Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Dr.Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences -Département de Mathématiques & Informatique



MÉMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

Thème

La stabilité de la domination double dans les graphes

Par

BOUKHELKHAL Kaouther

Composition du Jury:

M.	**D. LAISSAOUI**	Maître de conférences	UYF Médéa	Président
M	**S. KHELIFI**	Maître de conférences	UYF Médéa	Promoteur
M.	**N. IKHLEF ESCHOUF**	Maître de conférences	UYF Médéa	Examinateur 1
M.	**R. LEMDANI**	Maître assistant	UYF Médéa	Examinateur 2

Date de soutenance: 07 juillet 2019.

Résumé

Le but de ce mémoire est de contribuer à l'étude de la stabilité de la domination dans les graphes. Soit $G = (V, E)$ un graphe sans sommets isolés. Un dominant double de G est un ensemble de sommets $D \subseteq V$ tel que tout sommet du graphe est ou bien dans D et possède au moins un voisin dans D, ou bien dans $V - D$ et possède au moins deux voisins dans D. Le nombre de domination double de G, noté $\gamma_{\times 2}(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble dominant double de G. La stabilité de la domination double dans G est notée par $st_{\gamma_{\times 2}}(G)$ et c'est le cardinal minimum d'un ensemble non isolant S dans G dont la suppression change $\gamma_{\times 2}(G)$.

Notre travail consiste en premier lieu, à faire le tour des résultats existants dans le domaine de la stabilité par rapport à deux types de domination: la domination ordinaire et la domination totale.

En second lieu, vient notre contribution qui prend pour objet l'étude de la stabilité de la domination double dans les graphes. Nous commençons par donner des propriétés et des remarques concernant $st_{\gamma_{\times 2}}(G)$. Nous explorons ensuite la stabilité de plusieurs graphes simples y compris les chaînes et les cycles, et aussi des graphes ayant un nombre de domination double égal à 2. La dernière partie de notre étude concerne la classe des arbres pour laquelle nous montrons que, pour un arbre non trivial T, on a $st_{\gamma_{\times 2}}(T) \leq 2$. Nous montrons aussi plusieurs propriétés, et donnons une caractérisation pour les chenilles.

Abstract

The purpose of this thesis is to constribute to the study of domination stability in graphs. Let $G = (V, E)$ be an isolated-free graph. A double dominating set G is a set of vertices $D \subseteq V$ such that every vertex of the graph is either in D and has at least one neighbor in D, or in $V - D$ and has at least two neighbors in D. The double domination number of G, denoted $\gamma_{\times 2}(G)$, is the minimum cardinality of a double dominating set of G. The double domination stability of G, denoted $st_{\gamma_{\times 2}}(G)$, is the minimum size of a non-isolating set S in G whose removal changes $\gamma_{\times 2}(G)$.

Our aim is, first, to go around the existing results in the field of stability in relation to two types of domination: ordinary domination and total domination.

Our contribution deals with the study of the stability of double domination in graphs. We begin by giving properties and remarks about $st_{\gamma_{\times 2}}(G)$. We then explore the stability of several simple graphs including paths and cycles, and also graphs with a double domination number equal 2. The last part of our study concerns the class of trees for which we show that for a non-trivial tree T, we have $st_{\gamma_{\times 2}}(G)$. We also show several properties, and give a characterization for caterpillars.

Remerciements

Au terme de ce travail je tiens à faire louange à «Allah» qui ma donné la force d'achever ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon promoteur : Dr. KHELIFI SOUFIANE, Maître de conférences à l'université Yahia Farès de Médéa, pour m'avoir offert l'opportunité d'effectuer ce mémoire, pour ses conseils et son aide précieuse, et aussi pour ses idées fécondes et brillantes qui ont été un élément essentiel à l'aboutissement de cette étude.

Mes gratitudes vont aussi à tous les membres de jury qui me font l'honneur de juger ce travail.

Mes sincères remerciements vont également à tous les enseignants du département de Mathématique et Informatique qui m'ont offert tout ce savoir.

Je leur dis merci de tout mon cœur.

Dédicace

J*e dédie ce mémoire*

A *mes chers parents, ma mère et mon père*

P*our leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements*

A *mes sœurs Amina et Wissal*

A *mon frère Houssem et sa femme*

A *ma chère nièce Rahma*

A *tous les enseignants du département de Mathématique et Informatique*

S*ans exception pour leurs efforts fournis durant ces cinq agréables années*

S*ans oublier tous les professeurs que ce soit du primaire, du moyen ou secondaire.*

A *mes amies: Romaissa, Imen, Halla et Djalila.*

A *l'ensemble des étudiants de ma promotion 2018 /2019.*

KAOUTHER

Table des matières

Introduction **1**

1 Généralités **3**

1.1 Définitions élémentaires de la théorie des graphes 3

1.1.1 Graphe 3

1.1.2 Voisinages et degrés 5

1.1.3 Sous-graphe et graphe partiel 6

1.1.4 Minimalité et maximalité d'un ensemble 6

1.1.5 Chaîne et cycle 7

1.1.6 Graphe connexe 8

1.1.7 Quelques graphes particuliers 9

1.1.8 Invariants d'un graphe 13

1.2 La domination dans les graphes 14

1.2.1 Définition d'un ensemble dominant 15

1.2.2 Quelques paramètres de domination 16

1.2.3 Applications de la domination 18

1.3 Complexité des algorithmes 18

2 La stabilité de la domination et de la domination totale dans les graphes 21

2.1 Définitions des notions de graphes critiques et de graphes stables 21

2.2 La stabilité de la domination dans les graphes 23

2.2.1 La stabilité d'un invariant d'un graphe 23

2.2.2 La stabilité de la domination 23

2.2.3 Complexité du problème de stabilité de la domination 24
2.2.4 Valeurs exactes et bornes sur la stabilité de la domination 25
2.2.5 Propriétés et caractérisations 27
2.2.6 Stabilité de la domination dans les arbres 28
2.3 La stabilité de la domination totale 30
2.3.1 Rappels sur la domination totale 30
2.3.2 Stabilité de la domination totale 33

3 La stabilité de la domination double dans les graphes 37
3.1 Aperçu sur la domination double 37
3.1.1 Introduction 37
3.1.2 Minimalité d'un ensemble dominant double 39
3.1.3 Valeurs exactes et bornes sur le nombre de domination double 39
3.2 Graphes critiques et stables par rapports à la domination double 40
3.3 La stabilité de la domination double 41
3.3.1 Introduction et définitions 41
3.4 Premières remarques et propriétés 43
3.5 Stabilité de la domination double dans quelques graphes simples 46
3.5.1 Graphe complet 46
3.5.2 Graphe biparti complet 47
3.5.3 Étoile 47
3.5.4 Étoile subdivisée 48
3.5.5 Double étoile 49
3.5.6 Couronne d'un graphe 49
3.6 Stabilité de la domination double dans les chaînes 50
3.7 Stabilité de la domination double dans les cycles 51
3.8 Stabilité de la domination double dans les graphes ayant un nombre de domination double égal à 2 53
3.9 Stabilité de la domination double dans les arbres 55
3.9.1 Stabilité de la domination double dans les chenilles 57
3.9.2 Sur la $\gamma^{+}_{\times 2}$-stabilité des arbres 60

Conclusion **61**

Bibliographie **62**

Liste des Figures

1.1.1 Un graphe $G = (V, E)$. 4
1.1.2 Un graphe partiel et un sous-graphe d'un graphe G. 6
1.1.3 Une chaîne P_6 et un cycle C_6. 8
1.1.4 Exemple d'un graphe connexe et d'un graphe non connexe. 8
1.1.5 Exemples des graphes complets. 9
1.1.6 Un graphe G et son graphe complémentaire. 9
1.1.7 Un graphe 3-régulier. 10
1.1.8 Un graphe biparti et un graphe biparti complet $K_{3,3}$. 10
1.1.9 Un arbre et une forêt. 11
1.1.10 Une étoile $K_{1,8}$. 11
1.1.11 Araignée saine et blessée. 12
1.1.12 Une double étoile $S_{3,2}$. 12
1.1.13 Un cycle C_5 et sa couronne. 13
1.2.1 Les reines dans un échiquier. 14
1.2.2 Un graphe biparti complet $K_{2,3}$. 15
1.2.3 Un graphe G tel que $i(G) = 2$. 16
1.2.4 Un graphe G tel que $\gamma_t(G) = 2$. 16
1.2.5 Un graphe G tel que $\gamma_{pr}(G) = 4$. 17
1.2.6 Un graphe G tel que $\gamma_c(G) = 3$. 17
1.2.7 Un graphe G tel que $\gamma_{\times 2}(G) = 4$. 17

2.2.1 Un graphe G. 23
2.2.2 La construction de la famille $\mathcal{T}$. 30

2.3.1 Le graphe de Petersen G_{10}. 31

3.1.1 Un graphe G et une étoile subdivisée $K^*_{1,t}$ 38
3.3.1 Un graphe G tel que $st^-_{\gamma_{\times 2}}(G) = 2$ 42
3.3.2 Un graphe G tel que $st^+_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$ 42
3.3.3 Un graphe G tel que $st_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$ 43
3.4.1 Un graphe G et $G - u$ tel que $st^-_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$ 45
3.8.1 Un graphe G et $G - S$ tel que $st_{\gamma_{\times 2}}(G) = 2$ 55
3.9.1 Une chaîne P_8 et $P_8 - v$. 57

Introduction

L'émergence de la théorie des graphes se situe au XVIIIème siècle avec un article datant de 1736 écrit par Leonhard Euler $(1707 - 1783)$ qui prenait pour objet le fameux problème des sept ponts de Königsberg. On doit à ce mathématicien suisse la naissance de la topologie et les tous premiers fondements de la théorie des graphes.

Depuis, la théorie des graphes s'est développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales..., mais elle n'a été considérée comme une branche à part entière des mathématiques qu'après la parution des travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdös.

D'une manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments, aboutissant simplement à l'étude de sommets et d'arcs.

Parmi les problèmes les plus importants et très étudiés en théorie des graphes, on trouve ceux liés à la domination dans les graphes avec plus de 2000 articles publiés. En plus de leur importance théorique, ces problèmes trouvent également un intérêt pratique dans la modélisation et la résolution de problèmes réels issus de notre quotidien.

Un ensemble dominant dans un graphe est un sous-ensemble de ses sommets tel que tout sommet de ce graphe, est ou bien dans cet ensemble ou bien adjacent à l'un des sommets de cet ensemble. Le nombre de domination d'un graphe est la taille minimale d'un ensemble dominant. Une variante bien connue de la domination est appelée la domination double. On y impose que chaque sommet du graphe doit être dominé au moins deux fois. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant double est appelé nombre de domination double.

Pour un paramètre de domination donné, un graphe ayant subi une modification quelconque comme l'effacement d'un sommet, l'ajout ou l'effacement d'une arête peut voir ce paramètre augmenter, diminuer ou rester inchangé. L'étude de l'effet qui peut être entrainé par ces modifications s'est avéré d'une grande importance que ce soit sur le plan théorique ou pratique.

La stabilité d'un paramètre de domination est le nombre minimum de sommets dont la suppression altère ce paramètre. Notre objectif dans ce mémoire est d'initier l'étude de la stabilité de la domination double dans les graphes.

Après une introduction générale, le mémoire s'articule autour de trois chapitres:

Le premier portera sur les généralités. Nous y donnons en premier les définitions des notions relatives à la théorie des graphes utilisées tout au long de ce mémoire. Nous faisons ensuite une présentation générale sur la domination dans les graphes, puis nous donnons un bref aperçu sur la complexité des algorithmes.

Le deuxième chapitre comporte trois parties. Dans la première, nous donnons la définition de la stabilité d'un invariant quelconque d'un graphe. La seconde est consacrée à la stabilité de la domination. Nous y donnons quelques résultats obtenus par rapport à la stabilité de ce paramètre. En dernière partie, nous présentons brièvement la domination totale, puis nous faisons une présentation de ce qui a été fait concernant la stabilité de la domination totale.

Dans le troisième chapitre, après un bref aperçu sur la domination double, nous présentons ce que nous avons pu concrétiser comme contributions dans le domaine de stabilité de la domination double dans les graphes. Nous présentons des propriétés, des bornes, des valeurs exactes pour plusieurs classes connues de graphes et même une caractérisation pour les chenilles.

Nous terminons ce mémoire en donnant une conclusion générale sur le travail accompli.

Chapitre 1

Généralités

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions et terminologie utilisées dans l'ensemble de ce document. Dans la première partie, nous rappelons quelques définitions de base de la théorie des graphes. Ensuite nous donnons un bref aperçu sur la domination dans les graphes avec la définition de quelques paramètres de domination. En dernier, nous donnons des définitions relatives à la complexité des algorithmes.

Pour plus de détails sur la terminologie utilisée dans ce document, le lecteur est invité à se référer aux ouvrages de Berge [2] et de Haynes, Hedetniemi et Slater [16].

1.1 Définitions élémentaires de la théorie des graphes

1.1.1 Graphe

Un graphe est défini par deux ensembles, un ensemble de sommets et un ensemble de relations entre ces sommets. Selon le type de cette relation on distingue deux classes de graphes.

— Les graphes orientés.

— Les graphes non orientés.

Graphe orienté: C'est un graphe $G = (X, U)$ défini par deux ensembles X et U dits ensemble de sommets et d'arcs respectivement et par deux applications I et $T : U \rightarrow X$ qui associent à chaque arc son extrémité initiale et son extrémité terminale respectivement.

Graphe non orienté: C'est un graphe $G = (V, E)$ défini par deux ensembles V et E dits ensemble de sommets et d'arêtes respectivement. Le cardinal de V est appelé l'ordre de G, il est noté par $n(G)$ ou simplement n, et le cardinal de E est appelé la taille de G, il est noté par $m(G)$ ou simplement m. Une arête $e \in E$ est un couple de sommets (u, v), elle est notée par $e = uv$, où u et v sont ses extrémités.

- Une arête $e = uv$ d'un graphe G est **une boucle** si les extrémités u et v sont confondues.
- Deux **sommets** u et v sont dits **adjacents** si l'arête uv existe dans E, c'est-à-dire, si les deux sommets sont reliés par une arête.
- Deux **arêtes** sont **adjacentes** s'ils ont une extrémité en commun.
- Une arête est **incidente** à un sommet si ce sommet est une extrémité de cette arête.
- Un graphe G est dit **simple** si tout couple de ses sommets est relié par au plus une arête et que toute arête de $E(G)$ a ses extrémités distinctes.
- Un graphe est dit **fini** ou **infini** suivant son ordre.
- Un graphe est dit **discret** s'il ne possède aucune arête.

Dans ce mémoire, tous les graphes considérés sont simples et finis.

Exemple 1.1.1 *Le graphe $G = (V, E)$ de la Figure 1.1.1 est un graphe simple d'ordre 5, il est formé d'un ensemble de sommets $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ et d'un ensemble d'arêtes $E(G) = \{ab, ae, be, ed\}$.*

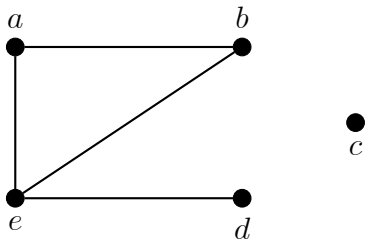


Figure 1.1.1 : Un graphe $G = (V, E)$.

1.1.2 Voisinages et degrés

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

- **Le voisinage ouvert** d'un sommet $v \in V(G)$, noté $N_G(v)$, est l'ensemble de tous les sommets adjacents à v. C'est-à-dire $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$.
- **Le voisinage fermé** d'un sommet $v \in V(G)$, noté $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.
- **Le voisinage privé** d'un sommet v par rapport à un ensemble S est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont pas d'autres voisins dans S. Cet ensemble est noté $pn[v, S]$ et défini par $pn[v, S] = \{u : N_G[v] \cap S = \{v\}\}$.
- **Le voisinage privé externe** d'un sommet v par rapport à un ensemble S est l'ensemble de ses voisins privés dans $V(G) \setminus S$. Cet ensemble est noté $epn[v, S]$ et défini par $epn[v, S] = pn[v, S] \setminus S$.
- **Le voisinage ouvert d'un sous-ensemble** $S \subseteq V(G)$ est $N_G(S) = \underset{v \in S}{\cup} N_G(v)$ et **le voisinage fermé** est $N_G[S] = N(S) \cup S$.
- **Le degré** d'un sommet $v \in V(G)$ noté par $d_G(v)$, est égal au cardinal de son voisinage ouvert.
- Un sommet de degré nul est dit un sommet **isolé.**
- Un sommet de degré égal à un est dit sommet **pendant ou feuille**. L'ensemble des sommets pendants de G est noté par $L(G)$.
- Un sommet adjacent à au moins un sommet pendant est appelé sommet **support**. L'ensemble des sommets supports de G est noté $S(G)$. Si un support v est adjacent à un seul sommet pendant, alors v est **un support faible**, sinon (adjacent à au moins deux sommets pendants) v est **un support fort**.
- Lorsque $d_G(v) = n - 1$, on dit que le sommet v est **universel** dans G**.**
- **Le degré maximum** d'un graphe G, noté $\Delta(G)$, est le maximum des degrés de ses sommets. En d'autres termes, $\Delta(G) = \max\limits_{v \in V(G)} \{d_G(v)\}$.

- **Le degré minimum** d'un graphe G, noté $\delta(G)$, est le minimum des degrés de ses sommets. En d'autres termes, $\delta(G) = \min_{v \in V(G)} \{d_G(v)\}$.

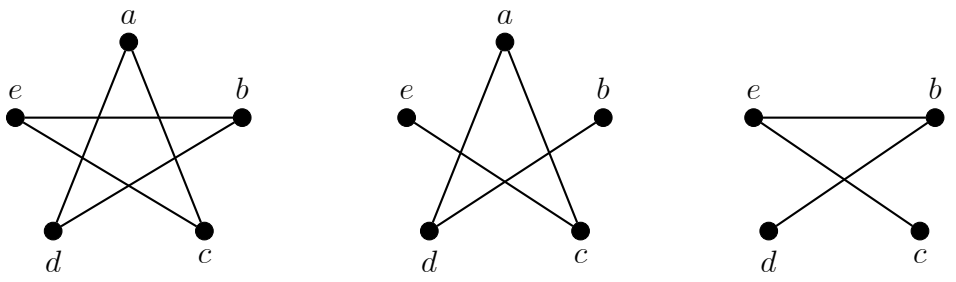
1.1.3 Sous-graphe et graphe partiel

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On appelle **sous-graphe** de G, un graphe $G' = (V', E')$ tel que $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$. Pour un sous-ensemble $A \subseteq V$, le sous-graphe induit par A, noté $G[A]$ ou simplement $\langle A \rangle$, est le graphe ayant A pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans A.

Remarque 1.1.1 *Etant donné un graphe G', on dit que G est sans G' si G' n'est pas un des sous-graphes induits de G.*

Un graphe partiel de G est un graphe obtenu en enlevant une ou plusieurs arêtes de G. Autrement dit, un graphe partiel de G est un graphe H ayant le même ensemble de sommets, et ayant comme ensemble d'arêtes, un sous-ensemble de $E(G) : E(H) \subset E(G)$.

Exemple 1.1.2 *La Figure 1.1.2 représente un graphe partiel et un sous-graphe d'un graphe G.*



un graphe G un graphe partiel de G un sous graphe de G

Figure 1.1.2 : Un graphe partiel et un sous-graphe d'un graphe G.

1.1.4 Minimalité et maximalité d'un ensemble

Soient $G = (V, E)$ un graphe et $\mathcal{P}$ une propriété.

- Un sous-ensemble A de V est dit **minimal** par rapport à la propriété $\mathcal{P}$ si aucun sous-ensemble strict de A ne vérifie cette propriété.

- Un sous-ensemble A de V est dit **maximal** par rapport à la propriété $\mathcal{P}$, si aucun sous-ensemble de V contenant A et différent de A ne vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

- Un sous-ensemble B de V est dit **minimum** ou de **taille minimale** par rapport à la propriété $\mathcal{P}$ si aucun ensemble plus petit que B (pas nécessairement un sous-ensemble de B) ne vérifie cette propriété.

- Un sous-ensemble B de V est dit **maximum** ou de **taille maximale** par rapport à la propriété $\mathcal{P}$, si aucun ensemble plus grand que B (sans nécessairement le contenir) ne vérifie la propriété.

1.1.5 Chaîne et cycle

- **Une chaîne** C dans un graphe $G = (V, E)$ est une séquence finie de sommets $[v_1, v_2, .., v_k]$, telle que pour tout $1 \leq i \leq k-1$, $e_i = v_i v_{i+1} \in E(G)$. L'entier $k-1$ représente **la longueur** de C et les sommets v_1 et v_k sont appelés extrémités de la chaîne C.

- Une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite **simple**.

- Une chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet est dite **élémentaire**.

- Une chaîne minimale induite par n sommets est notée par P_n.

- **Une corde** est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne.

- **La distance** entre deux sommets u et v, notée $d(u, v)$, est la longueur d'une plus courte chaîne reliant u et v.

- **Le diamètre** du graphe G est le maximum des distances entre deux de ses sommets, c'est-à-dire: $diam(G) = \max\limits_{u,v \in V(G)} (d(u, v))$.

- **L'excentricité** d'un sommet v dans G est: $exc(v) = \max\{d(uv) : u \in V(G)\}$.

- **Un cycle** est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues.

- Un cycle **élémentaire** C_n induit par n sommets est un cycle dont les sommets sont distincts.

Exemple 1.1.3 *La Figure 1.1.3 représente une chaîne P_6 et un cycle C_6.*

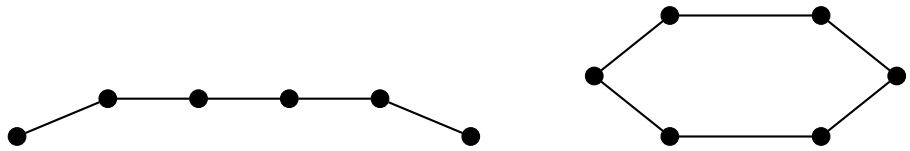


Figure 1.1.3 : Une chaîne P_6 et un cycle C_6.

1.1.6 Graphe connexe

Un graphe $G = (V, E)$ est dit **connexe** si pour toute paire de sommets u, v de V, il existe une chaîne reliant u à v. Si le graphe G est non connexe, une composante connexe est un sous-graphe maximal connexe.

- Une arête $e \in E$ s'appelle **un isthme** si sa suppression de E augmente le nombre de composantes connexes de G.
- Un sommet $v \in V$ s'appelle **un sommet d'articulation** si sa suppression de V augmente le nombre de composantes connexes de G.

Remarque 1.1.2 *Une composante connexe de G est maximale au sens de l'inclusion (elle n'est contenue dans aucune autre composante connexe).*

Exemple 1.1.4 *Le graphe connexe G de la Figure 1.1.4 admet l'arête cd comme ishme, car $G - cd$ est non connexe, et le sommet c est un sommet d'articulation car $G - c$ est non connexe.*

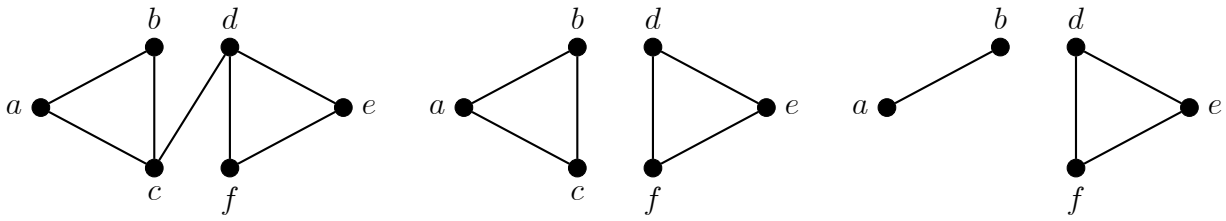


Figure 1.1.4 : Exemple d'un graphe connexe et d'un graphe non connexe.

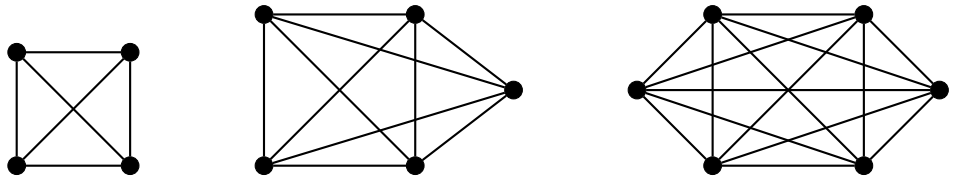
1.1.7 Quelques graphes particuliers

Graphe complet

Le graphe complet d'ordre n, noté par K_n, est le graphe dans lequel tous les sommets sont de degré $n-1$.

Un sous-ensemble de sommets dans un graphe G tel que deux sommets quelconques sont reliés par une arête est appelé **une clique**. L'ordre maximal d'une clique dans un graphe G est appelé **le nombre de clique** de G et noté par $\omega(G)$.

Exemple 1.1.5 *La Figure 1.1.5 donne quelques exemples de graphes complets.*



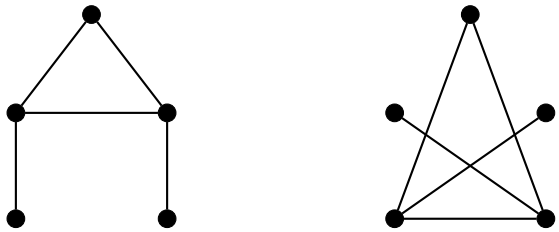
K_4 K_5 K_6

Figure 1.1.5 : Exemples des graphes complets.

Graphe complémentaire

Un graphe complémentaire d'un graphe $G = (V, E)$, noté $\overline{G}$, est un graphe avec le même ensemble de sommets V tel que deux sommets sont adjacents dans $\overline{G}$ si et seulement s'ils ne le sont pas dans G.

Exemple 1.1.6 *Soit G le graphe représenté dans la Figure 1.1.6 (a). Son graphe complémentaire $\overline{G}$ est le graphe représenté dans la Figure 1.1.6 (b) :*



(a) le graphe G (b) le graphe $\overline{G}$

Figure 1.1.6 : Un graphe G et son graphe complémentaire.

Graphe régulier

Un graphe régulier est un graphe dont tous les sommets ont le même degré. Si le degré est k, alors on dit que le graphe est k-régulier. Par exemple les cycles sont des graphes 2-réguliers.

Exemple 1.1.7 *La Figure 1.1.7 représente un graphe* 3*-régulier.*

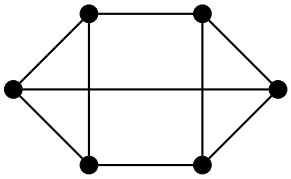


Figure 1.1.7 : Un graphe 3-régulier.

Graphe biparti

Un graphe est dit **biparti** si l'on peut partitionner l'ensemble de ses sommets en deux sous-ensembles V_1 et V_2 tels que les sous-graphes $G[V_1]$ et $G[V_2]$ ne contiennent aucune arête. Un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycles de longueur impaire.

On dit qu'un graphe **biparti est complet** lorsque toute paire de sommets $u \in V_1$ et $v \in V_2$, $uv \in E$. Si $|V_1| = r$ et $|V_2| = s$, alors le graphe biparti complet est noté par $K_{r,s}$.

Exemple 1.1.8 *La Figure 1.1.8 représente un graphe biparti et un graphe biparti complet* $K_{3,3}$.

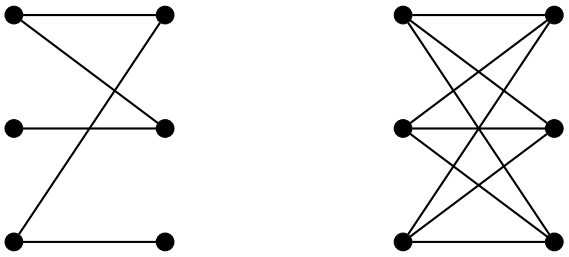


Figure 1.1.8 : Un graphe biparti et un graphe biparti complet $K_{3,3}$.

Arbre et forêt

Un arbre est un graphe connexe sans cycles. Il comporte exactement $(n-1)$ arêtes, il est noté habituellement par T.

Un graphe sans cycle qui n'est pas connexe est appelé **forêt** (toutes les composantes connexes sont des arbres).

Exemple 1.1.9 *La Figure 1.1.9 (a) représente un arbre et la Figure 1.1.9 (b) représente une forêt.*



(a) un arbre (b) une forêt

Figure 1.1.9 : Un arbre et une forêt.

Étoile

Un cas particulier d'un graphe biparti complet dans lequel $|V_1| = 1$ et $|V_2| = t$ est appelé **une étoile** et noté $K_{1,t}$. Le sommet de V_1 est appelé centre ou sommet central de l'étoile.

Exemple 1.1.10 *La Figure 1.1.10 représente une étoile* $K_{1,8}$

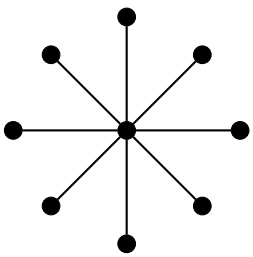


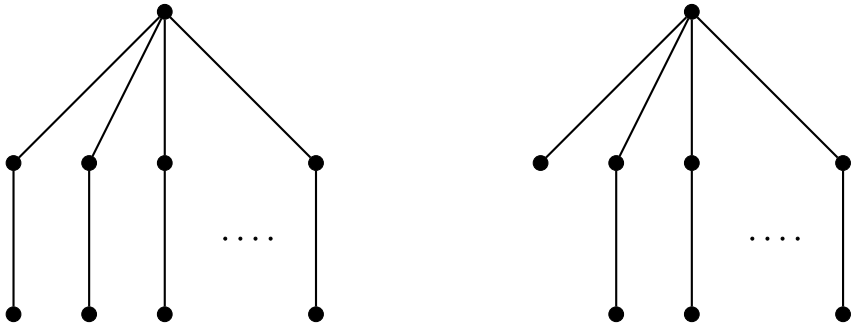
Figure 1.1.10 : Une étoile $K_{1,8}$.

Étoile subdivisée

L'opération de subdivision d'une arête xy d'un graphe G introduit un nouveau sommet z tel que $E(G \cup \{z\}) = ((E(G - \{xy\})) \cup \{xz, yz\}$. **Une étoile subdivisée** (ou **araignée saine**) est obtenue d'une étoile $K_{1,t}$ en subdivisant chaque arête une fois. Elle est notée par $K^*_{1,t}$.

Si $q < t$ arêtes de l'étoile sont subdivisées, on appelle le graphe obtenu une **araignée blessée**.

Exemple 1.1.11 *La Figure 1.1.11 (a) représente un étoile subdivisée $K^*_{1,t}$ (ou araignée saine) et la Figure 1.1.11 (b) représente une araignée blessée*



(a) une araignée saine (b) une araignée bléssée

Figure 1.1.11 : Araignée saine et blessée.

Double étoile

Une double étoile $S_{r,s}$ est le graphe formé par les deux étoiles $K_{1,r}$ et $K_{1,s}$ avec une arête reliant les deux centres.

Exemple 1.1.12 *La Figure 1.1.12 représente une double étoile $S_{3,2}$.*

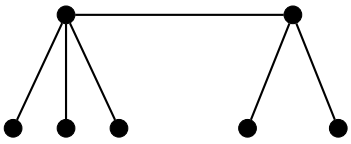


Figure 1.1.12 : Une double étoile $S_{3,2}$.

Galaxie

Une galaxie est un graphe dont toutes les composantes connexes sont des étoiles.

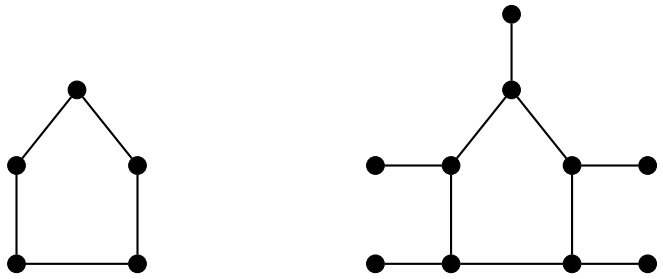
Griffe

Une griffe d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble de sommets de G qui engendre une étoile $K_{1,3}$.

Couronne d'un graphe

La couronne d'un graphe $G = (V, E)$, est le graphe $G \circ K_1$ obtenu d'une copie de G en attachant à chaque sommet de G un nouveau sommet. Il est à noter que l'ordre de $G \circ K_1$ est $2|V|$.

Exemple 1.1.13 *La Figure 1.1.13 représente un graphe C_5 et sa couronne $C_5 \circ K_1$.*



C_5 $C_5 \circ K_1$

Figure 1.1.13 : Un cycle C_5 et sa couronne.

1.1.8 Invariants d'un graphe

Les graphes G et H sont dit isomorphes s'il existe une application bijective $f : V(G) \to V(H)$ telle que pour toute paire de sommets x, y de G, l'arête $xy \in E(G)$ si et seulement si l'arête $f(x)f(y) \in E(H)$.

Si deux graphes sont isomorphes, alors ils partagent de nombreuses propriétés qui sont appelées invariants (des deux graphes). En d'autres termes, un invariant d'un graphe est une propriété préservée par isomorphisme comme le nombre de ses sommets, le nombre de ses arêtes.

Un stable dans un graphe $G = (V, E)$, appelé aussi, **ensemble indépendant**, est un sous-ensemble $S \subseteq V$ de sommets deux à deux non adjacents. Le cardinal minimum (resp. maximum) d'un stable maximal de G, noté $i(G)$ (resp. $\alpha(G)$), est appelé **le nombre de domination stable** (resp. **le nombre de stabilité**) de G.

Un couplage dans un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble d'arêtes non adjacentes deux à deux. On note par $\beta(G)$ la taille maximale d'un couplage dans G.

Le couplage M est dit **parfait** si tout sommet de V est incident à une arête de M.

1.2 La domination dans les graphes

Ayant présenté les notions fondamentales de la théorie des graphes, nous sommes maintenant en mesure de définir la notion d'ensemble dominant dans un graphe.

Considérons le problème suivant qui a été à l'origine de l'étude des ensembles dominants dans les graphes. La Figure 1.2.1 montre un échiquier standard 8×8 dans lequel est placée une reine **"R"**. D'après les règles du jeu d'échecs, la reine dans la Figure 1.2.1 peut se déplacer à (ou dominer) n'importe quelle case marquée par un **"X"**. Au 19 ème siècle, les échephiles européens ont considéré le problème de déterminer le nombre minimum de reines qui peuvent être placées sur l'échiquier de telle sorte que toutes les cases de ce dernier soient attaquées ou occupées par une reine.

	X		X				
X	X	X					
X	R	X	X	X	X	X	X
X	X	X					
	X		X				
	X			X			
	X				X		
	X					X	

R							
							R
	R						
						R	
		R					
			R				

Figure 1.2.1 : Les reines dans un échiquier.

La Figure 1.2.1 montre un ensemble de six reines qui attaquent ou dominent toutes les cases de l'échiquier. A cette même époque, on croyait que le nombre minimum de reines pour dominer les cases d'un échiquier 8×8 était 5. Ce qui est d'ailleurs vrai.

Le problème de domination des cases d'un échiquier peut être présenté d'une manière plus générale pour n'importe quelle pièce du jeu d'échecs en un problème de domination des sommets d'un graphe.

1.2.1 Définition d'un ensemble dominant

Un sous-ensemble de sommets $D \subseteq V(G)$ est dit ensemble **dominant** de G si tout sommet de $V(G) \setminus D$ a au moins un voisin dans D.

Le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G, appelé **nombre de domination**, est noté $\gamma(G)$. Tout ensemble dominant de cardinal $\gamma(G)$ est appelé $\gamma(G)$-ensemble.

Le cardinal maximum d'un ensemble dominant minimal de G, appelé **nombre de domination supérieur,** est noté $\Gamma(G)$.

Remarque 1.2.1 *Un graphe G peut avoir plusieurs $\gamma(G)$-ensembles. Voir la Figure 1.2.2*

Remarque 1.2.2 *Si D est un ensemble dominant d'un graphe G, alors D contient tous les sommets isolés de G.*

Remarque 1.2.3 *Puisque le nombre de domination est défini pour tout graphe, et puisque tout graphe est dominé par son ensemble de sommets, alors le nombre de domination est toujours défini et $1 \leq \gamma(G) \leq |V(G)|$.*

Exemple 1.2.1 *Dans le graphe $K_{2,3}$ de la Figure 1.2.2 , $\gamma(K_{2,3}) = 2$ et $D_1 = \{a, b\}, D_2 = \{a, c\}$ et $D_3 = \{b, e\}$ sont des $\gamma(K_{2,3})$-ensembles.*

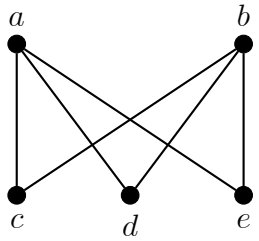


Figure 1.2.2 : Un graphe biparti complet $K_{2,3}$.

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes des ensembles dominants dans les graphes. En voici des exemples :

- Un ensemble $D \subseteq V(G)$ est un dominant si $N[D] = V$.
- Un ensemble $D \subseteq V(G)$ est un dominant si quel que soit $x \in V \setminus D, N(x) \cap D \neq \varnothing$
- Un ensemble $D \subseteq V(G)$ est un dominant si quel que soit $x \in V \setminus D, |N(x) \cap D| \geq 1$.

1.2.2 Quelques paramètres de domination

Plusieurs types de domination sont définis en imposant des propriétés supplémentaires sur l'ensemble des sommets qui domine ou sur l'ensemble dominé. Décrivons quelques types les plus étudiés. Par exemple imposer la condition que le sous-graphe induit par l'ensemble dominant soit sans arêtes donne la domination stable ou bien sans sommets isolés donne la domination totale...

Il est à signaler qu'il existe actuellement plus de 200 types de domination et plus de 2000 articles réalisés dans ce domaine.

La domination stable

Un sous-ensemble $D \subseteq V(G)$ est dit **dominant stable** de G si D est dominant et le sous-graphe induit par D est stable. **Le nombre de domination stable**, noté $i(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble dominant stable de G.

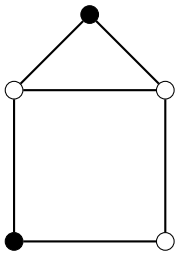


Figure 1.2.3 : Un graphe G tel que $i(G) = 2$.

La domination totale

Un sous-ensemble $D \subseteq V(G)$ est dit **dominant total** de G si D est dominant et tout sommet de V est adjacent à au moins un sommet de D. **Le nombre de domination totale**, noté $\gamma_t(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble dominant totale de G.

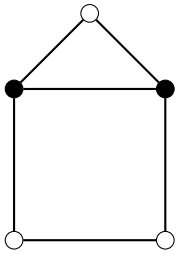


Figure 1.2.4 : Un graphe G tel que $\gamma_t(G) = 2$.

La domination couplée

Un sous-ensemble $D \subseteq V(G)$ est dit **dominant couplé** de G si D est dominant et le sous-graphe induit par D admet un couplage parfait. **Le nombre de domination couplé**, noté $\gamma_{pr}(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble dominant couplé de G.

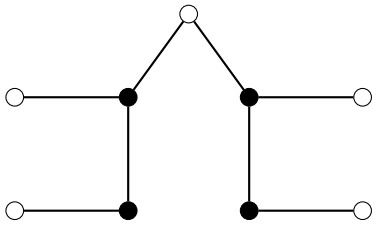


Figure 1.2.5 : Un graphe G tel que $\gamma_{pr}(G) = 4$.

La domination connexe

Un sous-ensemble $D \subseteq V(G)$ est dit **dominant connexe** de G si D est un dominant et le sous-graphe induit par D est connexe. **Le nombre de domination connexe**, noté $\gamma_c(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble dominant connexe de G.

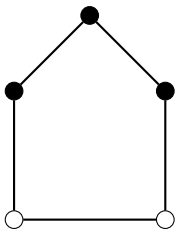


Figure 1.2.6 : Un graphe G tel que $\gamma_c(G) = 3$.

La domination double

Un sous-ensemble $D \subseteq V(G)$ est dit dominant double de G si tout sommet de V est dominé par au moins deux sommets. **Le nombre de domination double**, noté $\gamma_{\times 2}(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble dominant double de G.

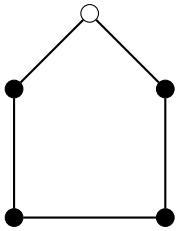


Figure 1.2.7 : Un graphe G tel que $\gamma_{\times 2}(G) = 4$.

1.2.3 Applications de la domination

La domination est utilisée dans beaucoup de situations concrètes et son développement théorique a énormément contribué dans la résolution de problèmes pratiques comme les problèmes relevant des réseaux de communications, les systèmes de surveillances (par Radars), les systèmes électriques, les réseaux informatiques et d'autres. Le côté d'application de la domination a été souvent la cause de la naissance d'autres paramètres de domination. A titre d'exemple, nous citons deux applications :

Localisation des stations de radars

Ayant un certain nombre d'endroits stratégiques à maintenir en surveillance, le problème consiste à trouver un ensemble de sites dans lesquels des radars doivent être posés dans le but que tous les sites soient surveillés. Il serait plus rentable bien sûr de déposer le moins possible de radars. Ce problème a été discuté par Berge dans [3].

Problème de communication dans un réseau

Nous avons un réseau de villes avec des lignes de transmission. Il s'agit de trouver comment installer des stations de transmission dans certaines villes de telle sorte que n'importe quelle ville puisse recevoir un message depuis au moins une station de transmission. Ce problème a été présenté de manière détaillée par Liu dans [22].

1.3 Complexité des algorithmes

Le concept d'algorithme a été souvent défini par des termes équivalents plus ou moins précis: méthode, procédé, processus,...etc. Ces termes indiquent l'utilisation de règles ou d'instructions pour obtenir un résultat en un nombre fini d'étapes.

Un algorithme de résolution d'un problème (P) donné est une procédure décomposable en opérations élémentaires transformant une chaîne de caractères représentant les données de n'importe quel exemple ou instance du problème (P) en une chaîne de caractères représentant les résultats de (P).

La performance d'un algorithme est généralement mesurée selon la relation existante entre la taille de l'exemple traité (exprimée en termes du nombre n de caractères nécessaires pour le codage des données) et le temps d'exécution (exprimé en termes du nombre $f(n)$ d'opérations élémentaires). Le codage des données est tel que l'encombrement mémoire nécessaire pour stocker un nombre positif N, est égale au plus petit entier supérieur ou égal à $\log_2(N+1)$.

Un algorithme est dit efficace ou polynomial si le nombre total d'opérations élémentaires effectuées pour aboutir à la solution est borné par un polynôme en la taille du problème. Autrement dit: il existe deux constantes C et k telles que $f(n) = Cn^k$. Un tel algorithme a une complexité $O(n^k)$.

Un problème est dit polynomial ou appartient à la classe P (problèmes déterministes polynomiaux) s'il existe un algorithme polynomial ou efficace pour le résoudre. Les problèmes de la classe P sont dits "faciles".

Un problème d'optimisation combinatoire consiste à chercher une meilleure solution parmi un ensemble fini de solutions réalisables. A chaque problème d'optimisation combinatoire, on peut associer un problème de reconnaissance de la manière suivante.

Soit un problème d'optimisation combinatoire:
Trouver $s' \in S \mid f(s') = min\{f(s) \mid s \in S\}$.

Soit a un nombre, on définit le problème de reconnaissance ou de décision associé:
Existe-t-il un $s' \in S \mid f(s') \leq a$?

Pour la plupart des problèmes d'optimisation combinatoire que l'on connait, on ne dispose pas d'algorithmes de résolution efficaces. Un problème de décision est dit dans NP (problèmes non déterministes polynomiaux) (resp. CO-NP) si dans le cas où la réponse est affirmative (resp. négative), on peut produire un certificat qui permet de vérifier en temps polynomial la réponse donnée.

Etant donné que les algorithmes efficaces sont des algorithmes non déterministes, il est clair que P $\subseteq$ NP. Mais la classe NP contient des problèmes pour lesquels on ne connaît pas d'algorithme polynomial de résolution. La conjecture P $\neq$ NP demeure cependant ouverte.

On dit qu'un problème (P_1) se réduit en temps polynomial à un problème (P_2), s'il existe un algorithme pour (P_1) qui fait appel à un algorithme de résolution de (P_2) et si cet algorithme de résolution de (P_1) est polynomial lorsque la résolution de (P_2) est comptabilisée comme une opération élémentaire.

Un problème de décision dans NP est dit NP-complet si tout problème de la classe NP peut lui être réduit en temps polynomial. Ainsi, s'il existe un algorithme polynomial permettant de résoudre un problème NP-complet, il existerait un algorithme polynomial pour tous les problèmes de la classe NP. Les problèmes NP-durs sont des problèmes au moins aussi difficiles que les problèmes NP-complets et tout problème d'optimisation combinatoire dont le problème de re reconnaissance est NP-complet est NP-dur.

Chapitre 2

La stabilité de la domination et de la domination totale dans les graphes

Notre objectif principal dans ce chapitre est de faire le tour des résultats obtenus dans le domaine de la stabilité de la domination et la domination totale. Nous commençons par donner les définitions des graphes critiques et stables pour les différentes modifications apportées à un graphe, avant de donner la définition de la notion de stabilité d'un paramètre de domination quelconque. Ensuite, nous présentons les principaux résultats obtenus figurant dans les trois articles qui ont eu pour objet le concept de stabilité.

2.1 Définitions des notions de graphes critiques et de graphes stables

Le problème des graphes critiques et stables suite à l'application de modifications est parmi les plus étudiés en domination, et cela est dû son importance aussi bien sur le plan théorique que pratique comme l'étude de la tolérance aux pannes lors de la conception de réseaux.

Il existe plusieurs modifications qui peuvent être apportées sur un graphe. On définit ci-après les plus étudiées en domination dans un graphe $G = (V, E)$.

Définition 2.1.1 *Soit $v \in V(G)$. Le graphe $G - v$ est le graphe obtenu par la suppression de v et toutes les arêtes de G incidentes à v.*

Définition 2.1.2 *Soit $e \in E(G)$. Le graphe $G - e$ est le graphe obtenu par la suppression de l'arête e du graphe G (ses extrémités restent).*

Définition 2.1.3 *Soit $e \in E(\overline{G})$. Le graphe $G + e$ est le graphe obtenu par l'ajout de l'arête e dans G.*

Définition 2.1.4 *La contraction d'une arête ou l'identification de deux sommets adjacents u et v est une opération qui consiste à remplacer ces deux sommets par un nouveau sommet, noté par $\overline{uv}$, dont le voisinage ouvert est $(N_G(u) \cup N_G(v)) - \{u, v\}$. Le graphe obtenu est noté par G_{uv}.*

Définitions d'un graphe critique ou stable par rapport à un paramètre de domination quelconque π.

$\cdot\pi$-arête-critique	si $\pi(G + e) < \pi(G)$ pour toute arête $e \in E(\overline{G})$
$\cdot\pi^+$-arête-critique	si $\pi(G + e) > \pi(G)$ pour toute arête $e \in E(\overline{G})$
$\cdot\pi$-arête-stable	si $\pi(G + e) = \pi(G)$ pour toute arête $e \in E(\overline{G})$
$\cdot\pi$-arête-enlevée-critique	si $\pi(G - e) > \pi(G)$ pour toute arête $e \in E(G)$
$\cdot\pi^-$-arête-enlevée-critique	si $\pi(G - e) < \pi(G)$ pour toute arête $e \in E(G)$
$\cdot\pi$-arête-enlevée-stable	si $\pi(G - e) = \pi(G)$ pour toute arête $e \in E(G)$
$\cdot\pi$-sommet-critique	si $\pi(G - v) < \pi(G)$ pour tout sommet $v \in V(G)$
$\cdot\pi^+$-sommet-critique	si $\pi(G - v) > \pi(G)$ pour tout sommet $v \in V(G)$
$\cdot\pi$-sommet-stable	si $\pi(G - v) = \pi(G)$ pour tout sommet $v \in V(G)$
$\cdot\pi^+$-dot-critique	si $\pi(G_{uv}) > \pi(G)$ pour toute arête $e = uv \in E(G)$
$\cdot\pi^-$-dot-critique	si $\pi(G_{uv}) < \pi(G)$ pour toute arête $e = uv \in E(G)$
$\cdot\pi$-dot-stable	si $\pi(G_{uv}) < \pi(G)$ pour toute arête $e = uv \in E(G)$

La notion d'un graphe critique en domination a été introduite par Walikar et Acharya [25] en 1979. Bauer, Harary, Nieminen et Suffel [1] ont abordé un peu plus tard les graphes pour lesquels le nombre de domination change lors de la suppression d'une arête quelconque.

Quelques années après la parution de l'article de Walikar et al. [25], Sumner et Blitch [23] ont initié l'étude des graphes dont le nombre de domination diminue suite à l'ajout de n'importe quelle arête qui n'est pas présente dans le graphe considéré.

2.2 La stabilité de la domination dans les graphes

2.2.1 La stabilité d'un invariant d'un graphe

Toujours dans le même contexte, un autre type de stabilité a été définie. Il s'agit d'étudier le comportement d'un invariant d'un graphe quand un ou plusieurs sommets sont supprimés.

Définition 2.2.1 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et μ un invariant arbitraire de G. La μ-stabilité de G est le nombre minimal de sommets dont la suppression altère $\mu(G)$.*

Quelques invariants dans les graphes ont la propriété de ne pas augmenter lorsque l'on supprime n'importe quel ensemble $S \subseteq V(G)$, autrement dit $\mu(G - S) \leq \mu(G)$. Pour d'autres invariants, il existe des sous-ensembles $S_1, S_2 \subseteq V(G)$ tel que $\mu(G - S_1) < \mu(G)$ et $\mu(G - S_2) > \mu(G)$. Pour ce type d'invariants, on définit la μ^--stabilité (resp. μ^+-stabilité) de G comme le nombre minimal de sommets dont la suppression diminue (resp. augmente) μ. Ce nombre est noté par $st^-_\mu(G)$ (resp. $st^+_\mu(G)$).

Exemple 2.2.1 *Soient G le graphe de la Figure 2.2.1 et $k(G)$ le nombre de ses sommets universels. On a $k(G) = 2$, cependant $k(G - u) = 1$ et $k(G - v) = 4$. D'où $st^-_k(G) = st^+_k(G) = 1$.*

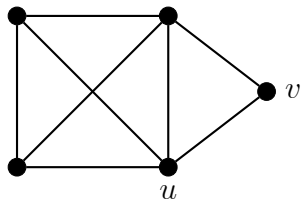


Figure 2.2.1 : Un graphe G.

2.2.2 La stabilité de la domination

Le concept de la stabilité de la domination dans les graphes a été introduit en 1983 par Bauer, Harary, Nieminen et Suffel [1]. Un autre article dû à Jafari Rad et al. [19] a pris comme objet ce concept 33 ans plus tard.

Définition 2.2.2 ([1]) *La γ^--stabilité de G ou $\gamma^-(G)$, notée aussi par $st^-_\gamma(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble $S \subseteq V(G)$ dont la suppression diminue le nombre de domination de G.*

$$st^-_\gamma(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S| : \gamma(G - S) < \gamma(G)\}.$$

Définition 2.2.3 ([1]) *La γ^+-stabilité de G ou $\gamma^+(G)$, notée aussi par $st^+_\gamma(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble $S \subseteq V(G)$ dont la suppression augmente le nombre de domination de G.*

$$st^+_\gamma(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S| : \gamma(G - S) > \gamma(G)\}.$$

Définition 2.2.4 ([1]) ***La stabilité de la domination*** *ou la γ-stabilité d'un graphe G est le nombre minimum de sommets dont la suppression change le nombre de domination de G, il est noté par $st_\gamma(G)$.*

$$st_\gamma(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S| : \gamma(G - S) \neq \gamma(G)\} = \min\{st^-_\gamma(G), st^+_\gamma(G)\}.$$

Remarque 2.2.1 ([19]) *Si G est un graphe non connexe avec des composantes connexes $G_1, G_2, .., G_k$, alors $st_\gamma(G) = \min_{1 \leq i \leq k} \{st_\gamma(G_i)\}$.*

Il est donc suffisant lors de l'étude de la stabilité de la domination de considérer les graphes connexes.

2.2.3 Complexité du problème de stabilité de la domination

Le premier problème à considérer est celui de la complexité, il a été traité par Jafari Rad et al. [19]. Ils ont utilisé une transformation depuis le 3-SAT pour montrer que le problème de décision de la γ-stabilité est NP-dur.

PROBLEME DE STABILITE DE LA DOMINATION
INSTANCE: un graphe $G = (V, E)$ et le nombre de domination $\gamma(G)$.
QUESTION: est-t-il vrai que $st_\gamma(G) > 1$?

Théorème 2.2.1 ([19]) *Le problème de décision de la γ-stabilité est NP-dur même pour les graphes bipartis.*

Puisque tout graphe G avec $st_\gamma(G) > 1$ appartient à la classe des graphes qui ne contiennent aucun sommet dont la suppression diminue le nombre de domination (dit sommet critique), Jafari Rad et al. [19] ont obtenu le résultat suivant.

Théorème 2.2.2 ([19]) *Le problème de décision pour la détermination des graphes qui ne contiennent aucun sommet critique est NP-dur même pour les graphes bipartis.*

2.2.4 Valeurs exactes et bornes sur la stabilité de la domination

Pour quelques classes de graphes, le nombre de stabilité de la domination a été déterminé d'une manière exacte. Nous en citons quelques cas ici.

Remarque 2.2.2 ([19]) *Si G est une étoile ou une double étoile, alors $st_\gamma(G) = 1$.*

Remarque 2.2.3 ([19]) *Pour un graphe biparti complet $K_{r,s}$ avec $2 \leq r \leq s$,*

$$st_\gamma(K_{r,s}) = r - 1.$$

Sachant que $\gamma(P_n) = \gamma(C_n) = \lfloor (n+2)/3 \rfloor$, les nombres de stabilité pour les chaînes et les cycles sont donnés ci-après.

Proposition 2.2.1 ([19]) *Pour $n \geq 2$*

$$st_\gamma(P_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3). \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 2.2.2 ([19]) *Pour $n \geq 4$*

$$st_\gamma(C_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3) \\ 2 & \text{si } n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3) \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans l'impossibilité de déterminer des valeurs exactes du nombre de stabilité de la domination pour le cas général, plusieurs bornes ont été établies.

Les premières bornes qu'on va présenter reviennent à Jafari Rad et al. [19].

Proposition 2.2.3 ([19]) *Si G un graphe d'ordre n, alors $st_\gamma(G) \leq n$ avec l'égalité si et seulement si $G = K_n$.*

Théorème 2.2.3 ([19]) *Pour tout graphe G tel que $\gamma(G) \geq 2$ on a, $st_\gamma(G) \leq \lfloor n/\gamma(G) \rfloor$, et cette borne est atteinte.*

Il est clair que la borne du Théorème 2.2.3 est atteinte pour les cycles C_n tels que $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$.

Jafari Rad et al. [19] ont montré aussi qu'il n'existe aucun graphe ayant nombre de stabilité égal à son ordre moins un.

Proposition 2.2.4 ([19]) *Il n'existe aucun graphe G d'ordre n tel que $st_\gamma(G) = n - 1$.*

Pour les graphes ayant un nombre de domination d'au moins deux, nous avons la borne supérieure suivante.

Proposition 2.2.5 ([19]) *Pour tout graphe G avec $\gamma(G) \geq 2$, on a*

$$st_\gamma(G) \leq \min \{\delta(G) + 1, n - \delta(G) - 1\}.$$

Une autre borne a été trouvée auparavant par Bauer et al. [1]. Avant de la présenter, nous avons besoin de la définition suivante. Pour un graphe G, soit $\rho(G) = \min\{|epn_G(v, S)| : v \in S, S \text{ est } \gamma(G)\text{-ensemble}\}$.

Proposition 2.2.6 ([1]) *Pour tout graphe G, $st^-_\gamma(G) \leq \rho(G) + 1$.*

Corollaire 2.2.1 ([1]) *Pour tout graphe G, $st^-_\gamma(G) = 1$ si et seulement si $\rho(G) = 0$.*

Bauer et al. [1] ont montré aussi qu'un graphe G qui possède de grands nombres de stabilité $st^-_\gamma(G)$ et $st^+_\gamma(G)$ est contraint à avoir un grand degré minimum aussi.

Proposition 2.2.7 ([1]) *Pour tout graphe G on a $st_\gamma(G) \leq \delta(G) + 1$.*

Notons que $st^+_\gamma(G)$ et $st^-_\gamma(G)$ ne peuvent être simultanément grands pour les graphes comportant au moins un sommet pendant.

Proposition 2.2.8 ([1]) *Soit G est un graphe ayant un sommet pendant. Si $st^+_\gamma(G) \geq 2$, alors $st^-_\gamma(G) \leq 2$. C'est vrai particulièrement pour les arbres.*

Jafari Rad et al. [19] ont montré des inégalités du type Nordhaus-Gaddum pour la somme des nombres de stabilité d'un graphe et de son complémentaire. Il est à noter que si $\gamma(G) = 1$, alors $st_\gamma(\overline{G}) = 1$, ce qui donne la borne suivante qui est atteinte pour les graphes complets.

Remarque 2.2.4 ([19]) *Si G est un graphe avec $\gamma(G) = 1$ ou $\gamma(\overline{G}) = 1$, alors $st_\gamma(G) + st_\gamma(\overline{G}) \leq n + 1$, et cette borne est atteinte.*

Théorème 2.2.4 ([19]) *Si G est un graphe avec $\gamma(G) \geq 2$ et $\gamma(\overline{G}) \geq 2$, alors $st_\gamma(G) + st_\gamma(\overline{G}) \leq n - 1$, et cette borne est atteinte.*

Un exemple de graphes pour lesquels cette dernière borne est atteinte est le cycle C_5.

2.2.5 Propriétés et caractérisations

Une première propriété importante due à Bauer et al. [1] concerne les sommets dont la suppression augmente le nombre de domination.

Proposition 2.2.9 ([1]) *La suppression d'un sommet v de G augmente $\gamma(G)$ si et seulement si*

1. v n'est pas isolé et il appartient à tout $\gamma(G)$-ensemble, et
2. Il n'existe aucun ensemble dominant de $G - N[v]$ ayant $\gamma(G)$ sommets qui domine aussi $N(v)$.

Il est clair que le nombre de stabilité de la domination d'un graphe ne peut excéder son ordre. Jafari Rad et al. [19] ont montré aussi qu'il n'existe aucun graphe ayant nombre de stabilité égal à son ordre moins un et deux autres propriétés dans le même contexte.

Proposition 2.2.10 ([19]) *Il n'existe aucun graphe G d'ordre n tel que $st_\gamma(G) = n - 1$.*

Proposition 2.2.11 ([19]) *Si $\gamma \geq 2$ et $1 \leq k \leq 2\gamma - 2$, alors il n'existe aucun graphe G d'ordre n tel que $\gamma(G) = \gamma$ et $st_\gamma(G) = n - k$.*

Proposition 2.2.12 ([19]) *Pour tous les entiers n et k tel que $1 \leq k \leq n$ et $k \neq n-1$, il existe un graphe G d'ordre n tel que $st_\gamma(G) = k$.*

Afin de donner une caractérisation des graphes dont le nombre de stabilité est égal à leur ordre moins deux, nous avons besoin de définir une famille particulière de graphes. Le graphe $G = G_{k,n}$ est construit à partir d'un graphe complet K_k de sommets $v_1, v_2, ..., v_k$ en ajoutant $n-k$ nouveaux sommets $u_1, u_2, ..., u_{n-k}$ ainsi que les arêtes $v_i u_j$ pour $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n-k$.

Proposition 2.2.13 ([19]) *Pour un graphe G on a $st_\gamma(G) = n-2$ si et seulement si $G = G_{n-2,n}$.*

Théorème 2.2.5 ([19]) *Il n'existe pas de caractérisation en termes de sous-graphes induits interdits pour un graphe G d'ordre n avec $st_\gamma(G) = k$ tel que $1 \leq k \leq n/\gamma(G)$.*

2.2.6 Stabilité de la domination dans les arbres

Les arbres sont parmi les classes de graphes les plus étudiées en domination et en théorie des graphes en général grâce à leur importance pour la compréhension de la structure des graphes. Les auteurs de ([1],[19]) se sont intéressés particulièrement à cette classe de graphes.

Bauer et al. [1] ont donné plusieurs propriétés et caractérisations concernant la stabilité de la domination pour la classe des arbres. Ils ont utilisé en particulier les propriétés des sommets qui appartiennent à tout γ-ensemble et des sommets qui n'appartiennent à aucun.

Proposition 2.2.14 ([1]) *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 3$, $\gamma(T-v) > \gamma(T)$ si et seulement si v appartient à tout $\gamma(T)$-ensemble.*

Ce résultat peut être généralisé pour un graphe quelconque mais dans une seule direction.

Proposition 2.2.15 ([1]) *Si v est un sommet de G tel que v appartient à tout $\gamma(T)$-ensemble, alors $\gamma(G-v) > \gamma(G)$.*

Une description structurelle des arbres pour lesquels $st^+_\gamma(T) = 2$ est donnée dans la proposition suivante.

Proposition 2.2.16 ([1]) *Soit T est un arbre. Alors $st^+_\gamma(T) = 2$ si et seulement s'il existe deux sommets u, v tels que*

1. Tout $\gamma(T)$-ensemble contient soit v ou u.
2. v appartient à tout $\gamma(T-u)$-ensemble et u appartient à tout $\gamma(T-v)$-ensemble.
3. Il n'existe aucun sommet qui appartient à tout $\gamma(T)$-ensemble.

Dans cette dernière partie consacrée à la stabilité de la domination, nous présentons une caractérisation constructive de la famille des arbres ayant un nombre de stabilité égal à deux a été établie par Jafari Rad et al. [19].

D'après la Proposition 2.2.7, $st_\gamma(T) \in \{1, 2\}$ pour tout arbre T. Afin de donner une caractérisation des arbres pour lesquels $st_\gamma(T) = 2$, on définit la famille $\mathcal{T}$ des arbres $T = T_k$ qui peuvent être obtenus comme suit. Soit T_1 une chaîne P_2. Si k est un entier positif, alors T_{k+1} peut être obtenu récursivement à partir de T_k à l'aide de l'une des trois opérations ci-dessous.

- **Opération** O_1 : Ajouter une chaîne P_2 et joindre l'un de ses sommets à un sommet de T_k adjacent à au moins deux sommets supports de degré 2.
- **Opération** O_2 : Ajouter une chaîne P_5 et joindre son sommet d'excentricité minimum à un sommet quelconque de T_k.
- **Opération** O_3 : Ajouter une chaîne P_3 et joindre l'un de ses sommets pendants à un sommet de T_k qui est ou bien un sommet pendant, un support ou il est adjacent à une chaîne P_3.

Voir dans la Figure 2.2.2 une description des trois opérations de la construction de la famille $\mathcal{T}$.

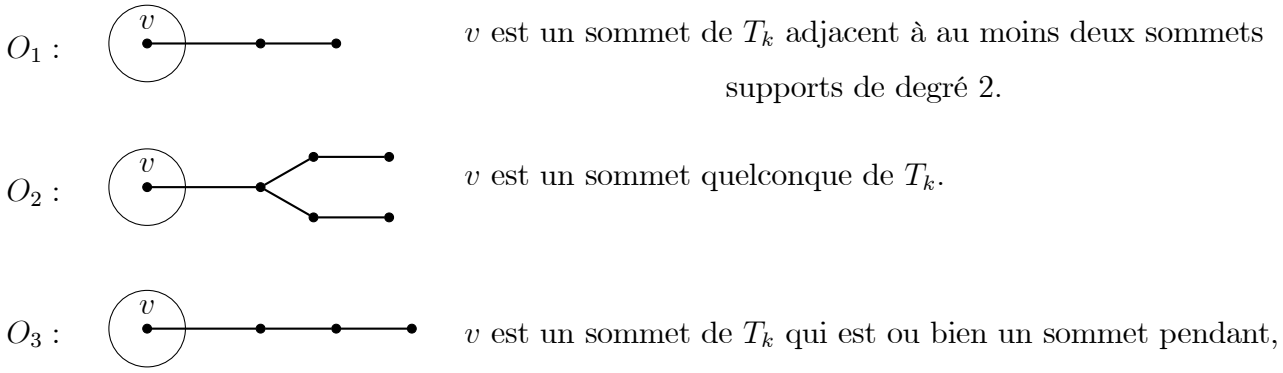


Figure 2.2.2 : La construction de la famille $\mathcal{T}$.

Théorème 2.2.6 ([19]) *Soit T est un arbre. Alors $st_\gamma(T) = 2$ si et seulement si $T \in \mathcal{T}$.*

2.3 La stabilité de la domination totale

2.3.1 Rappels sur la domination totale

La domination totale a été introduite par Cockayne, Dawes et Hedetniemi [10]. C'est l'un des types de domination les plus étudiés.

Définition 2.3.1 *Soit $G = (V, E)$ est un graphe. Un ensemble $S \subseteq V$ est un dominant total (EDT) de G s'il est dominant et le sous-graphe induit par S ne contient pas de sommets isolés.* ***Le nombre de domination totale*** *de G, noté $\gamma_t(G)$, est le cardinal minimum d'un dominant total.*

Exemple 2.3.1 *Soit le graphe de Petersen G_{10} de la Figure 2.3.1 . Les ensembles $S_1 = N[v_1] = \{v_1, v_2, v_5, u_2\}$ et $S_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, u_4, u_5\}$ sont des EDT de G_{10}. Donc $\gamma_t(G_{10}) \leq 4$, et puisqu'il n'existe aucun dominant total de cardinal 3, $\gamma_t(G_{10}) = 4$ et S_1 est un $\gamma_t(G_{10})$-ensemble.*

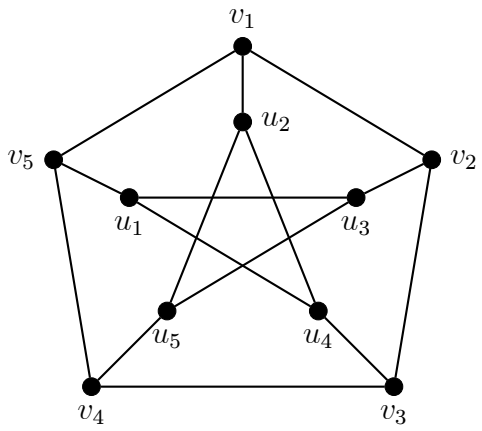


Figure 2.3.1 : Le graphe de Petersen G_{10}.

Remarque 2.3.1 *La domination totale n'est définie que pour les graphes sans sommets isolés.*

Remarque 2.3.2 *Si G est un graphe sans sommets isolés, alors $2 \leq \gamma_t(G) \leq n$.*

La domination totale est aussi riche en applications. Prenons par exemple un réseau de micro-ordinateurs dans lequel un groupe de serveurs peut communiquer avec n'importe quel micro en dehors du groupe. En plus, tout serveur doit être relié à au moins un autre serveur dans lequel la même information est dupliquée. Le plus petit groupe possible de serveurs avec cette propriété est un ensemble dominant total minimum du graphe représentant le réseau.

Pour la minimalité d'un EDT, Cockayne et al. [10] ont établi les conditions suivantes.

Proposition 2.3.1 ([10]) *Si S est un EDT minimal d'un graphe connexe G, alors tout sommet $v \in S$ a au moins l'une des propriétés suivantes.*

P_1 : *Il existe un sommet $w \in V - S$ tel que $N(w) \cap S = \{v\}$;*

P_2 : *$G[S - \{v\}]$ contient un sommet isolé.*

Valeurs exactes et bornes sur le nombre de domination totale

Pour les cycles et les chaînes le nombre de domination totale est donné dans la remarque suivante.

Remarque 2.3.3 *Pour* $n \geq 3$

$$\gamma_t(C_n) = \gamma_t(P_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & si \quad n \equiv 0(\mathrm{mod}\, 4) \\ \frac{n+1}{2} & si \quad n \equiv 1,3(\mathrm{mod}\, 4) \\ \frac{n}{2}+1 & si \quad n \equiv 2(\mathrm{mod}\, 4). \end{cases}$$

La première borne en fonction de l'ordre d'un graphe connexe revient à Cockayne et al. [10].

Théorème 2.3.1 ([10]) *Soit G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$. Alors $\gamma_t(G) \leq \frac{2n}{3}$.*

Les graphes atteignant cette borne ont été caractérisés par Brigham, Carrington et Vitray [7].

Théorème 2.3.2 ([7]) *Soit G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$. Alors $\gamma_t(G) = \frac{2n}{3}$ si et seulement si G est un C_3, un C_6 ou un $F \circ P_2$ pour un graphe connexe F.*

Il est clair que pour un graphe sans sommets isolés G, $\gamma(G) \leq \gamma_t(G)$. Bollobas et Cockayne [6] ont donné un encadrement du nombre de domination total en fonction du nombre de domination.

Théorème 2.3.3 ([6]) *Pour tout graphe sans sommets isolés, $\gamma(G) \leq \gamma_t(G) \leq 2\gamma(G)$.*

Les graphes critiques et stables par rapport à la domination totale

On a souligné auparavant que lorsqu'un paramètre de domination est d'un grand intérêt du point de vue théorique et pratique, il est important de savoir comment ce il se comporte lorsque le graphe est modifié. En effet, vu l'importance de la domination totale, de nombreuses études ont été menées dans ce sens.

Van der Merwe [24] a été le premier à étudier les graphes pour lesquels le nombre de domination totale diminue lorsqu'on ajoute une arête. Dans [12], les auteurs ont étudié les graphes pour lesquels le nombre de domination totale change lorsqu'on supprime une arête quelconque, alors que dans [13], les graphes considérés sont ceux pour lesquels le nombre de

domination totale reste inchangé (stable) après l'ajout de n'importe quelle arête. Goddard et al. [14], et Desormeaux et al. [11] ont étudié les graphes dont le nombre de domination totale change lorsqu'on supprime n'importe quel sommet.

2.3.2 Stabilité de la domination totale

Le concept de la stabilité de la domination totale a été introduit par Henning et al. [18] et c'est le seul travail accompli dans ce domaine. Leur objectif était de trouver des propriétés des nombres de stabilité de la domination totale, d'établir des bornes et de caractériser les graphes atteignant ces bornes.

Puisque la domination totale n'est définie que pour les graphes qui ne comportent aucun sommet isolé, les graphes considérés dans cette partie sont donc sans sommets isolés.

Commençons tout d'abord par donner les premières définitions.

Définition 2.3.2 *Un ensemble* ***non isolant*** *de sommets de G est un ensemble $D \subseteq V(G)$ tel que $G - D$ est sans sommets isolés. On note $NI(G)$ l'ensemble de tous les ensembles non-isolants de G*

Définition 2.3.3 ([18]) *La γ_t^--stabilité de G, notée par $st^-_{\gamma_t}(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble $S \subseteq NI(G)$ dont la suppression diminue le nombre de domination totale de G.*

$$st^-_{\gamma_t}(G) = \min_{S \subseteq NI(G)} \{|S| : \gamma_t(G - S) < \gamma_t(G)\}.$$

Définition 2.3.4 ([18]) *La γ_t^+-stabilité de G, notée par $st^+_{\gamma_t}(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble $S \subseteq NI(G)$ dont la suppression augmente le nombre de domination totale de G.*

$$st^+_{\gamma_t}(G) = \min_{S \subseteq NI(G)} \{|S| : \gamma_t(G - S) > \gamma_t(G)\}.$$

S'il n'existe aucun ensemble non-isolant de G dont la suppression augmente le nombre de domination totale, alors on pose $st^+_{\gamma_t}(G) = \infty$. La chaîne P_7 est un exemple de ces graphes.

Définition 2.3.5 ([18]) ***La stabilité de la domination totale*** *ou la γ_t-stabilité d'un graphe G est le cardinal minimum d'un ensemble $S \subseteq NI(G)$ dont la suppression change le*

nombre de domination totale de G, il est noté par $st_{\gamma_t}(G)$.

$$st_{\gamma_t}(G) = \min_{S \subseteq NI(G)} \{|S| : \gamma_t(G - S) \neq \gamma_t(G)\} = \min\{st^-_{\gamma_t}(G), st^+_{\gamma_t}(G)\}.$$

Valeurs exactes

Les auteurs ont considéré le graphe sans sommets K_0 (ou graphe nul) comme un graphe, d'où la nécessité de supprimer tous les sommets d'un graphe ayant un nombre de domination totale égal à deux pour voir ce dernier diminuer.

Remarque 2.3.4 ([18]) *Si G est un graphe d'ordre n et* $\gamma_t(G) = 2$, *alors* $st^-_{\gamma_t}(G) = n$.

Sachant que $\gamma_t(C_n) = \gamma_t(P_n) = \lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/4 \rceil - \lfloor n/4 \rfloor$ pour tout $n \geq 3$, les auteurs ont pu déterminer le nombre de stabilité de la domination totale pour les chaînes et les cycles.

Proposition 2.3.2 ([18]) *Pour* $n \geq 5$, *si G est une chaîne ou un cycle, alors*

$$st^-_{\gamma_t}(G) = \begin{cases} 3 & si\ n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4) \\ 2 & si\ n \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4) \\ 1 & si\ n \equiv 1, 2 (\mathrm{mod}\, 4). \end{cases}$$

Proposition 2.3.3 ([18]) *Pour* $n \geq 8$,*et* $n \neq 10$,

$$st^+_{\gamma_t}(P_n) = \begin{cases} 3 & si\ n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4) \\ 2 & si\ n \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4) \\ 1 & si\ n \equiv 0, 1 (\mathrm{mod}\, 4). \end{cases}$$

Proposition 2.3.4 ([18]) *Pour* $n \geq 5$,

$$st_{\gamma_t}(P_n) = \begin{cases} 2 & si\ n \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4) \\ 1 & sinon. \end{cases}$$

Proposition 2.3.5 ([18]) *Si* $n \geq 9$ *et* $n \notin \{10, 11, 14\}$, *alors* $st^+_{\gamma_t}(C_n) \geq 3$. *En outre,*

(a) Si $n \geq 9$ *et* $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$, *alors* $st^+_{\gamma_t}(C_n) = 3$.

(b) Si $n \geq 12$ *et* $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$, *alors* $st^+_{\gamma_t}(C_n) = 3$.

Proposition 2.3.6 ([18]) *Pour $n \geq 5$,*

$$st_{\gamma_t}(C_n) = \begin{cases} 3 & si\ n \equiv 0(\mathrm{mod}\,4) \\ 2 & si\ n \equiv 3(\mathrm{mod}\,4) \\ 1 & si\ n \equiv 1,2(\mathrm{mod}\,4). \end{cases}$$

Bornes et caractérisations

La première borne établie par les auteurs est donnée dans la remarque suivante.

Remarque 2.3.5 ([18]) *Si G est un graphe d'ordre n et $\gamma_t(G) \geq 3$, alors $st^-_{\gamma_t}(G) \leq n-2$.*

Ayant comme objectif de trouver des bornes supérieures pour $st^-_{\gamma_t}(G)$ et $st_{\gamma_t}(G)$, Henning et al. [18] ont commencé par établir une borne supérieure pour la γ_t^--stabilité d'un arbre et de caractériser les graphes qui atteignent cette borne. Pour ce faire, ils ont commencé par définir deux familles d'arbres.

- **La famille $\mathcal{F}_\Delta$:** Pour les entiers $k \geq 2$, et $\Delta \geq 2$, soit $T_{k,\Delta}$ un graphe obtenu de l'union disjointe de k double étoiles $S_{(\Delta-1,\Delta-1)}$ par l'ajout de $k-1$ arêtes entre les sommets pendants de ces double étoiles de telle sorte que le graphe obtenu est un arbre de degré maximum Δ.

Soit $\mathcal{F}_{k,\Delta}$ la famille de tous les arbres $T_{k,\Delta}$, et soit

$$\mathcal{F}_\Delta = \underset{k\geq 2}{\cup} \mathcal{F}_{k,\Delta}.$$

- **La famille $\mathcal{H}_\Delta$:** Pour $\Delta = 2$, soit $\mathcal{H}_\Delta = \{P_n : n \equiv 3(\mathrm{mod}\,4) \text{ et } n \geq 7\}$, pour les entiers $\Delta \geq 3$ et $\Delta \geq k \geq 2$, soit $\mathcal{H}_{k,\Delta}$ le graphe obtenu de l'union disjointe de k double étoiles $S_{(\Delta-1,\Delta-1)}$ en choisissant un sommet pendant de chaque double étoile et en identifiant ces k sommets pendant en un nouveau sommet. Soit $\mathcal{H}_{k,\Delta}$ la famille de tous les arbres $H_{k,\Delta}$, et soit

$$\mathcal{H}_\Delta = \underset{k\geq 2}{\cup} \mathcal{H}_{k,\Delta}.$$

Ils ont eu ensuite besoin de montrer les lemmes suivants.

Lemme 2.3.1 ([18]) *Si G est un graphe connexe sans sommets isolés, alors G contient un arbre recouvrant T tel que $\gamma_t(T) = \gamma_t(G)$.*

Lemme 2.3.2 ([18]) *Pour $\Delta \geq 2$, si $T \in \mathcal{F}_\Delta$, alors $st^-_{\gamma_t}(T) = 2\Delta - 1$.*

Lemme 2.3.3 ([18]) *Pour $\Delta \geq 2$, si $T \in \mathcal{F}_\Delta$, alors $st^+_{\gamma_t}(T) \leq \Delta - 1$.*

Lemme 2.3.4 ([18]) *Pour $\Delta \geq 2$, si $T \in \mathcal{H}_\Delta$, alors $st_{\gamma_t}(T) = 2\Delta - 2$.*

La borne supérieure et la caractérisation sont données dans le théorème suivant.

Théorème 2.3.4 ([18]) *Si T est un arbre de degré maximun Δ tel que $\gamma_t(T) \geq 3$, alors*

(a) $st^-_{\gamma_t}(T) \leq 2\Delta - 1$, avec égalité si et seulement si $T \in \mathcal{F}_\Delta$.

(b) $st_{\gamma_t}(T) \leq 2\Delta - 2$, et cette borne est atteinte pour $\Delta \geq 2$.

Ils ont aussi montré une borne supérieure pour la stabilité de la domination totale d'un graphe connexe dont le nombre de domination totale est au moins égal à trois.

Théorème 2.3.5 ([18]) *Si G est un graphe connexe de degré maximum Δ tel que $\gamma_t(G) \geq 3$, alors $st_{\gamma_t}(G) \leq 2\Delta - 1$.*

Chapitre 3

La stabilité de la domination double dans les graphes

Nous avons présenté auparavant les résultats existants sur la notion de stabilité des paramètres de domination dans les graphes. Nous avons vu que les seuls paramètres qui ont été explorés sont le nombre de domination et le nombre de domination totale. Dans ce chapitre, nous entamons l'étude de la stabilité de la domination double.

3.1 Aperçu sur la domination double

3.1.1 Introduction

La domination double est un cas particulier d'un concept plus général appelé la k-tuple domination. Ce type de domination a été introduit par Harary et Haynes dans [15].

Définition 3.1.1 *Soient $G = (V, E)$ un graphe simple et k un entier positif. Un sous-ensemble D de V est dit un k-tuple dominant si pour tout sommet v de V, $|N_G[v] \cap S| \geqslant k$.*

Pour $k = 1$, on a la 1-tuple domination qui est la domination ordinaire. La domination double est donc définie de la k-tuple domination lorsque $k = 2$.

Définition 3.1.2 *Un sous-ensemble D de V est un ensemble dominant double (EDD) de G si tout sommet de V est ou bien dans D et possède au moins un voisin dans D, ou bien*

dans $V - D$ et possède au moins deux voisins dans D. ***Le nombre de domination double*** *de G, noté $\gamma_{\times 2}(G)$, est le cardinal minimum d'un EDD de G.*

Dans ce document, nous notons le nombre de domination double d'un graphe G par $\gamma_{\times 2}(G)$, bien que ce paramètre de domination a été noté dans la littérature par d'autres notations comme $\gamma_d(G)$ ou $dd(G)$. Si D est un ensemble dominant double de G de cardinal minimum, D est appelé $\gamma_{\times 2}(G)$-ensemble.

Remarque 3.1.1 *Le graphe nul est le graphe qui ne contient aucun sommet, noté par K_0 et $\gamma_{\times 2}(K_0) = 0$.*

Remarque 3.1.2 *Pour un graphe non trivial $G = (V, E)$,*

G possède un $\gamma_{\times 2}(G)$-ensemble si et seulement si G est sans sommets isolés.

L'ensemble des sommets $V(G)$ est toujours un dominant double, et un dominant double contient au moins deux sommets, d'où $2 \leq \gamma_{\times 2}(G) \leq |V(G)|$.

Exemple 3.1.1 *Pour le graphe G de la Figure 3.1.1 , $D_1 = \{a, e, g, c\}$ et $D_2 = \{b, f, d, h\}$ sont des ensembles dominants doubles minimum et $\gamma_{\times 2}(G) = 4$ puisque les sommets de G ne peuvent pas être double dominés par trois sommets. Pour l'étoile subdivisée $K^*_{1,t}$ de la Figure 3.1.1 , soit D un EDD quelconque de $K^*_{1,t}$. Puisque tout sommet pendant v_i pour $1 \leq i \leq k$, pour être double dominé, doit être dans D, et comme tout sommet de D doit posséder au moins un voisin dans D, alors tout support u_i pour $1 \leq i \leq k$ doit aussi être dans D, Donc $\gamma_{\times 2}(K^*_{1,t}) = 2t$.*

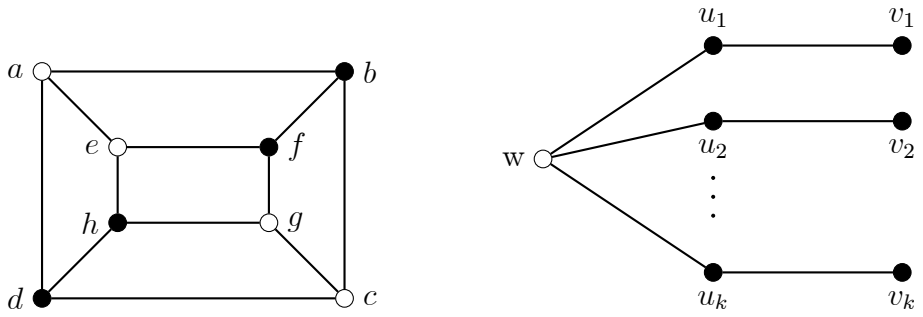


Figure 3.1.1 : Un graphe G et une étoile subdivisée $K^*_{1,t}$.

Nous avons vu que tout sommet pendant et tout support de l'étoile subdivisée $K^*_{1,t}$ doivent être dans tout EDD de celle-ci, et les arguments qu'on a présentés sont valables pour tout graphe.

Remarque 3.1.3 *Tout EDD d'un graphe G contient tous ses supports et tous ses sommets pendants.*

Khelifi et Chellali [21] ont montré que le nombre de domination double d'un graphe constitué uniquement de sommets supports et de sommets pendants est égal à son ordre.

Remarque 3.1.4 ([21]) *Soit G un graphe sans sommets isolés. Alors $\gamma_{\times 2}(G) = |V(G)|$ si et seulement si tout sommet de G est un support ou un sommet pendant.*

3.1.2 Minimalité d'un ensemble dominant double

Pour n'importe quel type de domination, il est d'une grande importance d'étudier les conditions de minimalité d'un ensemble ayant la propriété requise. Pour la domination double, Chellali et Haynes [9] ont prouvé le théorème suivant:

Théorème 3.1.1 ([9]) *Soient G un graphe sans sommets isolés et D un EDD de G. Alors D est minimal si et seulement si chaque sommet $v \in D$ satisfait l'une des conditions suivantes:*

1. *v est un sommet pendant dans $\langle D \rangle$.*
2. *v est adjacent à un sommet pendant dans $\langle D \rangle$.*
3. *Il existe un sommet v dans $V - D$ tel que $N(u) \cap D = \{v, w\}$.*

3.1.3 Valeurs exactes et bornes sur le nombre de domination double

Pour quelques graphes particuliers, le nombre de domination double a été déterminé d'une manière exacte [15], [4].

- $\gamma_{\times 2}(P_n) = \lceil \frac{2n+2}{3} \rceil$.
- $\gamma_{\times 2}(C_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$.
- $\gamma_{\times 2}(K_n) = 2$ pour tout $n \geq 2$.
- $\gamma_{\times 2}(K_{r,s}) = 4$ pour $r \geq s \geq 3$.
- $\gamma_{\times 2}(K_{1,t}) = t + 1$.

Dans l'impossibilité de déterminer des valeurs exactes du nombre de domination double pour le cas général, de nombreuses bornes ont été établies dans plusieurs articles, nous en citons ici quelques-unes:

Théorème 3.1.2 *Soit G un graphe sans sommets isolés de degré maximum Δ et de degré minimum δ, ayant n sommets et m arêtes. Alors:*

- $\gamma_{\times 2}(G) \geq \gamma(G) + 1$.
- $\gamma_{\times 2}(G) \geq \frac{4n-2m}{3}$.
- $\gamma_{\times 2}(G) \geq \frac{2n}{\Delta+1}$.
- $\gamma_{\times 2}(G) \leq n + 1 - \delta$.
- *Si $\delta \geq 2$ alors* $\gamma_{\times 2}(G) \leq \frac{n+\gamma_t(G)}{2}$.

3.2 Graphes critiques et stables par rapports à la domination double

L'étude des notions de graphes critiques et stables par rapport à la domination double dans les graphes a été entamée par Thacker et Haynes [17]. Ils se sont intéressés aux graphes $\gamma_{\times 2}$-arête-critiques, c'est-à-dire les graphes pour lesquels le nombre de domination double baisse quand n'importe quelle arête du graphe complémentaire est ajoutée. Ils ont caractérisé les

cycles et les arbres ayant cette propriété. De plus, ils ont étudié les graphes arête-critiques ayant un nombre de domination double égal à 2, 3 ou 4.

Chellali et Haynes [8] ont initié l'étude des graphes $\gamma_{\times 2}$-arête-enlevée-stables, et en particulier les graphes dont le nombre de domination double ne change pas si n'importe quelle arête non pendante est supprimée qu'ils ont appelés semi-stables. Ils ont donné des propriétés de ces graphes, des exemples de classes de graphes connues, et aussi une caractérisation constructive pour les arbres.

Dans [20], Khelifi et al. ont étudié les graphes dont le nombre de domination double augmente quand n'importe quelle arête enlevée. Les résultats les plus importants qu'ils ont obtenus concernent des classes particulières de graphes comme les arbres, les graphes sans P_4 et les graphes sans P_5 pour lesquels des caractérisations ont été établies grâce à une condition nécessaire et suffisante pour les graphes arête-enlevée-critiques.

Les classes des graphes $\gamma_{\times 2}$-sommet-stables et $\gamma_{\times 2}$-sommet-critiques ont été étudiés un peu plus tard par Khelifi et Chellali dans [21]. Plusieurs propriétés de ces graphes y sont données en plus d'une caractérisation descriptive des arbres critiques et une autre constructive des arbres stables.

3.3 La stabilité de la domination double

3.3.1 Introduction et définitions

Pour un graphe G sans sommets isolés, le fait d'effacer un sommet ou un sous-ensemble de sommets non isolant peut diminuer son nombre de domination double, ça peut le laisser inchangé comme ça peut l'augmenter. L'effet de l'effacement d'un seul sommet sur le nombre de domination double d'un graphe G est évalué ci-après:

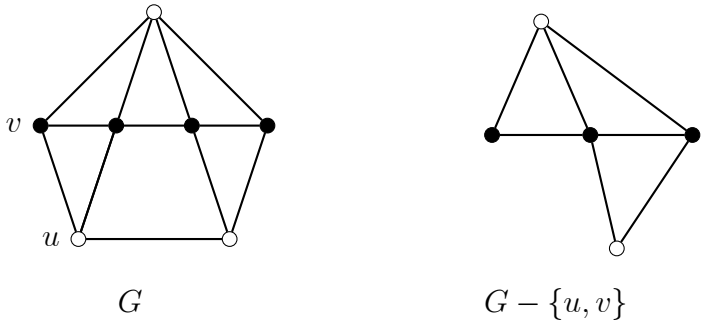
Théorème 3.3.1 ([21]) *Soit G un graphe connexe d'ordre au moins trois. Alors pour tout sommet v différent d'un sommet support, $\gamma_{\times 2}(G) - 2 \leq \gamma_{\times 2}(G - v) \leq \gamma_{\times 2}(G) + d_G(v) - 1$.*

Nous commençons par définir les différentes notions de stabilité de la domination double dans un graphe G sans sommets isolés.

Définition 3.3.1 *La $\gamma^{-}_{\times 2}$-stabilité de G, notée par $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble $S \subseteq NI(G)$ dont la suppression diminue le nombre de domination double de G.*

$$st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(G) = \min_{S \subseteq NI(G)} \{|S| : \gamma_{\times 2}(G - S) < \gamma_{\times 2}(G)\}.$$

Exemple 3.3.1 *Pour le graphe G de la Figure 3.3.1 , on a $\gamma_{\times 2}(G) = 4$. On peut facilement voir que $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(G) = 2$ puisqu'il n'existe aucun sommet dont la suppression diminue $\gamma_{\times 2}(G)$ et d'autre part on a $\gamma_{\times 2}(G - \{u, v\}) = 3 < \gamma_{\times 2}(G)$.*



G $\qquad\qquad$ $G - \{u, v\}$

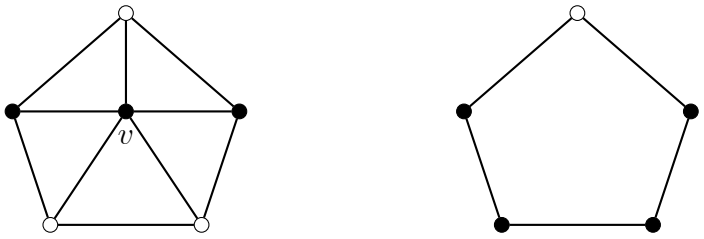
Figure 3.3.1 : Un graphe G tel que $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(G) = 2$.

En considérant que le graphe nul possède un nombre de domination double égal à 0, la suppression de tous les sommets d'un graphe diminue forcément son nombre de domination double. Par conséquent, la $\gamma^{-}_{\times 2}$-stabilité d'un graphe non trivial est toujours définie.

Définition 3.3.2 *La $\gamma^{+}_{\times 2}$-stabilité de G, notée par $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble $S \subseteq NI(G)$ dont la suppression augmente le nombre de domination double de G.*

$$st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(G) = \min_{S \subseteq NI(G)} \{|S| : \gamma_{\times 2}(G - S) > \gamma_{\times 2}(G)\}.$$

Exemple 3.3.2 *Soit le graphe G de la Figure 3.3.2 . Puisque $\gamma_{\times 2}(G) = 3$ et $\gamma_{\times 2}(G - v) = 4$, la suppression du sommet v augmente le nombre de domination double de G. On a donc $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$.*



G $\qquad\qquad$ $G - v$

Figure 3.3.2 : Un graphe G tel que $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$.

S'il n'existe aucun ensemble non-isolant d'un graphe G dont la suppression augmente son nombre de domination double, on posera $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(G) = \infty$. Le graphe complet K_n est un exemple de ces graphes.

Définition 3.3.3 ***La stabilité de la domination double*** *ou la $\gamma_{\times 2}$-stabilité d'un graphe G est le cardinal minimum d'un ensemble $S \subseteq NI(G)$ dont la suppression change le nombre de domination double de G, il est noté par $st_{\gamma_{\times 2}}(G)$.*

$$st_{\gamma_{\times 2}}(G) = \min_{S \subseteq NI(G)}\{|S| : \gamma_{\times 2}(G - S) \neq \gamma_{\times 2}(G)\} = \min\{st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(G), st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(G)\}.$$

Exemple 3.3.3 *Pour le graphe G de la Figure 3.3.3 , on a $\gamma_{\times 2}(G) = 3$. la suppression du v change le nombre de domination double de G. D'où $st_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$.*



Figure 3.3.3 : Un graphe G tel que $st_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$.

Remarque 3.3.1 *Puisque la $\gamma^{-}_{\times 2}$-stabilité est toujours définie pour un graphe G, il en est de même pour $\gamma_{\times 2}$-stabilité.*

Si un graphe G est non connexe formé par $k \geq 2$ composantes $G_1, G_2, .., G_k$, il est clair que $st_{\gamma_{\times 2}}(G) = \min_{1 \leq i \leq k}\{st_{\gamma_{\times 2}}(G_i)\}$. Nous allons donc considérer des graphes connexes dans notre étude.

3.4 Premières remarques et propriétés

Puisque la $\gamma_{\times 2}$-stabilité est définie pour tout graphe G sans sommets isolés et la suppression de tous les sommets de G donne le graphe K_0 avec $\gamma_{\times 2}(K_0) = 0$, on peut donner un encadrement du nombre de domination double de G.

Remarque 3.4.1 *Pour tout graphe $G = (V, E)$ sans sommets isolés, $1 \leq st_{\gamma_{\times 2}}(G) \leq |V(G)|$.*

Les graphes qui seront considérés dorénavant sont sans sommets isolés d'ordre $n \geq 3$ puisqu'un graphe sans sommets isolés d'ordre 2 est un graphe complet K_2 avec $\gamma_{\times 2}(K_2) = 2$ et donc $st_{\gamma_{\times 2}}(K_2) = 2$.

Si on considère un graphe G qui possède un $\gamma_{\times 2}$-ensemble D tel que $\langle D \rangle$ comporte au moins une composante d'ordre au moins 3, on peut trouver une meilleure borne supérieure pour $st_{\gamma_{\times 2}}(G)$ en fonction du degré maximum.

Proposition 3.4.1 *Si G est un graphe ayant un $\gamma_{\times 2}(G)$-ensemble D tel que $\langle D \rangle$ contient une compostante d'ordre au moins 3, alors $st_{\gamma_{\times 2}}(G) \leq \Delta(G)$.*

Preuve. Soit v un sommet non isolant de $\langle D \rangle$ (un tel sommet existe puisque $\langle D \rangle$ contient une compostante d'ordre au moins 3). On peut facilement voir que l'ensemble $D - \{v\}$ est un dominant double de $G - (\{v\} \cup (N_G(v) - D))$. Puisque v possède au moins un voisin dans D, $|\{v\} \cup (N_G(v) - D)| \leq 1 + d_G(v) - 1 = d_G(v)$. Il en résulte que $\gamma_{\times 2}(G - (\{v\} \cup (N_G(v) - D)) \leq \gamma_{\times 2}(G) - 1$, et donc $st^-_{\gamma_{\times 2}}(G) \leq d_G(v)$. Par conséquent, $st_{\gamma_{\times 2}}(G) \leq \Delta(G)$. ■

Sans la condition sur les $\gamma_{\times 2}$-ensembles, une autre borne peut être obtenue par les mêmes arguments.

Remarque 3.4.2 *Si G est un graphe de degré maximum $\Delta(G)$, alors $st_{\gamma_{\times 2}}(G) \leq 2\Delta(G)$.*

Une autre borne supérieure en fonction du nombre de domination double peut être obtenue comme suit.

Proposition 3.4.2 *Si G est un graphe tel que $st^+_{\gamma_{\times 2}}(G) < +\infty$, alors*

$$st^+_{\gamma_{\times 2}}(G) \leq n - \gamma_{\times 2}(G) - 1.$$

Preuve. Soit $S \subset V(G)$ un ensemble non isolant de G tel que $st^+_{\gamma_{\times 2}}(G) = |S|$. On sait que $2 \leq \gamma_{\times 2}(G - S) \leq |V(G - S)| = n - st^+_{\gamma_{\times 2}}(G)$, et donc $\gamma_{\times 2}(G) < \gamma_{\times 2}(G - S) \leq$

$n - st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(G)$. On a alors $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(G) < n - \gamma_{\times 2}(G)$. Par conséquent, $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(G) \leq n - \gamma_{\times 2}(G) - 1$. ■

La borne de la Proposition 3.4.2 est atteinte pour la chaîne $P_8 = v_1 v_2 ... v_8$. En effet, puisque $\gamma_{\times 2}(P_8) = 6$ et $\gamma_{\times 2}(P_8 - v_4) = 7$, alors $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(P_8) = 1$. On a donc $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(P_8) = 8 - 6 - 1 = 1$.

Puisque $\gamma_{\times 2}(G) \geq 2$ pour n'importe quel graphe G, un graphe G tel que $\gamma_{\times 2}(G) = 2$ ne peut voir $\gamma_{\times 2}(G)$ diminuer que si tous les sommets sont supprimés, d'où l'intérêt d'étudier $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(G)$ pour $\gamma_{\times 2}(G) \geq 3$.

Proposition 3.4.3 *Soit G un graphe d'ordre n tel que $\gamma_{\times 2}(G) \geq 3$. Alors $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(G) \leq n - 2$.*

Preuve. Soient u, v deux sommets adjacents dans G et $S = V(G) - \{u, v\}$. Il est clair que le graphe $G - S$ devient un graphe K_2 qui possède un nombre de domination double égal à 2. Nous avons alors $\gamma_{\times 2}(G - S) = 2 < \gamma_{\times 2}(G)$, d'où $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(G) \leq n - 2$. ■

Nous terminons cette section par des propriétés liées aux sommets supports et sommets pendants qui sont d'une grande importance dans la domination double puisqu'ils appartiennent à tout EDD.

Remarque 3.4.3 *Si v est un support fort d'un graphe G, alors $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$.*

Preuve. Soient u un sommet pendant adjacent à v et S un $\gamma_{\times 2}(G)$-ensemble quelconque. Nous pouvons facilement voir que $S - \{u\}$ est un EDD de $G - \{u\}$, d'où $\gamma_{\times 2}(G - u) \leq \gamma_{\times 2}(G) - 1 < \gamma_{\times 2}(G)$. Donc $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$. ■

Exemple 3.4.1 *Le graphe G de la Figure 3.4.1 contient un support fort v. On voit que $\gamma_{\times 2}(G)$ diminue d'une unité si on supprime le sommet pendant u. On a donc $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$.*

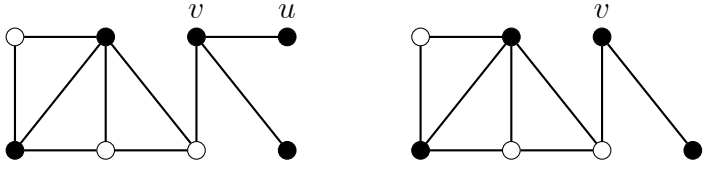


Figure 3.4.1 : Un graphe G et $G - u$ tel que $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$.

Remarque 3.4.4 *Si G est un graphe contenant deux sommets supports adjacents, alors* $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$.

Preuve. Soient u et v deux sommets supports adjacents de G et x et y deux sommets pendants adjacents à u et v respectivement, et soit D un $\gamma_{\times 2}(G)$-ensemble quelconque. Puisque $\{u, v, x, y\} \subseteq D$, l'ensemble $D - \{x\}$ est toujours un EDD de $G - x$ et donc $\gamma_{\times 2}(G - x) \leq \gamma_{\times 2}(G) - 1 < \gamma_{\times 2}(G)$. Par conséquent, $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$. ■

3.5 Stabilité de la domination double dans quelques graphes simples

Cette partie est consacrée à la détermination de la stabilité de la domination double pour quelques classes connues de graphes.

3.5.1 Graphe complet

Pour le graphe complet K_n avec $n \geq 2$, on sait que $\gamma_{\times 2}(K_n) = 2$.

Proposition 3.5.1 *Pour $n \geq 3$*

$$\begin{cases} st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(K_n) = n \\ st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(K_n) = +\infty. \end{cases}$$

Preuve. On sait que pour tout graphe non trivial G on a $2 \leq \gamma_{\times 2}(G) \leq n$, et comme $\gamma_{\times 2}(K_n) = 2$ donc il ne peut diminuer que si on aura le graphe nul et dans ce cas on devra supprimer tous les sommets de K_n. Donc $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(K_n) = n$.

D'autre part, pour tout ensemble $S \in NI(K_n) \neq V(K_n)$, $\gamma_{\times 2}(K_n - S) = 2 = \gamma_{\times 2}(K_n)$, d'où $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(K_n) = +\infty$. ■

Corollaire 3.5.1 *Pour un graphe complet K_n d'ordre $n \geq 4$, on a $st_{\gamma_{\times 2}}(K_n) = n$.*

3.5.2 Graphe biparti complet

Sachant que $\gamma_{\times 2}(K_{r,s}) = 4$ pour $r, s \geq 3$, son nombre de stabilité est donné ci-après.

Proposition 3.5.2 *Pour $r \geq s \geq 4$*

$$\begin{cases} st^-_{\gamma_{\times 2}}(K_{r,s}) = s-2 \\ st^+_{\gamma_{\times 2}}(K_{r,s}) = s-1 \end{cases}$$

Preuve. Pour $r = s = 3$, il est simple de voir que $st^-_{\gamma_{\times 2}}(K_{3,3}) = 1$ et $st^+_{\gamma_{\times 2}}(K_{3,3}) = +\infty$.

On sait que pour tout graphe biparti complet de parties (V_r, V_s) avec $r \geq s \geq 4$, $\gamma_{\times 2}(K_{r,s}) = 4$. Alors pour changer $\gamma_{\times 2}(K_{r,s})$, il faut que le cardinal de V_r ou de V_s devient inférieur strictement à 3, et comme $r \geq s$ les sommets sont supprimés de V_s. Soient x_1 et x_2 deux sommets de V_s et soient $S = V_s - \{x_1, x_2\}$ et $D = V_s - \{x_1\}$. Nous avons d'une part $\gamma_{\times 2}(K_{r,s} - S) = 3 < \gamma_{\times 2}(K_{r,s})$, d'où $st^-_{\gamma_{\times 2}}(K_{r,s}) = s-2$. Et d'autre part, puisque $K_{r,s} - D$ est une étoile $K_{1,r}$, $\gamma_{\times 2}(K_{r,s} - D) = r+1 > \gamma_{\times 2}(K_{r,s})$, d'où $st^+_{\gamma_{\times 2}}(K_{r,s}) = s-1$. ■

Corollaire 3.5.2 *Pour un graphe biparti complet $K_{r,s}$ tel que $r \geq s \geq 4$, on a $st_{\gamma_{\times 2}}(K_{r,s}) = s-2$.*

3.5.3 Étoile

Sachant que $\gamma_{\times 2}(K_{1,t}) = 1 + t$ pour $t \geq 2$, nous donnons le nombre de stabilité d'une étoile.

Proposition 3.5.3 *Pour $t \geq 2$*

$$\begin{cases} st^-_{\gamma_{\times 2}}(K_{1,t}) = 1 \\ st^+_{\gamma_{\times 2}}(K_{1,t}) = +\infty. \end{cases}$$

Preuve. Puisque le sommet central de l'étoile $K_{1,t}$ est un support fort, d'après la Remarque 3.4.3, $st^-_{\gamma_{\times 2}}(K_{1,t}) = 1$. Maintenant si on suppose que $st^+_{\gamma_{\times 2}}(K_{1,t}) < +\infty$, alors d'après la Proposition 3.4.2, $st^+_{\gamma_{\times 2}}(K_{1,t}) \leq (t+1) - \gamma_{\times 2}(K_{1,t}) - 1 = (t+1) - (t+1) - 1 = -1$, ce qui est impossible. Donc $st^+_{\gamma_{\times 2}}(K_{1,t}) = +\infty$. ■

Corollaire 3.5.3 *Pour une étoile $K_{1,t}$ avec $t \geq 2$,on a $st_{\gamma_{\times 2}}(K_{1,t}) = 1$.*

3.5.4 Étoile subdivisée

Araignée saine $K^*_{1,t}$: Sachant que $\gamma_{\times 2}(K^*_{1,t}) = 2t$ pour $t \geq 2$, nous donnons le nombre de stabilité d'une araignée saine.

Proposition 3.5.4 *Pour $t \geq 2$*

$$\begin{cases} st^-_{\gamma_{\times 2}}(K^*_{1,t}) = 2 \\ st^+_{\gamma_{\times 2}}(K^*_{1,t}) = +\infty \end{cases}$$

Preuve. Pour une araignée saine $K^*_{1,t}$ on a $\gamma_{\times 2}(K^*_{1,t}) = 2t = n - 1$. Il est clair que la suppression du sommet central ou de l'un des sommets pendants de $K^*_{1,t}$ n'a aucune influence sur son nombre de domination double et donc $st_{\gamma_{\times 2}}(K^*_{1,t}) \geq 2$. Maintenant si on supprime l'un des supports de $K^*_{1,t}$, disons v et son sommet pendant, disons u, alors le graphe obtenu sera ou bien une araignée saine (si $t \geq 3$), ou bien une chaîne P_3 (si $t = 2$). Pour le premier cas, on a $\gamma_{\times 2}(K^*_{1,t} - \{u, v\}) = \gamma_{\times 2}(K^*_{1,t-1}) = 2t-2 < \gamma_{\times 2}(K^*_{1,t})$ d'où $st^-_{\gamma_{\times 2}}(K^*_{1,t}) = 2$. Pour le deuxième cas, on a $\gamma_{\times 2}(K^*_{1,2} - \{u, v\}) = \gamma_{\times 2}(P_3) = 3 < \gamma_{\times 2}(K^*_{1,2}) = 4$ d'où $st^-_{\gamma_{\times 2}}(K^*_{1,t}) = 2$.

D'autre part, si on suppose que $st^+_{\gamma_{\times 2}}(K_{1,t}) < +\infty$, alors d'après la Proposition 3.4.2, $st^+_{\gamma_{\times 2}}(K^*_{1,t}) \leq n - \gamma_{\times 2}(K^*_{1,t}) - 1 = 0$, ce qui est impossible, donc $st^+_{\gamma_{\times 2}}(K^*_{1,t}) = +\infty$. ■

Corollaire 3.5.4 *Pour une araignée saine $K^*_{1,t}$ avec $t \geq 2$, on a $st_{\gamma_{\times 2}}(K^*_{1,t}) = 2$.*

Araignée blessée $K^*_{1,t}$: Sachant que $\gamma_{\times 2}(K^*_{1,t}) = n$ pour $t \geq 3$, nous donnons le nombre de stabilité d'une araignée blessée.

Proposition 3.5.5 *Pour $t \geq 3$*

$$\begin{cases} st^-_{\gamma_{\times 2}}(K^*_{1,t}) = 1 \\ st^+_{\gamma_{\times 2}}(K^*_{1,t}) = +\infty \end{cases}$$

Preuve. Pour une araignée blessée $K^*_{1,t}$, on a $\gamma_{\times 2}(K^*_{1,t}) = n$. La suppression de n'importe quel sommet pendant de $K^*_{1,t}$ produit un graphe d'ordre $n - 1$ ayant forcément un nombre de domination double inférieur strictement à n, d'où $st^-_{\gamma_{\times 2}}(K^*_{1,t}) = 1$.

Supposons que $st^+_{\gamma_{\times 2}}(K^*_{1,t}) < +\infty$. Alors d'après la Proposition 3.4.2, $st^+_{\gamma_{\times 2}}(K_{1,t}) \leq n - \gamma_{\times 2}(K^*_{1,t}) - 1 = -1$ (impossible), et donc $st^+_{\gamma_{\times 2}}(K^*_{1,t}) = +\infty$. ■

Corollaire 3.5.5 *Pour une araignée blessée $K^*_{1,t}$ avec $t \geq 3$, on a $st_{\gamma_{\times 2}}(K^*_{1,t}) = 1$.*

3.5.5 Double étoile

Sachant que $\gamma_{\times 2}(S_{r,s}) = r + s + 2$ pour $r, s \geq 2$, nous pouvons donner le nombre de stabilité d'une double étoile.

Proposition 3.5.6 *Pour $r, s \geq 2$*

$$\begin{cases} st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(S_{r,s}) = 1 \\ st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(S_{r,s}) = +\infty. \end{cases}$$

Preuve. Comme le dominant double de $S_{n,m}$ contient tous ses sommets, alors la suppression de n'importe quel sommet non isolant diminue le nombre de domination double de $S_{n,m}$. D'où $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(S_{n,m}) = 1$.

Supposons que $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(S_{n,m}) < +\infty$. Alors d'après la Proposition 3.4.2, $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(S_{n,m}) \leq -1$, ce qui est impossible. Donc $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(S_{n,m}) = +\infty$. ■

Corollaire 3.5.6 *Pour une double étoile $S_{n,m}$ avec $n, m \geq 2$, on a $st_{\gamma_{\times 2}}(S_{n,m}) = 1$.*

3.5.6 Couronne d'un graphe

Nous avons besoin en premier de rappeler la remarque suivante:

Remarque 3.5.1 ([21]) *Soit G un graphe d'ordre n. Alors, $\gamma_{\times 2}(G) = n$ si et seulement si $V(G) = S(G) \cup L(G)$.*

Proposition 3.5.7 *Soit G un graphe d'ordre n. Alors*

$$\begin{cases} st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(G \circ K_1) = 1 \\ st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(G \circ K_1) = +\infty. \end{cases}$$

Preuve. Soit G un graphe d'ordre n. Nous savons que $G \circ K_1$ est d'ordre $2n$. Puisque tous les sommets de $G \circ K_1$ sont soit des sommets pendants soit des supports, alors d'après la Remarque 3.5.1, $\gamma_{\times 2}(G) = 2n$. Donc la suppression de n'importe quel sommet pendant diminue le nombre de domination double de G, d'où $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(G) = 1$.

D'autre part, d'après la Proposition 3.4.2, si on suppose que $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(G) < +\infty$, alors $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(G) \leq n - \gamma_{\times 2}(G) - 1 = -1$, ce qui est impossible. Ainsi, $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(G) = +\infty$. ■

Corollaire 3.5.7 *Pour une couronne d'un graphe connexe G d'ordre $n \geq 3$, on a* $st_{\gamma_{\times 2}}(G \circ K_1) = 1$.

3.6 Stabilité de la domination double dans les chaînes

Afin de donner le nombre de stabilité de la domination double pour les chaînes, commençons par rappeler que le nombre de domination double d'une chaîne peut être calculé d'une manière exacte: pour $n \geq 2$, on a $\gamma_{\times 2}(P_n) = 2n/3+1$ si $n \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$, et $\gamma_{\times 2}(P_n) = 2\lceil n/3 \rceil$ si $n \equiv 1$ ou $2(\mathrm{mod}\, 3)$.

Proposition 3.6.1 *Pour $n \geq 3$*

$$st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(P_n) = \begin{cases} 1 & \textit{si } n \equiv 0, 1(\mathrm{mod}\, 3) \\ 2 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Soit la chaîne $P_n = x_1x_2...x_n$ avec $n \geq 3$. On a $P_n - x_n = P_{n-1}$ et on considère les cas suivants en fonction de l'entier positif $k \geq 1$.

– Si $n = 3k$, alors $\gamma_{\times 2}(P_n) = 2k + 1$ et $\gamma_{\times 2}(P_{n-1}) = 2k$, d'où $\gamma_{\times 2}(P_n - x_n) < \gamma_{\times 2}(P_n)$, donc $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(P_n) = 1$.

– Si $n = 3k + 1$, alors $\gamma_{\times 2}(P_n) = 2k + 2$ et $\gamma_{\times 2}(P_{n-1}) = 2k + 1$, d'où $\gamma_{\times 2}(P_n - x_n) < \gamma_{\times 2}(P_n)$, donc $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(P_n) = 1$.

– Si $n = 3k + 2$, alors $\gamma_{\times 2}(P_n) = 2k + 2$. Supposons que $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(P_n) = 1$, donc il existe un sommet v de P_n non isolant tel que $\gamma_{\times 2}(P_n - v) < \gamma_{\times 2}(P_n)$. Si v est un sommet pendant de P_n, alors $\gamma_{\times 2}(P_n - v) = \gamma_{\times 2}(P_{n-1}) = 2k + 2 = \gamma_{\times 2}(P_n)$, une contradiction. Si $d_{P_n}(v) = 2$, alors sa suppression forme deux chaînes distinctes P_{n_1} et P_{n_2} tel que ($n_1 \equiv 1(\mathrm{mod}\, 3)$ et $n_2 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$) ou ($n_1 \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3)$ et $n_2 \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3)$). Dans le premier cas $\gamma_{\times 2}(P_n - v) = 2k+3 > \gamma_{\times 2}(P_n)$, une contradiction, et dans le deuxième cas $\gamma_{\times 2}(P_n - v) = 2k+2 = \gamma_{\times 2}(P_n)$, contradiction. On conclut donc que $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(P_n) \geq 2$. Soit maintenant $S = \{x_{n-1}, x_n\}$. On peut facilement voir que $\gamma_{\times 2}(P_n - S) = \gamma_{\times 2}(P_{n-2}) = 2k + 1$, d'où $\gamma_{\times 2}(P_n - S) < \gamma_{\times 2}(P_n)$. Par conséquent, $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(P_n) = 2$. ■

On peut facilement vérifier que pour $3 \leq n \leq 7$, une chaîne P_n ne contient aucun sous ensemble de sommets non isolant dont la suppression augmente son nombre de domination double, d'où $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(P_n) = +\infty$.

Proposition 3.6.2 *Pour* $n \geq 8$

$$st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(P_n) = \begin{cases} 1 & si\ n \geq 8\ et\ n = 0, 2(\mathrm{mod}\,3) \\ 2 & si\ n \geq 11\ et\ n = 1(\mathrm{mod}\,3). \end{cases}$$

Preuve. Pour $n = 10$, c'est un simple exercice de vérifier que $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(P_n) = +\infty$. Soit maintenant la chaîne $P_n = x_1x_2...x_n$ avec $n \geq 8$. En supprimant le sommet x_5 on aura $P_n - x_5 = P_4 + P_{n-5}$. Considérons les cas suivants en fonction de l'entier positif k.

– Si $n = 3k$ avec $k \geq 3$, alors $\gamma_{\times 2}(P_n) = 2k + 1$ et $\gamma_{\times 2}(P_n - x_5) = 2k + 2$. D'où $\gamma_{\times 2}(P_n - x_5) > \gamma_{\times 2}(P_n)$ et donc $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(P_n) = 1$.

– Si $n = 3k + 2$ avec $k \geq 2$, alors $\gamma_{\times 2}(P_n) = 2k + 2$ et $\gamma_{\times 2}(P_n - x_5) = 2k + 3$. D'où $\gamma_{\times 2}(P_n - x_5) > \gamma_{\times 2}(P_n)$ et donc $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(P_n) = 1$.

– Si $n = 3k + 1$ avec $k \geq 4$, alors $\gamma_{\times 2}(P_n) = 2k + 2$. Supposons que $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(P_n) = 1$. Dans ce cas, il existe un sommet non isolant v de P_n tel que $\gamma_{\times 2}(P_n - v) > \gamma_{\times 2}(P_n)$. Si v est un sommet pendant de P_n, alors $\gamma_{\times 2}(P_n - v) = \gamma_{\times 2}(P_{n-1}) = 2k + 1 < \gamma_{\times 2}(P_n)$, une contradiction. Si $d_{P_n}(v) = 2$, alors sa suppression forme deux chaînes distinctes P_{n_1} et P_{n_2} tel que ou bien $n_1 \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$ et $n_2 \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$, ou bien $n_1 \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ et $n_2 \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$. Dans les deux cas $\gamma_{\times 2}(P_n - v) = 2k + 2 = \gamma_{\times 2}(P_n)$, contradiction. On a donc $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(P_n) \geq 2$. Soit l'ensemble $S = \{x_5, x_{10}\}$. La suppression des sommets de S de la chaîne P_n produit deux chaînes d'ordre 4 et une chaîne d'ordre $n - 10$ avec $\gamma_{\times 2}(P_n - S) = 2\gamma_{\times 2}(P_4) + \gamma_{\times 2}(P_{n-10}) = 2k + 3$. Donc $\gamma_{\times 2}(P_n - S) > \gamma_{\times 2}(P_n)$ et par conséquent, $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(P_n) = 2$. ■

Les propositions 3.6.1 et 3.6.2, nous permettent de donner la stabilité de la domination double dans les chaînes.

Corollaire 3.6.1 *Pour* $n \geq 3$

$$st_{\gamma_{\times 2}}(P_n) = \begin{cases} 2 & si\ n = 5 \\ 1 & sinon. \end{cases}$$

3.7 Stabilité de la domination double dans les cycles

Nous arrivons maintenant au calcul de la stabilité de la domination double pour les cycles dont nous connaissons le nombre de domination double d'une manière exacte aussi par le biais de la formule: $\gamma_{\times 2}(C_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$.

Il est à noter que tout cycle est $\gamma_{\times 2}$-sommet-stable [21], ce qui veut dire que pour tout cycle C_n, $st_{\gamma_{\times 2}}(C_n) \geq 2$.

Proposition 3.7.1 *Pour* $n \geq 3$

$$st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(C_n) = \begin{cases} 3 & si\ n \equiv 0(\mathrm{mod}\,3) \\ 2 & sinon. \end{cases}$$

Preuve. Pour $n = 3$, il est clair que $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(C_3) = 3$. Soit maintenant le cycle $C_n = x_1x_2..x_nx_1$ avec $n \geq 4$ et soit l'ensemble $S = \{x_{n-1}, x_n\}$. Dans ce cas, la suppression de S de C_n produit une chaîne P_{n-2}. On considère trois cas suivant la valeur de l'entier positif $k \geq 1$.

– Si $n = 3k+1$, alors $\gamma_{\times 2}(C_n) = 2k+1$ et $\gamma_{\times 2}(P_{n-2}) = 2k$, d'où $\gamma_{\times 2}(C_n - S) < \gamma_{\times 2}(C_n)$. Donc $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(P_n) = 2$.

– Si $n = 3k + 2$, alors $\gamma_{\times 2}(C_n) = 2k + 2$ et $\gamma_{\times 2}(P_{n-2}) = 2k + 1$, d'où $\gamma_{\times 2}(C_n - S) < \gamma_{\times 2}(C_n)$. Donc $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(P_n) = 2$.

– Si $n = 3k$ avec $k \geq 2$, alors $\gamma_{\times 2}(C_n) = 2k$. Supposons que $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(P_n) = 2$. Dans ce cas, il existe un ensemble $D \in NI(C_n)$ contenant deux sommets tel que $\gamma_{\times 2}(C_n - D) < \gamma_{\times 2}(C_n)$. Si ces deux sommets sont adjacents, alors leur suppression donne une chaîne P_{n-2}, et on aura $\gamma_{\times 2}(C_n) = 2k = \gamma_{\times 2}(P_{n-2})$, une contradiction. Si les deux sommets de D ne sont pas adjacents, alors la suppression du premier sommet donne une chaîne d'ordre $n - 1$, et la suppression du deuxième sommet forme deux chaînes P_{n_1} et P_{n_2} tel que ou bien $n_1 \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$ et $n_2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$, ou bien $n_1 \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$ et $n_2 \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$. Dans le premier cas, $\gamma_{\times 2}(C_n - D) = 2k + 1 > \gamma_{\times 2}(C_n)$, une contradiction. Dans le deuxième cas, $\gamma_{\times 2}(C_n - D) = 2k = \gamma_{\times 2}(C_n)$, contradiction. On en déduit que $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(P_n) \geq 3$. Considérons maintenant l'ensemble $M = \{x_{n-2}, x_{n-1}, x_n\}$ dont la suppression donne une chaîne P_{n-3}. On a dans ce cas $\gamma_{\times 2}(C_n - S) = \gamma_{\times 2}(P_{n-3}) = 2k - 1$, d'où $\gamma_{\times 2}(C_n - S) < \gamma_{\times 2}(C_n)$. Par conséquent, $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(C_n) = 3$. ■

Comme pour les chaînes, il est simple de vérifier que $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(C_n) = +\infty$ pour $3 \leq n \leq 8$.

Proposition 3.7.2 *Pour* $n \geq 9$

$$st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(C_n) = \begin{cases} 2 & si\ n \equiv 0, 1(\mathrm{mod}\,3) \\ 3 & si\ n \geq 12\ et\ n \equiv 2(\mathrm{mod}\,3). \end{cases}$$

Preuve. Pour $n = 11$, si on suppose que $st^+_{\gamma_{\times 2}}(C_{11}) < +\infty$, alors, d'après la Proposition 3.4.2, $st^+_{\gamma_{\times 2}}(C_{11}) \leq 2$. On peut facilement vérifier que la suppression d'un ou de deux sommets ne peut augmenter $\gamma_{\times 2}(C_{10})$, d'où $st^+_{\gamma_{\times 2}}(C_n) = +\infty$.

Soit maintenant le cycle $C_n = x_1x_2..x_nx_1$ avec $n \geq 9$ et soit l'ensemble $S = \{x_1, x_6\}$, alors $C_n - S = P_4 + P_{n-6}$. Pour tout entier $k \geq 3$.

– Si $n = 3k$, alors $\gamma_{\times 2}(C_n) = 2k$ et $\gamma_{\times 2}(C_n - S) = 2k+1$, donc $\gamma_{\times 2}(C_n - S) > \gamma_{\times 2}(C_n)$. D'où $st^+_{\gamma_{\times 2}}(P_n) = 2$.

– Si $n = 3k + 1$, alors $\gamma_{\times 2}(C_n) = 2k + 1$ et $\gamma_{\times 2}(C_n - S) = 2k + 2$, donc $\gamma_{\times 2}(C_n - S) > \gamma_{\times 2}(C_n)$. D'où $st^+_{\gamma_{\times 2}}(P_n) = 2$.

– Si $n = 3k + 2$, alors $\gamma_{\times 2}(C_n) = 2k + 2$. Supposons que $st^+_{\gamma_{\times 2}}(C_n) = 2$,donc il existe un ensemble $S \in NI(P_n)$ contenant deux sommets tel que $\gamma_{\times 2}(C_n - S) > \gamma_{\times 2}(C_n)$. la suppression du premier sommet donne une chaîne d'ordre $n - 1$, et la suppression du deuxième sommet forme deux chaînes P_{n_1}, P_{n_2}, tel que ($n_1 \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$ et $n_2 \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$) ou ($n_1 \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ et $n_2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$), dans les deux cas $\gamma_{\times 2}(C_n - S) = 2k + 2 = \gamma_{\times 2}(C_n)$, contradiction. D'où $st^+_{\gamma_{\times 2}}(C_n) \geq 3$. Soit $S = \{x_1, x_6, x_{11}\}$, alors $C_n - S = 2P_4 + P_{n-11}$, donc $\gamma_{\times 2}(C_n - S) = 2\gamma_{\times 2}(P_4) + \gamma_{\times 2}(P_{n-11}) = 2k + 3$, d'où $\gamma_{\times 2}(C_n - S) > \gamma_{\times 2}(C_n)$. Donc $st^+_{\gamma_{\times 2}}(C_n) = 3$. ■

Corollaire 3.7.1 *Pour $n \geq 3$*

$$st^-_{\gamma_{\times 2}}(C_n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n \equiv 0(\mathrm{mod}\,3) \text{ et } n \leq 6 \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.8 Stabilité de la domination double dans les graphes ayant un nombre de domination double égal à 2

Nous commençons par donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe ait un nombre de domination double égal à 2.

Proposition 3.8.1 *Soit G un graphe d'ordre $n \geq 3$. Alors $\gamma_{\times 2}(G) = 2$ si et seulement si G possède au moins deux sommets universels.*

Preuve. Soit G un graphe d'ordre $n \geq 3$ qui possède au moins deux sommets universels u_1 et u_2. Il est clair que l'ensemble $\{u_1, u_2\}$ est un EDD de G, d'où $\gamma_{\times 2}(G) \leq |\{u_1, u_2\}| = 2$. D'autre part, on sait que pour tout graphe non trivial, le nombre de domination double est au moins deux. Par conséquent, $\gamma_{\times 2}(G) = 2$.

Inversement, soit D un $\gamma_{\times 2}(G)$-ensemble tel que $D = \{u_1, u_2\}$. Alors d'après la définition d'un EDD, u_1 et u_2 sont adjacents et $\forall v \in V - D$, v est adjacent à u_1 et u_2. Alors u_1 et u_2 sont des sommets universels, et donc G possède au moins deux sommets universels. ■

Rappelons que si $\gamma_{\times 2}(G) = 2$, alors $\gamma_{\times 2}(G)$ ne peut diminuer que si on supprime tous les sommets du graphe G. Nous montrons que c'est une condition nécessaire et suffisante.

Proposition 3.8.2 *Soit G un graphe d'ordre n. Alors $st^-_{\gamma_{\times 2}}(G) = n$ si et seulement si $\gamma_{\times 2}(G) = 2$.*

Preuve. Supposons que $st^-_{\gamma_{\times 2}}(G) = n$ et $\gamma_{\times 2}(G) \neq 2$. Comme G est non nul, $\gamma_{\times 2}(G) \geq 3$. Donc, d'après la Proposition 3.4.3 on a $st^-_{\gamma_{\times 2}}(G) \leq n - 2$, une contradiction. Donc $\gamma_{\times 2}(G) = 2$.

Inversement, supposons que $\gamma_{\times 2}(G) = 2$. Puisque le nombre de domination double de tout graphe non trivial est au moins égal à 2, $\gamma_{\times 2}(G)$ ne peut diminuer que si on obtient le graphe K_0 par la suppression de tous les sommets de G, d'où $st^-_{\gamma_{\times 2}}(G) = n$. ■

Proposition 3.8.3 *Soit G un graphe d'ordre $n \geq 4$ qui possède k sommets universels tel que $(2 \leq k \leq n-2)$ alors :*

$$\begin{cases} st^-_{\gamma_{\times 2}}(G) = n \\ st^+_{\gamma_{\times 2}}(G) = k - 1. \end{cases}$$

Preuve. D'après les Propositions 3.8.1 et 3.8.2, $\gamma_{\times 2}(G) = 2$ et donc $st^-_{\gamma_{\times 2}}(G) = n$.

D'autre part, d'après la Proposition 3.8.1, $\gamma_{\times 2}(G)$ ne peut augmenter que si le graphe G comporterait au plus un sommet universel. Donc, puisque G a k sommets universels, $k-1$ d'entre eux doivent être effacés pour augmenter $\gamma_{\times 2}(G)$. Par conséquent, $st^+_{\gamma_{\times 2}}(G) = k - 1$.
■

Exemple 3.8.1 *Le graphe G de la Figure 3.8.1 contient* 3 *sommets universels, d'où* $\gamma_{\times 2}(G) = 2$. *Il faut supprimer deux sommets universels, par exemple a et c, pour changer (augmenter)* $\gamma_{\times 2}(G)$, *et donc* $st_{\gamma_{\times 2}}(G) = st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(G) = 2$.

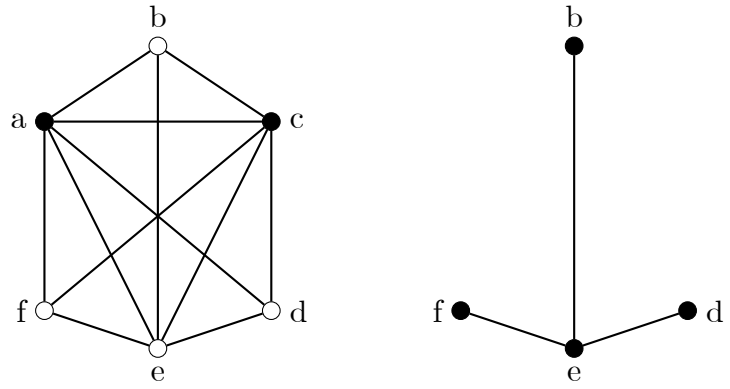


Figure 3.8.1 : Un graphe G et $G - S$ tel que $st_{\gamma_{\times 2}}(G) = 2$.

Comme conséquence directe de la Proposition 3.8.3, nous avons le corollaire suivant:

Corollaire 3.8.1 *Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 4$ ayant $k \geq 2$ sommets universels,*

$$st_{\gamma_{\times 2}}(G) = \begin{cases} k-1 & \text{si } k \leq n-2 \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.9 Stabilité de la domination double dans les arbres

Afin d'étudier la stabilité de la domination double dans la classe des arbres, nous avons besoin de donner d'autres définitions. Pour un arbre T, on définit l'ensemble $A_{\times 2}(T)$ comme l'ensemble des sommets de T qui appartiennent à tout $\gamma_{\times 2}(T)$-ensemble. On définit aussi l'ensemble $N_{\times 2}(T)$ comme l'ensemble des sommets de T qui n'appartiennent à aucun $\gamma_{\times 2}(T)$-ensemble, qui sont appelés aussi sommets **libres**. Les sommets de $A_{\times 2}(T)$ et ceux de $N_{\times 2}(T)$ ont été caractérisés par Blidia et al. [5] et peuvent être recherchés en un temps polynomial.

Notre premier résultat dans cette partie est de trouver une borne supérieure pour $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(T)$ d'un arbre T, dans lequel nous avons besoin d'enraciner T pour faciliter son étude. Nous en donnons les définitions relatives.

Un arbre T enraciné est une arborescence (arbre où les arêtes sont remplacées par des arcs) admettant un sommet r à partir duquel il existe un chemin vers tout autre sommet de

T. Le sommet r est appelé racine. L'arbre T ainsi défini sera noté T_r. Pour un sommet v d'un arbre enraciné, le parent $p(v)$ de v est l'unique sommet tel qu'il existe un arc de $p(v)$ vers v. Le fils de v est un sommet u tel que $p(u) = v$. Un descendant de v est un sommet u pour lequel il existe un chemin de v à u dans T_r. Il est à noter que si l'on considère un arbre enraciné, l'orientation sera implicite et ainsi on parlera d'arêtes au lieu d'arcs.

Théorème 3.9.1 *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(T) \leq 2$.*

Preuve. Soit T un arbre d'ordre $n \geq 3$ de degré maximum Δ. Si $\Delta = 2$, alors T est une chaîne P_n telle que $n \geq 3$, et le résultat vient directement de la Proposition 3.6.1. Nous considérons donc que $\Delta \geq 3$. Supposons que $diam(T) \geq 4$ puisque si $diam(T) = 2$ ou 3, alors T serait une étoile ou une double étoile et le résultat découle des Propositions 3.5.3 et 3.5.6. Soient r et z les deux extrémités d'une chaîne diamétrale de T ($d(r, z) = diam(T)$). Enracinons l'arbre T en r et posons v le sommet support de z ($v = p(z)$) et $u = p(v)$. On distingue les deux cas suivants:

Cas 1 Le sommet v est un support fort de T. Alors, d'après la Remarque 3.4.3, on a bien $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(T) = 1$.

Cas 2 Le sommet v est un support faible de T. Nous distinguons deux cas relativement au sommet u:

Cas 2.1 Le sommet u n'est pas libre dans T. Supposons que D est un $\gamma_{\times 2}(G)$-ensemble qui contient u. On peut facilement voir que $D - \{z\}$ est un EDD de $T - z$, et donc $\gamma_{\times 2}(T - z) \leq \gamma_{\times 2}(T) - 1 < \gamma_{\times 2}(T)$. D'où $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(T) = 1$.

Cas 2.2 Le sommet u est libre dans T. Soit D' un $\gamma_{\times 2}(G)$-ensemble quelconque. On a bien sûr $z, v \in D'$ et $u \notin D'$, et comme u est double dominé par D', il possède au moins un autre voisin dans D'. Posons maintenant $D'' = (D' - \{v, z\}) \cup \{u\}$. Il est clair que D'' est un EDD de $T - \{v, z\}$, d'où $\gamma_{\times 2}(T - \{v, z\}) \leq \gamma_{\times 2}(T) - 2 + 1 = \gamma_{\times 2}(T) - 1 < \gamma_{\times 2}(T)$. Par conséquent, $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(T) = 2$.

De tous les cas traités, on a bien $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(T) \leq 2$. ■

Cette borne est atteinte par exemple pour la chaîne P_8.

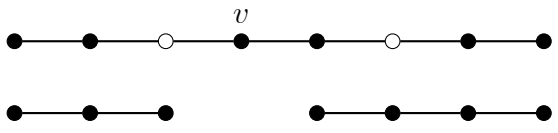
Comme conséquence du Théorème 3.9.1, la borne trouvée est aussi une borne pour $st_{\gamma_{\times 2}}(T)$ pour un arbre T.

Corollaire 3.9.1 *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors $st_{\gamma_{\times 2}}(T) \leq 2$.*

La famille des arbres $\gamma_{\times 2}$-sommet-stables, c'est-à-dire les arbres dont le nombre de domination double reste stable après la suppression de n'importe quel sommet qui n'est pas un support, a été caractérisée dans [21]. Il est clair que si T est un arbre $\gamma_{\times 2}$-sommet-stable d'ordre $n \geq 3$, alors $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(T) \geq 2$.

Remarque 3.9.1 *Si T est un arbre $\gamma_{\times 2}$-sommet-stable d'ordre $n \geq 3$, alors $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(T) = 2$.*

La réciproque n'est pas vraie, il suffit de prendre la chaîne P_8 de la Figure 3.9.1 . On sait que $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(P_8) = 2$, mais la suppression du sommet v change le nombre de domination double de P_8 qui n'est donc pas une chaîne $\gamma_{\times 2}$-sommet-stable.



$\gamma_{\times 2}(P_8) = 6.$

$\gamma_{\times 2}(P_8 - v) = 7.$

Figure 3.9.1 : Une chaîne P_8 et $P_8 - v$.

3.9.1 Stabilité de la domination double dans les chenilles

Une chenille est un arbre non trivial T_c dont l'élimination de tous les sommets pendants produit une chaîne $P_k = v_1, v_2, ..., v_k$ appelée le squelette de la chenille tel que chaque sommet de T_c est ou bien sur la chaîne ou bien adjacent à un sommet de la chaîne P_k. Le code d'une chenille T_c est $c(T_c) = (c_1, c_2, ..., c_k)$ où c_i est le nombre de sommets pendants adjacents à un sommet v_i. Il est à noter que $c_1 \neq 0$ et $c_k \neq 0$.

Pour l'étude des chenilles, nous définissons **une chaîne séparatrice**, dans une chenille, comme une chaîne qui se situe entre deux sommets supports consécutifs, c'est-à-dire celles constituées par les sommets v_i ayant un $t_i = 0$ et notons par z_i le nombre de sommets qui constituent une chaîne séparatrice C_i. Une chaîne séparatrice est dite **augmentée** ou (CSA), si on ajoute les deux sommets supports et un sommet pendant pour chacun.

Afin de donner une caractérisation des chenilles T_c ayant $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(T_c) = 1$, nous avons besoin des remarques et de la proposition suivantes:

Remarque 3.9.2 ([5]) *Soit P_n une chaîne d'ordre $n \geq 3$, alors les voisins non pendants des deux supports de P_n sont libres si et seulement si $n \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3)$.*

Remarque 3.9.3 ([21]) *Soient T un arbre non trivial et S un sous-ensemble quelconque de sommets contenant un sommet libre v de T, où tout sommet de T excepté v est double dominé par S. Alors $|S| > \gamma_{\times 2}(T)$.*

Proposition 3.9.1 *Si u est un sommet pendant adjacent à un support faible v d'un arbre non trivial T alors, $\gamma_{\times 2}(T-u) = \gamma_{\times 2}(T)$ si et seulement si tous les voisins de v excepté u sont libres dans T.*

Preuve. Supposons que $\gamma_{\times 2}(T-u) = \gamma_{\times 2}(T)$ et qu'il existe un voisin w de v différent de u qui n'est pas libre dans T. Soit D un $\gamma_{\times 2}(T)$-ensemble tel que $w \in D$. Il est claire que $D - \{u\}$ est un EDD de $T-u$, d'où $\gamma_{\times 2}(T-v) \leq |D - \{u\}| = \gamma_{\times 2}(T) - 1 < \gamma_{\times 2}(T)$, une contradiction. *Donc tous les voisins de v* excepté u sont libres dans T.

Inversement, supposons que tous les voisins de v autre que u sont libres dans T et que $\gamma_{\times 2}(T-u) \neq \gamma_{\times 2}(T)$. Puisque $\gamma_{\times 2}(T) - 2 \leq \gamma_{\times 2}(T-u) \leq \gamma_{\times 2}(T)$, supposons que D' est un $\gamma_{\times 2}(T-u)$-ensemble quelconque et distinguons deux cas:

Cas 1. $\gamma_{\times 2}(T-u) = \gamma_{\times 2}(T) - 2$. Dans ce cas, $v \notin D'$, car sinon $D' \cup \{u\}$ serait un EDD de T de cardinal $\gamma_{\times 2}(T) - 1$. Mais alors $D' \cup \{u, v\}$ est un EDD de T de cardinal $\gamma_{\times 2}(T-u) + 2$, c'est donc un $\gamma_{\times 2}(T)$-ensemble qui contient des voisins de v (pour le dominer dans D'), une contradiction.

Cas 2. $\gamma_{\times 2}(T-u) = \gamma_{\times 2}(T) - 1$. Soit D'' un $\gamma_{\times 2}(T)$-ensemble quelconque. Dans ce cas, v n'est pas libre dans $T-u$, car sinon, d'après la Remarque 3.9.3, $D'' - \{u\}$ serait un ensemble qui contient v et qui double domine tous les autres sommets de $T-u$ et qui vérifie $\gamma_{\times 2}(T) - 1 = |D'' - \{u\}| > \gamma_{\times 2}(T-u) = \gamma_{\times 2}(T) - 1$, une contradiction. Nous pouvons donc supposer que $v \in D'$, et donc $D' \cup \{u\}$ est un EDD de T de cardinal $\gamma_{\times 2}(T-u)+1 = \gamma_{\times 2}(T)-1+1 = \gamma_{\times 2}(T)$. C'est donc un $\gamma_{\times 2}(T)$-ensemble qui contient au moins un voisin de v (puisque D' comporte un voisin de v), une contradiction.

Par conséquent, $\gamma_{\times 2}(T-u) = \gamma_{\times 2}(T)$. ■

Corollaire 3.9.2 *Si u est un sommet pendant adjacent à un support faible v d'un arbre T possédant un voisin non libre, alors $\gamma_{\times 2}(T-u) < \gamma_{\times 2}(T)$.*

Passons maintenant à la caractérisation des chenilles.

Théorème 3.9.2 *Soit T_c une chenille d'ordre n. Alors $st^-_{\gamma_{\times 2}}(T_c) = 1$ si et seulement si au moins l'une des propriétés suivantes est vérifiée :*

- *T_c contient au moins un support fort.*
- *Il existe une chaîne séparatrice augmentée C de T_c d'ordre $j \equiv 0$ ou $1 (\mathrm{mod}\, 3)$.*

Preuve. Supposons d'abord que $st^-_{\gamma_{\times 2}}(T_c) = 1$ et T_c ne contient que des supports faibles et des chaînes séparatrices augmentées d'ordre $j \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$. Dans ce cas, d'après la Remarque 3.9.2, tous les sommets non pendants adjacents à des supports de T_c sont libres. Soient u un sommet de T_c tel que $\gamma_{\times 2}(T_c - u) < \gamma_{\times 2}(T_c)$ et D' un $\gamma_{\times 2}(T_c - u)$-ensemble. On distingue deux cas:

Cas 1 u est un sommet pendant de T_c, comme $|C| \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$, donc d'après la Remarque 3.9.2, tous les voisins non pendants de v sont libres dans T_c, d'autre part D' doit contient au moins l'un de ces sommets libres, alors d'après la Proposition 3.9.1, $\gamma_{\times 2}(T_c - u) = \gamma_{\times 2}(T_c)$, contradiction.

Cas 2 u est un sommet non pendant qui appartient à une CSA C de T_c, on a dans ce cas $\gamma_{\times 2}(T_c - u) < \gamma_{\times 2}(T_c)$, d'où $\gamma_{\times 2}(C - u) < \gamma_{\times 2}(C)$, ce qui veut dire que $st^-_{\gamma_{\times 2}}(C) = 1$. Mais comme C est d'ordre $j \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$, ceci contredit la Proposition 3.6.1.

Réciproquement, si T_c contient un support fort, alors d'après la Remarque 3.4.3, $st^-_{\gamma_{\times 2}}(T_c) = 1$. Supposons maintenant que tous les supports de T_c sont faibles et qu'il existe une chaîne séparatrice augmentée C' d'ordre $j \equiv 0$ ou $1 (\mathrm{mod}\, 3)$. Suivant la position de C' dans la chenille T_c, on distingue deux cas:

Cas 1 La chaîne C' est située à l'une des deux extrémités de la chenille. Soit x le sommet pendant adjacent au support de degré 2 de C'. Alors, puisque C' est d'ordre $j \equiv 0$ ou $1(\mathrm{mod}\,3)$, et d'après la Proposition 3.6.1, $\gamma_{\times 2}(C-x) < \gamma_{\times 2}(C)$, d'où $\gamma_{\times 2}(T_c - x) < \gamma_{\times 2}(T_c)$. Par conséquent, $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(T_c) = 1$.

Cas 2 La chaîne C' est située au milieu de la chenille T_c, Soient v l'un de ses supports et w son sommet pendant. Puisque C' est d'ordre $j \equiv 0$ ou $1(\mathrm{mod}\,3)$, d'après la Remarque 3.9.2, le voisin de v dans C' n'est pas libre dans C' (et dans T_c aussi). Donc, d'après le Corollaire 3.9.2, $\gamma_{\times 2}(T_c - w) < \gamma_{\times 2}(T_c)$, d'où $st^{-}_{\gamma_{\times 2}}(T_c) = 1$. ■

3.9.2 Sur la $\gamma^{+}_{\times 2}$-stabilité des arbres

Ayant montré que pour un arbre T quelconque on a $st_{\gamma_{\times 2}}(T) \leq 2$, il devient intéressant d'étudier les arbres pour lesquels $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(T) = 1$ ou 2.

Puisque la suppression d'un sommet pendant d'un arbre T ne peut pas augmenter $\gamma_{\times 2}(T)$, lors de l'études des arbres T tels que $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(T) = 1$ on doit examiner les sommets qui ne sont ni des supports ni des sommets pendants.

Proposition 3.9.2 *Soient T un arbre et $v \in V(T) - (A_{\times 2}(T) \cup N_{\times 2}(T))$. Alors $\gamma_{\times 2}(T-v) \leq \gamma_{\times 2}(T)$.*

Preuve. Puisque $v \notin (A_{\times 2}(T) \cup N_{\times 2}(T)$, il existe un $\gamma_{\times 2}(T)$-ensemble D qui ne contient pas v. Il est clair que D double domine tous les sommets de $T - v$, c'est donc un EDD de $T - v$, d'où $\gamma_{\times 2}(T - v) \leq \gamma_{\times 2}(T)$. ■

Corollaire 3.9.3 *Si T est un arbre tel que $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(T) = 1$, alors il existe un sommet $v \in A_{\times 2}(T) - (S(T) \cup L(T))$ tel que $\gamma_{\times 2}(T - v) > \gamma_{\times 2}(T)$.*

Conjecture 3.9.1 *Soit T un arbre. Alors $st^{+}_{\gamma_{\times 2}}(T) = 1$ si et seulement si $A_{\times 2}(T) - (S(T) \cup L(T)) \neq \phi$.*

Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce mémoire à l'étude de la stabilité d'un de type de domination connu qui est la domination double. Ayant comme soucis que cette étude soit aussi complète que possible, nous avons divisé notre travail en trois parties.

Notre premier objectif a été de donner au lecteur un recueil des notions élémentaires utilisées dans ce travail. Nous avons ensuite présenté le domaine des graphes critiques et stables avec les différentes modifications étudiées en domination, puis nous avons défini la notion de stabilité de la domination ordinaire tout en faisant le tour des résultats les plus importants établis jusqu'à présent. La même démarche a été adoptée pour le deuxième paramètre abordé par les chercheurs qui est le nombre de domination totale.

Notre objectif principal était de contribuer à l'étude de la stabilité en entamant son étude par rapport à la domination double. Plusieurs résultats et propriétés ont été montrés, avant de procéder au calcul de la stabilité de la domination double pour plusieurs classes simples de graphes. Nous avons abordé aussi les graphes possédant un nombre de domination double égal à 2. Nous nous sommes intéressés en dernier à la classe des arbres pour laquelle nous avons réussi à montrer que le nombre de stabilité est au plus 2. D'autres propriétés ont été trouvées pour cette même classe de graphes, et même une caractérisation des chenilles ayant une stabilité égale à 1.

Bibliographie

[1] D. Bauer, F. Harary, J. Nieminen et C. Suffel, "Domination alternation sets in graphes", Discrete math. 47, 153-161, 1983.

[2] C. Berge, "Graphs and Hypergraphs", North Holland, Amsterdam, 1973.

[3] C. Berge, "Theory of graphs and its applications". Methuen, London, 1985, 1962.

[4] M. Blidia, M. Chellali, T.W. Haynes et M.A. Henning, "Independent and double domination in trees", Utilitas Mathematica. 70, 159-173, 2006.

[5] M. Blidia, M. Chellali et S. Khelifi, "Vertices belonging to all or to no minimum double domination sets of trees". AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics 2 No. 1, 1-9, 2005.

[6] B. Bollobas et E. J. Cockayne, "Graph-theoretic parameters concerning domination, independence, and irredundance", J. Graph Theory 3, 241-249, 1979.

[7] R. C. Brigham, J. R. Carrington et R. P. Vitray, "Connected graphs with maximum total domination number", J. Combin. Comput. Combin. Math. 34, 81-96, 2000.

[8] M. Chellali, et T.W. Haynes, " Double domination stable graphs upon edge removal", Australasian Journal of comb. vol 47, 157-164, 2010.

[9] M. Chellali, et T.W. Haynes, "On paired and double domination in graphs", Utilitas Mathematica, 67, 161-171, 2005.

[10] E.J. Cockayne, R.M. Dawes et S.T. Hedetniemi, "Total domination in graphs", Networks 10, 211-219, 1980.

[11] W.J. Desormeaux, T.W. Haynes et M.A. Henning, "Total domination changing and stable graphs upon vertex removal", Discrete Appl. Math. 159, 1548-1554, 2011

[12] W.J. Desormeaux, T.W. Haynes et M.A. Henning, "Total domination critical and stable graphs upon edge removal", Discrete Appl. Math. 158, 1587-1592, 2010.

[13] W.J. Desormeaux, T.W. Haynes et M.A. Henning, "Total domination stable graphs upon edge addition", Discrete Math. 310, 3446-3454, 2010.

[14] W. Goddard, T.W. Haynes, M.A. Henning et L.C. Van der Merwe, "The diameter of total domination vertex critical graphs", Discrete Math. 286, 255-261, 2004.

[15] F. Harary et T.W. Haynes, "Double domination in graphs", Ars Combin. 55, 201-213, 2000.

[16] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi et P. J. Slater, "Fundamentals of Domination in Graphs", Marcel Dekker, New York, 1998.

[17] T. W. Haynes, et D.W Thacker, "Double Domination Edge Critical Graphs", Utilitas Mathematica 78, 139-149, 2009

[18] M.A. Henning et M. Krzywkowski, "Total domination stability in graphs". Discrete Applied Mathematics 236, 246-255, 2018.

[19] N. Jafari Rad, E Sharifi, M Krzywkowski. "Domination stability in graphs" Discrete Mathematics 339, 1909-1914, 2016.

[20] S. Khelifi, M. Blidia, M. Chellali, et F. Maffray, "Double domination edge removal critical graphs", Australasian Journal of comb. vol 48, 285-299, 2010.

[21] S. Khelifi et M. Chellali, "Double domination critical and stable graphs upon vertex removal", Discussiones Mathematicae Graph Theory, 32, 643-657, 2012.

[22] C. L. Liu, "Introduction to combinatorial mathematics", McGraw-Hill, New York, 1968.

[23] D. P. Sumner et P. Blitch, "Domination critical graphs", J. Combin. Theory Ser. B 34, 65-76, 1983.

[24] L.C. Van der Merwe, "Total domination edge critical graphs", Ph.D. Thesis, University of South Africa, 1999.

[25] H. B. Walikar et B. D. Acharya, "Domination critical graphs", Nat. Acad. Sci. Lett. 2, 70-72, 1979.