le même ensemble de sommets que G et une arête est dans $\overline{G}$ si elle n'est pas dans G. (voir la *Figure* 1.5).

Un graphe est dit **biparti** s'il existe une partition de ses sommets en deux sous-ensembles X et Y de telle façon que toutes les arêtes du graphe relient un sommet de X à un sommet de Y. Autrement dit, les sous graphes $G[X]$ et $G[Y]$ sont des stables. Si tout sommet de l'ensemble X est adjacent à tout sommet de Y, alors le graphe est appelé **biparti complet**, et noté par $K_{|X|,|Y|}$. (voir la *Figure* 1.6).

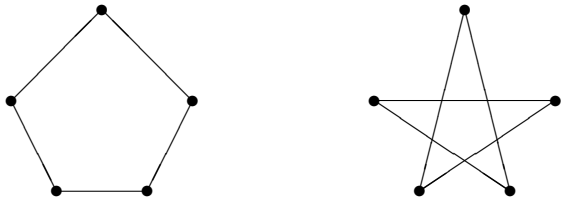


FIG. 1.5 – Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$

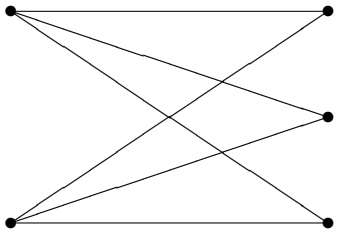


FIG. 1.6 – Le graphe biparti complet $K_{2,3}$

Si pour chaque paire de sommets distincts u et v de V, il existe une chaîne reliant u et v, alors le graphe G est **connexe**. La relation de connexité est une relation d'équivalence. Les sous-graphes induits par les classes d'équivalence sont appelés composantes connexes de G.

Un graphe **complet** d'ordre n, noté K_n, est un graphe simple dont tous ses sommets sont adjacents. (voir la *Figure* 1.7).

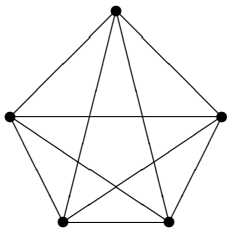


FIG. 1.7 – Un graphe complet K_5

Une **subdivision** $S(G)$ d'un graphe G est le graphe obtenu en remplaçant chaque arête uv de G par un sommet w et les deux arêtes uw et wv (voir la *Figure* 1.8).



FIG. 1.8 – Un graphe et son subdivision

1.2.1 Invariants de graphes

Deux graphes sont dits **isomorphes** s'il existe une fonction bijective entre les ensembles des sommets des deux graphes telle que deux sommets sont adjacents dans l'un des graphes si et seulement si leurs sommets correspendants par la fonction bijective sont adjacents dans l'autre graphe. Si deux graphes sont isomorphes, ils ont des propriétés communes. Ces propriétés communes sont appelées **invariants** de graphes, en d'autres termes un invariant est une propriété stable par isomorphsime.

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n. Nous définissons ci-après quelques invariants de graphes intervenant dans la suite.

Le nombre de sommets, le nombre d'arêtes, le degré minimum et le degré maximum sont des invariants de base d'un graphe.

Une **clique** de d'un graphe G est un sous-ensemble de sommets de V deux-à-deux adjacents. La taille d'une clique est le nombre de ses sommets. Une clique de G est maximum si elle est de taille maximale dans G . Le cardinal d'une clique maximum de G est noté par $\omega(G)$.

Un **stable** de G est un sous-ensemble de sommets de V deux-à-deux non-adjacents. La taille d'un stable est égale au nombre de ses sommets. Un stable de G est maximum s'il est de taille maximale dans G. Le cardinal d'un stable maximum de G, noté $\alpha(G)$, est appelé nombre de stabilité de G.

1.3 Quelques opérations dans les graphes

1.3.1 Produit cartésien

Le **produit cartésien** de deux graphes G et H, note par $G\square H$, est le graphe dont les sommets sont les paires ordonnées (x, y) où $x \in V(G)$ et $y \in V(H)$. Deux sommets (u, v) et (x, y) sont adjacents si et seulement si $u = x$ et v est adjacent à y dans H, où $v = y$ et u est adjacent a x dans G.

Exemple 1.3.1 *Le graphe illustré dans la* Figure*.1.9 est le produit cartésien de la chaîne P_4 par la chaîne P_5.*

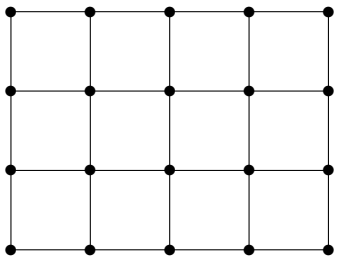


FIG. 1.9 – Le graphe $P_4\square P_5$

1.3.2 Produit tensoriel

Le **produit tensoriel** de G et H, note par $G \times H$, est le graphe dont les sommetssont les paires ordonnées(x, y) où $x \in V(G)$ et $y \in V(H)$. Deux sommets distincts (u, v) et (x, y) sont adjacents si et seulement si $u \in N_G(x)$ et $v \in N_H(y)$.

Exemple 1.3.2 *Le graphe illustre dans la* Figure.*1.10 est le produit tensoriel de* P_4 *par* P_5.

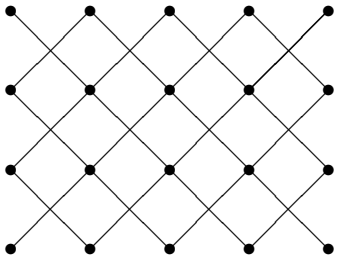


FIG. 1.10 – Le graphe $P_4 \times P_5$

1.3.3 Produit fort

Le **produit fort** de G et H, noté par $G \boxtimes H$, est le graphe dont les sommets sont les paires ordonnées (x, y) où $x \in V\ (G)$ et $y \in V(H)$. L'ensemble des arêtes est l'union de $E(G \square H)$ et de $E(G \times H)$, c'est à dire, $E(G \boxtimes H) = E(G \square H) \cup E(G \times H)$.

Exemple 1.3.3 *Le graphe illustré dans la* Figure.*1.11 est le produit fort de* P_4 *par* P_5.

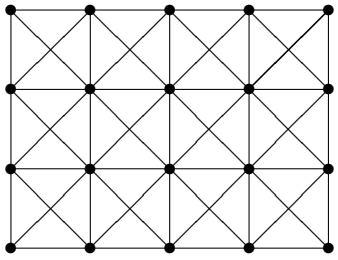


FIG. 1.11 – Le graphe $P_4 \boxtimes P_5$

1.4 Aperçu sur la domination dans les graphes

Le concept de domination dans les graphes trouve son origine dans le jeu d'échecs. Le principe est de couvrir l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. L'idée remonte au $16^{éme}$ siècle en Inde (Voir [18]). En 1862 De Jaenisch [21] posa le problème suivant : déterminer le nombre minimum de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée par une reine ou bien peut être occupée en un seul mouvement par l'une des reines. Pour l'échiquier 8×8, le nombre minimum est 5. et pour l'échiquier 24×24, le nombre minimum est 13. Le nombre minimum dans un échiquier $n \times n$ reste indéterminé jusqu'à présent pour $n > 24$. Pour plus de détails voir [12, 15].

En 1892, Ball [1] a traité la question de De Jaenish en considérant d'autres conditions supplémentaires.

En 1958, Claude Berge [5] donna une formulation de la domination dans les graphes orientés. Le nombre de domination s'appelait alors coefficient de stabilité externe.

En 1964, les frères Yaglom [24] étudièrent les problèmes posés par De Jaenish et Ball. L'appelation actuelle du nombre de domination en 1962, Ore [22] fut le premier à employer les termes $\ll$ ensemble dominant $\gg$ et $\ll$ nombre de domination $\gg$ qu'il nota $d(G)$. La domination n'a connu sa véritable expansion qu'après la parution de l'article de Cockayne et Hedetniemi [8] en 1977. Les auteurs de [8] ont été les premiers à utiliser la notation $\gamma(G)$ pour désigner le nombre de domination.

Le premier numéro spécial consacré entièrement à la domination dans les graphes a été édité en 1990 par Hedetniemi et Laskar publié dans la revue Discrete Mathematics [18]. Une liste de quelques 400 références a été inclue dans ce numéro. On dénombre actuellement plus de 200 types de domination et plus de 6000 références dans le domaine.

Pour un aperçu détaillé, le lecteur peut consulter les deux livres remarquables de Haynes, Hedetniemi et Slater [16, 17], et les trois récents livres de Haynes, Hedetniemi et Henning [13, 14, 15].

Nous donnons les définitions de quelques types de domination dans les graphes liés à notre sujet d'étude.

1.4.1 Domination dans les graphes

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un sous ensemble de sommets S de V est dit **dominant** si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S, c'est-à-dire si $N[S] = V$. Le **nombre de domination**, noté $\gamma(G)$ et le **nombre de domination supérieur** noté $\Gamma(G)$ d'un graphe G représente le cardinal minimum et maximum d'un ensemble dominant minimal de G. Un ensemble dominant minimum avec une telle cardinalité est appelé γ-**ensemble**, et un ensemble dominant minimal de G de cardinal maximum est appelé Γ-**ensemble**.

Par exemple dans le graphe biparti complet $K_{2,3}$ de la *Figure* 1.12, $\gamma(K_{2,3}) = 2$, et $\{a, b\}$, $\{a, x\}$, $\{a, y\}$ $\{a, z\}$, $\{b, x\}$, $\{b, y\}$ et $\{b, z\}$ sont tous des $\gamma(K_{2,3})$-ensembles.

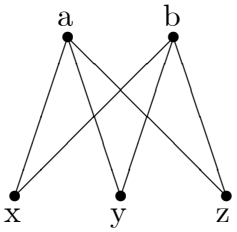


FIG. 1.12 – Le graphe $K_{2,3}$ avec $\gamma(K_{2,3}) = 2$

Notons qu'un graphe G peut avoir plusieurs $\gamma(G)$-ensembles.

Exemple 1.4.1 *Le nombre de domination et le nombre de domination supérieur du graphe illustré dans la* Figure *1.13 valent respectivement* $\gamma(G) = 2$ *et* $\Gamma(G) = 4$. *L'ensemble* $S = \{u, v\}$ *est un* γ*-ensemble et l'ensemble* $S' = \{x, y, w, z\}$ *est un* Γ*-ensemble.*



FIG. 1.13 – Un graphe G avec $\gamma(G) = 2$ et $\Gamma(G) = 4$

Dans la litérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants. En voici des exemples :

– Un ensemble $S \subseteq V$ est un dominant si pour tout sommet $v \in V$, $|N[v] \cap S| \geq 1$,

– Un ensemble $S \subseteq V$ est un dominant si pour tout sommet $v \in V - S$, $|N(v) \cap S| \neq \emptyset$.

– Un ensemble $S \subseteq V$ est un dominant si $N[S] = V$.

1.4.2 Indépendance dans les graphes

Un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$ d'un graphe G est dit **indépendant** (ou **stable**) si les sommets de S sont deux à deux non-adjacents. Le cardinal maximum (respectivement, minimum) des ensembles indépendants maximaux est appelée le **nombre d'indépendance** (respectivement, **nombre de domination stable**) de G, et est noté par $\alpha(G)$ (respectivement $i(G)$). Un ensemble indépendant avec un tel cardinal est appelé $\alpha(G)$-**ensemble** (respectivement, $i(G)$-**ensemble**).

Pour le graphe $K_{2,3}$, représenté dans la *Figure* 1.12, $\alpha(K_{2,3}) = 3$, et $\{x, y, z\}$ est le seul $\alpha(G)$-ensemble, $i(K_{2,3}) = 2$, et $\{a, b\}$ est le seul $i(G)$-ensemble.

Par le fait qu'un indépendant maximal est un dominant, il est facile de voir que :

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \alpha(G)$$

Le **nombre de domination stable** $i(G)$ et le **nombre de stabilité** $\beta_0(G)$ sont respectivement le cardinal minimum et maximum d'un stable maximal dans G.

Comme tout stable maximal est un ensemble dominant minimal [3], on a :

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G)$$

1.4.3 Packing

Un ensemble S est un **packing** si pour tout sommet $v \in V$, $|N[v]| \cap S| \leq 1$. Le nombre de packing $P(G)$ et le nombre de packing inférieur $p(G)$ sont respectivement le cardinal maximum et minimum d'un packing maximal dans G. Comme tout dominant minimal est un packing maximal de G [7], nous avons la chaîne d'inégalités suivante [16] :

$$p(G) \leq P(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G)$$

1.4.4 Domination efficace dans les graphes

Un ensemble S de V est dit **dominant efficace** si tout sommet de G est dominé exactement par un sommet de S, c'est-à-dire pour tout sommet v de G, $|N[v] \cap S| = 1$.

La domination efficace a été introduite en 1988 par Bange et al. [2].

Notons qu'un ensemble dominant efficace n'existe pas toujours, par exemple le cycle C_5 ne possède pas d'ensemble dominant efficace. Cependant, si G admet un dominant efficace S, alors tous les ensembles dominants sont de même cardinal, en particulier $\gamma(G) = |S|$.

Chapitre 2

Broadcasts dans les graphes

Après l'introduction générale des notions de fonction broadcast et de nombre de broadcast domination, nous introduisons quelques invariants des broadcasts et les relations qui les relient. Ce chapitre, divisé en trois sections.

2.1 Notions fondamentales sur les broadcasts

Soit $G = (V, E)$ un graphe non trivial connexe.

Définition 2.1.1 *Une fonction $f : V \to \{0, ..., diam(G)\}$ telle que $f(v) \leq e(v)$ pourtout sommet v de G est appelée un* ***broadcast*** *sur G. Un sommet v pour lequel $f(v) > 0$ est un sommet f-**dominant** ou **sommet broadcast**, et l'ensemble f-**dominant** est $V_f^+(G) = \{v \in V : f(v) > 0\}$. S'il n'y a pas risque de confusion, on note simplement V_f^+ au lieu de $V_f^+(G)$.*

Remarque 2.1.1 *S'il existe un sommet v avec $f(v) = diam(G)$, alors f est un broadcast dominant. Ainsi, On n'a pas besoin de considérer des broadcasts dominants qui on des sommets dont le coût supérieur au $diam\,(G)$.*

Remarque 2.1.2 *Un sommet f-dominant v f-domine chaque sommet u avec $d(u,v) \leq f(v)$, et les sommets dans $V - V_f^+$ ne f-dominent aucun sommet de G. Si $u \in V_f^+$, $v \in V$ et $d(u,v) \leq f(u)$, on dit que le sommet v peut atteindre un broadcast à partir de u. L'ensemble des sommets que $v \in V$ peut atteindre est défini par $H(v) = \{u \in V_f^+ : d(u,v) \leq f(u)\}$.*

Définition 2.1.2 *un broadcast dominant sur G est un broadcast f dans lequel chaque sommet est f-dominé par un certain sommet dans V_f^+, autrement dit, un broadcast f est un dominant si pour tout $v \in V$, $|H(v)| \geq 1$*

Définition 2.1.3 *Pourr un broadcast f, un sommet u qui est f-dominé par un sommet v est un f-**voisin** de v. Le f-**voisinage** de v, noté par $N_f[v]$ est l'ensemble des f-voisins de v. Si $S \subseteq V_f^+$, alors $N_f[S] = \bigcup_{v \in S} N_f[v]$ est le f-voisinage de S. Le f-voisinage de f est $N_f[V_f^+]$.*

Définition 2.1.4 *Un broadcast f d'un certain type (domination ou autre) est dit minimal (resp. maximal) s'il n'existe pas un broadcast $g \neq f$ tel que pour tout sommet $u \in V$, $g(u) \leq f(u)$ (resp. $g(u) \geq f(u)$).*

Définition 2.1.5 *Soit f un broadcast sur un graphe G et $\sigma(f) = \sum_{v \in V} f(v)$. Le **nombre de broadcast domination** $\gamma_b(G)$ est la valeur minimum de $\sigma(f)$ sur tous les broadcasts dominants de G. Un broadcast dominant f sur G pour lequel $\sigma(f) = \gamma_b(G)$ est dit broadcast dominant minimum sur G. Le **nombre de broadcast domination supérieur** $\Gamma_b(G)$ est égal au coût maximum d'un broadcast dominant minimal sur G.*

Exemple 2.1.1 *Le nombre de broadcast domination et le nombre de broadcast domination supérieur du graphe illustré dans la figure 2.1 valent respectivement 2 et 3.*

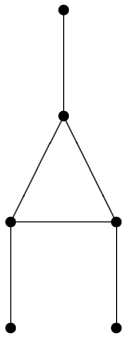
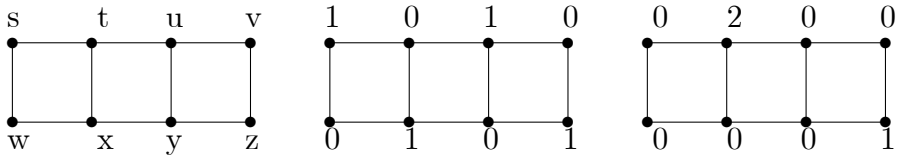


FIG. 2.1 – Graphe G avec $\gamma_b(G) = 2$ et $\Gamma_b(G) = 3$.

Exemple 2.1.2 *Pour illustrer ces concepts, considérons le graphe $G = (V, E)$ illustré par la figure 2.2. Les figures 2.2-(b) et 2.2-(c) illustrent deux broadcasts dominants f et g, où l'ensemble f-dominant est $V_f^+ = \{s, u, x, z\}$ et l'ensemble g-dominant est $V_g^+ = \{t, z\}$. Le sommet s f-domine s, t, w et son f-voisinage est $N_f[s] = \{s, t, w\}$, mais s ne g-domine aucun sommet. On a $|H_f(u)| = 1$, $|H_f(y)| = 3$, $|H_f(w)| = 2$ et $|H_f(r)| = 1$ pour tout sommet $r \in \{s, x, u, z\}$. On a $\sigma(f) = 4$ et $\sigma(g) = 3$. En fait il n'est pas difficile de voir que $\gamma_b(G) = 3$ et g est un γ_b-broadcast.*



Graphe G (a) Broadcast f sur G (b) Broadcast g sur G (c)

FIG. 2.2 – Deux broadcast dominants sur G

Théorème 2.1.1 *[10] Soit f un broadcast dominant sur un graphe G. Alors, f est minimal si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. Chaque sommet v vérifiant $f(v) \geq 2$ a un f-voisinage privé qui est à distance $f(v)$ de v.
2. Chaque sommet v vérifiant $f(v) = 1$ a un f-voisinage privé dans $N[v]$.

Soit $G = (E, V)$ un graphe et $f_s : V \to \{0, 1\}$ la fonction caractéristique d'un ensemble $S \subseteq V$ définie par $f_s(v) = 1$ si $v \in S$, et $f_s(v) = 0$ sinon.

2.2 Bornes inférieures du nombre de broadcast domination

D.Erwin démontra que la même borne inférieure que celle du nombre de domination reste valable pour le nombre de broadcast domination.

Théorème 2.2.1 *[11] Sii G est un graphe non trivial, alors*

$$\gamma_b(G) \geq \lceil \frac{diam(G+1)}{3} \rceil.$$

De Théoréme 2.2.1, on déduit directement le résultat suivant :

Théorème 2.2.2 *[11] Pour tout entier $n \geq 2$,*

$$\gamma_b(P_n) = \gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil.$$

Théorème 2.2.3 *Une borne inférieure en terme de rayon est prouvée par Bresar et Spacapan pour le nombre de broadcast domination.*

Théorème 2.2.4 *[7] Si G est un graphe, alors*

$$\gamma_b(G) \geq \lceil \frac{2rad(G)}{3} \rceil.$$

Pour tout graphe connexe G d'ordre n, $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ est une borne supérieure de son nombre de broadcast domination.

Théorème 2.2.5 *[20] Pour tout graphe G d'ordre n,*

$$\gamma_b(G) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil.$$

Il existe d'autres bornes qui d´ependent du rayon. Pour un gammab-broadcast f, notons par $M = max\{f(x) : x \in V_f^+\}$.

Théorème 2.2.6 *[10] Soit G un graphe et f un γ_b-broadcast sur G. Alors*

$$\gamma_b(G) \geq \lceil \frac{rad(G) + M + 1 - |V_f^+|}{2} \rceil$$

2.3 Graphes avec un petit nombre de broadcast domination

une caractérisation connu des graphes G connexes de nombres de domination égal à 1 et $rad(G) = 1$. les graphes avec un nombre de broadcast domination égal à 1 admettent une caractérisation identique :

Proposition 2.3.1 *[11] Soit G un graphe. Alors $\gamma_b(G) = 1$, si et seulement si $rad(G) = 1$. Les graphes avec un nombre de broadcast domination égal à 2 se caractérisent aussi en fonction du rayon :*

Théorème 2.3.1 *[11] Soit G un graphe. Alors $\gamma_b(G) = 2$ si et seulement si $min\{rad(G), \gamma(G)\} = 2$. Notons qu'il existe :*

(i) Une infinité de graphes G avec $\gamma_b(G) = 2 = \gamma(G) < rad$ Il suffit de considérer les graphes G_n obtenus en insérant 2 sommets sur chaque arête du multigraphe à 2 sommets reliés par n arêtes, $n \geq 1$, pour lesquels on a $\gamma_b(G_n) = \gamma(g_n) = 2$ et $rad(G_n) = 3$.

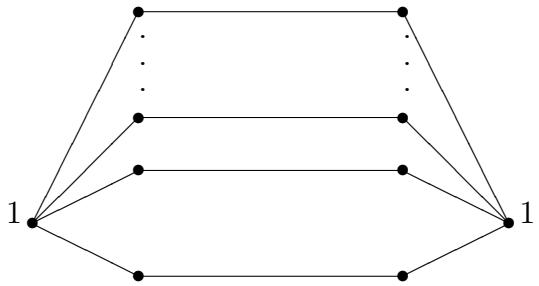


FIG. 2.3 – le graphe C_n avec $\gamma(C_6) = 2$ et $rad(G_n) = 3$

(ii) Une infinité de graphes G avec $\gamma_b(G) = 2 = rad(G) < \gamma(G)$. Il suffit de considérer les graphes $S(K_{1,n}), n \geq 3$, pour lesquels on a $\gamma_b(S(K_{1,n}) = rad(S(K_{1,n})) = 2$ et $\gamma(S(K_{1,n})) = n$.

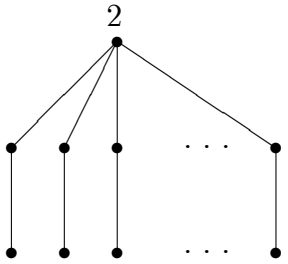


FIG. 2.4 – Graphe $S(K_{1,n})$, $n \geq 3$

De (ii), on peut affirmer qu'un graphe avec $\gamma_b(G) = 2$ peut avoir un nombre de domination aussi grand que l'on voudrait, et de (a) une question légitime se pose : Que peut-on dire de la grandeur du rayon d'un graphe G lorsque $\gamma_b(G) = 2$? Une réponse est donnée par la Proposition 2.3.2.

Proposition 2.3.2 *[11] Si G est un graphe avec $\gamma_b(G) = 2$, alors*

1. $rad(G) = 2$, ou,
2. $rad(G) = 3$ et $\gamma(G) = 2$.

Une autre conséquence du Théorème 2.3.1 est la suivante :

Proposition 2.3.3 *[11] Si G est un graphe et $min\{rad(G), \gamma(G)\} = 3$, alors $\gamma_b(G) = 3$.*

En regroupant les différents résultats précédemment cités, on obtient :

Proposition 2.3.4 *[10] Soit G un graphe. Si $min\{rad(G), \gamma(G)\} = k$, où $1 \leq k \leq 3$, alors $\gamma_b(G) = k$.*

Erwin [10], montra que le résultat de la Proposition 2.3.4 n'est pas vérifié lorsque $min\{rad(G), \gamma(G)\} = 4$. Il considéra le graphe G obtenu en joignant une extrémité de $S(K_{1,4})$ à une extrémité de P_3.

Le graphe vérifie $\gamma_b(G) = 3$ et $min\{\gamma(G), rad(G)\} = 4$.

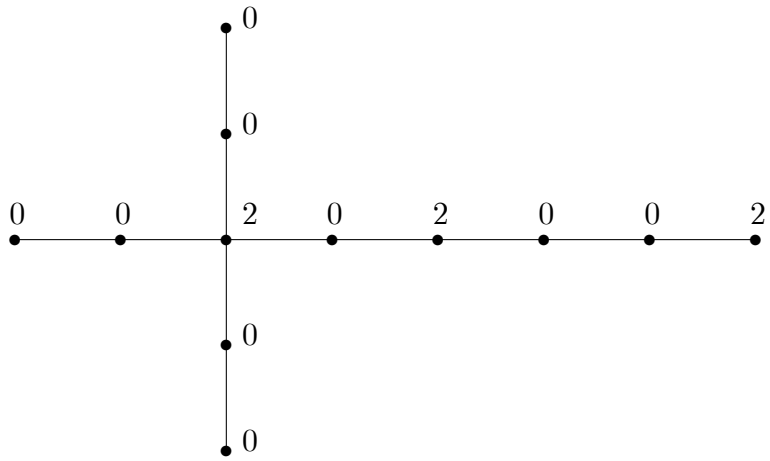


FIG. 2.5 – Graphe G avec $\gamma_b(G) = 3$ et $min\{\gamma(G), rad(G)\} = 4$

2.4 Invariants de broadcast

Dans [9], Dunbar et al. définirent et étudièrent d'autres paramètres liés aux broadcasts appelés broadcasting invariants. Nous citerons dans cette partie l'essentiel des résultats à ces invariants.

2.4.1 Broadcast indépendant

Un broadcast f est dit **indépendant** si tout sommet f-dominant n'est dominé que par lui même. En d'autres termes, si pour tout sommet $v \in V^+$, $N_f[v] \cap V^+ = v$, ou encore $|H(v)| = 1$.

Le coût maximum d'un broadcast indépendant de G est appelé **nombre de broadcast indépendance** et est noté $\beta_b(G)$. Le **nombre de broadcast indépendance inférieur**, noté $i_b(G)$, est égal au coût minimum d'un broadcast indépendant maximal de G.

Comme les deux fonctions broadcast radiale et broadcast diamétrale sont des broadcast indépendants maximaux, on déduit les inégalités suivantes [9] :

$$i_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq \beta_b(G),$$

pour tout graphe G.

Soit M un sous-ensemble de sommets de G tel que pour toute paire de sommets u et v de M , $d(u, v) = diam(G)$, et soit $\mu(G)$ la cardinalité maximum d'un tel sous-ensemble de G.

La proposition qui suit améliore la borne inférieure $diam(G)$ pour $\beta_b(G)$.

Proposition 2.4.1 *[9] Pour tout graphe G,*

$$\beta_b(G) \geq \mu(G)(diam(G) - 1) \geq 2(diam(G) - 1)$$

et cette borne est atteinte.

Dans ce qui suit, lorsque deux paramètres θ et η sont incomparables, nous écrirons brièvement $\theta \diamond \eta$.

Notons que ni $\gamma(G)$ ni $i(G)$ n'est comparable à $i_b(G)$. En effet, Dunbar et al. montrèrent que pour la chaîne P_6, on a $\gamma(P_6) = i(P_6) = 2 < 3 = i_b(P_6)$, alors que pour le graphe $S(K_{1,t})$, on a $\gamma(S(K_{1,t})) = i(S(K_{1,t})) = t > 2 = i_b(S(K_{1,t}))$. Aussi, ni $p(G)$ ni $P(G)$

n'est comparable à i_b. Parr exemple, le graphe de Petersen PG a $p(PG) = P(PG) = 1 < 2 = \gamma_b(PG) = i_b(PG)$; par ailleurs si G un graphe obtenu par l'union de trois copies disjointes de P_5 en ajoutant trois arêtes pour former un triangle sur leurs centres, alors $\gamma_b(G) = i_b(G) = 3 < 5 = p(G) < P(G) = 6$.

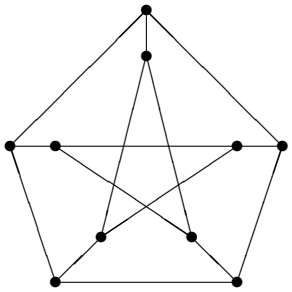


FIG. 2.6 – Graphe de Petersen

Nous pouvons regrouper toutes ces remarques :

Pour tout graphe G,

(i) $\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \beta_b(G)$,

(ii) $\{\gamma(G), i(G)\} \diamond i_b(G)$,

(iii) $\{p(G), P(G)\} \diamond \{\gamma_b(G), i_b(G)\}$.

Dans [9], les auteurs étudièrent l'extension de la chaîne d'inégalités

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G),$$

énoncée au Chapitre deux, à savoir si

$$\gamma_b(G) \leq i_b(G) \leq \beta_b(G) \leq \Gamma_b(G)$$

est satisfaite. L'inégalité du milieu provient des définitions de i_b et β_b. l'inégalité de droite n'est pas vraie en générale puisque $\beta_b(P_4) = 4 > \Gamma_b(P_4) = 3$ et $\beta_b(PG) = 4 < 5 = \Gamma_b(P_G)$ où P_4 est la chaîne d'ordre 4 et PG est le graphe de Petersen (voir Figure 2.6).

Concernant l'inégalité gauche elle se déduit du Théorème :

Théorème 2.4.1 *[11] Soit f un broadcast indépendant sur un graphe G. Si $V_f^+ = \{v\}$ alors f est maximal si et seulement si $f(v) = e(v)$. Par ailleurs, si $|V_f^+| \geq 2$, alors f est maximal si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) f est un broadcast dominant et

(ii) pour tout $v \in V_f^+$, $f(v) = min\{d(v,u) : u \in V_f^+ - \{v\}\} - 1$.

Par ailleurs, β_b et Γ sont incomparables puisque $\Gamma(PG) = 5 > 4 = \beta_b(PG)$ et $\beta_b(P_4) = 4 > 2 = \Gamma(P_4)$.

D'autres relations existent entre les nombres de broadcast d'indépendances i_b et β_b avec le nombre d'indépendance β_0. J.Dunbar et al. ont énoncé une chaîne d'inégalités entre β_0 et les nombres de broadcast indépendance :

Proposition 2.4.2 *[9] Pour tout graphe G,*

$$i_b(G) \leq rad(G) \leq \beta_0(G) \leq \beta_b(G).$$

Comme $\gamma_b(G) \leq i_b(G)$, de la Proposition 2.4.2, on déduit :

Corollaire 2.4.1 *[9] Pour tout graphe G, si $\gamma_b(G) = rad(G)$, alors $i_b(G) = rad(G)$.*

Suite à tous ces résultats, nous obtenons le schéma de comparaison suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma(G) & \leq & i(G) & \leq & \beta_0(G) & \leq & \Gamma(G) \\ \vee\ | & & \diamond & & |\ \wedge & & |\ \wedge \\ \gamma_b(G) & \leq & i_b(G) & \leq & \beta_b(G) & \diamond & \gamma_b(G) \end{array}$$

2.4.2 Broadcast dominant indépendant

Un broadcast f est dit dominant indépendant s'il est en même temps dominant et indépendant.

Le coût maximum (resp. minimum) d'un broadcast dominant indépendant minimal de G est appelé le nombre de broadcast indépendant de domination supérieur (resp. nombre de broadcast indépendant de domination), et est noté $\Gamma_{ib}(G)$ (resp. $\gamma_{ib}(G)$). Puisque la fonction caractéristique de tout ensemble indépendant maximal est un broadcast dominant indépendant minimal, $\gamma_{ib}(G) \leq i(G)$ et $\Gamma_{ib}(G) \geq \beta_0(G)$.

Notons que si f est un broadcast dominant indépendant minimal, alors pour tout broadcast $g \neq f$ qui vérifie $g \leq f$, g est indépendant mais n'est pas forcément un broadcast dominant.

Théorème 2.4.2 *[10] Si f est un broadcast dominant non indépendant de G, alors il existe un broadcast g qui est dominant indépendant, avec $g(V) \leq f(V)$, et $V_g^+ \subset V_f^+$.*

Le Théorème 2.4.2 permet d'affirmer que tout graphe G a un γ_b-broadcast qui est indépendant, c'est à dire $\gamma_b(G) = \gamma_{ib}(G)$, et vérifié la chaîne d'inégalités :

$$\gamma_{ib}(G) \leq i_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq \Gamma_{ib}(G).$$

Concernant une borne supérieure pour le nombre de broadcast indépendant de domination supérieur, on a :

Proposition 2.4.3 *[10] Pour tout graphe G,*

$$\beta_0(G) \leq \Gamma_{ib}(G) \leq min\{\Gamma_b(G), \beta_b(G)\}.$$

Les paramètres $\Gamma_{ib}(G)$ et $\Gamma(G)$ sont incomparables. En effet, Dunbar et al. montrèrent que, pour le graphe de Petersen PG et la chaîne P_{10}, on a $\Gamma_{ib}(PG) = 4 < 5 = \Gamma(PG)$ et $\Gamma(P_{10}) = 5 < 9 = diam(P_{10}) \leq \Gamma_{ib}(P_{10})$.

2.4.3 Broadcast efficace

Un broadcast f est dit efficace si chaque sommet est f-dominé par un unique sommet broadcast, c'est à dire, pour tout sommet $v \in V$, $|H(v)| = 1$. Le coût maximum d'un broadcast efficace est appelé le nombre de broadcast efficace supérieur et est noté $\Gamma_{eb}(G)$. Le nombre de broadcast efficace $\gamma_{eb}(G)$ est égal au coût minimum d'un broadcast efficace. Par exemple, la figure Figure.2.7 illustre 5 broadcasts efficaces distincts sur la chaîne P_5, où $\gamma_{eb}(P_5) = 2$ et $\Gamma_{eb}(P_5) = 4$.

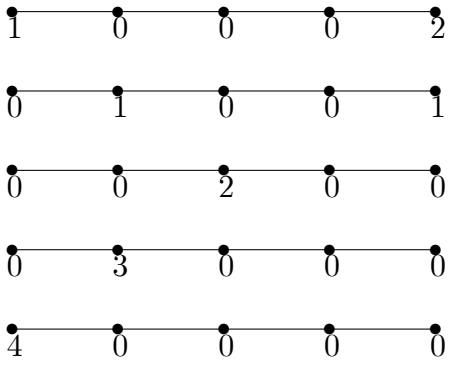


FIG. 2.7 – Broadcasts efficaces sur P_5

Théorème 2.4.3 *[9] Tout graphe G possède un γ_b-broadcast qui est efficace.*

Corollaire 2.4.2 *[9] Tout graphe G a un γ_b-broadcast pour lequel la distance entre n'importe quelle paire de sommets broadcasts u et v est supérieure à $f(u) + f(v)$.*

Puisque tout broadcast dominant efficace est indépendant et dominant minimal, tout graphe G vérifie :

$$\Gamma_{eb}(G) \leq min\{\beta_b(G), \Gamma_b(G), \gamma_{eb}(G)\}.$$

Par définition de $\gamma_{eb}, \Gamma_b \leq \gamma_{eb}(G)$, et par le Théorème 2.4.3, $\Gamma_b(G) = \gamma_{eb}$. Par ailleurs tout broadcast diamétral est un broadcast dominant efficace. Ainsi, tout graphe vérifié la chaîne d'inégalités :

Corollaire 2.4.3 *[9] Pourr tout graphe G,*

$$\gamma_b(G) = \gamma_{ib}(G) = \gamma_{eb}(G) \leq i_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq \Gamma_{eb}(G) \leq \Gamma_{ib}(G).$$

Notons que ni $p(G)$ ni $P(G)$ est comparable avec $\Gamma_{eb}(G)$. En effet, pour le graphe de Petersen P_G, $p(PG) = P(PG) = 1 < 2 = \Gamma_{eb}(PG)$; alors que pour l'arbre binaire complet T de hauteur six qui a 63 sommets, on a $\Gamma_{eb}(T) = 10 < 13 = p(T)$. Par ailleurs, $\gamma(PG) = 3 < 2 = \Gamma_{eb}(PG)$; et pour $n \geq 3$, $\Gamma_{eb}(P_n) = n - 1 > \Gamma(P_n)$. Ainsi tout graphe G satisfait :

Corollaire 2.4.4 *[9] Pour tout graphe G,*

$$\Gamma_{eb}(G) \diamond \{p(G), P(G), \gamma(G), i(G), \beta_0(G), \Gamma(G)\}.$$

2.4.4 Broadcast packing

Un broadcast f est un broadcast packing si chaque sommet est f-dominé par au plus un sommet broadcast,c'est à dire, pour tout sommet $v \in V$, $|H(v)| \leq 1$. Le coût maximum d'un broadcast packing de G est appelé nombre de broadcast packing et est noté par $P_b(G)$. Le nombre de broadcast packing inférieur,noté par $p_b(G)$, est égal au coût minimum d'un broadcast packing maximal.

La fonction caractéristique f_s d'un packing maximal n'est pas forcément un broadcast packing maximal. Ceci peut être vu en considérant la chaîne P_5. Soit c le centre de P_5. Le packing $S = c$ de FIG.2.8(a) est maximal, mais f_s n'est pas un broadcast packing maximal, puisque la valeur $f_s(c) = 1$ peut être augmentée à $f_s(c) = 2$ qui représente le broadcast packing maximal (voir Figure.2.8(b)).

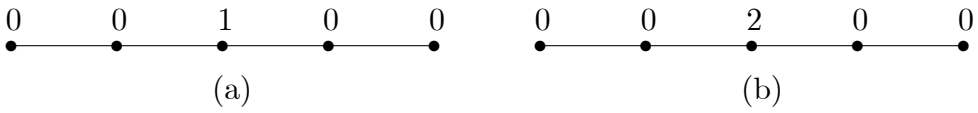


FIG. 2.8 – Un packing maximal qui n'est pas un broadcast packing maximal

Remarque 2.4.1 *Les invariants $p(G)$ et $p_b(G)$ sont incomparables. En effet, pour la chaîne P_5, on a, $p(P_5) = 1 < 2 = p_b(P_5)$, alors que pour le graphe de Petersen PG, on a, $p_b(PG) = 2 > 1 = p(PG)$. Par ailleurs, tout broadcast radial ou diamétral est un broadcast packing et un broadcast indépendant.*

La Remarque 2.4.1 se résume dans ce qui suit :

Observation 2.4.1 *[9] Pour tout graphe G,*

(i) $p_b(G) \diamond P(G)$,

(ii) $p_b(G) \diamond p(G) \leq P(G) \leq P_b(G)$, et

(iii) $p_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq P_b(G) \leq \beta_b(G)$.

Notons qu'on peut avoir un broadcast packing maximal qui n'est pas un broadcast dominant. Par exemple, considérons les valeurs $1, 0, 0, 1, 0, 0$ dans la chaîne P_6.

On sait que la chaîne d'inégalité suivante est valide pour tout graphe G :

$$p(G) \leq P(G) \leq \gamma(G)$$

Chapitre 3

Nombre de Broadcast independance d'un produit cartésien

Dans ce chapitre, nous citons quelques résultats connus sur le nombre de broadcast domination dans quelques classes des graphes. Ensuite, nous donnons la valeur exacte de $\beta_{b(}P_m \Box P_n)$, où P_m et P_n sont deux chaines de longueur m et n respectivement, $m \leq n$ ($m = 2, 3$ et 4).

Soient P_m et P_n deux chaînes de longueur m et n respectivement, et $G_{m,n} = P_m \Box P_n$. . Notons les sommets de la grille $G_{m,n}$ par $v_{i,j}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$. Deux sommets $v_{i,j}$ et $v_{k,l}$ sont reliés par une arête si et seulement si $|i-k|+|j-l| = 1$ .Nous ferons référence aux lignes et colonnes d'une grille par $R^i = \{v_{i,1}, ..., v_{i,n}\}$ et $C^j = \{v_{1,j}, ..., v_{m,j}\}$. Aussi, nous ferons référence aux lignes et colonnes consécutives d'une grille par $R^{i_1,i_2} = R^{i_1} \cup ... \cup R^{i_2}$, $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq m$ et $C^{j_1,j_2} = C^{j_1} \cup ... \cup C^{j_2}$, $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq n$. Désignons par H^{j_1,j_2} le sous graphe de $G_{m,n}$ induit par les sommets de C^{j_1,j_2}. Dans la suite de ce chapitre, on supposera sans perte de généralité que $1 \leq m \leq n$.

On dit que deux sommets $u \in V(G)$ et $v \in V(G)$ sont **antipodaux** si et seulement si $d(u,v) = diam(G)$.

3.1 Nombre de broadcast domination du produit cartésien de deux graphes

Pour le nombre de broadcast domination d'un produit cartisien de deux chaînes $P_m \square P_n$ il a été déteminé par Erwin :

Théorème 3.1.1 *[9] [10] Pour tout entiers m et n avec $2 \leq m \leq n$.*

$$\gamma_b(P_m \square P_n) = rad(P_m \square P_n) = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

Concernat le nombre de broadcast domination d'un produit cartésien de deux cycles $C_m \square C_n$, il a été déterminé par Bresar et Spacapan.

Théorème 3.1.2 *[7] Pour tout entiers m et n avec $2 \leq m \leq n$.*

$$\gamma_b(C_m \square C_n) = \begin{cases} rad(C_m \square C_n) & si \;\; m \;\; et \; n \;\; est \; impair \\ rad(C_m \square C_n) - 1 & sinon. \end{cases}$$

où

$$rad(C_m \square C_n) = \begin{cases} \frac{m+n}{2} & si \; m \;\; et \; n \;\; sont \; pairs, \\ \frac{m+n-2}{2} & si \; m \;\; et \; n \;\; sont \; impairs, \\ \frac{m+n-1}{2} & sinon. \end{cases}$$

3.2 Calcul de β_b pour la classe des grilles $G_{m,n}$

Nous rappelons deux résultats énoncés au Chapitre 2.

Théorème 3.2.1 *[11]*

Soit f un broadcast indépendant sur un graphe G. Si $V^+ = \{v\}$ alors f est maximal si et seulement si $f(v) = e(v)$. Par ailleurs, si $|V^+| \geq 2$, alors f est maximal si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) f est un broadcast dominant et

(ii) pour tout $v \in V^+$, $f(v) = min\{d(v,u) : u \in V^+ - \{v\}\} - 1$.

Soit M un sous-ensemble de sommets de G tel que pour toute paire de sommets u et v de M, $d(u,v) = diam(G)$, et soit $\mu(G)$ la cardinalité maximum d'un tel sous-ensemble de G.

Proposition 3.2.1 *[9] Pour tout graphe G,*

$$\beta_b(G) \geq \mu(G)(diam(G) - 1) \geq 2(diam(G) - 1)$$

et cette borne est atteinte.

Proposition 3.2.2 *[10] Pour tout entier $n \geq 2$,*

$$\beta_b(P_n) = 2\,(n-2)\,.$$

Dans la suite on supposera $m \geq 2$.

Lemme 3.2.1 *[6] soit f un broadcast indépendant sur G, si $diam(G) \geq 2$ et $|V^+| \leq 2$, alors*

$$f(V(G)) \leq 2(diam(G) - 1).$$

Preuve.

soit f un broadcast indépendant sur G. Si $|V^+| = 1$, c'est à dire V^+ contient un unique sommet broadcast x_1, alors $f(V(G)) = f(x_1) \leq e(x_1) \leq diam(G) \leq 2(diam(G) - 1)$. Maintenant si $|V^+| = 2$ et $V^+ = \{x_1, x_2\}$, alors $f(x_1)$ et $f(x_2) \leq d(x_1, x_2)-1$, et $f(V(G)) = f(x_1) + f(x_2) \leq 2(diam(x_1, x_2) - 1) \leq 2(diam(G) - 1)$. ■

Soit $G_{m,n}$, avec $2 \leq m \leq n$, une grille dont l'ensemble des sommets est noté par $V_{m,n}$. On note par $R(x) = i$, $1 \leq i \leq m$, la $i^{éme}$ ligne où le sommet x appartient et par.$C(x) = j$, $1 \leq j \leq n$ la $j^{éme}$ colonne où le sommet x appartient.

Pour un broadcast indépendant f, soit $V^+ = \{x_1, ..., x_t\}$ où pour chaque i, $1 \leq i \leq t-1$, $C(x_i) \leq C(x_{i+1})$.

Soit $R^i_+ = \{v \in R^i : f(v) > 0\}$, $C^j_+ = \{v \in C^j : f(v) > 0\}$, $R^{i_1,i_2}_+ = R^{i_1}_+ \cup ... \cup R^{i_2}_+$, $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq m$ et $C^{j_1,j_2}_+ = C^{j_1}_+ \cup ... \cup C^{j_2}_+$, $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq n$.

Pour la détermination du $\beta_b(G_{m,n})$, nous utiliserons souvent la proposition suivante.

Proposition 3.2.3 *[6] Soit f un broadcast indépendant sur $G_{m,n}, n \geq m+1$. Pour chaque entier k, $m \leq k \leq n-1$,*

$$f(V_{m,n}) \leq \begin{cases} \beta_b(G_{m,k}) + \sum_{v \in C^{k+1,n}_+} f(v) & si\ |C^{1,k}_+| \geq 2, \\ min\{d(x_1, u) : u \in C^{k+1,n}_+\} - 1 + \sum_{v \in C^{k+1,n}_+} f(v) & si\ |C^{1,k}_+| = 1. \end{cases}$$

Preuve. Si $|C^{1,k}_+| \geq 2$, alors $f_{/H^{1,k}}$ est un broadcast indépendant sur $H^{1,k}$. En effet, pour chaque sommet $v \in V(H^{1,k})$, $f(v) \leq min\{d(v, u) : u \in C^{1,n}_+ - \{v\}\} - 1 \leq min\{d(v, u) : u \in C^{1,k}_+ - \{v\}\} - 1 \leq e(v)$ dans $H^{1,k}$ et si aucun sommet broadcast ne f-domine un autre sommet broadcast dans $G_{m,n}$ alors la même propriété est préservée dans $H^{1,k}$.

Puisque $H^{1,k}$ est isomorphe à $G_{m,k}$, nous concluons que,

$$f(V_{m,n}) = f_{/H^{1,k}}(V(H^{1,k})) + \sum_{v \in C_+^{k+1,n}} f(v) \leq \beta_b(G_{m,k}) + \sum_{v \in C_+^{k+1,n}} f(v).$$

Si $|C_+^{1,k}| = 1$, alors $C_+^{1,k}$est réduit à un sommet unique x_1. D'où,

$$f(V_{m,n}) = f(x_1) + \sum_{v \in C_+^{k+1,n}} f(v) \leq min\{d(x_1, u) : u \in C_+^{k+1,n}\} - 1 + \sum_{v \in C_+^{k+1,n}} f(v).$$

■

3.2.1 Calcul du $\beta_b(G_{m,n})$ pour $m = 2, 3, 4$

Il est facile de voir que $diam(G_{m,n}) = m + n - 2$. La borne dans la Proposition 2.4.1 n'est pas atteinte que pour les chaînes. Nous prouverons que les grilles à m lignes où $m \leq 4$ satisfaient aussi cette propriété.

Proposition 3.2.4 *[6] Si f est un β_b-broadcast de $G_{m,n}$ et $|V^+| \geq 2$, alors $C(x_1) = 1$ et $C(x_t) = n$.*

Preuve. Supposons, le contraire, que $C(x_1) > 1$ ou $C(x_t) < n$. Si $C(x_1) = k > 1$ et $x_1 = v_{i,k}$ pour un certain i, alors nous pouvons définir un nouveau broadcast indépendant g sur $G_{m,n}$ avec $g(v_{i,1}) = f(x_1) + k - 1$, $g(v_{i,j}) = 0$, et pour tous les autres sommets v, nous posons $g(v) = f(v)$. Le broadcast g est indépendant sur $G_{m,n}$ et a un coût $g(V_{m,n}) = f(V_{m,n}) + k - 1 > f(V_{m,n}) = \beta_b(G_{m,n})$, ce qui contredit l'optimalité de f. Par conséquent x_1 se trouve dans la première colonne et, de la même façon, x_t se trouve dans la dernière colonne de $G_{m,n}$.

■

Remarque 3.2.1 *Pour déterminer une borne supérieure de $\beta_b(G_{m,n})$, nous pouvons dorénavant , grâce à la Proposition 3.2.4, supposer dans les preuves que pour chaque broadcast indépendant maximum f avec l'ensemble des sommets broadcasts $V^+ = \{x_1, ..., x_t\}$, nous avons $1 = C(x_1) \leq ... \leq C(x_t) = n$. Par ailleurs, le Lemme 3.2.1 combiné avec la Proposition 2.4.1 nous permet de dire que si $|V^+| = 1$, alors $\beta_b(G) \leq diam(G) \leq 2$, et si $|V^+| = 2$, alors $\beta_b(G) = 2(diam(G) - 1)$ où x_1 et x_2 sont antipodaux. Aussi, nous supposons $|V^+| \geq 3$, chaque fois que $diam(G_{m,n}) > 2$.*

Théorème 3.2.2 *[6] Pour tout entier $n \geq 2$, $\beta_b(G_{2,n}) = 2(n-1)$.*

Preuve. Il est facile de voir que $\beta_b(G_{2,2}) = 2$, Nous supossons, alors, que $n \geq 3$. Soit f un broadcast indépendant avec au moins trois sommets broadcasts. Les sommets x_1 et x_t de V^+, qui se trouvent aux coins de $G_{2,n}$, f-dominent $2f(x_1) + 1$ et $2f(x_t) + 1$ sommets, mais tous autres sommets broadcasts f-domine $4f(v)$ sommets. Par la définition d'une fonction de broadcast indépendant, chaque sommet de la grille $G_{2,n}$ est f-dominé au plus deux fois, à l'exception des sommets broadcasts qui sont f-dominés exactement une fois. Il s'en suit, $2f(x_1) + 1 + 4(f(V_{2,n}) - f(x_1) - f(x_t)) + 2f(x_t) + 1 \leq 3(2n - t) + t$. D'où, $4f(V_{2,n}) \leq 6n - 2t - 2 + 2(f(x_1) + f(x_t))$. Puisque $t = |V+| \geq 3$, la valeur de $f(x_1) + f(x_t)$ ne dépasse pas $n-1$. Donc, $4f(V_{2,n}) \leq 8n - 10 < 8(n-1)$, c'est à dire, $f(V_{2,n}) < 2(n-2)$. Par la Proposition 2.4.1, $\beta_b(G_{2,n}) \geq 2(n-1)$. Ainsi nous déduisons qu'un broadcast indépendant sur $G_{2,n}$, $n \geq 3$, est maximum si et seulement si $|V^+| = 2$ et les sommets d'un β_b-broadcast sont antipodaux. ■

Dans les démonstrations qui suivent, nous utilisons principalement des preuves par induction.

Théorème 3.2.3 *[6] Pour tout entier $n \geq 3$, $\beta_b(G_{3,n}) = 2n$.*

Preuve. De la Proposition 2.4.1 $[\beta_b(G) \geq \mu(G)(diam(G)-1) \geq 2(diam(G)-1)]$, il suffit de prouver l'inégalité $\beta_b(G_{3,n}) \leq 2(diam(G)-1) = 2n$ Nous procédons par induction sur n .Il est facile de voir que pour $n = 3$, $\beta_b(G_{3,3}) = 6$. Supposons que le résultat est vrai pour toutes les grilles $G_{3,k}$, $3 \leq k < n$. Soit f un broadcast indépendant sur $G_{3,k}$ avec $|V^+| \geq 3$ et soit $l = f(x_t)$. Puisque $|V^+| \geq 3$, nous avons nécessairement $0 < l < n$. Si $l = n-1$, alors les seuls sommets qui ne peuvent pas entendre x_t sont au nombre de deux et ont forcément un poids égal à 1. D'où, $f(V_{3,n}) = 2 + f(v_{3,n}) = n + 1 < 2n$.

Supposons maintenant que $l \leq n-2$. Nous considérons trois cas :

cas 1. $x_t = v_{3,n}$ et $x_{t-1} \notin C^n$.

Si $l = 1$, alors

$$f(V_{3,n}) \leq \beta_b(G_{3,n-1}) + f(x_t) \leq 2(n-1) + 1 = 2n - 1,$$

et si $2 \leq l \leq n-2$, alors

$$f(V_{3,n}) \leq \beta_b(G_{3,n-l+1}) + f(x_t) \leq 2(n-l+1) + l \leq 2n.$$

cas 2. $x_t = v_{3,n}$ et $x_{t-1} \in C^n$.

Parce que les deux sommets x_{t-1} et x_t appartiennent à la même colonne, nous devons avoir $x_{t-1} = v_{1,n}$, $f(x_{t-1}) = f(x_t) = 1$ et $f(v_{2,n-1}) \leq 1$ Pour la grille $G_{3,4}$, c'est simple de voir que $f(V_{3,4}) \leq 6$. Soit maintenant $n \geq 5$.

Si $\left|C_+^{1,n-2}\right| \geq 2$, alors

$$f(V_{3,n}) \leq \beta_b(G_{3,n-2}) + f(v_{2,n-1}) + f(v_{1,n}) + f(v_{3,n}) \leq 2(n-2) + 3 = 2n - 1$$

et si $\left|C_+^{1,n-2}\right| = 1$, alors

$$f(V_{3,n}) \leq (n-1) + f(v_{2,n-1}) + f(v_{1,n}) + f(v_{3,n}) < n+2.$$

cas 3. $x_t = v_{2,n}$

Si $l = n-2$, alors la somme des valeurs des sommets $v_{1,1}$, $v_{1,2}$, $v_{2,1}$, $v_{3,1}$, $v_{3,2}$ qui ne peuvent pas entendre le sommet broadcast $v_{2,n}$ est au plus 4, donc

$$f(V_{3,n}) \leq 4 + l = n+2.$$

Si $l \leq n-3$, alors $v_{2,n}$ f-domine $C_{n-l+1,n}$. Puisque $\left|C_+^{1,n-l}\right| \geq 2$, nous déduisons,

$$f(V_{3,n}) \leq \beta_b(G_{3,n-l}) + f(x_t) \leq 2(n-l) + l \leq 2n.$$

Donc dans tous les cas nous avons prouvé que $f(V_{3,n}) \leq 2n$. Il s'en suit $\beta_b(G_{3,n}) \leq 2n$. ■

Proposition 3.2.5 *[6] Les sommets d'un β_b-broadcast de $G_{3,n}$ sont antipodaux.*

Preuve. D'après la Remarque 3.2.1 le résultat est vrai pour chaque β_b-broadcast de $G_{3,n}$ tel que $\left|V_2^+\right| = 2$, et par le Théorème 3.2.3 nous savons aussi que le coût de chaque broadcast indépendant est au plus $2n$. Donc, nous devons seulement vérifier qu'avec plus que deux sommets broadcasts, aucun broadcast indépendant n'a un coût qui atteint la borne $2(n-1)$.

Soit f un broadcast indépendant sur $G_{3,n}$ tel que $|V^+| \geq 3$. De la preuve du Théorème 3.2.3 il suffit de voir que pour $f(v_{3,n)} = 2$ et $x_{t-1} \in C_+^{1,n-1}$, on a $f(V_{3,n}) < 2n$ prise. Nons considérons deux cas.

cas 1. $f\left(v_{1,n-1}\right)+f\left(v_{1,n-2}\right)+f\left(v_{2,n-2}\right)\leq 2$.

Pour les petites valeurs de n, nous pouvons voir facilement que $f(V_{3,3})\leq 4$,$f(V_{3,4})\leq 6$ et $f(V_{3,5})\leq 8$. Supposons maintenant que $n\geq 6$. De la Proposition 3.2.3 et le Théorème 3.2.3,

$$f(V_{3,n})=\sum_{v\in C_{+}^{1,n-3}} f\left(v\right)+(f\left(v_{1,n-1}\right)+f\left(v_{1,n-2}\right)+f\left(v_{2,n-2}\right)+f\left(v_{3,n}\right))\leq \beta_b\left(G_{3,n-3}\right)+2+2=2n-2$$

si $|C_{+}^{1,n-3}|\geq 2$, et

$$f(V_{3,n})=f(x_1)+(f(v_{1,n-1})+f(v_{1,n-2})+f(v_{2,n-2}))+f(v_{3,n})\leq n+4,$$

sinon.

cas 2. $f\left(v_{1,n-1}\right)+f\left(v_{1,n-2}\right)+f\left(v_{2,n-2}\right)=3$

Ce cas implique $n\geq 5$, $f(v_{1,n-2})=3$ et aucun élément de V^{+} ne se trouve sur C^{n-3}.

Pour $n=5$, $f(V_{3,5})=f(v_{3,1})+f(v_{1,3})+f(v_{3,5})\leq 3+3+2=8$.

Pour $n=6$, $f(V_{3,6})=(f(v_{2,1})+f(v_{3,1})+f(v_{3,2}))+f(v_{1,4})+f(v_{3,6})\leq 4+3+2=9$.

Pour $n\geq 7$ nous avons de la Proposition 3.2.3 et le Théorème 3.2.3.

$$f(V_{3,n})=\sum_{v\in C_{+}^{1,n-4}} f(v)+f(v_{1,n-2})+f(v_{3,n})\leq \beta_b(G_{3,n-4})+3+2=2n-3$$

si $|C_{+}^{1,n-4}|\geq 2$, et

$$f(V_{3,n})=f(x_1)+f(v_{1,n-2})+f(v_{3,n})\leq (n-2)+3+2=n+3,$$

sinon.

Donc, $f(V_{3,n})<2n$ pour tout entier $n\geq 3$.

■

Théorème 3.2.4 *[6] Pour tout entier $n \geq 4$, $\beta_b(G_{4,n}) = 2(n+1)$.*

Preuve. *De la Proposition 2.4.1 il suffit de prouver que $\beta_b(G_{4,n}) \leq 2(n+1)$. Nous utilisons encore l'induction sur n. Il est facilement de vérifier que $\beta_b(G_{4,4}) = 10$, $\beta_b(G_{4,5}) = 12$, $\beta_b(G_{4,6}) = 14$. Supposons que le résultat est vrai pour toutes les grilles $G_{4,k}$, $6 \leq k < n$ et soit f un broadcast indépendant sur $G_{4,n}$ satisfaisant $|V^+| \geq 3$. Soit $l = f(x_t)$ Il est clair que $l \leq n$ sinon $|V^+| \leq 2$. Nous distinguons quatre cas.*

cas 1. *$l \geq 4$.*

Le sommet broadcast x_t f-domine $C^{n-l+3,n}$ et $|C_+^{1,n-l+2}| \geq 2$, donc

$$f(V_{4,n}) = \sum_{v \in C_+^{1,n-l+2}} f(v) + f(x_t) \leq \beta_b(G_{4,n-l+2}) + f(x_t) \leq 2(n-l+3) + l \leq 2n+2$$

Nous observons ici que si x_t ne se trouve pas au coin de $G_{4,n}$ la borne $2(n+1)$ peut être améliorée parce que nous aurions

$$f(V_{4,n}) = \sum_{v \in C_+^{1,n-l+1}} f(v) + f(x_t) \leq \beta_b(G_{4,n-l+1}) + f(x_t) \leq 2(n-l+2) + l \leq 2n.$$

cas 2. *$l = 3$.*

Selon la position de x_t sur la dernière colonne de la grille $G_{m,n}$, seulement deux possibilités sont envisageables sans perte de généralité :(i) *$x_t = v_{3,n}$ et* (ii) *$x_t = v_{4,n}$.* ■

(i) Ce cas implique qu'il n'existe aucun sommet broadcast sur la colonne C^{n-1} Alors $|C_+^{1,n-2}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) = \sum_{v \in C_+^{1,n-2}} f(v) + f(v_{3,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-2}) + f(v_{3,n}) \leq 2(n-1) + 3 = 2n+1.$$

(ii) Ici, nous ne pouvons pas dire comme précédemment que $C_+^{n-1} = \emptyset$. Considerons en premier, le cas où $f(v_{1,n-1}) \neq 0$.

Nous avons soit $f(v_{1,n-1}) = 3$, auquel cas $v_{1,n-1}$ f-domine $C^{(n-2)}$, soit $f(v_{1,n-2}) + f(v_{2,n-2}) + f(v_{1,n-1}) \leq 2$ D'où,

$$f(V_{4,n}) = \sum_{v \in C_+^{1,n-3}} f(v) + (f(v_{1,n-2}) + f(v_{2,n-2}) + f(v_{1,n-1})) + f(v_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-3}) + 3 + 3 \leq 2n+2$$

si $\left|C_+^{1,n-3}\right| \geq 2$,et

$$f(V_{4,n}) = f(x_1) + (f(v_{1,n-2}) + f(v_{2,n-2}) + f(v_{1,n-1})) + f(v_{4,n}) \leq (n-1) + 3 + 3 = n + 5,$$

sinon.

Pour le cas restant, c'est à dire $f(v_{1,n-1}) = 0$. nous procéderons comme dans (i).

cas 3. $l = 2$.

Sans perte de généralité, nous pouvons examiner que trois possibilités pour la position de x_t :*(i)* $x_t = v_{3,n}$ ou $x_t = v_{4,n}$ et $C(x_{t-1}) < n$, et *(ii)* $x_t = v_{4,n}$ et $C(x_{t-1}) = n$.

(i) Puisqu'il existe un seul sommet broadcast $v_{4,n}$ dans la colonne C^n et $|C_+^{1,n-1}| \geq 2$,

$$f(V_{4,n}) = \sum_{v \in C_+^{1,n-1}} f(v) + f(v_{3,n}) + f(v_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-1}) + 2 \leq 2n + 2$$

(ii) Le fait que $C_+^n = \{v_{1,n}, v_{4,n}\}$, nous obtenons inévitablement $f(v_{1,n-1}) = 0$ et $f(v_{1,n}) + f(v_{2,n-1}) \leq 2$. Par conséquent,

$$f(V_{4,n}) = \sum_{v \in C_+^{1,n-2}} f(v) + f(v_{1,n}) + f(v_{2,n-1}) + f(v_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-2}) + 2 + 2 \leq 2(n-1) + 4 = 2n+2$$

si $|C_+^{1,n-2}| \geq 2$, et $f(V_{4,n}) = f(x_1) + f(v_{2,n-1}) + f(v_{1,n}) + f(v_{4,n}) \leq (n-1) + 2 + 2 = n + 3$,

sinon.

cas 4. $l = 1$.

La somme des valeurs des sommets broadcast appartenant à C^n varie entre 1 et 4. Commençons avec le cas où la somme est au plus égale à 2. Nous avons

$$f(V_{4,n}) = \sum_{v \in C_+^{1,n-1}} f(v) + \sum_{v \in C_+^n} f(v) \leq \beta_b(G_{4,n-1}) + 2 \leq 2n + 2$$

$|C_+^{1,n-1}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) = f(x_1) + \sum_{v \in C_+^n} f(v) \leq (n+1) + 2 = n + 3,$$

sinon.

Maintenant, si $\sum_{v \in C_+^n} f(v) \geq 3$, alors $f(v_{1,n}) = 2$, et nous revonons au *cas 3(ii)* pour conclure. D'où, dans les deux cas, nous avons prouvé que $f(V_{4,n}) \leq 2(n+1)$. Par conséquent, $\beta_b(G_{4,n}) \leq 2(n+1)$.

Proposition 3.2.6 *[6] Les sommets broadcasts d'un β_b-broadcast de $G_{4,n}$ sont antipodaux.*

Preuve. Pour $n \leq 10$ un examen complet de toutes les possibilités de répartir les parts de la partition du nombre entier $2(n+1)$ sur les $4n$ sommets de la grille $G_{4,n}$, en tenant compte des conditions d'un broadcast indépendant, mène à deux choix seulement qui sont des sommets antipodaux. Supossons alors $n \geq 11$ Par la même idée de la proposition 3.2.5 nous avons besoin de vérifier le résultat que lorsqu'on a plus que deux sommets broadcasts. Soit f un broadcast indépendant sur $G_{4,n}$ tel que $|V^+| \geq 3$ et soit $l = f(x_t)$, $0 < l \leq n$ De la preuve du Théoème 3.2.4 il suffit de considérer les cinq cas suivants :

cas 1.x_{t-1} , $x_t \in C^n$ et $f(x_{t-1}) = f(x_t) = 1$.

Nous considérons deux sous cas :

Cas 1.1. $x_{t-1} = v_{1,n}$ et $x_t = v_{4,n}$.

C^{n-1} contient au plus un sommet broadcast dont la valeur ne dépasse pas 1. Donc,

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-2}) + 1 + f(x_{t-1}) + f(x_t) = 2n + 1$$

si $|C_+^{1,n-2}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) = f(x_1) + 1 + f(x_{t-1}) + f(x_t) \leq (n-2) + 3 = n + 1,$$

sinon.

Cas 1.2. $(x_{t-1}, x_t) \in \{(v_{1,n}, v_{3,n}), (v_{2,n}, v_{4,n})\}$.

Soit i le plus petit entier qui satisfait $|C_+^i| = ... = |C_+^n| = 2$. Le cas *i=1* implique immédiatement que $f(V_{4,n}) = 2n$. Supposons que $i \geq 2$ Puisque la colonne est réduite à un élément $x_{t-2(n-i+1)}$ tel que $f(x_{t-2(n-i+1)}) \leq 1$ nous déduisons :

Pour $i = 2$, $f(V_{4,n}) = f(x_1) + 2(n-1) \leq 1 + 2(n-1) = 2n - 1$.

Pour $i = 3$, $f(V_{4,n}) = \sum_{v \in C_+^{1,2}} f(v) + 2(n-2) \leq 3 + 2(n-2) = 2n - 1$.

Pour $i = 4$, $f(V_{4,n}) = \sum_{v \in C_+^{1,3}} f(v) + 2(n-3) \leq 5 + 2(n-3) = 2n - 1$.

Pour $i = 5$, $f(V_{4,n}) = \sum_{v \in C_+^{1,4}} f(v) + 2(n-4) \leq 7 + 2(n-4) = 2n - 1$.

Pour $i \geq 6$,

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,i-2}) + 1 + 2(n-i+1) = 2n + 1.$$

si $|C_+^{1,i-2}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) \leq f(x_1) + 1 + 2(n-i+1) \leq (i-1) + 1 + 2(n-i+1) = 2n - i + 2 \leq 2n - 4,$$

sinon.

Cas 2. $f(v_{3,n}) = 2$ ou $f(v_{4,n}) = 2$ et $C(x_{t-1}) < n$.

Nous étudions chaque cas séparément.

Cas 2.1. $f(v_{3,n}) = 2$.

Soit i le plus petit entier tel que $f(x_{t-(n-i)}) = ... = f(x_t) = 2$. Il est facile de voir que $i \geq n-3$.

si $i = n-3$, alors $f(v_{3,n}) = f(v_{1,n-1}) = f(v_{4,n-2}) = f(v_{2,n-3}) = 2C_+^{n-4} = \emptyset$. D'où

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-5}) + 2(4) = 2n$$

si $|C_+^{1,n-5}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) \leq (n-3) + 2(4) = n + 5,$$

sinon.

Maintenant, si $i \geq n-2$ alors $f(x_{t-(n-i+1)}) \leq 1$. Nous déduisons que

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,i-2}) + 1 + 2(n-i+1) = 2n + 1$$

si $|C_+^{1,i-2}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) \leq i + 1 + 2(n-i+1) = 2n - i + 3 \leq n + 5,$$

sinon.

Cas 2.2. $f(v_{4,n}) = 2$ et $C(x_{t-1}) < n$.

Si $f(v_{1,n-1}) + f(v_{2,n-1}) \leq 1$, alors

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-2}) + 1 + 2 = 2n + 1$$

si $|C_+^{1,n-2}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) \leq (n-1) + 1 + 2 = n + 2,$$

sinon.

Si $f(v_{1,n-1}) + f(v_{2,n-1}) \geq 2$, alors soit $f(v_{1,n-1}) = 2$, auquel cas, on revient au sous *cas 2.1.*, aver $i \geq n-2$, ou $f(v_{1,n-1}) = 3$ (ou $f(v_{2,n-1}) = 2$), qui implique $C_+^{m-2} = \emptyset$ par conséquent

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-3}) + 3 + 2 = 2n + 1$$

si $|C_+^{1,n-3}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) \leq (n-1) + 3 + 2 = n + 4,$$

sinon.

Cas 3. $f(v_{4,n}) = 2$, $C(x_{t-1}) = n$ et $f(v_{1,n}) + f(v_{2,n-1}) = 2$.

Nous considérons deux sous cas :

Cas 3.1. $f(v_{1,n}) = 2$.

Les sommets broadcasts $v_{1,n}$ et $v_{4,n}$ f-dominent la colonne C_+^{n-1}. Nous avons soit $f(v_{2,n-2}) + f(v_{3,n-2}) \leq 1$, auquel cas

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-3}) + 1 + 4 = 2n + 1$$

si $|C_+^{1,n-3}| \geq 2$,et

$$f(V_{4,n}) \leq (n-1) + 1 + 4 = n + 4,$$

sinon, ou $f(v_{2,n-2}) = 2$ (ou $f(v_{3,n-2}) = 2$) et nous pouvons continuer de la même manière que le sous *cas 2,1.*, avec $i \geq n-5$ pour conclure.

Cas 3.2. $f(v_{2,n-1}) = f(v_{1,n}) = 1$.

Nous avons soit $f(v_{1,n-2}) + f(v_{3,n-2}) \leq 1$, cas auquel

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-3}) + 1 + 4 = 2n + 1$$

si $|C_+^{1,n-3}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) \leq (n-1) + 1 + 4 = n + 4,$$

sinon, ou $f(v_{1,n-2}) + f(v_{3,n-2}) = 1$ et donc nous pouvons continuer comme le sous *cas 1.2.* pour conclure.

cas 4. $f(v_{4,n}) = 3$ et $f(v_{1,n-1}) = 3$.

Sauf le sommet $v_{3,n-3}$ où sa valeur est au plus trois, les sommets broadcasts $v_{4,n}$ et $v_{1,n-1}$ f-dominent tous les sommets de $C^{n-3,n-2}$.

Si $f(v_{3,n-3}) \leq 1$, alors

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-4}) + 1 + 6 = 2n + 1$$

si $|C_+^{1,n-4}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) \leq (n-1) + 7 = n + 6,$$

sinon.

Si $f(v_{3,n-3}) \geq 2$, alors $C^{n-4} = \emptyset$ et

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-4}) + 3 + 6 = 2n + 1$$

si $|C_+^{1,n-5}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) \leq (n-1) + 3 + 6 = n + 6,$$

sinon.

cas 5. $f(v_{4,n}) = 4$.

La valeur du sommet $v_{1,n-2}$ est au plus 4, et le sommet broadcast $v_{4,n}$ f-domine tous les sommets de $C^{n-1,n}$. Si $f(v_{1,n-2}) \leq 1$, alors

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-3}) + 1 + 4 = 2n + 1$$

si $|C_+^{1,n-3}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) \leq (n-1) + 1 + 4 = n + 6,$$

sinon.

Si $2 \leq f(v_{1,n-2}) \leq 3$, alors $C^{n-3} = \emptyset$ et par conséquent,

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-4}) + 3 + 4 = 2n + 1$$

si $|C_+^{1,n-4}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) \leq (n-2) + 5 = n + 3,$$

sinon

Si $f(v_{1,n-2}) = 4$, alors $C_+^{n-4,n-3} = \emptyset$ et donc,

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(G_{4,n-5}) + 4 + 4 = 2n$$

Si $|C_+^{1,n-5}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) \leq (n-2) + 4 + 4 = n + 6,$$

sinon.

Ainsi, dans tous les cas, nous avons prouvé que $f(V_{4,n}) \leq 2n+1$. Comme $\beta_b(G_{4,n}) = 2(n+1)$, nous pouvons dire que β_b-broadcast a exactement deux sommets broadcasts qui sont nécessairement antipodaux. ■

Avec au moins trois sommets broadcasts, nous savons maintenant que chaque broadcast indépendant a un coût au plus $2n+1$ Pour $n=7$ et $f(V_{4,n}) = 2\times 7+1 = 15$, nous avons soit $|V^+| = 2$ et les deux sommets broadcasts sont antipodaux, ou $V^+ = \{x_1, x_2, x_3\}$, où $f(x_i) = 5$ pour $x_i \in \{v_{1,4}, v_{4,1}, v_{4,7}\}$ (ou $x_i \in \{v_{4,4}, v_{1,1}, v_{1,7}\}$) et $f(x_i) = 0$ sinon.

Proposition 3.2.7 *[6] Soit $n \neq 7$. les sommets broadcasts d'un broadcast indépendant sur $G_{4,n}$ de coût $2n+1$ sontt antipodaux.*

PREUVE :

Soit n un entier, $n \geq 4$ Pour $n = 4, 5, 6$ nous pouvons vérifier que le résultat est vrai par une investigation de toutes les posibilités. Soit f un broadcast indépendant sur $G_{4,n}$, $n \geq 8$ Nous prouvons le résultat avec $|V^+| \geq 3$, en particulier nous montrerons qu'avec trois sommets broadcasts, f a un coût au plus égal à $2n$. Supposons le contraire, c'est à dire $f(V_{4,n}) = 2n+1$. Des preuves du Théorème 3.2.4 et de la Proposition 3.2.6 nous ferons l'étude que pour les cas suivants.

Soit $l = f(x_t)$, $0 < l \leq n$.

Cas 1. $x_{t-1}, x_t \in C^n$ et $f(x_{t-1}) = f(x_t) = 1$.

Soit i le plus petit nombre entier, $i \geq 6$ qui satisfait $\left|C^i_+\right| = ... \left|C^n_+\right| = 2, \left|C^{1,i-2}_+\right| \geq 2$ et $f(x_{t-2(n-i+1)}) = 1$. Comme $f_{/H^{1,i-2}}$ est un β_b-broadcast sur $H^{1,i-2}$, et de la Proposition 3.2.6 on obtient $(f(v_{1,1}),\ f(v_{4,i-2}))$ (ou $(f(v_{4,1}), f(v_{1,i-2}))) = (i-1, i-1)$, qui implique $i-1 \leq 2$ une contradiction.

Cas2. $f(v_{3,n.}) = 2$ ou $f(v_{4,n}) = 2$ et $C(x_{t-1}) < n$.

Si $f(v_{3,n}) = 2$. $f(x_{t-(n-i+1)}) = 1$, $i \geq n-2$ et $\left|C_+^{1,i-2}\right| \geq 2$, où i est le plus petit nombre entier tel que $f(x_{t-(n-1)}) = ... = f(x_t) = 2$, alors $f_{/H^{1,i-2}}$ est un β_b-broadcast sur $H^{1,i-2}$ et $(f(v_{1,1}), f(v_{4,i-2}))$ (ou$(f(v_{4,1}), f(v_{1,i-2}))) = (i-1, i-1)$, qui implique $i-1 \leq 2$,une contradiction.

Si $f(v_{4,n}) = 2, f(v_{1,n-1}) = 1$ (resp. 3) et $\left|C_+^{1,n-2}\right|$ (resp. $\left|C_+^{1,n-3}\right|$) ≥ 2, nous continuons comme précédemment en remplaçant i par n (resp. $n-1$)

Cas 3. $f(v_{4,n}) = 2$, $C(x_{t-1}) = n$ et $f(v_{1,n}) + f(v_{2,n-1}) = 2$.

$f(v_{1,n}) = 2$, $f(v_{2,n-2}) + f(v_{3,n-2}) = 1$ (resp. $f(v_{1,n}) = f(v_{2,n-1}) = 1$), $f(v_{1,n-2}) + f(v_{3,n-2}) = 1$ et $\left|C_+^{1,n-3}\right| \geq 2$ mènent à $f_{/H^{1,n-3}}$ est un β_b-broadcast sur $H^{1,n-3}$ et $(f(v_{1.1}) + f(v_{4,n-3}))$ (resp. $(f(v_{4,1}) + f(v_{1,n-3}))) = (n-2, n-2)$, impliquant $n-2 \leq 2$ une contradiction.

Cas 4. $f(v_{3.n}) = 3$ et $f(v_{1,n-2}) = 3$, ou $f(v_{4,n}) = 3$ et $f(v_{1,n-1}) = 3$.

Si $f(v_{3,n}) = 3$ et $f(v_{1,n-2}) = 3$, alors $f_{/H^{1,n-3}}$ est un β_b-broadcast sur $H^{1,n-3}$ et $(f(v_{1.1}) + f(v_{4,n-3}))$ (ou $(f(v_{4,1}) + f(v_{1,n-3})))(n-2, n-2)$, impliquant $n-2 \leq 3$ une contradiction.

Si $f(v_{4,n}) = 3$ et $f(V_{1,n-1}) = 3$, alors deux possibilités peuvent se produire :

(i) $f(v_{3,n-3}) = 1$ et $\left|C_+^{1,n-4}\right| \geq 2$, ou *(ii)* $f(v_{3,n-3}) \geq 2$ et $\left|C_+^{1,n-5}\right| \geq 2$.

(i) La fonction $f_{/H^{1,n-4}}$ est un β_b-broadcast sur $H^{1,n-4}$ et $(f(v_{1.1}) + f(v_{4,n-4}))$ (ou$(f(v_{4,1}) + f(v_{1,n-4}))) = (n-3, n-3)$, impliquant $n-3 \leq 2$ une contradiction.

(ii) La fonction $f_{/H^{1,n-5}}$ est un β_b-broadcast sur $H^{1,n-5}$ et $(f(v_{1.1}) + f(v_{4,n-5}))$ (ou$(f(v_{4,1}) + f(V_{1,n-5}))) = (n-4, n-4)$, impliquant $n-4 \leq 3$ encore une contradiction.

Cas 5. $f(v_{4,n}) = 4$ ou $f(v_{4,n}) = 5$.

Si $f(v_{4,n}) = 4$, $f(v_{1,n-2}) = 1$ et $\left|C_+^{1,n-3}\right| \geq 2$ (resp. $f(v_{4,n}) = 5$), alors $f_{/H^{1,n-3}}$ est un β_b-broadcast sur $H^{1,n-3}$ et $(f(V_{1.1}) + f(v_{4,n-3}))$ (ou$(f(v_{4,1}) + f(v_{1,n-3}))) = (n-2, n-2)$, impliquant $n-2 \leq 2$ (resp. 5), une contradiction.

Si $f(v_{4,n}) = 4$, $f(v_{1,n-2}) = 3$ et $\left|C_+^{1,n-4}\right| \geq 2$, alors $f_{/H^{1,n-4}}$ est un β_b-broadcast sur $H^{1,n-4}$ et $(f(V_{1.1}) + f(v_{4,n-4}))$ $(\text{ou}(f(v_{4,1}) + f(v_{1,n-4}))) = (n-3, n-3)$,impliquant $n - 3 \leq 3$, une contradiction.

D'où il n'existe pas de broadcast indépendant avec trois sommets broadcasts et de coût égal à $2n + 1$. Par conséquent, $|V^+| = 2$ et les sommets broadcasts sont nécessairement antipodaux.

Conclusion

Ce travail, dédie au problème de la recherche de la valeur exacte du nombre broadcast indépendance β_b dans les graphes, nous a permis de prendre conscience de la multitude de difficultés rencontrés dans le domaine et nous a permis d'enrichir nos connaissances dans la théorie des graphes.

Le travail qui a été réalisé dans ce mémoire concerne l'´etude de broadcast indépendance β_b du produit cartésien $P_m \Box P_n$ de deux chaînes. Nous avons montré que $\beta_b(P_m \Box P_n) = 2(m + n - 3)$ pour $m = \{2, 3, 4\}$.

En conclusion, il serait intéressant de traiter les questions suivantes qui peuvent être considérées comme une suite de notre travail :

1- Détermination de β_b pour le graphe produit fort de deux cycles, et d'un cycle par une chaîne.

2- Détermination de β_b pour les trois produits (cartésien, tensoriel et fort) de deux graphes quelconques, respectivement.

3- Détermination soit des valeurs exactes soit des bornes pour β_b au d'autres classes de graphes.

Bibliographie

[1] W.W. Ball Rouse, *Mathematical recreation and problems of past and present times*, MacMillan, London, 1892.

[2] D.W. Bange, A.E. Barkauskas and P.J. Slater, *Efficient dominating sets in graphs.* R. D. Ringeisen and F.S. Roberts, editors, Applications of Discrete Math. SIAM, Philadelphia, PA (1988) 189–199.

[3] C. Berge, *Theory of Graphs and its Applications*, Collection Universitaire de Mathématiques, vol. 2, Dunod, Paris, 1958.

[4] C. Berge, Graphes et Hypergraphes, Paris Dunod, 1970.

[5] C. Berge,*Graphs and Hypergraphs. North Holland, Amsterdam,* 1973.

[6] I.Bouchemakh et M.Zemir, *On the broadcast independaent number in the grid graphs*, Graphs and Combinatorics, DOI 10. 1007/s00373-012-1253-0, 2012.

[7] B. Bresar and S. Spacapan, *Broadcast domination of products of graphs*, University of Maribor, Slovenia. March 12, 2006.

[8] E. Cockayne and S.T. Hedetniemi, *Towards a theory of domation in graphs.* Networks 7 (1977) 247–261.

[9] J. E. Dunbar, D. J. Erwin, T. W. Haynes, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, *Broadcasts in graphs*, Discrete Applied Mathematics, 154 :59-75, 2006.

[10] D. J. Erwin, *Cost Domination in Graphs*, Ph.D. Dissertation, Western Michigan University, 2001.

[11] D. J. Erwin, *Dominating broadcast in graphs*, Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications, 42 :89-105, 2004.

[12] G.H. Fricke, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, A. McRae, C.K. Wallis, M.S. Jacobson, H.W. Martin and W.D. Weakley, *Combinatorial problems on chessboards, A briev survey, in Graph Theory, Combinatorics and Applications : Proc. Seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and Applications of Graphs*. vol.1, Y. Alavi and A. Schwenk, Eds., Wiley, (1995) 507–528.

[13] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and M. A. Henning, *Topics in Domination in Graphs.* Developments in Mathematics 64 (2020).

[14] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and M. A. Henning, *Structures of Domination in Graphs.* Developments in Mathematics 66 (2021).

[15] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and M. A. Henning, *Domination in Graphs : Core Concepts*. Springer Monographs in Mathematics 2023.

[16] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, and P.J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*. Marcel Dekker, New York, 1998.

[17] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, and P.J. Slater, *Domination in Graphs : Advanced Topics.* Marcel Dekker, New York, 1998.

[18] S.T. Hedetniemi and R.C. Laskar, *Introduction*. Discrete Mathematics 86 (1990) 3–9.

[19] S. Herke, *Dominating broadcasts in graphs*, Master's dissertation, University of Victoria, 2009.

[20] S. Herke, C.M. Mynhardt, Radial trees, Discrete Math. 309 :5950-5962, 2009.

[21] C.F. de Jaenisch, *Applications de l'analyse mathématique au jeu des echecs*. Petrograde 1862.

[22] O. Ore, *Theory of graphs*. Amer. Math soc. Colloq. Publ, 38 (Amer. Math. Soc., Providence, RI), 1962.

[23] R. Sahbi, *Nombre de broadcast domination dans les arbres*. Mémoire de magister, USTHB. 2009.

[24] A.M. Yaglom and A.M. Yaglom, *Challenging mathematical problems with elementary solution*, In volume 1, *Combinatorial analyse and probability theory*, San Fransisco, 1964, Holden-Day.

[25] C. Yen and R.C.T. Lee, *The weighted perfect domination problem*. Inform. Process. Lett. 35 (1990) 295-299.