**République Algérienne Démocratique et Populaire**

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Médéa

Faculté des Sciences



*Mémoire*

Présenté pour obtenir le diplôme de Master

*En : Physique*

Spécialité : Physique Théorique

*Par :* ROUBEHIE Saadia

---

# Excitations élémentaires en régime de l'effet Hall quantique fractionnaire à $\upsilon = 1/3$

---

*Soutenue publiquement, le* 10/09/2020, *devant le jury composé de :*

| | | | |
|---|---|---|---|
| *O. HOUHOU* | MCB | *Univ.Médea* | Président |
| *O. CHERROUD* | MCB | *Univ.Médéa* | Examinateurs 1 |
| *H.MAKHTICHE* | MCB | *Univ.Médéa* | Examinateurs 2 |
| *M. AHMED AMMAR* | MCB | *Univ.Médéa* | Encadreur |

# Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Ce travail a été effectué à l'université Dr Yahia Farès de Médéa, donc en seconde lieu nos remerciements vont à cette université pour son accueil chaleureux et les conditions de travail idéales dont nous avons pu bénéficier.

Je tiens à remercier mon encadreur Monsieur *M. AHMED AMMAR*, son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail.

Mon vif remerciements vont aussi également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon recherche en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Je souhaite vivement à remercier tous les membres du jury, monsieur le Dr *O. HOUHOU* pour avoir présidé notre jury de mémoire, monsieurs les docteurs *O. CHERROUD et H. MEKHTICHE* pour avoir accepté d'examiner mon manuscrit.

Je tiens aussi à remercier ma famille et mes amis qui par leurs prières et leurs encouragements, on a pu surmonter tous les obstacles. tous mes enseignants durant les années des études.

Enfin, mes remerciements s'étendent également à toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

# Dédicace

*Je dédie ce modeste travail :*

𝔄 *ma chère mère et à mon cher père rahimahom Allah.*

𝔄 *ma mère qui je souhaitais assister le jour de la discussion de mon mémoire.*

𝔄 *mes chers frères et à leurs enfants.*

𝔄 *mes chères sœurs.*

𝔄 *tous les membres de ma famille, petits et grands.*

𝔄 *mes très chères amies.*

𝔄*ux membres de promotion.*

ROUBEHIE Saadia

# Table des matières

**Introduction générale** **1**

**1 Explication de l'effet Hall quantique** **3**

1.1 Introduction . . . . . 3

1.2 L'effet Hall classique . . . . . 3

1.3 Effet Hall quantique entier . . . . . 6

1.4 Effet Hall quantique fractionnaire . . . . . 8

1.5 Conclusion . . . . . 9

**2 Fonction d'onde de Laughlin dans la géométrie du disque** **10**

2.1 Introduction . . . . . 10

2.2 Mouvement cyclotron . . . . . 11

2.2.1 Èlectron dans un champ magnétique . . . . . 11

2.2.2 Èlectron dans un champ magnétique et électrique . . . . . 12

2.3 Niveaux de Landau . . . . . 14

2.4 Invariance de Jauge . . . . . 16

2.5 Dégénérescence d'un NL . . . . . 19

2.6 Fonction d'onde $\Phi_{PBNL}(z)$ . . . . . 20

2.7 Conclusion . . . . . 23

**3 Effet Hall qauntique fractionnaire** **24**

3.1 Introduction . . . . . 24

3.2 Rôle d'interaction Coulombienne . . . . . 24

3.3 Fonction d'onde de Laughlin . . . . . 25
3.4 Fonction d'onde de Jain . . . . . 27
3.5 Excitation de l'état 1/3 de Laughlin . . . . . 29
3.6 Excitation de l'état 1/3 de Jain . . . . . 31
3.7 Conclusion : . . . . . 32

**4 Excitations de charges fractionnaires 33**
4.1 Introduction . . . . . 33
4.2 Excitations de l'état de Laughlin et de Jain . . . . . 33
4.3 Excitation d'une charge fractionnaire . . . . . 34
4.3.1 Quasiparticule de Laughlin . . . . . 34
4.3.2 Quasiparticule de Jain . . . . . 35
4.4 Conclusion . . . . . 36

**5 Application sur les excitations de charge fractionnaire 38**
5.1 Introduction . . . . . 38
5.2 Interaction e-e ($1^{er}$ état excité) . . . . . 38
5.3 Etat fondamental à $\upsilon = 1/3$ . . . . . 41
5.4 Etat excité à $\upsilon = 1/3$ . . . . . 41
5.5 Conclusion . . . . . 42

**Conclusion générale 43**

**Appendices 44**

**A interaction électron-électron 45**

**Nomenclature 48**

**Bibliographie 50**

# Table des figures


1.1 Effet Hall classique. . . . . 4
1.2 Résistance de Hall $R_H$ en fonction de l'intensite du champ magnétique B . 6
1.3 La variation de la résistance longitudinl $R_{xx}$ et de Hall $R_H$ en fonction du champ magnetique B. . . . . 7
1.4 Méure de l'EHQF. . . . . 9

2.1 Mouvement d'un electron de la position $\overrightarrow{r}$ autour du centre de guidage $\overrightarrow{R}$. 12
2.2 Mouvement de translation uniforme d'un orbite cyclotron. . . . . 13
2.3 Niveaux de Landau "n" représente les niveaux, et "m" est associé à la dégénérescence de chaque niveau. . . . . 15

3.1 Particule de charge fractionnaire e/3. . . . . 25
3.2 Schéma d'un état fondamental. (a) pour EHQE du $v$=n, (b) pour EHQF à $v$=n/2n+1. . . . . 27
3.3 Représentation du vortex. . . . . 29
3.4 Les excitations dans un seul NL sont interdites par le principe de Pauli. . . 29
3.5 Modèle d'électrons restreints à un seul NL. . . . . 29
3.6 Création d'un quasitrou de Laughlin à $v$=1/3[19]. . . . . 30
3.7 Schéma représentant le mécanisme de création un état de type quasitrou-quasiparticule. . . . . 31

4.1 Les nouveaux états se produisent en raison des quasiparticles de l'EHQF. . 34
4.2 Création d'une quasiparticule de (FC) à $v$=1/3. (a) état fondamental, (b) premier état excité. . . . . 36

5.1 Comparaison de la différence d'énergie, entre la fonction d'onde d'une seule quasiparticle de Laughlin et de Jain obtenues par un calcul analytique exacte (disque en noir) et la méthode de MC (cercle en rouge)[21]. . . . . 42

# Liste des tableaux

5.1 Énergies de l'état fondamental, en unités de $\frac{e_0^2}{l_0}$. . . . . 41
5.2 Énergies du premier état excité, en unités de $\frac{e_0^2}{l_0}$. . . . . 42

# Introduction générale

Dans la physique de la matière condensée, les objets classiques de l'étude sont des solides et des liquides. L'arrivée de la physique de quantique au $20^{ème}$ siècle a dirigé notre attention à des états condensés plus exotiques, tels que des superfluids, superconducteurs, et le condensats de Bose-Einstein. Depuis sa découverte en 1982 par Tsui, Stormer et Gossard [1], l'effet Hall quantique fractionnaire a tiré l'intérêt des physiciens, notamment en raison des propriétés extrêmes de corrélation émergeant dans le système. Cet effet a été observé dans divers systèmes bidimensionnels. Au départ, il s'agissait surtout de gaz d'électrons dans des hétérostructures ou puits quantiques à base de GaAs.

Dans ce travail, nous décrirons les propriétés de l'état fondamental de Laughlin à $\upsilon = 1/3$. Ensuite, nous allons nous intéresser aux excitations de type quasiparticules que l'on peut construire à partir de cet état. Ces excitations sont obtenues lorsque le facteur de remplissage est légèrement inférieur à celui de l'état fondamental.

La physique des solides offre un terrain vaste pour la découverte non pas des particules élémentaires, mais des quasiparticules aux propriétés exotiques. En effet, la plupart des propriétés de la matière proviennent des électrons, qui sont des fermions. Au cours de ce mémoire, j'ai cherché à comprendre ce que permettait d'obtenir l'énergie d'interaction d'une quasiparticule présente par les deux théories les plus remarquables de l'effet Hall quantique fractionnaire, à savoir celles de Laughlin et de Jain les plus utilisées par les physiciens.

Ce manuscrit de mémoire est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, on donne les différentes explications de l'effet Hall quantique. Le deuxième chapitre porte sur la fonction d'onde de Laughlin dans la géométrie du disque. Au troisième chapitre, les connaissances de la physique de l'effet Hall quan-

tique fractionnaire nécessaires à la compréhension de ce phénomène sont présentées. Le quatrième chapitre est consacré aux excitations de charges fractionnaires pour les théories de Laughlin et celle de Jain. Finalement, dans le cinquième chapitre on présente une application sur les excitations de charges fractionnaires.

# Chapitre 1

# Explication de l'effet Hall quantique

## 1.1 Introduction

Dans cette partie, nous donnerons une explication simple de l'effet Hall. La physique des effets Hall s'agit trois phénomènes appelés effet Hall classique, quantique entier et fractionnaire qui se produisent lorsqu'un gaz d'électrons est soumis à un champ magnétique. L'effet Hall classique se produit lorsqu'un semi-conducteur est soumis à un champ magnétique perpendiculaire acquiert une résistance transverse proportionnelle au champ magnétique. Par contre, les effets Hall quantiques ne se produisent que lorsque le gaz d'électrons est confiné à deux dimensions. Alors, à basse température et au champ magnétique très intense, la résistance transverse présente des plateaux sur lesquels elle est quantifiée tandis que la résistance longitudinale s'annule. Sur ces plateaux, le rapport entre la conductance transverse et le quantum de conductance peut être un entier ou une fraction.

## 1.2 L'effet Hall classique

L'effet Hall classique a été découvert en 1879 par Edwin Herbert Hall. Il montre expérimentalement qu'un courant traverse un barreau en materiau et qu'un champ magnétique d'induction $\overrightarrow{B}$ est appliqué perpendiculairement au sens de passage du courant, une tension appelée tension Hall proportionnelle au champ magnétique et au courant apparait

sur les faces latérales du barreau (voir figure 1.1) [2].

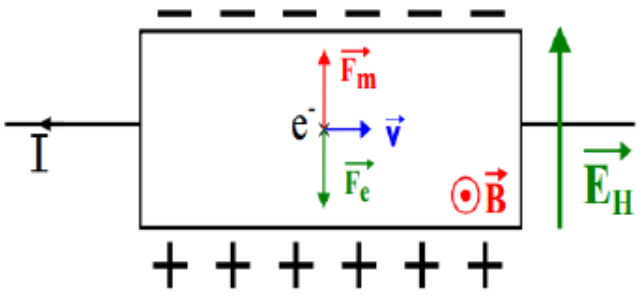



FIG. 1.1 – Effet Hall classique.

Un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ agit sur une charge $q$ en mouvement. Le courant $I$ qui traverse un semi-conducteur est produit par des charges qui se déplacement avec une vitesse $\overrightarrow{v}$, la force de Lorentz $\overrightarrow{F}_m$ qui s'exerce sur chaque électron s'écrit [3]

$$\vec{F_m} = q(\vec{\upsilon}\Lambda\vec{B}), \tag{1.1}$$

avec $q = -e$ est la charge de l'électron

Il en découle un déplacement d'électrons et une concentration de charge négative sur un couté du matériau ainsi qu'un déficit de charge négative sur la coté opposée.

Cette distribution de charge donne naissance d'un champ électrique $E_H$, ce champ électrique responsable d'une force électrique $F_e$ :

$$\vec{F_e} = q\vec{E}_{H,} \tag{1.2}$$

L'équilibre est attient lorsque la somme des deux force est nulle, c'est-à-dire quand

$$\vec{E_H} = \vec{\upsilon}\Lambda\vec{B}, \tag{1.3}$$

Où

$$E_H = \upsilon B \,\mathrm{Si}\, n(\frac{\pi}{2}), \tag{1.4}$$

Alors

$$E_H = \upsilon B. \tag{1.5}$$

Les électrons sont alors dévies de leur trajectoire initiale, perpendiculairement au champ et à la direction de propagation du courant. Une différence de concentration de charge s'établit entre les bords opposés perpendiculairement au courant [4].

$$E_H = R_H J_x, \tag{1.6}$$

et

$$E_H = \frac{J_x}{ne.q}.B, \tag{1.7}$$

alors

$$E_H = R_H J_x. \tag{1.8}$$

donc

$$R_H = \frac{E_H}{J_x} = \frac{B}{n_e q}. \tag{1.9}$$

$J_x$ la densité de courant électrique.

La résistance longitudinal $R_x$ et de Hall $R_H$ sont définies par

$$R_x = \frac{U_x}{I_x} \tag{1.10}$$

et

$$R_H = \frac{U_H}{I_x} \tag{1.11}$$

tel que $L$ et $W$ sont la longueur et la largeur de la plaque respectivement. La densité de courant $J$ est uniforme et selon la long de l'échantillon $(L)$, le champ électrique $E_H$ est uniforme suivant la largeur $W$

L' approximation suivante est vérifie pour un échantillon, où $L \ggg W$ [6].

$$E_H = \frac{U_H}{W}. \tag{1.12}$$

La figure 1.2 représente la variation de la résistance de Hall $R_H$ en fonction de l'intensité du champ magnétique $B$. Pour un système à deux dimentions, on a une relation de proportionnalité entre la résistivité de Hall $\rho_H$ et la résistance de Hall $R_H$ ($\rho_H$ $\alpha$ $R_H$ ) avec l'intensité du champ magnétique [7]. Cette figure montre que la résistance de Hall varie linéairement avec le champ magnétique B.

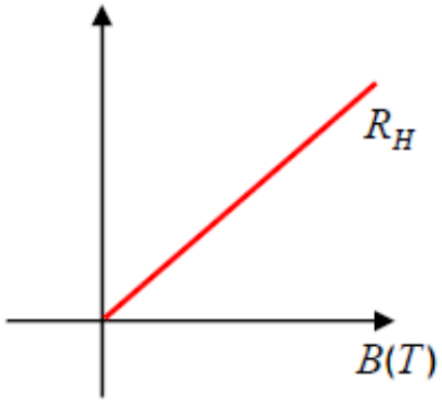



FIG. 1.2 – Résistance de Hall $R_H$ en fonction de l'intensite du champ magnétique B .

## 1.3 Effet Hall quantique entier

L'effet Hall quantique entier a été découvert en 1980 par Klaus Von Klitzing [8], cet effet apparait dans un gaz d'électron bi-dimensionnel soumis à une basse température et au fort champ magnétique. Pour des faibles valeurs du champ magnétique, la résistance de Hall varie linéairement avec le champ magnétique et on retrouve l'effet Hall classique.

Ses mesures des résistances transversale $R_H$ et longitudinal $R_x$ sont présentées dans la figure (1.3). A très basses températures entre $1 - 4(^0K)$ et un champ magnétique intense bien précis entre $3 - 30(T)$ [6], la résistance de Hall forme des plateaux.

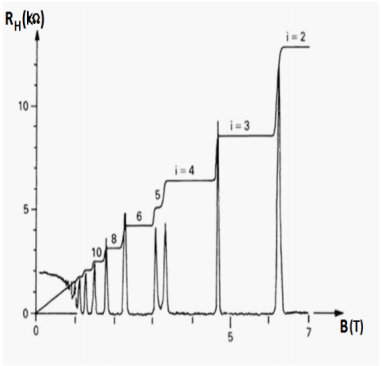



FIG. 1.3 – La variation de la résistance longitudinl $R_{xx}$ et de Hall $R_H$ en fonction du champ magnetique B.

Ces plateaux correspondent à un facteur de remplissage $\nu$ tel que [4]

$$\nu = \frac{N_e}{N_B}, \tag{1.13}$$

$N_e$ nombre d'électrons, $N_B$ la dégénérescence des niveaux de Landau ou bien le nombre de quanta de flux, ou encore

$$\nu = \frac{n_e}{n_B}, \tag{1.14}$$

telque

$$n_e = \frac{N_e}{S}, \tag{1.15}$$

et

$$n_B = \frac{N_B}{S}, \tag{1.16}$$

avec $n_e$ est la densité d'électrons, $n_B$ est la densité de flux et $S$ est l'aire du système utilisé.

La compréhension de l'*EHQE* se faite en deux temps. D'abord, il faut montrer que l'expression de la résistance de Hall est la même en mécanique quantique qu'en mécanique

classique, on la réécrite en introduisant le facteur de remplissage des NL.

$$R_H = \frac{E_H}{J_x} = \frac{B}{n_e e}. \tag{1.17}$$

En remplaçant la densité d'électrons $n_e$ par leurs expressions, on obtient

$$\begin{aligned} R_H &= \frac{B}{e^2}\frac{S}{N}\frac{e}{h}h \\ &= \frac{\phi}{\phi_0}\frac{1}{N}\frac{h}{e^2} \\ &= \frac{N_B}{N}\frac{h}{e} \\ &= \frac{h}{\nu e^2}, \end{aligned} \tag{1.18}$$

tel que $\phi = B.S$ est le flux total du champ $B$, $\phi_0 = \frac{h}{e}$ est le quantum de flux, et $\nu$ le facteur de remplissage prend des valeurs entiers positifs $1, 2 \ldots N$.

## 1.4 Effet Hall quantique fractionnaire

En 1982, deux années après la découverte de l'*EHQE*, D.C. Tsui, H.L.Stormer et A.c Grossard [1] prédit un autre plateau de la résistance de Hall correspond à la valeur $R_H = \frac{3h}{e^2}$. Cette valeur de la résistance de Hall correspond à une fraction du facteur de remplissage $\nu = 1/3$, l'effet fut donc nommé effet Hall quantique fractionnaire.

Comme dans le cas de l'effet Hall quantique entière, la résistance traverse s'annule. Une observation de l'effet Hall quantique fractionnaire est montrée sur la figure1.3.

Contrairement à l'effet Hall quantique entier, l'explication de l'effet Hall fractionnaire nécessite le prise en compte des interaction de coulombiennes entre les électrons qui rend le problème plus compliqué que celle de l'*EHQF*. C'est donc un problème à N-Corp.

Pour l'*EHQF*, la température est plus faible entre $20 - 100(mk)$ et l'intensité du champ magnétique doit être plus intense entre $15 - 30(T)$ [6].

La fonction d'onde proposée par Laughlin 1983 donne une bonne description physique à l'EHQF. Cette fonction décrire un liquide d'incompressible dont les excitations élémentaires et collectives sont séparées par un gap de l'état fondamentale.

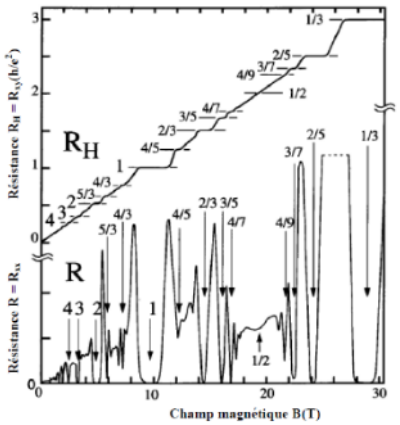



FIG. 1.4 – Méure de l'EHQF.

En 1989, Jain introduisit la theorie des fermions composites (FC), qui a pu expliquer la plupart des valeurs du facteur de remplissage observées dans l'*EHQF*. Il a proposé une généralisation aux états trouvés à facteur de remplissage

$$\nu = \frac{p}{2np+1}. \tag{1.19}$$

La théorie de FC nous a permet de comprendre l'*EHQF* comme un *EHQE*.

## 1.5 Conclusion

L'effet de Hall classique nous a permit d'expliquer le comportement d'électrons dans un semi-conducteur soumis à un champ magnétique et on trouvé que la résistance longitudinal est indépendante du champ magnétique, ainsi que la résistance de Hall $R_H$ croit linéairement avec le champ magnétique. Pour certaines conditions, la résistance de Hall est quantifiée (champs magnétique très fort et température très basse). L'*EHQE* et l' *EHQF* donnent des valeurs quantifiées différents de la résistance.

# Chapitre 2

# Fonction d'onde de Laughlin dans la géométrie du disque

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous avons d'abord cherché à déterminer la fonction d'onde de Laughlin pour décrire le fondamental à $\upsilon = 1/m$ où $m$ est un entier impair (pour des fermions), et avant d'étudier la physique des gaz d'électrons bidimensionnels, il serait util d'étudier le problème d'une particule (électron) en présence d'un champ magnétique extérieur. On s'intéresse aux propriétés des électrons en présence d'un champ magnétique. Il s'agit alors d'un électron sur une surface bidimensionnelle soumis à un champ magnétique $\overrightarrow{B}$. Cette étude est essentiellement basée sur le traitement quantique d'un électron dans un champ magnétique.

## 2.2 Mouvement cyclotron

### 2.2.1 Èlectron dans un champ magnétique

Soit un électron de charge $q = -e$, de masse $m$ et de vitesse $v$ soumis à un champ magnétique $\vec{B}$, ressent la force de Lorentz

$$\vec{F}_L = -e(\vec{v}\Lambda\vec{B}), \tag{2.1}$$

où la vitesse $v_x = \dot{x}$ et $v_y = \dot{y}$. On trouve

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -eB\dot{y}, \\ m\ddot{y} &= eB\dot{x}, \\ m\ddot{z} &= 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Le mouvement de la particule libre est suivant la direction $z$ et dans le plan perpendiculaire au champ $\vec{B}$. on a

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega_c\dot{y}, \\ \ddot{y} &= \omega_c\dot{x}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Par l'intégration des équations (2.3), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega_c(y - Y) \\ \dot{y} &= \omega_c(x - X) \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} x &= X - r\ \sin(\ \omega_c t + \varphi) \\ y &= Y + r\ \cos(\ \omega_c t + \varphi). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dans le plan $(x - y)$, le mouvement de l'électron (particule projeté) est un cercle de centre $(X - Y)$, parcouru à la fréquence $\omega_c$ (voir la $figure$ 1).

$\overrightarrow{r}$ : représente la position de l'électron.

$\overrightarrow{\eta}$ : relie le deux vecteurs $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{r}$.

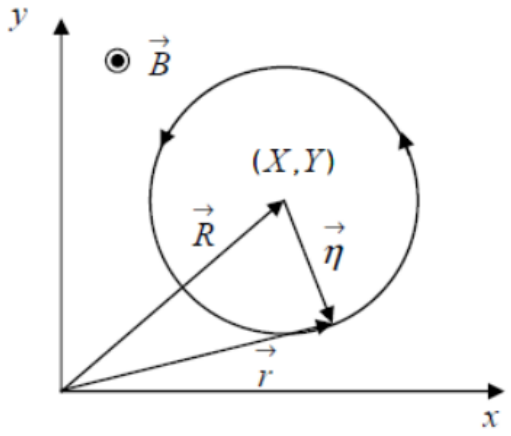



FIG. 2.1 – Mouvement d'un electron de la position $\overrightarrow{r}$ autour du centre de guidage $\overrightarrow{R}$.

Le mouvement cyclotron d'un électron dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ autour du centre de guidage $R(X,Y)$ est considéré comme une constante du mouvement, où $\overrightarrow{R}$ est le centre de l'orbite cyclotron.

L'équation suivante donne la relation entre $\overrightarrow{R}$, $\overrightarrow{r}$ et $\overrightarrow{\eta}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\eta} &= (\eta_x, \eta_y) \\ &= \overrightarrow{r} - \overrightarrow{R}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

avec $\overrightarrow{\eta}$ est le rayon cyclotron et $\overrightarrow{R}$ est le centre de l'orbite cyclotron.

### 2.2.2 Èlectron dans un champ magnétique et électrique

On rajoute un champ électrique constant et uniforme $\overrightarrow{E}$ dans la direction $x$. Le mouvement circulaire se combine avec un mouvement de translation uniforme de vitesse de dérive $\overrightarrow{v}_d$ [9] perpendiculaire à la fois au champ magnétique et au champ électrique

$$\overrightarrow{v_d} = \frac{\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B}}{B^2}. \tag{2.6}$$

En utilisant la définition du courant électrique microscopique

$$\begin{aligned} \overrightarrow{J} &= -ne\overrightarrow{v_d} \\ &= -ne\frac{\overrightarrow{E}\times\overrightarrow{B}}{B^2}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

avec $\overrightarrow{E} \perp \overrightarrow{B}$ on obtient

$$\overrightarrow{J} = -ne\frac{E}{B}\overrightarrow{e}_x. \tag{2.8}$$

La résistivité de Hall $\rho_H$ est définie par

$$\begin{aligned} \rho_H &= \rho_{xy} \\ &= \frac{|E_y|}{|J_x|} \\ &= \frac{B}{n_e.e}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

La résistance de Hall $R_H$ qui est proportionnelle à la résistivité $\rho_H$, varie linéairement avec le champ $B$ sans plateaux pour l'effet Hall classique et avec plateaux pour l'effet Hall quantique. La figure 2.2 donne le déplacement d'un électron dans un plan $(x-y)$, soumis à un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ homogène et perpendiculaire au plan $(x-y)$ et à un champ électrique $\overrightarrow{E}$ homogène suivant l'axe $x$.

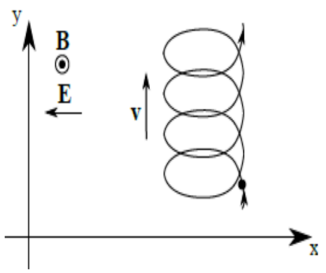



FIG. 2.2 – Mouvement de translation uniforme d'un orbite cyclotron.

## 2.3 Niveaux de Landau

Pour décrire la dynamique des électrons dans un gaz 2D, nous commençons par considérer le problème quantique minimal d'un électron sur un plan soumis à un champ magnétique perpendiculaire homogène. Cette dynamique est décrite par l'hamiltonien

$$\begin{aligned} H &= \frac{(\overrightarrow{p} + e\overrightarrow{A})^2}{2m} \\ &= \frac{\overrightarrow{\Pi}^2}{2m}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

avec $\overrightarrow{p} = -i\hbar\overrightarrow{\nabla}$ est l'opérateur impulsion, $\overrightarrow{A}$ est le potentiel vecteur du champ magnétique tel que $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} = \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}_z$, et $\overrightarrow{\Pi} = m\overrightarrow{V} = \overrightarrow{p} + e\overrightarrow{A}$ l'opérateur quantique de mouvement.

Donc on peut écrire l'hamiltonien sous la forme suivant

$$\begin{aligned} H &= \frac{\overrightarrow{\Pi}^2}{2m} \\ &= \frac{(\Pi_x^2 + \Pi_y^2)}{2m}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

De plus, les composantes $\Pi_x$ et $\Pi_y$ sont conjuguées

$$\begin{aligned} [\Pi_x, \Pi_y] &= e([p_x, A_y] + [A_x + p_y]) \\ &= -i\hbar e(\partial_x A_y - \partial_y A_x) \\ &= -i\hbar e(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}) \\ &= -ie\hbar B \\ &= -i\frac{\hbar^2}{l_B^2}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

où $l_B = \sqrt{\frac{\hbar^2}{eB}}$ la longueur magnétique.

L'hamiltonien de l'équation (2.11) a une même structure algébrique qu'un oscillateur harmonique unidimensionnel. On définit les opérateurs de création et d'annihilation $(a, a^+)$ par

$$a = \frac{l_B}{\sqrt{2}\hbar}(\Pi_x - i\Pi_y), \text{ et } a^+ = \frac{l_B}{\sqrt{2}\hbar}(\Pi_x + i\Pi_y), \tag{2.13}$$

$[a^+, a] = 1$

A l'aide de ces operateurs, l'hamiltonien se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} H &= \frac{\hbar^2}{2ml_B^2}(aa^+ + a^+a) \\ &= \hbar\omega_c(aa^+ + \frac{1}{2}), \end{aligned} \tag{2.14}$$

avec $\omega_c = \frac{e|\vec{B}|}{m}$ est la pulsation cyclotron, $aa^+ = n$ est la valeur propre dans $N$.

On obtient ainsi l'expression suivante des énergies

$$E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2}). \tag{2.15}$$

Les niveaux d'énergies, régulièrement espacés et proportionnels à $B$, sont appelés niveaux de Landau.

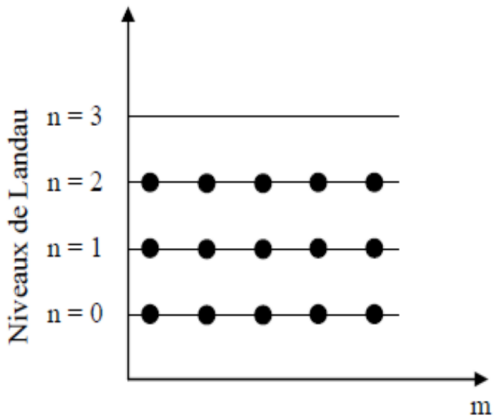



FIG. 2.3 – Niveaux de Landau "n" représente les niveaux, et "m" est associé à la dégénérescence de chaque niveau.

## 2.4 Invariance de Jauge

Pour un système à 2D, on peut utiliser deux types de jauge pour traiter le problème des parois de confinement de l'échantillon qui bordent le gaz. Deux jauges, souvent utilisées pour le traitement quantique du problème d'une particule chargée dans un champ magnétique, ils sont la jauge de Landau et la jauge symétrique.

En mécanique classique

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}\phi, \text{ et } \overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}. \tag{2.16}$$

Tel que $\phi(x)$ est le potentiel scalaire et $\overrightarrow{A}$ est potentiel vecteur.

La transformation de jauge pour les deux potentiels est donneé par

$$\phi \longmapsto \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}, \text{ et } \overrightarrow{A} \longmapsto \overrightarrow{A} + \overrightarrow{\nabla}\chi. \tag{2.17}$$

où $\chi$ est la fonction arbitraire .

D'autre part, la transformation entre ces deux jauges est décrite par la fonction $\chi = -\frac{B}{2}xy$ [4].

Dans le cas d'un champ homogène $B(0.0.B)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A}_s &= \frac{\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{r}}{2} \\ &= \frac{B}{2}(-y, x, 0). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_L} &= \overrightarrow{A_S} + \overrightarrow{\nabla}\chi. \\ &= \frac{\overrightarrow{B}}{2}(-y, x, 0) - \frac{\overrightarrow{B}}{2}(y, x, 0) \\ &= \overrightarrow{B}(-y, 0, 0). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Le changement de jauge est la transformation sur les champs $\overrightarrow{A}$ et $\phi(x)$ qui laisse ces champ invariants et alors la trajectoire classique ne change pas. Le choix de jauge fait

jouer des rôles symétriques aux variables x et y, ce qui satisfait la condition de la symétrie du problème.

Les quantités de mouvement invariantes de jauge sont [10]

$$\Pi_x = m\dot{x} = p_x + eA_x = -m\omega_c\eta_y, \text{ et } \Pi_y = m\dot{y} = p_y + eA_y = m\omega_c\eta_x. \tag{2.20}$$

Pour le traitement quantique d'un système à une particule, il est souvent préférable d'utiliser le formalisme hamiltonien de la mécanique classique. On peut écrire le hamiltonien $H$ sous la forme

$$H = \frac{1}{2m}[(p_x - qA_x)^2 + (p_y - qA_y)^2]. \tag{2.21}$$

Donc

$$H = \frac{1}{2}m[(\overrightarrow{P} - q\overrightarrow{A})^2]. \tag{2.22}$$

Il est bien de noter que cet hamiltonien peut être écrit comme

$$H = \frac{1}{2}m\omega_c^2(\eta_x^2 + \eta_y^2). \tag{2.23}$$

D'après la formalisme d'hamiltonien, on peut introduire la quantification en niveaux de Landau, où l'on impose la non commutativité de la position avec son moment conjugue

$$[x, p_x] = [y, p_y] = i\hbar, \text{ et } [x, y] = [p_x, p_y] = [x, p_y] = [y, p_x] = 0. \tag{2.24}$$

Puisque $[x, y] = 0$, alors

$$[\eta_x, \eta_y] = -[X, Y]. \tag{2.25}$$

La relation de commutatateur $[\eta_x, \Pi_x]$, prend la forme

$$[\eta_x, \Pi_x] = i\hbar. \tag{2.26}$$

En calculant le commutateur $[\eta_x, \eta_y]$, on obtient

$$\begin{aligned}
[\eta_x, \eta_y] &= \frac{e}{m^2\omega_c^2}([p_x, A_y] - [p_y, A_x]) \\
&= \frac{1}{eB^2}(\partial_x A_y[p_x, x] - \partial_y A_x[p_y, y]) \\
&= \frac{-i\hbar}{eB} \\
&= -il_B^2. \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

En calculant le commutateur $[X, Y]$, on obtient

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= [x - \frac{\Pi_y}{eB},\ y + \frac{\Pi_x}{eB}] \\
&= \frac{1}{eB}[x, p_x] - \frac{1}{eB}[p_y, y] - \frac{1}{(eB)^2}[\Pi_y, \Pi_x] \\
&= \frac{2i\hbar}{eB} - \frac{1}{(eB)^2}\frac{i\hbar^2}{l_B^2} \\
&= \frac{i\hbar}{eB} \\
&= il_B^2. \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

avec $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$ est le terme de longueur magnétique.

On introduit des operateur $(a, a^+)$, pour montrer la structure de l'oscillateur harmonique

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}l_B}(\eta_x - i\eta_y),\ a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}l_B}(\eta_x + i\eta_y), \qquad (2.29)$$

$$\eta_x = \frac{l_B}{\sqrt{2}}(a^+ + a),\ \eta_y = \frac{l_B}{\sqrt{2}i}(a^+ - a). \qquad (2.30)$$

Les opérateurs $b$ et $b^+$ sont données par

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}l_B}(X + iY),\ b^+ = \frac{1}{\sqrt{2}l_B}(X - iY), \qquad (2.31)$$

$$X = \frac{l_B}{\sqrt{2}}(b^+ + b),\ Y = \frac{il_B}{\sqrt{2}}(b^+ - b). \qquad (2.32)$$

avec $[a, a^+] = [b, b^+] = 1$ et $[a^+, b^+] = [a, b^+] = 0$.

L'hamiltonien s'écrit alors comme

$$H = \hbar\omega_c(a^+a + \frac{1}{2}). \tag{2.33}$$

Le spectre d'énergie est donné par

$$En = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2}). \tag{2.34}$$

où $n$ la valeur propre de l'opérateur $a^+a$.

Formellement, on peut voir ce système comme deux oscillateurs harmoniques, dont l'hamiltonien est

$$H = \hbar\omega_c(a^+a + \frac{1}{2}) + \hbar\omega'(b^+b + \frac{1}{2}), \tag{2.35}$$

Telle que la fréquence du deuxième oscillateur est nulle, $\omega' = 0$. Le deuxième nombre quantique $m$ est donc la valeur propre de $b^+b$.

Dans le cas où $n = 0$ ou $m = 0$, on pose

$$\begin{aligned} a\,|0,m\rangle &= 0, \\ b\,|n,0\rangle &= 0, \end{aligned} \tag{2.36}$$

Les nombres négatifs sont exclus [10].

Un état arbitraire peut être construit à partir de $|0,0\rangle$

$$|n,m\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}\frac{(b^+)^m}{\sqrt{m!}}\,|0,0\rangle\,. \tag{2.37}$$

Les fonctions d'ondes, qui sont la représentation de ces états dans l'espace réel, dépondent de la jauge choisie pour le potentiel vecteur.

## 2.5 Dégénérescence d'un NL

La dégénérescence des NLs dépond de la taille du système et du champ magnétique. En prenant un domaine en forme de disque de rayon $R$, avec $S = \pi R^2$. Dans la jauge

symétrique, les états ayant le plus bas niveau de Landau sont représentés par $|n=0,m\rangle$. En prenant par origine $r=0$ le centre du disque, une orbite de Landau de moment cinétique $m$ est localisée autour d'un cercle de rayon défini par

$$\begin{aligned} R &= l_B\sqrt{2b^+b+1} \\ &= l_B\sqrt{2m+1}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

De la même manière, les états représentés par $|n,m=0\rangle$ sont localisés autour d'un cercle de rayon $\eta = l_B\sqrt{2a^+a+1}$. A l'intérieur du disque, le nombre d'états $N_B$ dans le plus bas niveaux de Landau (PBNL) est égal à $M+1$ avec $R_{\max} = \sqrt{2M+1}l_B$.

La surface maximale $S_m$ occupée par ces états est égale

$$\begin{aligned} S_m &= \pi R_{\max}^2 \\ &= \pi l_B^2(2M+1) \\ &\backsimeq 2\pi l_B^2 M. \end{aligned} \tag{2.39}$$

La dégénérescence d'un NL est égal au flux magnétique total $BS$ qui traverse le système devisé par le flux élémentaire $e/h$, c'est donc le nombre de quanta de flux qui traverse le système

$$N_B = \frac{\phi}{\phi_0}. \tag{2.40}$$

La dégénérescence d'un niveau dans les plus bas niveau de Landau augment avec $B$.

## 2.6 Fonction d'onde $\Phi_{PBNL}(z)$

Les fonctions d'onde dans le plus bas niveau de Landau sont données par un polynôme en $z$ multiplié par un facteur gaussien présent pour tous les niveaux de Landau. pour trouver les fonctions d'onde $\Phi_{n,m} = (x,y) = \langle x,y|n,m\rangle$ dans la jauge symétrique d'équation (2.18), il suffit de traduire les équations (2.36) et (2.37) en équations différentielles, à l'aide de $p_x = -i\hbar\partial_x$ et $p_y = -i\hbar\partial_y$.

On utilise les équations (2.20), (2.29) et (2.30) pour obtenir la représentation des opérateurs d'échelle dans la jauge symétrique.

Il faut faire le changement du variable d'espace selon la position de l'électron $z = x - iy$ où $\overline{z} = x + iy$ est le complexe conjugué.

Pour trouver des expressions simple, où la dérivation dans le plan complexe est liée par

$$\begin{aligned} \partial_z &= \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y), \\ \partial_{\overline{z}} &= \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \end{aligned} \tag{2.41}$$

avec $\partial_z z = \partial_{\overline{z}} \overline{z} = 1$ et $\partial_z \overline{z} = \partial_{\overline{z}} z = 0$.

Dans la représentation position complexe l'expression des opérateurs d'échelle est donnée par

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{m\omega_c}{2\hbar}}(\eta_x + \frac{i}{m\omega_c}\Pi_x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2m\hbar w_c}}[p_y + eA_y + i(p_x + eA_x)] \\ &= \frac{l_B}{\sqrt{2}}[\partial_x - i\partial_y + \frac{x - iy}{2l_B^2}] \\ &= \sqrt{2}(\frac{z}{4l_B} + l_B\partial_{\overline{z}}). \end{aligned} \tag{2.42}$$

De la même manière on obtient $a^+$, $b$ et $b^+$

$$a^+ = \sqrt{2}(\frac{\overline{z}}{4l_B^2} - l_B\partial_z). \tag{2.43}$$

$$b = \sqrt{2}(\frac{\overline{z}}{4l_B^2} + l_B\partial_z). \tag{2.44}$$

$$b^+ = \sqrt{2}(\frac{z}{4l_B} - l_B\partial_{\overline{z}}). \tag{2.45}$$

Dans ce cas, la représentation $H$ prend la forme [11]

$$H = \frac{\hbar\omega_c}{2}(\frac{\overline{z}z}{4l_B^2} - 4l_B^2\partial_z\partial_{\overline{z}} + \overline{z}\partial_{\overline{z}} - z\partial_z). \tag{2.46}$$

Ainsi, un état dans le plus bas $NL$ est déterminé par l'équation différentielle

$$(z + 4l_B^2\partial_{\overline{z}})\Phi_{n=0}(z,\overline{z}) = 0. \tag{2.47}$$

La solution de l'équation (2.47) est une gaussienne multipliées par une fonction analytique arbitraire $f(z)$, avec $\partial_{\overline{z}} f(z) = 0$

$$\Phi_{n=0}(z,\overline{z}) = f(z)e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}. \tag{2.48}$$

De la même façon, on trouve pour l'état $m = 0$

$$(\overline{z} + 4l_B^2\partial_z)\Phi_{m=0}(z,\overline{z}) = 0. \tag{2.49}$$

Donc la solution est

$$\Phi_{m=0}(z,\overline{z}) = g(\overline{z})e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}. \tag{2.50}$$

Avec la fonction $g(\overline{z})$ est anti-analytique, tel que $\partial_g(\overline{z}) = 0$. Un état $|n = 0, m = 0\rangle$ doit être représenté par l'équation $a\,|0,0\rangle = b\,|0,0\rangle = 0$.

Donc la solution de cette équation est donnée sous la forme suivante

$$\begin{aligned}\Phi_{n=0,m=0}(z,\overline{z}) &= \langle z,\overline{z}|n=0,m=0\rangle\,. \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi l_B^2}}e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}\end{aligned} \tag{2.51}$$

Un état correspondant au nombre quantique $m$, $n$ dans le plus bas $NL$ s'obtient à l'aide des équations (2.37) et (2.46)

$$\begin{aligned}\Phi_{n=0,m}(z,\overline{z}) &= \frac{(\sqrt{2})^m}{\sqrt{2\pi l_B^2 m!}}(\frac{z}{4l_B} - l_B\partial_{\overline{z}})^m e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi l_B^2 m!}}(\frac{z}{\sqrt{2}l_B})^m e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}.\end{aligned} \tag{2.52}$$

et

$$\begin{aligned}\Phi_{n,m=0}(z,\overline{z}) &= \frac{(\sqrt{2})^n}{\sqrt{2\pi l_B^2 n!}}(\frac{\overline{z}}{4l_B} - l_B\partial_{\overline{z}})^n e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi l_B^2 n!}}(\frac{\overline{z}}{\sqrt{2}l_B})^n e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Comme le cas de l'électron de l'atome d'hydrogène, l'énergie ne dépend que du nombre quantique $n$ tant que le potentiel reste en $1/r$. Un état générique de plus bas $NL$ s'écrit

$$\Phi_{PBNL}(z,\overline{z}) = f(z)e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}. \tag{2.54}$$

où $f$ est une fonction analytique de $z$.

Dans le cas de plusieurs électrons, la fonction $\Phi_{PBNL}(z)$ peut paraître la base du raisonnement historique de Laughlin [14], et qui permet de deviner une fonction d'onde test pour l'état fondamental de l'effet Hall quantique fractionnaire ($EHQF$).

Pour un état centré à l'origine $m = 0$ dans le $NL$ $n$. Un état arbitraire peut s'écrire

$$\Phi_{m,n}(z,\overline{z}) = \frac{\sqrt{2^m}}{\sqrt{2\pi l_B^2 m!n!}}(\frac{z}{4l_B} - l_B\partial_{\overline{z}})^m(\frac{\overline{z}}{\sqrt{2}l_B})^n e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}. \tag{2.55}$$

## 2.7 Conclusion

Le travail de cette partie permet de présenter les principales propriétés des électrons d'un gaz à 2D soumis à un champ magnétique. Dans la jauge symétrique nous recherchent les états propres de l'hamiltonien $H$. La dégénérescence par niveaux peut être décrite directement en fonction d'une surface minimale. Dans le plus bas $NL$, on trouve la même fonction d'onde pour les états $|n = 0, m\rangle$ et $|n, m = 0\rangle$.

# Chapitre 3

# Effet Hall qauntique fractionnaire

## 3.1 Introduction

L'*EHQF* est un domaine de recherche particulièrement riche dans la physique. Le point central de l'*EHQF* est d'inclure les interactions dans la description du système. Ce phénomène est beaucoup plus complexe et nécessite une compréhension profonde pour introduire le problème de $N$ électron en interaction coulombienne. Laughlin a proposé, en 1983 [14] une fonction d'onde d'essai pour décrire le fondamental de l'état fractionnaire 1/3. Il montrait aussi l'existence de quasi-particules (qp) de charge fractionnaire. Ensuite, Jain en 1989 [15] introduisit une particule effective qui s'appelle le fermion composite pour aborder la théorie de *EHQF*.

## 3.2 Rôle d'interaction Coulombienne

L'hamiltonien d'un système d'électrons soumis à l'interaction coulombienne est la somme de l'hamiltonien cinétique $H_0$ et du terme d'interaction coulombienne les électrons $H_{int}$ [18]

$$H = H_0 + H_{int}, \tag{3.1}$$

avec

$$H_0 = \frac{1}{2m}\Sigma_j[\frac{\hbar}{i}\overrightarrow{\nabla_j} + \frac{e}{c}\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r_j})]^2, \tag{3.2}$$

$$H_{int} = \frac{e^2}{\epsilon}\Sigma_{j<k}\frac{1}{r_{jk}}, \tag{3.3}$$

On a va précédemment que $H_{int}$ décrit l'interaction de coulomb entre les électrons $i$ et $j$, qui prend la forme

$$H_{int} = \sum_{i<j}\frac{e^2}{4\pi\epsilon|r_i - r_j|}. \tag{3.4}$$

Le mécanisme d'entrainement de l'*EHQF* est l'interaction coulombienne, contrairement à l'*EHQE* où le potentiel de désordre l'emporte sur les interactions .

## 3.3 Fonction d'onde de Laughlin

En 1983, Laughlin a proposé une fonction d'onde pour l'état fondamentale à $\nu = 1/3$ [14]. Ensuite, il a généralisé cette fonction pour $\nu = 1/m$ avec $m$ entier impair, ce qui donne $m$ quanta de flux par électron (figure 3.1) [19]

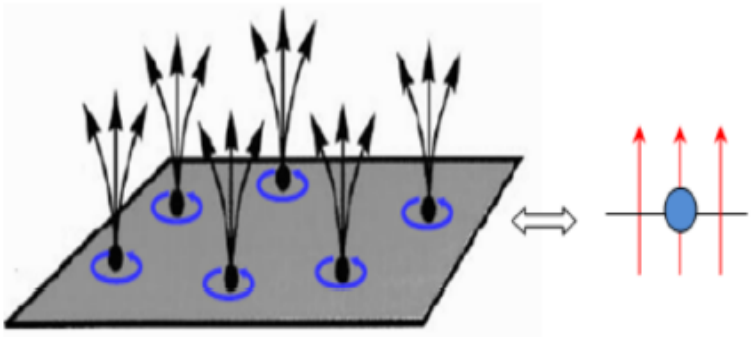


FIG. 3.1 – Particule de charge fractionnaire e/3.

Pour générer une quasi-particule (qp) avec une charge fractionnaire $e/3$ et pour explique L'*EHQF*, on envoie un flux infiniment mince au point $z_0$ et on augmente le flux adiabatiquement de 0 à un quantum de flux $\phi_0$. Donc quand $\phi \to \phi_0$, on tend à obtenir

une accumulation de charge positive ou négative dans un surface de taille $l$ autour de $z_0$. Par invariance de jauge (un quantum de flux est équivalent à pas de flux du tout), cet état final est un état excité de l'hamiltonien original. Cette excitation est une quasi-particule qui peut être un quasi-trou ou un quasi-électron, selon le signe de la charge accumulée. Donc les quasi-particules sont des charges fractionnaires.

Une fonction d'onde qui décrit $N$ électrons dans le plus bas niveau Landau (NL) a nécessairement la forme suivante dans le Jauge symétrique

$$\Psi(r_1, r_2, ..., r_{Ne}) = F(z_1, z_2, ..., z_{Ne}) \exp(-\sum_{i=1}^{Ne} |z_i^2|/4l_B^2), \tag{3.5}$$

La fonction impaire $F(z_1, z_2, ..., z_{Ne})$ qui satisfait les condition d'antisymétrie est un déterminant de Slater construit à partir des polynômes $z_i^0, z_i^1, ..., z_1^{N_e}$, et ne dépend pas des $z_i^*$ [7].

$$\begin{aligned} F(z_1, z_2, ..., z_{Ne}) &= \begin{vmatrix} z_1^0 & z_2^0 & . & . & z_N^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & . & . & z_N^1 \\ . & . & . & . & . \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & . & . & z_N^{N-1} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i<j}^{N} f(z_i - z_j), \end{aligned} \tag{3.6}$$

Où $F(z_1, z_2, ..., z_{Ne})$ est un polynôme a plusieurs variables $z_1, z_2, ..., z_{Ne}$ correspondant au position des électron $1, 2 ..... Ne$.

L'état fondamental à $N$ particules est décrit par la fonction d'onde d'essai proposé par Laughlin

$$\Psi^L(r_1, r_2, ..., r_{Ne}) = \prod_{i<j}^{N_e} (z_i - z_j)^m \exp(-\sum_{i=1}^{N_e} |z_i^2|/4l_B^2), \tag{3.7}$$

Cette fonction d'onde est compatible avec la fonction d'onde d'un oscillateur harmonique dans le plus bas niveau de Landau [16]. Leurs propriétés sont

- le préfecture$\prod_{i<j}^{N_e}(z_i - z_j)^m$ est une fonction analytique de $z_i$. Donc la fonction (3.7)

est uniquement composée de la fonction d'onde de l'électron libre au niveau de Landau le plus bas.

- le préfecture est un polynôme homogène en $z_i$ de degré $M = m\frac{N}{2}(N-1)$. Donc la fonction d'onde de l'equation (3.7) est un état propre du moment angulaire total avec comme valeur propre $M$.

- le préfecture est de la forme de Jastrow dont chaque facteur $(z_i - z_j)^m$ à un zéro d'ordre $m$ à $z_i = z_j$. Donc chaque électron veut très fortement se tenir à l'écart des autres, et chaque électron voit $m$ zéro lies aux positions des autres électrons.

## 3.4 Fonction d'onde de Jain

La théorie de fermions composites introduite par Jain en 1989 [15], a pu identifier avec succès les varies quasi-particules responsables de L'*EHQF*. Il les a définis comme un état lié d'un électron auquel est attaché un nombre pair de vortex quantifiés.

Schématiquement, les fermions composites (FCs) sont des électrons qui transportent une partie du flux magnétique des vortex quantique et ne ressentent que le champ magnétique amoindri, qu'ils n'absorbent pas. Le champ magnétique effectif ressenti par les FCs peut correspondant à un remplissage entier des NLs, dans ce cas les FCs présentent L'*EHQE*. L'*EHQF* est alors interprète comme un *EHQE* de FCs [17] comme il est indique sur la figure (3.2). Le schéma suivant représente l'idée de Jain [4]

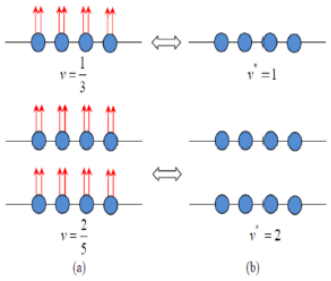



FIG. 3.2 – Schéma d'un état fondamental. (a) pour EHQE du $\upsilon$=n, (b) pour EHQF à $\upsilon$=n/2n+1.

Cette théorie explique autres plateaux de la résistance de Hall correspondent aux

facteur de remplissage de l'état fondamental de Laughlin. Elle permis de reproduire la fonction d'onde de Laughlin qui correspond au facteur de remplissage $\nu = \frac{1}{2s+1}$ où $s$ est un entier diffèrent de zéro. Par la suit, Jain propose une généralisation des états au facteur de remplissage $\nu = \frac{p}{2ps+1}$ talq ue $s$ et $p$ sont des entiers en termes de FCs.

A partir de l'état incompressible représente par l'équation (3.8) du modèle de Laughlin nous pouvons écrire la fonction $\Psi_{2s+1}$ à l'aide de la fonction $\Psi_1$ correspondant au fonction $\nu^* = 1$ [4].

$$\begin{aligned}
\Psi_{2s+1} &= \prod_{i<j}^{N_e}(z_i - z_j)^{2s+1} \exp(-\sum_{k=1}^{Ne} |z_k^2|/4l_B)^2 \\
&= \prod_{i<j}^{N_e}(z_i - z_j)^{2s} \prod_{i<j}^{N_e}(z_i - z_j) \exp(-\sum_{k=1}^{Ne} |z_k^2|/4l_B)^2 \\
&= \prod_{i<j}^{N_e}(z_i - z_j)^{2s} \Psi_1, \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

avec $\Psi_1$ est un fonction d'onde à $N_e$ particules de l'état fondamental de l'équation (3.7) à $\nu^* = 1$. Le facteur $\Pi_{i<j}^{N}(z_i - z_j)^{2s}$ appelé facteur de Jastrow, il attache $2s$ quantum de flux (vortex d'ordre $2s$) aux position des particules $z_i$.

L'état fondamental de la fonction d'onde non normalisée des fermions composites poure $\nu^* = p$ prend la forme [18]

$$\Psi_\nu^{FC} = \mathcal{P}_{PBNL}[\prod_{j<k}^{N_e}(z_j - z_k)^{2s} \Psi_{\nu^*}], \qquad (3.9)$$

La fonction d'onde de l'équation (3.9) décrite un système à un facteur de remplissage

$$\frac{1}{\nu^*} = \frac{1}{\nu} - 2s, \qquad (3.10)$$

Ce qui donne la formule générale du facteur de remplissage réduit $\nu^*$

$$\nu = \frac{\nu^*}{2s\nu^* + 1}, \qquad (3.11)$$

Les états électroniques $\nu = \frac{1}{3}$ et $\nu = \frac{2}{5}$ sont interprètés comme un *EHQE* aux facteurs de remplissage entier $\nu^* = 1$ et $\nu^* = 2$ en terme de FC (voir figure 3.3) dont les vortex portant $2s$ quantum de flux chacun.

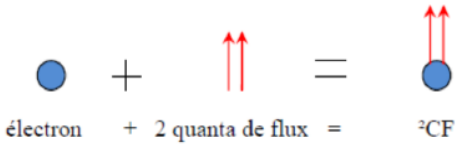



FIG. 3.3 – Représentation du vortex.

## 3.5 Excitation de l'état 1/3 de Laughlin

Laughlin a montré que son liquide possède des excitations élémentaires qui correspond à des charges fractionnaires. L'incompressibilité du liquide de Laughlin, qui explique l'observation de l'*EHQF* est une conséquence de la nature inhabituelle de ses excitations. Un liquide est incompressible losque son potentiel chimique est discontinu en fonction de la densité. Les seules excitations qui ne changent pas la densité du système sont donc obtenues par création de paires quasi-électrons /trou. Pour un facteur de remplissage $\nu = n$ dans l'*EHQE*, les excitations dans un seul niveau sont interdites par le principe de Pauli [4] (figure 3.4)

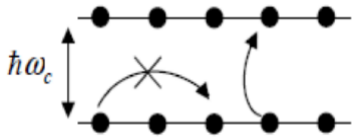



FIG. 3.4 – Les excitations dans un seul NL sont interdites par le principe de Pauli.

Pour $\nu \neq n$ les excitations sont inter-niveau c'est-à-dire ils sont permises dans un seul niveau (figure 3.5)

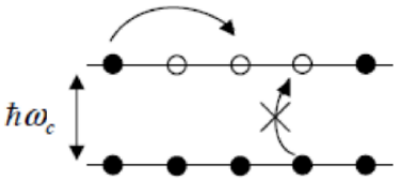



FIG. 3.5 – Modèle d'électrons restreints à un seul NL.

Laughlin a montré qu'un état excité peut être obtenu, lorsqu'en faisant augmenter le flux qui traverse le tube adiabatiquement depuis zéro jusqu'à un quantum flux $e/h$. Une excitation serait produite, cette excitation du type quasitrou-quasiparticule est représentée sur la figure suivant FIG 3.6

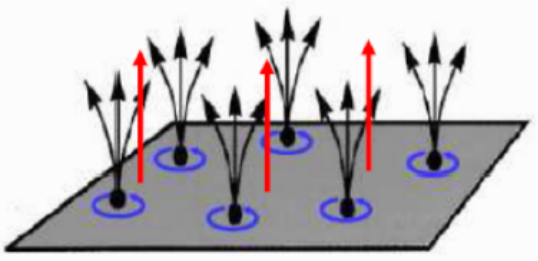


FIG. 3.6 – Création d'un quasitrou de Laughlin à $v$=1/3[19].

L'interaction coulombienne donne un cout d'énergie fini pour les quasi-particules avec des charges fractionnaires. Toutes les particules sont déplacées de $m_j$ vers $m_j + 1$, où l'insertion d'un quantum de flux en $z_0$ est obtenue par translation $z_k \longrightarrow z_k - z_0$. Alors la fonction d'onde qui multiple de la fonction $\Psi^L$ par la position de chaque électron, cette fonction d'onde correspond à cette excitation dite de quasi-trou (qt)

$$\Psi_{qt} = \prod_{k=1}^{N_e}(z_k - z_0)\Psi^L. \tag{3.12}$$

après la translation de la position $z_k$, la fonction d'onde associée sera donc

$$\Psi_{qt} = \prod_{k=1}^{N_e} z_k\Psi^L. \tag{3.13}$$

De la même manière, on trouve la fonction d'onde de Laughlin pour une excitation de type quasi-particule (qp), mais un anti-vortex [5]. La translation du quasi-électron en $z_0$ sont obtenues par substitution $\overline{z}_k \longmapsto \overline{z}_k - \overline{z}_0$ et $\overline{z}_k \longmapsto 2\partial_{z_k}$ [4]

$$\Psi_{qe} = \prod_{k=1}^{N_e}(2\partial_{z_k} - \overline{z}_0)\Psi^L. \tag{3.14}$$

Pour une fonction d'onde du quasi-électron (qe) situe à l'origine, on peut écrire

$$\Psi_{qe} = \prod_{k=1}^{N_e} (2\partial_{z_k}) \Psi^L. \tag{3.15}$$

## 3.6 Excitation de l'état 1/3 de Jain

Les excitations des états de L'*EHQF* à $\nu = \frac{p}{2sp+1}$ se détermine par analogie avec les excitations des états de l'*EHQE* à $\nu^* = p$. On utilise le facteur de remplissage 1/3 pour présenter la fonction d'onde d'une quasi-particule (qp) de Jain (figure 3.7).

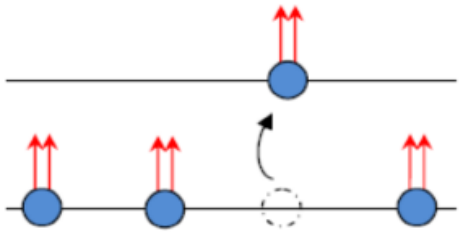


FIG. 3.7 – Schéma représentant le mécanisme de création un état de type quasitrou-quasiparticule.

On ajoute un FC dans le NL supérieur définie par Jain où ($s = 1$) [15], on trouve une quasi-particule (qp) de charge $e/3$. Le quasi-trou de l'état 1/3 donne un fermion composite dans le deuxième niveau en laissant un quasi-trou dans le niveau le plus bas.

Le quasi-électron (qe) de Jain situé à l'origine est décrit par la fonction d'onde de l'équation (3.16) suivant

$$\Psi_{FC}^{qp} = \mathcal{P}_{PBNL} \prod_{j<k}^{N} (z_j - z_k)^{2s} \begin{vmatrix} \overline{z}_1 & \overline{z}_2 & . & . & \overline{z}_N \\ 1 & 1 & . & . & 1 \\ z_1 & z_2 & . & . & z_N \\ . & . & . & . & . \\ z_1^{N-2} & z_2^{N-2} & . & . & z_N^{N-2} \end{vmatrix} \exp(-\sum_{j}^{N} |z_j|^2 / 4). \tag{3.16}$$

## 3.7 Conclusion :

On a conclut que la fonction d'onde de Laughlin est une bonne approximation puisque dans un champ magnétique intense l'énergie coulombienne est petite comparée à l'énergie cyclotron $\hbar w_c$. L'idée de Jain de la théorie de $FC$ permet de déterminer la fonction d'onde pour le facteur de remplissage $\nu = \frac{\nu^*}{2s\nu^*+1}$. En plus, cette théorie nous permet de comprendre l'$EHQF$ comme un $EHQE$.

L'étude des excitations élémentaires en régime d'$EHQF$ motive la création d'un quasi-trou qui a consisté à multiplier la fonction d'onde par $\Pi_i z_i$, et la création d'un quasi-électron qui a consiste à multiplier la fonction d'onde par $\Pi_i(2\partial_{z_i})$.

# Chapitre 4

# Excitations de charges fractionnaires

## 4.1 Introduction

Dans cette partie nous étudierons les excitations élémentaires en régime d'*EHQF*. Cependant, il y a beaucoup d'excitations de basse énergie ; ces excitations rendent compte juste à réarranger des électrons au niveau occupé le plus élevé de Landau. Pour les cas de Laughlin et celle de Jain, plus de 50 fractions ont été observées dans le plus bas niveau de Landau.

## 4.2 Excitations de l'état de Laughlin et de Jain

Nous avons décrit dans le chapitre trois les propriétés de l'état de Laughlin et de Jain. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux excitations de type quasiparticules que l'on peut construire à partir de l'état fondamental. Il est très important de comprendre la nature des excitations de ces états car ce sont celles-ci qui sont sondées expérimentalement lors des mesures de transport. On peut dire que ces excitations sont obtenues lorsque le facteur de remplissage est légèrement inférieur à celui de l'état fondamental. Les nouveaux états se produisent en raison du *EHQF* des quasiparticles :

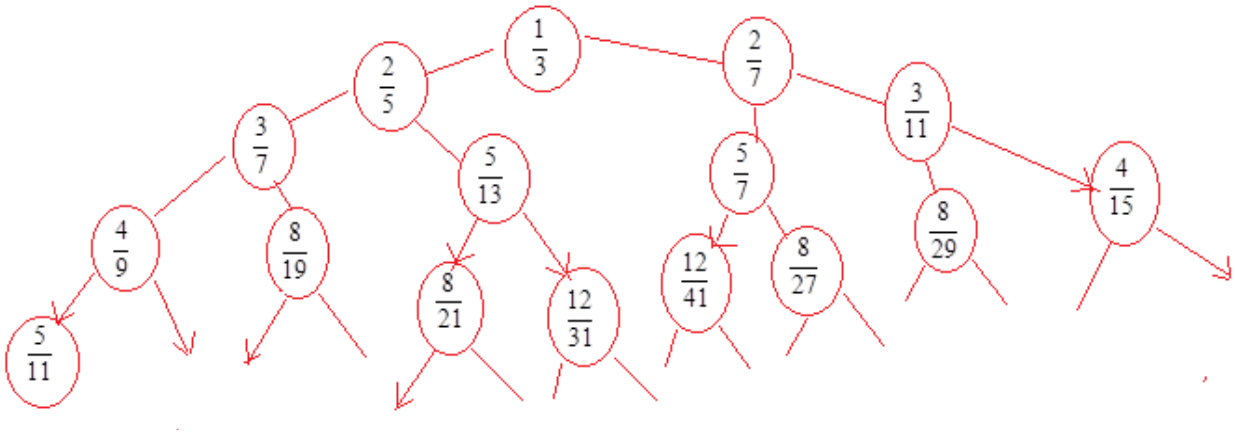



FIG. 4.1 – Les nouveaux états se produisent en raison des quasiparticles de l'EHQF.

## 4.3 Excitation d'une charge fractionnaire

On décrire la théorie de Laughlin et la théorie de Jain pour le système contenant une quasiparticule en régime de l'*EHQF* dans lequel le liquide d'électrons est incompressible.

### 4.3.1 Quasiparticule de Laughlin

Laughlin a proposé une théorie qui est basée sur les fonctions d'onde d'essai pour décrire le fondamental de l'état fractionnaire 1/3. Il a considère une quasiparticule comme un "vortex", cette état s'obtienne en enlevant un quantum de flux.

La fonction d'onde d'une quasiparticule de Laughlin au facteur de remplissage $\upsilon = 1/3$ s'écrit

$$\Psi_L^{1qp}(z_1, ..., z_N) = \exp(-\sum_j \frac{|z_j^2|}{4}) \prod_l (2\frac{\partial}{\partial z_l}) \prod_{j<k} (z_j - z_k)^3. \tag{4.1}$$

Pour l'état $\upsilon = 1/3$, il y a un électron pour trois quanta de flux dans l'état fondamental, l'ajout d'un quantum de flux $\phi_0$ a motivé la création d'une quasiparticule à l'origine de charge $e/3$.

### 4.3.2 Quasiparticule de Jain

Jain a proposé une idée qui repose sur une réinterprétation de la fonction d'onde de Laughlin et pour donner les états fondamental au facteur de remplissage $\upsilon = 1/3$, où $m$ entier diffèrent de zéro. Il fait une généralisation de ces états au facteur de remplissage $\upsilon = \frac{p}{2ps+1}$, avec $s$ et $p$ entier, en termes de fermions composites. A partir de l'état incompressible représente par l'équation (3.7) du modèle de Laughlin $\Psi^L$ et à l'aide de la fonction $\Psi_1$ de l'équation (3.8) correspondant au facteur $\upsilon^* = 1$, nous pouvons écrire la fonction d'onde de Jain.

L'état fondamental est décrit par la fonction d'onde de Jain au facteur de remplissage $\upsilon = 1/3$

$$\Psi^{GS}(z_1, ..., z_{N_e}) = \mathcal{P}_{PBNL} \prod_{j<k} (z_j - z_k)^2 \Phi_1, \tag{4.2}$$

Où

$$\Phi_1 = \prod_{j<k}^{N} (z_j - z_k) \exp(-\frac{1}{4} \sum_{i}^{N} |z_i|^2), \tag{4.3}$$

telle que $\Phi_1$ représente la fonction d'onde de l'état fondamental incompressible de l'*EHQE* à $\upsilon = 1$.

$\mathcal{P}_{PBNL}$ est le projecteur sur le plus bas niveau de Landau. La figure (4.2) représente les excitations de Jain.

La fonction d'onde d'une quasiparticule de Jain ($FC$) à $\upsilon = 1/3$ trouve la forme

$$\Psi_{FC}^{1qp} = \mathcal{P}_{PBNL} \prod_{j<k}^{N} (z_j - z_k)^2 \begin{vmatrix} \overline{z}_1 & \overline{z}_2 & . & . & \overline{z}_N \\ 1 & 1 & . & . & 1 \\ z_1 & z_2 & . & . & z_N \\ . & . & . & . & . \\ z_1^{N-2} & z_2^{N-2} & . & . & z_N^{N-2} \end{vmatrix} \exp(-\frac{1}{4} \sum_{j}^{N} |z_j|^2). \tag{4.4}$$

Nous avons obtenu des résultats analytiques et numériques exacts avec l'interaction de coulomb.

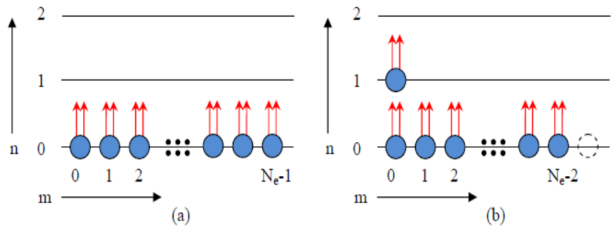



FIG. 4.2 – Création d'une quasiparticule de (FC) à $\upsilon$=1/3. (a) état fondamental, (b) premier état excité.

L'expression de l'énergie d'interaction d'un état de Laughlin $\Psi_L^{1qp}(z_1, ..., z_{Ne})$ à une seule quasiparticule devient

$$E_L^{1qp}(Ne) = \frac{\langle \Psi_L^{1qp} | V_{ee} | \Psi_L^{1qp} \rangle}{\langle \Psi_L^{1qp} | \Psi_L^{1qp} \rangle}. \tag{4.5}$$

et l'expression de l'énergie d'interaction d'un état de Jain devient

$$E_{FC}^{1qp}(Ne) = \frac{\langle \Psi_{FC}^{1qp} | V_{ee} | \Psi_{FC}^{1qp} \rangle}{\langle \Psi_{FC}^{1qp} | \Psi_{FC}^{1qp} \rangle}. \tag{4.6}$$

La différence d'énergie d'une seule quasiparticule entre la fonction d'onde de Laughlin et de Jain s'écrit

$$\Delta E^{1qp}(N_e) = E_L^{1qp} - E_{FC}^{1qp}. \tag{4.7}$$

## 4.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons décrit les deux théories de Laughlin et de Jain pour un système contenant une quasiparticule en régime d'*EHQF*. Ensuite, nous avons donné dans cette partie une description de quasiparticules comme fermions composites et comme un "vortex". Cette étude apporte également des structures physiques différentes concentrées sur le facteur de remplissage $\upsilon = 1/3$, où il convient de noter que la théorie des *FC*

explique le phénomène général de l'*EHQF*, donnant des fonctions précises d'ondes pour les états fondamentaux, ainsi que les fonctions d'onde des états excités.

# Chapitre 5

# Application sur les excitations de charge fractionnaire

## 5.1 Introduction

Après avoir introduit la théorie des fermions composites sur les états fondamental et excité (chapitre 4), nous allons nous intéresser aux applications sur les excitations de charges fractionnaires. Nous présentons dans ce chapitre une méthode analytique semblable à celle utilisée dans le cas de Laughlin(1983)[14] pour trois particules. Nous avons essayé d'appliquer cette méthode pour trouver le potentiel énergétique $\varepsilon_{ee}$ du premier état excité. Nous pouvons augmenter le nombre de particules pour aller jusqu'à des tailles de systèmes de plus de 6 électrons et à différents facteurs de remplissage.

## 5.2 Interaction e-e ($1^{er}$ état excité)

Dans cette partie, on présente une application de 3 électrons ( $N_e = 3$), où $N_e$ est le nombre d'électrons. On introduit l'énergie d'interaction par particule $\varepsilon_{ee}$(électron–

électron). Le polynôme vecteur $P_{_{Laughlin}}$ de Laughlin s'écrit :

$$\begin{aligned} P_{Laughlin} &= D\left[\prod_{\substack{i<j\\ i=1}}^{N_e=3}(z_i-z_j)^3,\ z_1,\ z_2,\ z_3\right] \\ &= -36\ z_1^5z_2+90\ z_1^4z_2^2-90\ z_1^3z_2^4+36z_1z_2^5+36\ z_1^5z_3-360\ z_1^3z_2^2z_3 \\ &\quad +360\ z_1^2z_2^3z_3-36\ z_2^5z_3-90\ z_1^4z_3^2+360\ z_1^3z_2z_3^2-360\ z_1z_2^3z_3^2+90\ z_2^4z_3^2 \\ &\quad -360\ z_1^2z_2z_3^3+360\ z_1z_2^2z_3^3+90\ z_1^2z_3^4-90\ z_2^2z_3^4-36\ z_1z_3^5+36\ z_2z_3^5 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Ainsi que le polynôme vecteur $P_{Jain}$ de Jain s'écrit :

$$\begin{aligned} \Psi_{FC}^{1qp} &= \mathcal{P}_{PBNL}\prod_{j<k}^{N=3}(z_j-z_k)^2\begin{vmatrix}\overline{z}_1 & \overline{z}_2 & \overline{z}_3\\ 1 & 1 & 1\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}\exp(-\frac{1}{4}\sum_j^{N=3}|z_j|^2) \\ &= -z_2\partial_{\{z_1,1\}}((z_1-z_2)^2(z_1-z_3)^2(z_2-z_3)^2)+z_3\partial_{\{z_1,1\}}((z_1-z_2)^2(z_1-z_3)^2(z_2-z_3)^2) \\ &\quad +z_1\partial_{\{z_2,1\}}((z_1-z_2)^2(z_1-z_3)^2(z_2-z_3)^2)-z_3\partial_{\{z_2,1\}}((z_1-z_2)^2(z_1-z_3)^2(z_2-z_3)^2) \\ &\quad -z_1\partial_{\{z_3,1\}}((z_1-z_2)^2(z_1-z_3)^2(z_2-z_3)^2)+z_2\partial_{\{z_3,1\}}((z_1-z_2)^2(z_1-z_3)^2(z_2-z_3)^2) \\ &= 4\ z_1^5z_2-10\ z_1^4z_2^2+10\ z_1^2z_2^4-4\ z_1z_2^5-4\ z_1^5z_3+40\ z_1^3z_2^2z_3-40\ z_1^2z_2^3z+4\ z_2^5z_3 \\ &\quad +10\ z_1^4z_3^2-40\ z_1^3z_2z_3^2+40\ z_1z_2^3z_3^2-10\ z_2^4z_3^2+40\ z_1^2z_2z_3^3-40\ z_1z_2^2z_3^3-10\ z_1^2z_3^4 \\ &\quad +10\ z_2^2z_3^4+4\ z_1z_3^5-4\ z_2z_3^5 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Pour une fonction d'onde $\Psi(r_1,\ldots,r_{N_e})$, l'interaction coulombienne est

$$V_{ee}=\frac{N_e(N_e-1)}{2}\frac{\int d^2r_1\cdots d^2r_{N_e}\frac{e_0^2}{|r_1-r_2|}|\Psi(r_1,\ldots,r_{N_e})|^2}{\int d^2r_1\cdots d^2r_{N_e}|\Psi(r_1,\ldots,r_{N_e})|^2}, \tag{5.3}$$

avec

$$z_j=r_je^{-i\varphi_j}. \tag{5.4}$$

Tel que $z_j$ vecteur position à $2D$ dans la représentation complexe, on obtient $\varepsilon_{ee}$ par

$$\varepsilon_{ee}=\frac{(N_e-1)}{2}\frac{\int d^2z_1\cdots d^2z_{N_e}\frac{e_0^2}{|z_1-z_2|}|\Psi(z_1,\ldots,z_{N_e})|^2}{\int d^2z_1\cdots d^2z_{N_e}|\Psi(z_1,\ldots,z_{N_e})|^2}. \tag{5.5}$$

On obtient les coordonnées complexes de Jacobi $Z_i$

$$\begin{aligned} Z_1 &= z_1 - z_2, \\ Z_2 &= \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2} - z_3, \\ Z_3 &= \frac{z_1}{3} + \frac{z_2}{3} + \frac{z_3}{3}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

L'équation (5.1 ou 5.2) est une matrice carrée avec les inconnues $z_1$ , $z_2$ , $z_3$ . En calculant la matrice inverse, on obtient [12]

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{3} + Z_3, \\ z_2 &= \frac{-Z_1}{2} + \frac{Z_2}{3} + Z_3, \\ z_3 &= \frac{-2\,Z_2}{3} + Z_3. \end{aligned} \tag{5.7}$$

En incluant $z_1$ , $z_2$ , $z_3$ dans l'équation (5.1 ou 5.2), le polynôme vecteur $P_L$ devient $P_J$ (polynôme vecteur de Jacobi). Pour ce cas, nous cherchons la fonction d'onde de Laughlin

$$P_J = Z_1^3(\frac{-Z_1}{2} + Z_2)^3(\frac{Z_1}{2} + Z_2)^3. \tag{5.8}$$

Et nous avons

$$\int \prod_{k=1}^{N_e} d^2 z_k = \int \prod_{k=1}^{N_e} d^2 Z_k \text{ , avec } N_e \geq 2. \tag{5.9}$$

Afin de satisfaire les coordonnées de Jacobi, on peut écrire la forme suivante [13]

$$\sum_{k=1}^{N_e} r_k^2 = N_e R_{N_e}^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{j}{j+1} Z_j^2 \text{ , avec } N_e \geq 2, \tag{5.10}$$

et

$$S_4(R, Z_1, Z_2) = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = \frac{Z_1^2}{2} + \frac{2Z_2^2}{3} + 3Z_3^2. \tag{5.11}$$

D'après le changement de coordonnées correspondant $V_{ee}$ devient

$$\varepsilon_{ee} = \frac{\int d^2 Z_1 \int d^2 Z_2 \int d^2 Z_3 [P_J]^2 e^{-(Z_1^2/4 + Z_2^2/3 + 3Z_3^2/2)/l_0^2} \frac{e_0^2}{Z_1}}{\int d^2 Z_1 \int d^2 Z_2 \int d^2 Z_3 [P_J]^2 e^{-(Z_1^2/4 + Z_2^2/3 + 3Z_3^2/2)/l_0^2}}. \tag{5.12}$$

## 5.3 Etat fondamental à $\upsilon = 1/3$

Le tableu 5.1 donne la différence de l'énergie d'interaction de l'état fondamental de différents nombres des particules $N_e$ entre la fonction d'onde de Laughlin et de Jain. La fonction d'onde de Jain est une fonction d'onde d'un niveau de Landau ($NL$) rempli représenté par un déterminant de Slater défini par un oscillateur harmonique (2.52). Ces états correspondant à différentes valeurs de $n$ pour $m = 0$.

| $N_e$ | $E_{Laughlin}$ | $E_{Jain}$ | $\Delta E = E_{Laughlin} - E_{Jain}$ |
|---|---|---|---|
| 3 | 0.719316 | 0.719316 | 0.000000 |
| 4 | 1.310596 | 1.310596 | 0.000000 |
| 5 | 2.030715 | 2.030715 | 0.000000 |
| 6 | 2.864394 | 2.864394 | 0.000000 |
| 7 | 3.802267 | 3.802267 | 0.000000 |

TAB. 5.1 – Énergies de l'état fondamental, en unités de $\frac{e_0^2}{l_0}$.

La fonction d'onde de Jain basée sur les états de Laughlin en utilisant les niveaux de Landau supérieurs, et de projeter le résultat dans le plus bas niveau de Landau ($PBNL$). Cette théorie nous permet de prendre l'$EHQF$ comme un $EHQE$. Pour $\upsilon = 1/3$ on va retrouver la même fonction d'onde ce qui donne la même énergie.

## 5.4 Etat excité à $\upsilon = 1/3$

Le tableu 5.2 donne la différence d'énergie d'une seule quasiparticule de différents nombres des particules $N_e$ entre la fonction d'onde de Laughlin et de Jain.

Dans la figure 5.1 nous présentons l'énergie d'interaction coulombienne, en unités de $\frac{e_0^2}{l_0}$, de notre résultat analytique exact à $\upsilon = 1/3$ pour le premier état excité. Le rapport entre l'énergie obtenu par la fonction d'onde d'une seule quasiparticule de Laughlin et de Jain à la position $z_0 = 0$. Pour donner une crédibilité de notre résultat, en le comparant avec des résultats obtenus par la méthode de Monte Carlo (MC) [21]. Cette comparaison est représentée sur la figure 1.5

| $N_e$ | $E^{1qp}_{Laughlin}$ | $E^{1qp}_{Jain}$ | $\Delta E^{1qp} = E^{1qp}_{Laughlin} - E^{1qp}_{Jain}$ |
|---|---|---|---|
| 3 | 0.891203 | 0.891203 | 0.000000 |
| 4 | 1.501387 | 1.501719 | - 0.000331 |
| 5 | 2.248741 | 2.249042 | - 0.000301 |
| 6 | 3.113676 | 3.112197 | 0.001479 |
| 7 | 4.080094 | 4.076219 | 0.003876 |

TAB. 5.2 – Énergies du premier état excité, en unités de $\frac{e_0^2}{l_0}$.

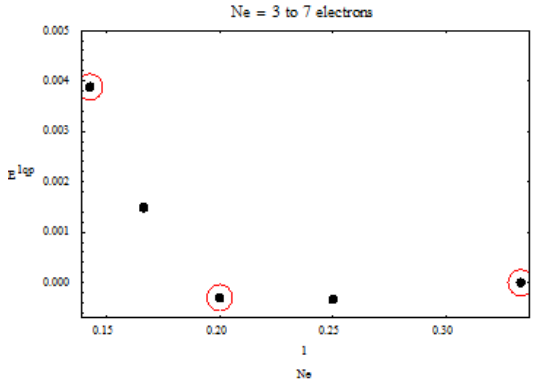



FIG. 5.1 – Comparaison de la différence d'énergie, entre la fonction d'onde d'une seule quasiparticle de Laughlin et de Jain obtenues par un calcul analytique exacte (disque en noir) et la méthode de MC (cercle en rouge)[21].

La différence d'énergie est proche de zéro pour un système de petit nombre d'électrons ($N_e \leq 5$). En effet, cette différence augmente pour un nombre d'électrons ($N_e > 5$). En particulier, la fonction d'onde d'un fermion composite pour une seule quasiparticule donne une énergie de 15% inférieure à celle calculée par la fonction d'onde d'essai proposée par Laughlin.

## 5.5 Conclusion

La fonction d'onde de Laughlin s'écrit comme de simples déterminants de Slater présenté au moyen d'un package Mathématica [20]. Cette base est couramment utilisée

pour décrire les systèmes quantiques à 2D. Par conséquent, notre résultat analytique est en accord avec les résultats obtenu par G. S. Jeon [21].

# Conclusion générale

Ce travail de mémoire nous a permis de décrire un aspect général et fondamental au moyen de modèles simplifiés de la physique de l'*EHQF* dans la géométrie du disque. Les excitations élémentaires, qui sont obtenues lorsqu'on ajoute un électron ou un trou, sont localisées par les impuretés résiduelles dans l'échantillon et ne contribuent pas au transport électronique. Ce ne sont que les *NL* complètement remplis qui contribuent chacun avec un quantum de conductance $e^2/h$.

Nous avons calculé analytiquement l'énergie de l'état fondamental et du premier état excité d'un système de $N_e$=7 électrons en interaction coulombienne au facteur de remplissage $\upsilon = 1/3$, ceci nous a montré que le modèle de Jain est plus stable que le modèle de Laughlin.

Grace aux excitations élémentaires, on peut construire à partir de l'état fondamental d'autre état excité.

Ces excitations élémentaires avec de telles propriétes statistiques sont susceptibles de jouer un rôle dans une variante topologique de l'information quantique.

Des quasi-particules exotiques découvertes dans des nanostructures supraconductrices pourraient servir à construire un ordinateur quantique.

# Annexe A

# interaction électron-électron

Pour déterminer l'interaction coulombienne $V_{ee}$ de 3 électrons par la méthode de Laughlin, il faut suivre ces étapes

**Transformation de Jacobi**

(*=== Code 1 ===*)

n = 3 ;

H = n ;

Print[ $Z_H$ = Sum[$\frac{z_i}{H}$, {i, 1, H}]]

Do[ Print[ $Z_H$ = Sum[$\frac{z_i}{H}$, {i, 1, H}] - $z_{H+1}$], {H, 1, n - 1}]

On obtient $z_i$ en fonction de $Z_H$

$z_1 = \frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{3} + Z_3$

$z_2 = \frac{-Z_1}{2} + \frac{Z_2}{3} + Z_3$

$z_3 = \frac{-2\ Z_2}{3} + Z_3$

Le polynôme vecteur $P_L$ de Laughlin s'écrive

$P_{Laughlin} = D\left[\prod_{\substack{i<j \\ i=1}}^{N_e=3} (z_i - z_j)^3,\ z_1,\ z_2,\ z_3\right]$

On inclut $z_1$ , $z_2$ , $z_3$ dans le polynôme vecteur $P_L$, alors $P_J$ de Jacobi s'écrive pour le cas de Laughlin

$P_J = Z_1^3(\frac{-Z_1}{2} + Z_2)^3(\frac{Z_1}{2} + Z_2)^3$

**Méthode Analytique**

Ce polynôme $P_J$ contient des coefficients impairs $C_i$ =3, 5,...

(*=== Code 2 ===*)

Clear["Global '*"]

SetDirectory[NotebookDirectory[]] ;

Module[{coeffi, clist, inner, inlist, I1, I2, I3, I4, I5, I6, Ke, KeN},

coeffi = Coefficient[Expand[$Z_1^3(\frac{-Z_1}{2} + Z_2)^3(\frac{Z_1}{2} + Z_2)^3$ ,$Z_1$, $C_i$] ;

clist = coeffi /. Plus -> List ;

inner =

Inner[Times, clist /. {$Z_2$ -> 1}, clist, Plus] ;

inlist = inner /. Plus -> List /. {$Z_2$ ->$r_2^2$} ;

I1 = Integrate[inlist*$r_2 r_3$*Exp[-$\frac{3}{8}\frac{r_3^2}{l_0^2}$], {$r_3$,0, Infinity}, Assumptions -> ($l_0 > 0$)] ;

I2 = Integrate[I1*Exp[-$\frac{1}{3}\frac{r_2^2}{l_0^2}$], {$r_2$,0, Infinity}, Assumptions -> ($l_0 > 0$)] ;

I4 = Plus @@ I2 ;

I5 = Integrate[$r_1^{2*C_i}$*Exp[-$\frac{r_1^2}{4l_0^2}$], {$r_1$,0, Infinity}, Assumptions -> ($l_0 > 0$)] ;

I6 = Integrate[$r_1^{2*C_i+1}$*Exp[-$\frac{r_1^2}{4l_0^2}$], {$r_1$,0, Infinity}, Assumptions -> ($l_0 > 0$)] ;

Ke = Times[I4, I5] ;

KeN = Times[I4, I6] ;

Export["sortie0.nb", Ke, "List"] ;

Export["sortie0N.nb", KeN, "List"] ;

Print[Ke] ;

Print[KeN] ;]

**Résultat de calcul**

(*=== Code 3 ===*)

Clear["Global '*"]

SetDirectory[NotebookDirectory[]] ;

Module[{Ne, m, M, L1, L, S1, S1N, S2, S2N, S3, S3N, Sumnomi, Sumdenomi, Sumglo, Prod},

S1 = Import["sortie0.nb"] ;

S1N = Import["sortie0N.nb"] ;

S2 = Import["sortie1.nb"] ;

S2N = Import["sortie1N.nb"] ;

S3 = Import["sortie2.nb"] ;

S3N = Import["sortie2N.nb"] ;

Sumnomi = Plus[S1, S2, S3] ;

Sumdenomi = Plus[S1N, S2N, S3N] ;

Sumglo = Divide[Sumnomi, Sumdenomi] ;

Prod = Times[Sumglo, $e_0^2$] ;

N[Prod, 6]]

$0.297068\frac{e_0^2}{l_0}$.

# Nomenclature

| Sigle | Signification |
|---|---|
| $EHQE$ | Effet Hall Quantique Entier |
| $EHQF$ | Effet Hall Quantique Fractionnaire |
| $GS$ | état fondamental |
| $qp$ | quasi-particule |
| $qe$ | quasi-électron |
| $qt$ | quasi-trou |
| $NL$ | Niveau de Landau |
| $PBNL$ | Plus Bas Niveau de Landau |

| Sigle | Signification |
|---|---|
| $\overrightarrow{A}$ | Potentiel vecteur |
| $\overrightarrow{A}_L$ | Vecteur de la jauge de Landau |
| $\overrightarrow{A}_s$ | Vecteur de la jauge de symétrie |
| $a$ | Opérateur d'annihilation |
| $a^+$ | Opérateur de création |
| $B$ | Champ magnétique |
| $b$ | Opérateur d'annihilation |
| $b^+$ | Opérateur de création |
| $E$ | Champ électrique |
| $\overrightarrow{E_H}$ | Vecteur champ de Hall |
| $\overrightarrow{F}_e$ | Force électrique |
| $\overrightarrow{F_L}$ | Force de Lorentz |
| $\overrightarrow{F_m}$ | Force magnétique |
| $\overrightarrow{H}$ | Vecteur champ magnétique |
| $H_0$ | Hamiltonien díune particule libre |
| $H_{int}$ | Hamiltonien d'intéraction |
| $\hbar$ | Constante de Planck |
| $I$ | Courant électrique |
| $J$ | Densité de courant électrique |
| $T$ | Température |
| $l_B$ | Longueur magnétique |
| $N_e$ | Nombre d'électrons |
| $N_B = \frac{\phi}{\phi_0}$ | Nombre de quanta de flux |
| $n$ | Niveau de Landau |
| $\nu$ | Facteure de remplissage |
| $\phi_0 = \frac{h}{e}$ | Quantum de flux |
| $\omega_c = \frac{eB}{m}$ | Pulsation cycloton |
| $n_e = \frac{N}{S}$ | Densité des charges. |

| Sigle | Signification |
|---|---|
| $\phi = B.S$ | Flux total du champ B |
| $n_B$ | Densité des flux |
| $P_J$ | Polynome de Jacobi |
| $P_L$ | Polynome de Laughlin |
| $S$ | Aire du systéme utilisé |
| $R_c$ | Rayon cyclotron |
| $R_{N_e}$ | Rayon du disque |
| $r$ | Position de l'électron |
| $W$ | Largueur de la plaque |
| $Z_i$ | Coordonnées complexe de Jacobi |
| $z_i$ | Coordonnées complexes |
| $z$ | Nombre complexe |
| $\overline{z}$ | Complexe conjugué |
| $m_e$ | réelle de l'electron |

# Bibliographie


[1] D. C. Tsui, H. L. Stormer, et A. C. Gossard. Two-Dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit. Phys. Rev. Lett., 48, 1559, 1982.

[2] C. Kittel, Introduction à la physique de l'état solide, Dunod, 1979.

[3] R.SOUKHAL HAROUN, effet Hall quantique : Cours, Université M'hamed BOUGARA Boumerdes, 2017.

[4] M. AHMED AMMAR, Effet hall quantique fractionnaire, Cours, Université de Médéa, 2017.

[5] S.M. Girvin et T. Jach, Phys. Rev. B 29,5617, 1984. S. M Girvin : The quantum Hall effect. Rapport technique, 1999.

[6] Chandelier FREDERIC,Quelques applications de la théorie des champs à la physique de la matère condensée : l'effet Hall quantique dans tous ses états, thèse de doctorat,Université Paris 11-orsay, 2003.

[7] M. Ahmed Ammar, Méthodes Analytique et Numérique dans l'Effet Hall Quantique Fractionnaire et Rôle du spin des Électrons, Thèse de doctorat, Université Abou-Bekr Belkaid, Tlemcen, Algérie, 2018.

[8] K.VON KLITZING,G.DORDAet M.PEPPER phys.Rev.Lett., 45, 494, 1980.

[9] Paul Soulé, Bords des Phases de l'Effet Hall Quantique Fractionnaire dans la Géométrie d'un Contact Ponctuel Quantique, Thèse de doctorat, Université Paris 11 –Orsay, 2014.

[10] Mark Oliver Goerbig, Pascal Lederer, Électrons bidimensionnels sous champ magnétique fort : la physique des effets Hall quantiques, Notes de cours, Université Paris Sud, 2006.

[11] D. Yoshioka, The Quantum Hall Effect. Springer, New York, 2002.

[12] O.CIFTJA, Exact results for systemes of electrons in the fractional quantum Hall regime, 2009.

[13] O.CIFTJA,C.Wexler,Phys.Rev.B 67 075304, 2003.

[14] R. B. Laughlin, Anomalous quantum Hall effect : An incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations, Phys. Rev. Lett., 50, 1395, 1983.

[15] J. K. Jain, Composite-fermion approach for the fractional quantum Hall effect, Phys. Rev. Lett., 63, 199, 1989.

[16] K. LADJAL et H. S. MIHOBI, étude analytique et numérique de l'effet Hall quantique fractionnaire par la méthode de Laughlin et de Jain aux fermions composites, mémoire de master, Université de Médéa, 2017.

[17] M. A.Ammar, Analytic results of the excited electronic states at $\nu = 1/3$ and the Laughlin-Jain microscopic wave function approaches Condensed Matter Physics, 22, 23701 : 1-10 (1019).

[18] J. K. Jain, Composite Fermions, (Cambridge University Press2007).

[19] H. L. Störmer, Nobel lecture : The fractional quantum Hall effect, Rev. Mod. Phys. 71, 875, 1999.

[20] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 4.0.

[21] G. S. Jeon, J.K.Jain, Phys. Rev. B68, 165346, 2003.