République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique
Université Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Par

Mounya Terchi

Étude d'un système hyperbolique avec un contrôle interne

Soutenu publiquement le ....., devant le jury composé de

Président :	***Mr. Nourddine MEKDACHE***	*M.A.A* **Univ. Médéa**
Examinateur :	***Mr. Khaled MALOUM***	*M.A.A* **Univ. Médéa**
Encadreur :	***Mr. Said RAFA***	*M.C.B* **Univ. Médéa**

Année universitaire 2023/2024

TABLE DES MATIÈRES

Résumé iii

Notations iv

Introduction générale 1

1 Gnéralités 3

1.1 Généralités sur des espaces fonctionnels 3
1.2 Opérateurs bornés et non bornés 12
1.3 Analyse spectrale 13
1.4 Théorèmes Fredholm 14
1.5 Opérateurs dissipatifs et m-dissipatifs 15
1.6 Théorème de (Lax-Milgram) 16
1.7 Semi-groupes 17

2 Existence et unicité de la solution du système 23

2.1 Position du problème 23
2.2 Existence et unicité de la solution 26

3 Stabilité du système 35

3.1 Manque de stabilité exponentielle 35
3.2 Stabilité asymptotique 39

Conclusion 43

Remerciement

Tout d'abord, je voudrais remercier **Allah**, tout puissant, qui m'a donné la force de mener à bien ce travail.

Je remercie tout particulièrement Monsieur **S. RAFA**, qui a dirigé ce travail. Son enthousiasme, sa bienveillance et sa compétence m'a conduit bien plus loin que je n'aurais pu l'imaginer. J'ai énormément appris auprès de lui et je tiens à lui faire part de toute ma gratitude.

Mes remerciements vont également à Monsieur **N.MEKDACHE**, le président du jury qui a accepté de relire ce travail.

Je remercie vivement Monsieur **K.MALOUM** qui m'a fait honneur en acceptant d'examiner et de juger ce travail.

Je souhaite aussi remercier tous les enseignants du département de mathématiques et informatique de la faculté des sciences de l'université Yahia Farès Médéa.

Je remercie également ma famille, surtout mes parents qui m'ont soutenu tout au long de mon parcours.

Je tiens énormément à remercier mes amis et mes camarades de promotion pour leur soutien pendant toute la période de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce travail

À celui qui m'a mis au premier plan, m'a élevé et m'a appris la bonne chose.

À mon cher père, que Dieu prolonge sa vie.

Merci mon père.

À la fontaine de tendresse qui m'a appris la fermeté et l'espérance, la personne la plus grande et la plus compatissante qui existe.

À ma mère bien-aimée, que Dieu prolonge sa vie.

Merci ma mère.

À l'honorable famille, de la petite à la grande.

Résumé

Dans ce mémoire, on a étudié un système hyperbolique avec un contrôle interne de type diffusif.

On a démontré des résultats d'existence et d'unicité de la solution.

• Via la théorie des semi-groupes, on a établit l'existence et l'unicité de la solution du notre système.

• On a utilisé la théorie spectrale pour montrer que notre système n' est pas exponentiellement stable .

Finalement on a établit la stabilité asymptotique, où nous avons utilisé le théorème général d'Arendt-Batty et de Lyubich-Vu

Mots-clés : *È*quation hyperbolique, Théorème des semi-groupes, Stabilité, Dissipation générale interne de type diffusif.

Notations

Ω	Un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.
$\partial\Omega$	Frontière topologique de Ω.
$\|\Omega\|$	Mesure de Lebesgue du l'ensemble Ω.
$\overline{\Omega}$	L'adhérence de l'ensemble Ω.
H^1	Un espace de Sobolev.
$x=(x_1,\cdots,x_N)$	Point générique de $\mathbb{R}^N$.
$D(A)$	Le domaine de définition de l'opérateur A .
$\mathfrak{D}(\Omega)$	L'espace des fonctions indéfiniment differentiables à support compact .
$\mathfrak{D}'(\Omega)$	L'espace de distributions.
inf	La borne inférieure.
sup	La borne supérieure.
$t\in[0,+\infty[$	Variable de temps.
$dx=dx_1dx_2\cdots dx_N$	Mesure de Lebesgue sur Ω.
ν	La normal extérieure de Ω.
$\frac{\partial}{\partial\nu}$	La dérivée normale extérieure.
$\mathscr{R}$	La partie réelle d'un nombre complexe.
p.p.	Presque partout.
E	Un espace de Banach.
H	Un espace de Hilbert.
H'	Le dual topologique de H.
$\langle .,. \rangle_{H\times H'}$	Le crochet de dualité entre l'espace H et Son dual topologique H'.
$\|.\|$	La norme sur l'espace de Banach E.
$\langle .,. \rangle_H$	Le produit scalaire sur l'espace de Hilbert H.
$\|.\|$	la norme sur L'espace de Hilbert H.
$\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$	L'espace des matrices réelles carrées.
Id	L'application identique.

$\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$	L'espace des fonctions continues.
∂_i	La i-i ème dérivée partielle ; $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.
∂^α	La dérivée d'ordre α; $\partial^\alpha = \frac{\partial^{\lvert\alpha\rvert}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$.
$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$	Gradient de $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
div v	La divergence du vecteur $v = (v_1, ..., v_N)$.
	div $v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial v_N}{\partial x_N}$.
$\longrightarrow$	Convergence forte.
$\rightharpoonup$	Convergence faible
$F \hookrightarrow$E	F s'injecte dans E.
$F \hookrightarrow_c E$	F s'injecte de manière compacte dans E.

Introduction générale

Le but de cette mémoire est d'étudier l'existence globale de la solution et la stabilisation de l'équation d'ondes avec des contrôles interne.
Le problème (P) que l'on va étudier est donné par :

$$(P)\begin{cases} u_{tt}(x,t)-\Delta u(x,t)+\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\phi(x,\xi,t)d\xi=0 & \text{dans } \Omega\times(0,+\infty),\\ u(x,t)=0 & \text{sur } \partial\Omega\times(0,+\infty),\\ \phi_t(x,\xi,t)+(\xi^2+\eta)\phi(x,\xi,t)-u_t(x,t)\mu(\xi)=0 & \text{dans } \Omega\times(-\infty,+\infty)\times(0,+\infty),\\ u(x,0)=u_0(x),\, u_t(x,0)=u_1(x) & \text{dans } \Omega,\\ \phi(x,\xi,0)=\phi_0(x,\xi) & \text{sur } \Omega\times(-\infty,+\infty). \end{cases}$$

qui s'appelle "système modèle augmenté", Cette représentation permet d'avoir un système augmenté qui peut se maitre sous la forme abstraite d'un problème de Cauchy du premier ordre dans H comme suit :

$$\begin{cases} U'(t)=AU(t), & t>0,\\ U(0)=U_0 & . \end{cases} \tag{1}$$

A est le générateur infinitésimal d 'un semi-groupe ce qui rend l'application des outils de l'analyse fonctionnelle et contrôle possible notamment l'étude de la stabilité asymptotique via un théorème général d'Arendt-Batty dans [3] pour montrer la stabilité forte du C_0-semi-groupe associé au système d'ondes (P).
Notre travail est basé principalement sur l'article intitulé
≪ Stabiliization of a Wave Equation with a General Internal Control of Diffusive Type ≫ réalisé par l'auteur ≪ Abdelkader Boudaoud ≫ et ≪ Abbes Benaissa ≫ publié dans ≪ Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity 11(2)(2022) 1-12 ≫

Plan de mémoire :

Notre mémoire est divisée en trois chapitres :

• **Le premier chapitre :** est consacré aux généralités et rappels de quelques théorèmes et résultats qui sont nécessaires pour le travail.

• **Le deuxième chapitre :** est consacré à l'étude de l'existence globale de la solution du système.

• **Le troisième chapitre :** est divisé en deux sections :
Dans la première section, on étudie le manque de stabilité exponentielle, en utilisant l'analyse spectrale.
Dans la deuxième section on étudie la stabilité asymptotique, nous utilisons un théorème général d'Arendt-Batty dans [3] pour montrer la stabilité forte du C_0-semi-groupe associé au système (P).

Chapitre 1

Gnéralités

Sommaire

1.1 *Généralités sur des espaces fonctionnels* 3
1.2 *Opérateurs bornés et non bornés* 12
1.3 *Analyse spectrale* 13
1.4 *Théorèmes Fredholm* 14
1.5 *Opérateurs dissipatifs et m-dissipatifs* 15
1.6 *Théorème de (Lax-Milgram)* 16
1.7 *Semi-groupes* 17

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions utilisés tout au long de ce travail.

1.1 Généralités sur des espaces fonctionnels

1.1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1:

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est un produit scalaire si :
1) Pour tous (u,v) de E, $f(u,v) = f(v,u)$.
2) Pour tous (u,v,w) de E, $f(u+v,w) = f(u,w) + f(v,w)$.
3) Pour tous (u,v,w) de E, $f(u,v+w) = f(u,v) + f(u,w)$.
4) Pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous (u,v) de E, $f(\lambda u, v) = \lambda f(u,v)$.
5) Pour tous u de E, $f(u,u) \geq 0$, et $f(u,u) = 0$ si, et seulement si, $u = 0$.

Définition 1.2:

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et soit $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.
On dit que f est un prodit scalaire si :
1) Pour tous (u,v) de E, $f(u,v) = \overline{f(v,u)}$.
2) Pour tous (u,v,w) de E, $f(u+v,w) = f(u,w) + f(v,w)$.
3) Pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous (u,v) de E, $f(\lambda u, v) = f(u, \lambda v) = \lambda f(u,v)$.
4) Pour tous u de E, $f(u,u) \geq 0$, et $f(u,u) = 0$ si, et seulement si, $u = 0$.

Définition 1.3: (Espaces de Hilbert)

Un espace de Hilbert H est un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle u, v\rangle$ et qui est complet pour la norme

$$\| u \| = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

1.1.2 Espace de Lebesgue

Définition 1.4: (Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$)

On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par :

1. *Pour $1 \leq p < +\infty$*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad , f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty \right\},$$

mini de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|.\|_{L^p(\Omega)}$ est un espace de Banach.

2. *Pour $p = +\infty$*

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad : f \text{ mesurable, et } \exists \ C > 0 \text{ telle que } |f(x)| < C \ \ p.p. \text{ sur } \Omega \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\left\{ C > 0, |f(x)| < C \quad p.p \quad x \in \Omega \right\}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ muni de la norme $\|.\|_{L^{+\infty}(\Omega)}$ est un espace de Banach.

Remarque 1.1.
Si $f \in L^\infty(\Omega)$.
On a alors,

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \ \ p.p. \quad sur \, \Omega.$$

Théorème 1.1 – [8].
Pour $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach et de Hilbert pour $p=2$, muni du produit scalaire :

1. *Si $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach sur $\mathbb{R}$*

$$\langle f,g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx.$$

2. *Si $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach sur $\mathbb{C}$*

$$\langle f,g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Notation :
Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, on désigne par q l'exposant conjugué de p, c'est à dire que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Théorème 1.2 – (Inégalité de Hölder) [8].
Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, et q l'exposant conjugué de p . Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et de plus on a

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Corollaire 1.1.
Soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Si $|\Omega| < +\infty$, alors $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.

Théorème 1.3 – (Inégalité de Cauchy-Shwartz). *[8]*
pour $p=q=2$ si $f \in L^2$ et $g \in L^2$ alors :

$$fg \in L^1 \quad \text{et on a} \quad \|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}.$$

Théorème 1.4 – (Inégalité de Minkowiski). *[8]*
Soient $f \in L^p$ et $g \in L^p$ alors

$$\|f+g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

1.1.3 Espaces de Sobolev, résultats de densité

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.5:

L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par

$$H^1(\Omega)=\left\{v\in L^2(\Omega):\frac{\partial V}{\partial x_i}\in L^2(\Omega),i=1,2,...,n\right\},$$

ou $\dfrac{\partial V}{\partial x_i}$ *est prise au sens des distributions.*
L'espace $H^1(\Omega)$ *est muni du produit scalaire*

$$\langle u,v\rangle_{H^1(\Omega)}=\int_\Omega\left(uv+\sum_{i=1}^n\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)dx,$$

et la norme correspondante

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}=\left[\int_\Omega|u(x)|^2+\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^2dx\right]^{\frac{1}{2}}=\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 1.2.
Par définition de la dérivation dans l'espace des distributions $\mathfrak{D}'(\Omega)$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :
i) $v\in H^1(\Omega)$.
ii) $\forall v\in L^2(\Omega)$ *et il existe* $g_1,g_2,...,g_n\in L^2(\Omega)$ *tel que :*

$$\forall\varphi\in\mathfrak{D}'(\Omega),\ \int_\Omega v\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx=-\int_\Omega g_i\varphi\,dx.$$

Alors par définition $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}=g_i$ *au sens des distributions.*
La définition ci- dessus peut etre prolongeé lorsqu'on remplace l'espace $L^2(\Omega)$ *par l'espace* $L^p(\Omega)$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$.

Définition 1.6:

Pour tout $1\leqslant p\leqslant+\infty$ *l'espace de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *est defini par :*

$$W^{1,p}(\Omega)=\left\{v\in L^p(\Omega):\frac{\partial v}{\partial x_i}\in L^p(\Omega),i=1,2,...,n\right\}.$$

Ou $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ *est prise ou sens des distributions.*
L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}=\left[\int_\Omega\left(|v|^p+\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^p\right)dx\right]^{\frac{1}{p}},\ pour\ \ 1\leqslant p<+\infty,$$

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}=\max\left\{\|v\|_\infty,\|\frac{\partial v}{\partial x_1}\|_\infty,...,\|\frac{\partial v}{\partial x_n}\|_\infty\right\}\quad ,pour\ p=+\infty.$$

Lorsque $p=2$, $w^{1,2}(\Omega)=H^1(\Omega)$.

Définition 1.7:

On prend $m\in\mathbb{N}$ *et* $1\leqslant p\leqslant+\infty$. *L'espace de Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$ *est défini par*

$$W^{m,p}(\Omega)=\{v\in L^p(\Omega):D^\alpha v\in L^p(\Omega)\ ,\ \forall\alpha\in\mathbb{N}\ \ avec\ \ |\alpha|\leqslant m\},$$

où $D^\alpha v$ *est la dérivé de* v *au sens des distributions de symboles* α .

On rappelle que $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$, $D^\alpha v=\dfrac{\partial^{|\alpha|}v}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$, *avec* $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$.

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)}=\left[\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega|D^\alpha v|^p dx\right]^{\frac{1}{p}},\ \ pour\ \ 1\leqslant p<+\infty,$$

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)}=\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha v\|_\infty\quad ,\ \ pour\ \ p=+\infty.$$

Lorsque p=2

$$w^{m,2}(\Omega)=H^m(\Omega)=\left\{v\in L^2(\Omega):D^\alpha v\in L^2(\Omega),\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^n,\ |\alpha|\leqslant m\right\},$$

$H^m(\Omega)$ *est muni du produit scalaire.*

$$\langle u,v\rangle_{H^m(\Omega)}=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega D^\alpha u(x)\overline{D^\alpha v(x)}dx,\qquad(1.1)$$

et la norme associée

$$\|u\|_{H^m(\Omega)}=\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega|D^\alpha u(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha u(x)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ *peut aussi muni de la norme équivalente*

$$\|v\|_{L^p(\Omega)}+\sum_{i=1}^n\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Théorème 1.5. *[4]*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout nombre réel p avec $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach. Lorsque $p = 2$, $W^{m,p}(\Omega) = H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Proposition 1.1:

i) Si $m \geq m'$ $(m, m' \in \mathbb{N})$, alors $H^m(\Omega)$ est contenu, avec une injection, dans $H^{m'}(\Omega)$.

ii) $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire (1.1) est un espace de Hilbert.

Définition 1.8:

Par définition
- $H_0^1(\Omega) =$ *la fermeture de* $\mathfrak{D}(\Omega)$ *dans* $H^1(\Omega)$.
- $H_0^1(\Omega) =$ *sous espace de* $H^1(\Omega)$ *des fonctions nulles sur* $\partial\Omega$.
- $W_0^{1,p}(\Omega) =$ *la fermeture de* $\mathfrak{D}(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$.
- $W_0^{m,p}(\Omega) =$ *la fermeture de* $\mathfrak{D}(\Omega)$ *dans* $W^{m,p}(\Omega)$.

Puisque (par définition) $\mathfrak{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, on peut identifier le dual $H^{-1}(\Omega)$ de H_0^1 à un espace de distribution sur Ω

$$\begin{cases} H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))' & , \\ H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset \mathfrak{D}'(\Omega) & . \end{cases}$$

Définition 1.9:

Pour $m \in \mathbb{N}$, on désigne par $H_0^m(\Omega)$ la fermeture de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.
De manière évidente, $H_0^m(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^m(\Omega)$, mais en général $H_0^m(\Omega) \neq H^m(\Omega)$.
Signalons deux cas où on a bien l'égalité

i) Si $m = 0$, alors $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ et donc $H_0^0(\Omega) = H^0(\Omega)$.

ii) Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, alors on peut montrer que $H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1.6 – (Inégalité de Poincaré). *[4]*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné dans une direction. Alors, pour tout $1 \leq p < +\infty$, il existe une constante $C_{p,n}(\Omega)$ qui dépend seulement de Ω , p et n telle que :

$$\left(\int_\Omega |v(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_{p,n}(\Omega) \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} , \ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Théorème 1.7 – (Inégalité de Poincaré). *[13]*
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $u \in H_0^1(\Omega)$. Alors il existe une constante positive C qui dépend seulement de Ω et n telle que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \ , \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Théorème 1.8. *[13]*
Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$. Il existe une constante positive C qui dépend seulement de Ω et n telle que pour tout $v \in H^1(\Omega)$

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + |\int_\Omega v\, dx|\right).$$

Définition 1.10:

Soient deux espaces de Banach E et F tels que $F \subset E$. On dit que F s'injecte de manière continue dans E (en notation $F \hookrightarrow E$) si et seulement si l'opérateur identité

$$Id : \begin{array}{c} F \to E \\ y \to y, \end{array}$$

est continu. De même,on dit que F s'injecte de manière compacte dans E (en notation $F \hookrightarrow_c E$) si et seulement si l'opérateur identité de F dans E est compact.

Théorème 1.9 – (de Relliche). *[1, 16]*
Si Ω un ouvert borné et à bord continu, alors

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow_c H^{m-1}(\Omega), \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

En particulier

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow_c L^2(\Omega), \quad \forall m \in \mathbb{N}^*,$$

Théorème 1.10 – (injection de sbolev). *[1, 16]*
Si Ω un ouvert borné à bord lipschitzien, alors on a les deux injections suivantes :

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leqslant p < +\infty \quad \text{tell que} \quad m - \frac{n}{2} \leqslant -\frac{n}{p},$$

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}), \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \quad \text{tell que} \quad m - \frac{n}{2} > 0.$$

Théorème 1.11. *[13]*
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ de classe C^1.
Alors, pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$, l'estimation suivant a lieu

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant C \|u\|^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)} \|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)},$$

avec C une constante positive indépendante de u .

Théorème 1.12 – (Formule de Green). *[5]*
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1.

(1) Si $u \in C^1(\overline{\Omega})$, $v \in C^1(\overline{\Omega})$ et $\Delta v \in C(\overline{\Omega})$, alors

$$\int_\Omega u(x)\Delta v(x)dx = -\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial v}{\partial \nu}d\Gamma.$$

(2) Si $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ et $\Delta u, \Delta v \in C(\overline{\Omega})$, alors

$$\int_\Omega [u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)]dx = \int_{\partial\Omega} \left(u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial \nu} - v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right) d\Gamma.$$

Théorème 1.13 – (Théorème de Fubini).
Soit $f:(X,A)\longrightarrow(\mathbb{R},B(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable positive sur l'espace produit X muni de la σ-algèbre produit A intégrable par rapport à la mesure produit μ, autrement dit $\int_X |f|d\mu<\infty$, alors

$$\int_X f\,d\mu=\int_{X_1}\left(\int_{X_2} f(x_1,x_2)d\mu_2(x_2)\right)d\mu_1(x_1).$$

ainsi que la formule analogue en renversant le rôle des indices 1 et 2.

Dans la pratique, le théorème de Fubini s'appuie sur celui de Tonelli en vérifiant au préalable la condition d'intégrabilité $\int_X |f|d\mu<\infty$ par intégration partielle, suivant l'une ou l'autre des coordonnées, puisque que $|f|$ est mesurable positive.
Il est illustratif d'appliquer les théorèmes de Fubini et Tonelli à la situation ≪idéale≫ où la fonction à intégrer est un produit $f(x)=f_1(x_1)f_2(x_2)$, $x=(x_1,x_2)\in X$, donnant lieu à une séparation des variables. Dans ce cas, sous les conditions de mesurabilité et d'intégrabilité requises

$$\int_X f\,d\mu=\left(\int_{X_1} f_1\,d\mu_1\right)\left(\int_{X_2} f_2\,d\mu_2\right).$$

Si μ_1 et μ_2 sont la mesure de comptage sur $\{1,...,n\}$, l'identité précédente recouvre des propriétés classiques du type

$$\sum_{k,\ell=1}^n a_K\,b_\ell=\sum_{k=1}^n a_k\sum_{\ell=1}^n b_\ell,$$

pour des réels (ou complexes) a_k, b_ℓ, k, $\ell=1,...,n$.

Théorème 1.14 – (Théorème de convergence dominée de Lebesgue).
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur l'espace mesuré $(X\mathcal{M},\mu)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, qui converge simplement-p.p. (pour μ) vers une fonction f. Supposons qu'il existe une fonction intégrable positive $g:X\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}_+$, dite dominante, telle que :
$\forall n\in\mathbb{N}$, $|f_n|\leqslant g-p.p.$ Alors :
1) f et f_n sont intégrables (pour tout $n\in\mathbb{N}$)
2) $\lim_n \int |f_n-f|d\mu=0$ (autrement dit $\|f-f_n\|_1\longrightarrow 0$ lorsque $n\longrightarrow+\infty$)
3)) $\lim_n \int f_n d\mu=\int f\,d\mu$.

1.2 Opérateurs bornés et non bornés

On commence dans ce chapitre par donner quelques résultats qui sont connus sur les opérateurs bornés et non bornés . On n'essaye pas de donner tout, mais de donner les définitions et les théorèmes de base dans la plus part on les présente sans démonstrations que l'on voit nécessaires dans notre travail. Soient $(E,\|.\|_E)$ et $(F,\|.\|_F)$ deux espaces de Banach sur $\mathbb{C}$, et H désigne toujours un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle .,.\rangle_H$ et la norme correspondante $\|.\|_{\mathrm{H}}$.

Définition 1.11:

Un opérateur linéaire $T : E \longrightarrow F$ *est dit bornée s'il existe* $C > 0$ *telle que*

$$\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E \ , \forall x \in E,$$

dans le cas contraire, T *est dit non borné.*
L'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés de E *dans* F *est noté par* $L(E,F)$.
De plus, l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés de E *dans* E *est noté par* $L(E)$.

Définition 1.12:

Un opérateur linéaire non borné de E *dans* F *est un couple* $(T,D(T))$ *, avec* $D(T) \subset E$ *est un sous-espace de* E *(dit le domaine de* T*) et la transformation linéaire*

$$T : D(T) \subset E \longrightarrow F,$$

dans le cas où $E = F$ *, alors on dit que* $(T,D(T))$ *est un opérateur linéaire non borné sur* E .

Définition 1.13:

Soit $T : (T,D(T)) \subset E \longrightarrow F$ *un opérateur linéaire non borné.*

i) L'image de T *est définie par*

$$Im(T) = \{Tx : x \in D(T)\} \subset F,$$

ii) Le noyau de T *est définie par*

$$Ker(T) = \{x \in D(T) : Tx = 0\} \subset E,$$

iii) Le graphe de T *est défini par*

$$Gr(T) = \{(x,Tx) : x \in D(T)\} \subset E \times F,$$

Définition 1.14:

L'opérateur $T \in L(E,F)$ *est dit compact si de toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* E *avec* $\|x_n\| = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *, la suite* $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une sous-suite convergente dans* F .
L'ensemble de tous les opérateurs compacts de E *dans* F *est noté par* $K(E,F)$ *, et si* $E = F$ *, on écrit* $K(E,E) = K(E)$.

Définition 1.15:

Un opérateur $T:(T,D(T))\subset E\longrightarrow F$ *est dit fermé si* $Gr(T)$ *est fermé dans* $E\times F$.
Un opérateur linéaire non borné fermé est caractérisé par :
T *est fermé si et seulement si*

$$\left(\begin{array}{c}\text{Pour tout suite } (x_n) \text{ telle que } (x_n)\subset D(T),\\ x_n\to x \text{ dans } E,\\ \text{et } Tx_n\to y \text{ dans } F.\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{c}x\in D(T),\\ \text{et}\\ Tx=y.\end{array}\right).$$

1.3 Analyse spectrale

Définition 1.16:

Soit E *un espace de Banach et* $(A,D(A))$ *un opérateur borné ou non borné*

1) On appelle ensemble résolvant de A *l'ensemble*

$$\rho(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \lambda I-A:\ D(A)\to E \text{ est inversible}\}.$$

L'ensemble résolvant est un ouvert de $\mathbb{C}$.

2) Pour $\lambda\in\rho(A)$ *on note,* $R(\lambda)=(\lambda I-A)^{-1}$.
La famille d'opérateurs linéaires $\{(\lambda I-A)^{-1}:\lambda\in\rho(A)\}$ *est appelée la résolvante de* A.
• *La fonction* $\lambda\to R(\lambda)$ *est analytique de* $\rho(A)$ *dans* $L(E)$.

• *D'après le théorème du graphe fermé, il résulte que l'opérateur* $(\lambda I-A)^{-1}:E\longrightarrow E$ *est continu sur* E .

• *L'application* $(\lambda I-A)^{-1}:E\longrightarrow D(A)\subset E$ *est compacte si l'injection* $(D(A),\|.\|_{D(A)})\longrightarrow(E,\|.\|_E)$ *est compacte.*

• *On a pour tout* $(\lambda,\mu)\in\rho(A)\times\rho(A)$ *, l'identité de la résolvante*

$$R(\lambda)-R(\mu)=(\mu-\lambda)R(\lambda)R(\mu).$$

3)On appelle spectre de A *l'ensemble*

$$\sigma(A)=\mathbb{C}\setminus\rho(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda I-A \text{ non inversible}\}.$$

Un tel λ *est appelle une valeur spectrale de* A.
• $\sigma(A)$ *est compacte de* $\mathbb{C}$.

4)

$$\sigma_p(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}\ :\lambda I-A:D(A)\to E \text{ non injectif}\},$$

$\sigma_p(A)$ *est l'ensemble des valeurs propres de* A. $\sigma_p(A)$ *est l'ensemble des* $\lambda\in\mathbb{C}$ *tels qu'il existe* $u\in E\setminus\{0\}$ *tel que :*

$$Au = \lambda u.$$

5)

$$\sigma_r(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \ : \lambda I - A : D(A) \to E \ \text{ injectif et } \ \overline{Im(\lambda I - A)} \neq E\right\}$$

$\sigma_r(A)$ *est le spectre résiduel de* A,
et

$$\sigma_c(A) = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \in \mathbb{C} \ : \lambda I - A : D(A) \to E \quad \text{injectif et } \ \overline{Im(\lambda I - A)} = E \\ \text{et } \ (\lambda I - A)^{-1} : Im(\lambda I - A) \to D(A) \ \text{ non born} \end{array} \right\},$$

$\sigma_c(A)$ *est le spectre continu de* A.

6) L'ensemble $\sigma_c(A)$ *se décompose en l'union disjointe*

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_c(A).$$

1.4 Théorèmes Fredholm

Le théorème suivant, appelé l'alternative de Fredholm permet, entre autre, de montrer l'existence et l'unicité des solutions des équations aux dérivées partielles de type elliptique ne vérifiant pas les conditions de coercivité.

Théorème 1.15 – (Alternative de Fredholm).
Soit $T \in K(E)$ *et* $\lambda \neq 0$ *. On considère l'équation de Fredholm : pour* $y \in E$*, trouver* $x \in E$ *tel que :*

$$\lambda x - Tx = y. \tag{1.2}$$

Alors, un des deux cas suivants est possible.
1) Pour tout $y \in E$*, il existe un unique* $x \in E$ *solution de l'équation* (1.2).
2) L'équation homogène $\lambda x - Tx = 0$ *admet une solution* $x \neq 0$ *.*
Dans le second cas, l'équation (1.2) *admet une solution (qui est non unique) si et seulement si* $y \in Im(\lambda - T)$.

Théorème 1.16 – (Alternative de Fredholm).
Soit E *un espace de Banach et soit* T *un opérateur compact de* E *dans lui même. Alors :*

- $Ker(I - T)$ *est de dimension finie. (*I *est l'opérateur identité de* E*).*
- $Im(I - T)$ *est fermé, et plus précisément* $Im(I - T) = (Ker(I - T^*))^{\perp}$.
- *L'opérateur* $I - T$ *est injectif si et seulement s'il est surjectif, c'est à dire*

$$Ker(I - T) = 0 \Leftrightarrow Im(I - T) = E.$$

- *dim Ker*$(I-T)$=*dim Ker*$(I-T^*)$.

Remarque 1.3.
1) On emploie ce résultat dans le cas d'un opérateur de la forme $\lambda I-T$ *où* T *est un opérateur compact et* $\lambda\neq 0$ *pour exprimer que deux cas, et deux seulement peuvent se présenter :*
- Ou l'équation homogène $(\lambda I-T)u=0$ *n'admet que la solution nulle, et alors l'équation* $(\lambda I-T)u=f$ *admet un solution unique pour tout f.*
- Ou l'équation $(\lambda I-T)u=0$ *admet un nombre fini* n *de solutions linéairement indépendantes et alors l'équation* $(\lambda I-T)u=f$ *admet des solutions si et seulement si* f *vérifie* n *relations linéairement indépendantes (*n *conditions d'orthogonalités), auquel cas l'équation* $(\lambda I-T)u=f$ *admet* n *solutions.*
2) Le même résultat est vrai pour l'opérateur $I-T$ *puisque* $\frac{T}{\lambda}$ *est compact.*

1.5 Opérateurs dissipatifs et m-dissipatifs

Définition 1.17:

Soit H *un espace de Hilbert réel ou complexe muni d'un produit scalaire* $\langle .,.\rangle$ *et de la norme induite* $\|.\|$. *Soit* A *un opérateur linéaire à domaine dense sur* H, *c'est à dire*

$$A: D(A)\subset H\longrightarrow H \quad et \quad \overline{D(A)}=H.$$

- En cas où H *est de Hilbert sur* $\mathbb{C}$, *on dit que* A *est dissipatif si pour tout* $x\in D(A)$,

$$\mathscr{R}\langle Ax,x\rangle\leqslant 0.$$

- En cas où H *est de Hilbert sur* $\mathbb{R}$, *on dit que* A *est dissipatif si pour tout* $x\in D(A)$,

$$\langle Ax,x\rangle\leqslant 0.$$

Définition 1.18:

Un opérateur linéaire A dans un espace de Banach E est dit m-dissipatif si A et dissipatif et $\lambda I-A$ *est surjectif c'est à dire* $Im(\lambda I-A)=E$, *pour tout* $\lambda>0$.

Théorème 1.17.
Soit $(A,D(A))$ *un opérateur linéaire non borné sur un espace de Banach* E. *Si A est dissipatif avec* $Im(I-A)=E$, *et* E *est réflexif, alors* $\overline{D(A)}=E$.

Théorème 1.18.
Soit A un opérateur m-dissipatif, alors
- $Im(\lambda I-A)=E$.
- $]0,+\infty[\subseteq\rho(A)$.

1.6 Théorème de (Lax-Milgram)

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.19:

Soit H un espace de Hilbert et $f : H \to \mathbb{R}$.
On dit que f est une forme linéaire sur H si et seulement si :

$$\forall u, v \in H, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \ f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) .$$

Définition 1.20:

Une forme bilinéaire $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ est :
- *Continue s'il existe une constante C telle que*

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|_H\|v\|_H \quad \forall (u,v) \in H \times H.$$

- *Coercive s'il existe $\alpha > 0$ telle que*

$$a(u,u) \geq \alpha\|u\|_H^2 \quad \forall u \in H.$$

Théorème 1.19 – (Lax Milgram). *[4]*
Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle_H$ et la norme correspondante $\|.\|_H = \langle .,. \rangle_H^{\frac{1}{2}}$.

Soit $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire qui satisfait les deux condition suivantes

i) a est continue , c'est à dire il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall u, v \in H \quad |a(u,v)| \leq M\|u\|_H\|v\|_H,$$

ii) a est coercive, c'est à dire il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall v \in H \ \ a(v,v) \geq \alpha\|v\|_H^2,$$

Alors pour tout $L \in H'$ (L est une forme linéaire continue sur H), il existe une unique $u \in H$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \ \ \forall v \in H.$$

1.7 Semi-groupes

1.7.1 Concepts sur les semi-groupes

Dans cette section on va introduire quelques notions de base concernant les semi-groupes. On commence par des définitions et théorèmes de base.

Définition 1.21:

La famille $(S(t))_{t>0}$ *d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach* E *(c'est à dire* $\forall t \geq 0,\ S(t) \in L(E)$*) est dite un semi-groupe fortement continu (en bref* C_0*-semi-groupe) si :*

1) $S(0) = I$ *(I=l'opérateur identité).*

2) $S(t+s) = S(t)S(s)\ \ \forall t, s \geq 0.$

3) $(S(t))_{t\geq 0}$ *est fortement continue sur* $[0, +\infty[$
(ce qui est équivalent à $\lim_{t\to 0^+} \|S(t)x - x\|_E = 0\ ,\ \forall x \in E)$ *.*

Pour un tel C_0*-semi-groupe* $(S(t))_{t\geq 0}$*, l'opérateur* A *défini sur l'ensemble :*

$$D(A) = \left\{ x \in E\ : \lim_{t\to 0^+} \frac{s(t)x - x}{t} \ \ existe \right\},$$

par

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t},\ \forall x \in D(A),$$

est dit le générateur infinitésimal du semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ *et* $D(A)$ *est dit le domaine de* A*.*
Etant donné un opérateur A *, si* A *coïnside avec le générateur infinitésimal du semi - groupe* $(S(t))_{t\geq 0}$ *, alors on dit qu'il génére le semi-groupe fortement continu* $(S(t))_{t\geq 0}$ *.*
Parfois on note également $S(t) = e^{tA}$*.*

Proposition 1.2:

Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi-groupe sur un espace de Banach* E*. Alors ils existent des constantes* $M \geq 1$ *et* $\omega \geq 0$ *telles que*

$$\|S(t)\|_{L(x)} \leq M e^{\omega t},\ \forall t \geq 0.$$

Si $\omega = 0$ *alors le semi-groupe correspondant est uniformément borné , de plus, si* $M = 1$ *alors* $(S(t))_{t\geq 0}$ *est dit* C_0*-semi-groupe de contraction.(c'est à dire* $\|S(t)\|_{L(x)} \leqslant 1$*)*

Théorème 1.20 – (Hille-Yosida). *[13]*
Un opérateur linéaire (non borné) A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $(S(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Hilbert H si et seulement si :

i) A est fermé et $\overline{D(A)} = H$.

ii) l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A contient $\mathbb{R}^+$ et pour tout $\lambda > 0$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Théorème 1.21. *[14]*
Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe de générateur infinitésimal A sur un espace de Banach E
Alors le type ω_0 du semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ satisfait

$$\omega_0 = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln\|S(t)\|}{t}.$$

Théorème 1.22. *[14]*
Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe de générateur infinitésimal A sur un espace de Banach E et $\sigma(A)$ le spectre de A.
Alors le type ω_0 du semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ satisfait

$$\omega_0 \geq \sup\{\mathscr{R}(\lambda),\ \lambda \in \sigma(A)\},$$

où $\mathscr{R}(\lambda)$ désigne la partie réelle de λ et $\sup\{\mathscr{R}(\lambda),\ \lambda \in \sigma(A)\}$ est la borne spectrale de A.

Théorème 1.23. *[14]*
Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe analytique de générateur infinitésimal A sur un espace de Banach E et $\sigma(A)$ le spectre de A.
Alors le type ω_0 du semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ satisfait

$$\omega_0 = \sup\{\mathscr{R}(\lambda),\ \lambda \in \sigma(A)\},.$$

Théorème 1.24 – (Lumer-Phillips).
Soit A un opérateur linéaire sur un espace de Banach E. Alors A est générateur d'un C_0-semi-groupe de contraction $(S(t))_{t\geq 0}$ si et seulement si :

i) $\overline{D(A)} = E$.

ii) A est m-dissipatif.

Corollaire 1.2.
Soit A Un opérateur linéaire sur un espace de Banach E. Alors A est générateur d'un C_0-semi-groupe de contraction $(S(t))_{t\geq 0}$ sur E si et seulement si :

i) A est fermé et $\overline{D(A)} = E$.

ii) A et A^* sont dissipatifs.

Corollaire 1.3.
Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné sur un espace de Hilbert H . A est le générateur d'un C_0-semi-groupe de contraction si et seulement si A est un opérateur m-dissipatif.

Théorème 1.25. *[13]*
Soit A un opérateur linéaire à domaine dense $D(A)$ sur un espace de Hilbert H.
Si A est dissipatif et $0 \in \rho(A)$ l'ensemble résolvant de A , alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction sur H. La majorité des équations d'évolution peuvent être réduites sous la forme d'un problème de Cauchy abstrait suivant

$$\begin{cases} U' = AU & t > 0, \\ U(0) = U_0 & , \end{cases} \tag{1.3}$$

où A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Hilbert H.

Théorème 1.26 – (Hille-Yosida).
Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné sur H. Supposons que A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $(S(t))_{t\geq 0}$. Alors,

1)Pour $U_0 \in D(A)$, le problème (1.3) admet une solution forte unique

$$U(t) = S(t)U_0 \in C^0(\mathbb{R}_+, D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, H) .$$

2)Pour $U_0 \in H$ le problème (1.3) admet une solution faible unique

$$U(t) \in C^0(\mathbb{R}_+, H) .$$

1.7.2 Stabilité des semi-groupes

Définition 1.22:

Soit $\omega(A)=\sup\{\mathscr{R}(\lambda),\ \lambda\in\sigma(A)\}$ *la borne spectrale de* A.
On dit que le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ *est stable si :*

$$\lim_{t\to+\infty} S(t)=0\ ,\quad \text{pour tout } x\in E.$$

Si $\omega(A)<0$ *, alors* $(S(t))_{t\geq 0}$ *est dit exponentiellement stable.*

Définition 1.23:

Supposons que A est le générateur d'un C_0*-semi-groupe de contraction* $(S(t))_{t\geq 0}$ *sur un espace de Banach E. On dit que le* C_0*-semi-groupe* $(S(t))_{t\geq 0}$ *est*
1) Fortement stable si

$$\lim_{t\to+\infty}\|S(t)x\|_E=0\ ,\ \text{Pour tout } x\in E.$$

2) Uniformément stable si

$$\lim_{t\to+\infty}\|S(t)\|_{L(E)}=0.$$

3) Faiblement stable si

$$\text{Pour tout } x\in E \text{ et } y\in E',\ \langle S(t)x,y\rangle\to 0 \quad \text{lorsque} \quad t\to\infty.$$

4) Asymptotiquement stable si

$$\text{Pour tout } x\in E:\|S(t)x\|\to 0 \ \text{ lorsque } \ t\to\infty.$$

5)Exponentiellement stable s'ils existent deux constantes $M\geq 1$ *et* $\omega>0$ *telles que*

$$\|S(t)x\|\leq Me^{-\omega t}\|x\|_E \quad \text{Pour tout} \quad t\geq 0, x\in E.$$

6) Polynomialement stable s'ils existent deux constantes positives C *et* α *telles que*

$$\|S(t)x\|\leq Ct^{-\alpha}\|x\|_E \quad \text{Pour tout} \quad t\geq 0, x\in E.$$

Définition 1.24:

Un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ *sur* H *est dit uniformément exponentiellement asymptotiquement stable si et seulement s'ils existent deux nombres positifs* $M\geq 1$ *et* ω *tell que*

$$\|S(t)\|\leq Me^{-\omega t} \quad \text{Pour tout} \quad t\geq 0.$$

Définition 1.25:

Un C_0*-semi-groupe* $(S(t))_{t\geq 0}$ *sur* H *est dit fortement* L^2*-stable si et seulement si,*

$$\|S(t)x\|\in L^2([0,+\infty[),\quad \text{Pour tout} \quad x\in H\ .$$

Définition 1.26:

Un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ *sur* H *est dit uniformément stable ou* L_∞*-stable, ou uniformément borné, si et seulement s'il existe une constante positive* M *telle que , pour tout* $t \geq 0$

$$\|S(t)\| \leqslant M.$$

Théorème 1.27. *[11]*
Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi-groupe sur E de générateur* A*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $(S(t))_{t\geq 0}$ *est exponentiellement stable . C'est à dire*

$$\|S(t)\| \leqslant M e^{-\omega t}, \text{ pour tout } M \geq 1, \omega > 0.$$

ii) $(S(t))_{t\geq 0}$ *est uniformément stable. C'est à dire*

$$\lim_{t\to+\infty} \|S(t)\|_{L(E)} = 0.$$

iii) Il existe $t_0 > 0$ *tell que* $\|S(t_0)\|_{L(E)} < 1$.

Théorème 1.28. *[11]*
Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi-groupe uniformément borné sur un espace de Banach* E *et soit* A *son générateur . Alors*

i) Si $(S(t))_{t\geq 0}$ *est asymptotiquement stable , alors* $\sigma(A)\cap i\mathbb{R} \subset \sigma_c(A)$ *le spectre continu de* A *.*

ii) Si $\sigma(A)\cap i\mathbb{R} \subset \sigma_c(A)$ *, et* $\sigma_c(A)$ *est dénombrable, alors* $(S(t))_{t\geq 0}$ *est asymptotiquement stable.*

iii) Si $(\lambda I - A)^{-1}$ *est compacte, alors* $(S(t))_{t\geq 0}$ *est asymptotiquement stable si et seulement si* $\Re\lambda < 0$ *pour tout* $\lambda \in \sigma(A)$.

Théorème 1.29. *[11]*
Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi-groupe sur un espace de Hilbert* H *de générateur* A*. Alors* $(S(t))_{t\geq 0}$ *est exponentiellement stable si et seulement si*

$$\{\lambda : \Re\lambda \geq 0\} \subset \rho(A),$$

et

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq M \quad \text{pour tout } \lambda \text{ avec } \Re\lambda \geq 0 \text{ et } M > 0 \text{ une constante .}$$

Corollaire 1.4.
Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe uniformément borné sur un espace de Hilbert H de générateur A. Alors $(S(t))_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable si et seulement si

$$i\mathbb{R}\subset\rho(A) \quad et \quad M_0:=\sup_{\pi\in\mathbb{R}}\|(i\beta I-A)^{-1}\|\leq+\infty.$$

Théorème 1.30. *[13]*
Soit $S(t)=e^{At}$ un C_0-semi-groupe sur un espace de Hilbert H. Alors $(S(t))_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable si et seulement si

$$\sup\{\Re\lambda,\ \lambda\in\sigma(A)\}<0\,,$$

et

$$\sup_{\Re\lambda\geq 0}\|(\lambda I-A)^{-1}\|<\infty\,.$$

Lemme 1.1.
Soit $i\beta\in i\mathbb{R}$, pour tout fixe $\eta\geq 0$, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2(\xi)}{\xi^2+\eta+i\beta_n}d\xi\to 0, \quad lorsque \quad |\beta_n|\to\infty \quad (n\to\infty).$$

Preuve : voir[7] page 10

1.7.3 Critère du domaine fréquentiel

Théorème 1.31. *[19]*
Les deux énoncés suivants sont équivalents dans le contexte d'un espace de Hilbert :

1). *Le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$, est exponentiellement stable :*

$$\exists M\geq 1,\exists\alpha>0,\|S(t)\|\leq Me^{-\alpha t}. \tag{1.4}$$

2).

$$\rho(A)\supseteq\{i\beta:\beta\in\mathbb{R}\}\equiv i\mathbb{R}, \tag{1.5}$$

et

$$\sup_{\beta\in\mathbb{R}}\|(i\beta I-A)^{-1}\|<+\infty. \tag{1.6}$$

Chapitre 2

Existence et unicité de la solution du système

Sommaire

2.1 *Position du problème* 23
2.2 *Existence et unicité de la solution* 26

2.1 Position du problème

Dans ce chapitre, on va établir l'existence et l'unicité de la solution de l'équation d'onde avec contrôle interne général de type diffusif . Le système est donné par :

$$(P)\begin{cases} u_{tt}(x,t)-\Delta u(x,t)+\zeta\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\phi(x,\xi,t)d\xi=0 & \text{dans } \Omega\times(0,+\infty),\\ u(x,t)=0 & \text{sur } \partial\Omega\times(0,+\infty),\\ \phi_t(x,\xi,t)+(\xi^2+\eta)\phi(x,\xi,t)-u_t(x,t)\mu(\xi)=0 & \text{dans } \Omega\times(-\infty,+\infty)\times(0,+\infty),\\ u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x) & \text{dans } \Omega,\\ \phi(x,\xi,0)=\phi_0(x,\xi) & \text{sur } \Omega\times(-\infty,+\infty). \end{cases}$$

- u : le déplacement
- $u_t(x,t)$: la vitesse
- $u_{tt}(x,t)$: l'accélération
- $\Delta u(x,t)$: laplacien de u
- μ : la mesure générale de densité
- ϕ : fonction de diffusion
- ξ : la variable diffusive
- η : constante positive
- ζ : constante positive

Dans cette section, nous donnons un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (P) .
Nous définissons l'espace suivant

$$H_0^1(\Omega)=\left\{u\in H^1(\Omega): u|_{\partial\Omega}=0\right\},$$

et l'espace de l'énergie

$$\mathscr{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega \times (-\infty, +\infty)). \tag{2.1}$$

Lemme 2.1.
L'espace $\mathscr{H}$ défini dans (2.1) est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire :

$$\left\langle U, \tilde{U} \right\rangle_{\mathscr{H}} = \int_\Omega \left(v\overline{\tilde{v}} + \nabla u \nabla \overline{\tilde{u}} \right) dx + \zeta \int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} \phi \overline{\tilde{\phi}} \, d\xi \, dx,$$

telle que : $U = (u, v, \phi)^T$, $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\phi})^T$, $v = u_t$.

Proposition 2.1:

La fonction d'énergie associée à la solution du problème (P) est définie par la formule :

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{\zeta}{2} \int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x, \xi, t)|^2 d\xi \, dx. \tag{2.2}$$

Démonstration.

On multiplie la première équation de (P) par $\overline{u_t}$ et on intégre sur Ω on obtient :

$$\int_\Omega \overline{u_t} u_{tt}(x,t) dx - \int_\Omega \overline{u_t} \Delta u(x,t) dx + \zeta \int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{u_t} \mu(\xi) \phi(x, \xi, t) d\xi \, dx = 0,$$

ce qui équivalent à

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\Omega |u_t| dx - [\overline{u_t} \nabla u]_\Gamma + \int_\Omega (\nabla \overline{u_t})(\nabla u) dx \\ &+ \zeta \int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi_t(x, \xi, t) + (\xi^2 + \eta)\phi(x, \xi, t))\phi(x, \xi, t) d\xi \, dx = 0, \end{aligned}$$

ce qui équivalent à :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\Omega |u_t| dx - \int_\Gamma \overline{u_t} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma + \int_\Omega (\nabla \overline{u})_t (\nabla u) dx \\ &+ \zeta \int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_t(x, \xi, t)\phi(x, \xi, t) d\xi \, dx + \zeta \int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 + \eta)\phi(x, \xi, t)^2 d\xi \, dx = 0, \end{aligned}$$

ce qui équivalent à :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\Omega |u_t| dx - \int_\Gamma \overline{u_t} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma + \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\ &+ \zeta \int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_t(x, \xi, t)\phi(x, \xi, t) d\zeta \, dx + \zeta \int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 + \eta)\phi(x, \xi, t)^2 d\zeta \, dx = 0, \end{aligned}$$

ce qui équivalent aussi à :

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|dx+\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$
$$+\frac{\zeta}{2}\int_\Omega\int_{-\infty}^{+\infty}|\phi(x,\xi,t)|^2 d\zeta dx\Big]+\zeta\int_\Omega\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)\phi(x,\xi,t)^2 d\zeta dx=0,$$

Donc on conclut que :

$$E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2+\frac{\zeta}{2}\int_\Omega\int_{-\infty}^{+\infty}|\phi(x,\xi,t)|^2 d\xi dx, \tag{2.3}$$

□

Lemme 2.2.
Soit (u,v,ϕ) *une solution régulière du problème* (P) *. Alors, la fonctionnelle énergétique définie par l'équation* (2.2) *satisfait :*

$$\frac{d}{dt}E(t)=-\zeta\int_\Omega\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(x,\xi,t)|^2 d\xi dx\leqslant 0. \tag{2.4}$$

Démonstration.

On multiplie la première équation de (P) par $\overline{u_t}$ et on intégre sur Ω on obtient :

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|dx+\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$
$$+\frac{d}{dt}\frac{\zeta}{2}\int_\Omega\int_{-\infty}^{+\infty}|\phi(x,\xi,t)|^2 d\zeta dx+\zeta\int_\Omega\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)\phi(x,\xi,t)^2 d\zeta dx=0.$$

Donc on conclut que :

$$\frac{d}{dt}E(t)=-\zeta\int_\Omega\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)\phi(x,\xi,t)^2 d\zeta dx\leq 0. \tag{2.5}$$

□

2.2 Existence et unicité de la solution

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution, on réécrit le problème (P) sous la forme abstraite d'un problème de Cauchy du premier ordre dans $\mathscr{H}$ comme suit :

$$\begin{cases} U'(t) = AU(t) \quad t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{2.6}$$

telle que : $U_0 = (u_0, u_1, \phi_0)^T$ et $A : D(A) \subset \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ est défini par :

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u - \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(\xi)d\xi \\ -(\xi^2+\eta)\phi + \mu(\xi)v(x) \end{pmatrix},$$

et son domaine est donné par :

$$\mathrm{D(A)} = \left\{ \begin{array}{c} (u,v,\phi)^T \in \mathscr{H} : u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),\ v \in H_0^1(\Omega), \\ \Delta u - \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(\xi)d\xi \in L^2(\Omega), \\ -(\xi^2+\eta)\phi + \mu(\xi)v(x) \in L^2(\Omega \times (-\infty,+\infty)), \\ |\xi|\phi \in L^2(\Omega \times (-\infty,+\infty)) \end{array} \right\}.$$

Nous montrons que l'opérateur A engendre un C_0-semi-groupe dans $\mathscr{H}$. Dans cette étape, nous montrons que l'opérateur A est m-dissipatif sur $\mathscr{H}$.
Par conséquent d'après le **théorème de Lumer-phillips**, l'opérateur A engendre un C_0-semi-groupe de contraction.

Proposition 2.2:

L'opérateur A est m-dissipatif sur $\mathscr{H}$.

Démonstration.

Montrons que A est m-dissipatif
-Tout d'abord , nous prouvons que l'opérateur A est dissipatif c'est à dire
pour tout $U \in D(A) : \mathscr{R}\langle AU, U\rangle \leqslant 0$.
Soit $U \in D(A)$
On a

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{A}\begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u - \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(\xi)d\xi \\ -(\xi^2+\eta)\phi + \mu(\xi)v(x) \end{pmatrix},$$

donc :

$$\langle AU,U\rangle_{\mathscr{H}} = \int_\Omega \left(\Delta u - \zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\phi(\xi)d\xi\right)\overline{v}\,dx + \zeta\int_\Omega\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-(\xi^2+\eta)\phi+\mu(\xi)v(x)\right)\overline{\phi}\,d\xi\,dx + \int_\Omega \nabla v\nabla\overline{u}\,dx,$$

$$= \int_\Omega \Delta u\overline{v}\,dx - \zeta\int_\Omega\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\phi(\xi)\overline{v}\,d\xi\,dx - \zeta\int_\Omega\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(x,\xi,t)|^2\,d\xi\,dx + \int_\Omega \nabla v\nabla\overline{u}\,dx + \zeta\int_\Omega\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)v(x)\overline{\phi}\,d\xi\,dx,$$

$$= \overline{-\zeta\int_\Omega\int^{+\infty}\mu(\xi)\overline{\phi(\xi)}v\,d\xi\,dx} + \zeta\int_\Omega\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)v(x)\overline{\phi}\,d\xi\,dx + \int_\Omega\nabla v\nabla\overline{u}\,dx + [\nabla u\overline{v}]_{\partial\Omega} - \int_\Omega\nabla u\nabla\overline{v}\,dx - \zeta\int_\Omega\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(x,\xi,t)|^2\,d\xi\,dx,$$

$$= 2\Im\zeta\int_\Omega\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)v(x)\overline{\phi}\,d\xi\,dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}\overline{v}\,d\Gamma - \overline{\int_\Omega\nabla v\nabla\overline{u}\,dx} + \int_\Omega\nabla v\nabla\overline{u}\,dx - \zeta\int_\Omega\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(x,\xi,t)|^2\,d\xi\,dx,$$

$$= 2\Im\zeta\int_\Omega\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)v(x)\overline{\phi}\,d\xi\,dx + 2\Im\int_\Omega\nabla v\nabla\overline{u}\,dx - \zeta\int_\Omega\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(x,\xi,t)|^2\,d\xi\,dx.$$

Et comme

$$\zeta\int_\Omega\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(x,\xi,t)|^2\,d\xi\,dx \geq 0.$$

Donc :

$$\mathscr{R}\langle AU,U\rangle = -\zeta\int_\Omega\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(x,\xi,t)|^2\,d\xi\,dx \leqslant 0$$

D'où l'opérateur A est dissipatif. □

• Maintenant on va montrer que l'opérateur A est maximal, c'est à dire que l'opérateur $\lambda I - A$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$.
Soit $F = (f_1, f_2, f_3)^T \in \mathscr{H}$. On montre qu'il existe une (unique) solution $U = (u, v, \phi)^T \in D(A)$ de l'équation :

$$(\lambda I - A)U = F. \tag{2.7}$$

L'équation (2.7) est équivalente à :

$$\begin{cases} \lambda u - v = f_1, \\ \lambda v - \Delta u + \zeta \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(\xi)d\xi = f_2, \\ \lambda\phi + (\xi^2+\eta)\phi - v(x)\mu(\xi) = f_3. \end{cases} \tag{2.8}$$

Supposons que nous soyons trouvés avec la régularité appropriée .
En vertu la première équation et la troisième équation du système (2.8) , on a :

$$v = \lambda u - f_1 \in H_0^1(\Omega), \tag{2.9}$$

$$\phi = \frac{f_3(\xi) + \mu(\xi)v(x)}{\xi^2 + \eta + \lambda}. \tag{2.10}$$

En utilisant la deuxième équation du système (2.8) , on peut facilement montrer que u satisfait :

$$\lambda^2 u - \Delta u + \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(\xi)d\xi = f_2 + \lambda f_1. \tag{2.11}$$

La résolution du système (2.11) équivaut à trouver $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$\int_\Omega (\lambda^2 u - \Delta u)\overline{w} + \zeta \int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu(\xi)\phi(\xi))\overline{w}\,d\xi = \int_\Omega (f_2 + \lambda f_1)\overline{w}\,dx. \tag{2.12}$$

En utilisant (2.9) et (2.10) , la fonction w satisfait le système suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega (\lambda^2 u - \Delta u)\overline{w}\,dx + \zeta \int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mu(\xi)\frac{f_3(\xi) + \mu(\xi)v(x)}{\xi^2+\eta+\lambda}\right)\overline{w}\,d\xi \\ = \int_\Omega (f_2 + \lambda f_1)\overline{w}\,dx. \end{cases} \tag{2.13}$$

Ce qui équivalent à :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega (\lambda^2 u - \Delta u)\overline{w} + \zeta \int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mu(\xi)\frac{f_3(\xi)}{\xi^2+\eta+\lambda}\right)\overline{w}\,d\xi\,dx \\ + \zeta \displaystyle\int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\xi)^2}{\xi^2+\eta+\lambda} v(x)\overline{w}\,d\xi\,dx = \int_\Omega (f_2 + \lambda f_1)\overline{w}\,dx. \end{cases} \tag{2.14}$$

On injecte (2.9) dans (2.14), On obtient :

$$\begin{cases} \text{trouver } \; u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega (\lambda^2 u\overline{w} + \nabla u \nabla \overline{w}) dx + \lambda\tilde{\zeta} \int_{-\infty}^{+\infty} u\overline{w}\, dx = \int_\Omega (f_2 + \lambda f_1)\overline{w}\, dx \\ \displaystyle -\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\xi)}{\xi^2 + \eta + \lambda} \int_\Omega f_3(x,\xi)\overline{w}\, dx\, d\xi + \tilde{\zeta} \int_\Omega f_1 \overline{w}\, dx \qquad , \forall w \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.15}$$

Où $\tilde{\zeta} = \zeta \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{\xi^2 + \eta + \lambda} d\xi$.
Donc l'équation (2.15) est de la forme :

$$a(u,w) = L(w), \tag{2.16}$$

où la forme sesquilinéaire $a : [H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)] \longrightarrow \mathbb{C}$ et la forme antilinéaire $L : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ sont définies par :

$$a(u,w) = \int_\Omega (\lambda^2 u\overline{w} + \nabla u \nabla \overline{w}) dx + \lambda\tilde{\zeta} \int_{-\infty}^{+\infty} u\overline{w}\, dx,$$

et

$$L(w) = \int_\Omega (f_2 + \lambda f_1)\overline{w}\, dx - \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\xi)}{\xi^2 + \eta + \lambda} \int_\Omega f_3(x,\xi)\overline{w}\, dx\, d\xi + \tilde{\zeta} \int_\Omega f_1 \overline{w}\, dx.$$

On applique le Théorème de Lax-Milgram, sur l'espace $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ pour la forme sesquilinéaire $a(.,.)$ et sur $H_0^1(\Omega)$ pour la forme antilinéaire $L(.)$.

- La sequilinéarité de $a(.,.)$ et la antilinéarité de $L(.)$ découle de la sequilinéarité et la antilinéarité de l'intégrale .

1- La continuité de $a(.,.)$ sur $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$:
Soient $(u,w)\in H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$
on a :

$$|a(u,w)|\leqslant \int_\Omega \lambda^2|u|\,|\overline{w}|dx+\int_\Omega |\nabla u|\,|\nabla\overline{w}|dx+\lambda\tilde{\zeta}\int_{-\infty}^{+\infty}|u|\,|\overline{w}|dx.$$

Utilisons l'inégalité de Cauchy Schwarz dans les trois intégrales,on obtient :

$$\begin{aligned}
&|a(u,w)|\leqslant \lambda^2\|u\|_{L^2}\|w\|_{L^2}+\|u\|_{H_0^1}\|w\|_{H_0^1}+\lambda\tilde{\zeta}\|u\|_{L^2}\|w\|_{L^2},\\
&|a(u,w)|\leqslant \lambda^2\|u\|_{H_0^1}\|w\|_{H_0^1}+\|u\|_{H_0^1}\|w\|_{H_0^1}+\lambda\tilde{\zeta}\|u\|_{H_0^1}\|w\|_{H_0^1},\\
&|a(u,w)|\leqslant C\|u\|_{H_0^1}\|w\|_{H_0^1}.
\end{aligned}$$

où C=max$(\lambda^2,1,\lambda\tilde{\zeta})$.
Par conséquent $a(.,.)$ est continue sur $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$.
2- La coercivité de $a(.,.)$:
C'est à dire :

$$\exists\alpha>0 : a(u,u)\geq\alpha\|u\|^2_{H_0^1},\forall u\in H_0^1(\Omega),$$

Soit $u\in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned}
a(u,u)&=\int_\Omega(\lambda^2|u|^2+|\nabla u|^2)dx+\lambda\tilde{\zeta}\int_{-\infty}^{+\infty}|u|^2dx,\\
&\geq min(\lambda^2,\lambda\tilde{\zeta})\|u\|^2_{L^2}+\|\nabla u\|^2_{L^2},\\
&\geq min(M,1)\left(\|u\|^2_{L^2}+\|\nabla u\|^2_{L^2}\right),\\
&\geq\alpha\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Où $M=min(\lambda^2,\lambda\tilde{\zeta})$ et $\alpha=min(M,1)$.

3- Continuité de $L(.)$ sur $H_0^1(\Omega)$:
Soit $u\in H_0^1(\Omega)$

$$L(w)=\int_\Omega(f_2+\lambda f_1)\overline{w}dx-\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)}{\xi^2+\eta+\lambda}\int_\Omega f_3(x,\xi)\overline{w}dxd\xi+\tilde{\zeta}\int_\Omega f_1\overline{w}dx,$$

$$
\begin{aligned}
|L(w)| &\leqslant \int_\Omega |f_2|\,|\overline{w}|dx + \lambda\int_\Omega |f_1|\,|\overline{w}|dx - \zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)}{\xi^2+\eta+\lambda}\int_\Omega |f_3(x,\xi)|\,|\overline{w}|dx\,d\xi + \tilde{\zeta}\int_\Omega |f_1|\,|\overline{w}|dx,\\
&\leqslant \|f_2\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)} + \lambda\|f_1\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)} - \zeta\|f_3\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)}C + \tilde{\zeta}\|f_1\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)},\\
&\leqslant \|f_2\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{H_0^1(\Omega)} + \lambda\|f_1\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{H_0^1(\Omega)} + \zeta\|f_3\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{H_0^1(\Omega)}C + \tilde{\zeta}\|f_1\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{H_0^1(\Omega)},\\
&\leqslant c_1\|w\|_{H_0^1(\Omega)} + c_2\|w\|_{H_0^1(\Omega)} + c_3\|w\|_{H_0^1(\Omega)} + c_4\|w\|_{H_0^1(\Omega)},\\
&\leqslant K\|w\|_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Où
$C = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)}{\xi^2+\eta+\lambda}\,d\xi$ et $c_1 = \|f_2\|_{L^2(\Omega)}$, $c_2 = \lambda\|f_1\|_{L^2(\Omega)}$, $c_3 = \zeta\|f_3(x,\xi)\|_{L^2(\Omega)}$, $c_4 = \tilde{\zeta}\|f_1\|_{L^2(\Omega)}$
et $K = \max(c_1, c_2, c_3, c_4)$.
D'où la continuité de $L(.)$.

Alors $a(.,.)$ est sequilinéaire, continue et coercitif sur $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$, et $L(.)$ est antilinéaire et continue sur $H_0^1(\Omega)$.
D'après le théorème de Lax-Milgram, on en déduit que pour tout $w\in H_0^1(\Omega)$ le problème (2.16) admet une solution unique $u\in H_0^1(\Omega)$.

Et donc l'opérateur $(\lambda I - A)$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$.
*É*nonçons les hypothèses précises sur la fonction μ qui est une fonction mesurable non négative telle que

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)^2}{1+\xi^2}d\xi < \infty. \tag{2.17}
$$

En particulier, comme $\mathfrak{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, en définissant $w\in\mathfrak{D}(\Omega)$ dans l'équation (2.16) nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \lambda^2 u\overline{w}dx + \int_\Omega \nabla u\nabla\overline{w}dx + \lambda\tilde{\zeta}\int_{-\infty}^{+\infty} u\overline{w}dx\\
&= \int_\Omega (f_2+\lambda f_1)\overline{w}dx - \zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)}{\xi^2+\eta+\lambda}\int_\Omega f_3(x,\xi)\overline{w}dx\,d\xi + \tilde{\zeta}\int_\Omega f_1\overline{w}dx,
\end{aligned}
$$

ce qui équivalent à

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \lambda^2 u\overline{w}dx + [\overline{w}\nabla u]_\Gamma - \int_\Omega \Delta u\overline{w}dx + \lambda\tilde{\zeta}\int_{-\infty}^{+\infty} u\overline{w}dx\\
&= \int_\Omega (f_2+\lambda f_1)\overline{w}dx + \tilde{\zeta}\int_\Omega f_1\overline{w}dx - \zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)}{\xi^2+\eta+\lambda}\int_\Omega f_3(x,\xi)\overline{w}dx\,d\xi,
\end{aligned}
$$

ce qui équivalent aussi à

$$\left\langle (\lambda^2+\lambda\tilde{\zeta})u-\Delta u+\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)}{\xi^2+\eta+\lambda}f_3(x,\xi)d\xi,\overline{w}\right\rangle=\left\langle f_2+(\lambda+\tilde{\zeta})f_1,\overline{w}\right\rangle\quad\forall w\in\mathfrak{D}(\Omega).$$

Donc

$$(\lambda^2+\lambda\tilde{\zeta})u-\Delta u+\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)}{\xi^2+\eta+\lambda}f_3(x,\xi)d\xi=f_2+(\lambda+\tilde{\zeta})f_1\quad\text{dans}\quad\mathfrak{D}'(\Omega).\tag{2.18}$$

Comme :

$$f_2+(\lambda+\tilde{\zeta})f_1\in L^2(\Omega)\qquad\text{et}\qquad\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)}{\xi^2+\eta+\lambda}f_3(x,\xi)d\xi\in L^2(\Omega),$$

en utilisant l'équation (2.18), nous en déduisons que :

$$(\lambda^2+\lambda\tilde{\zeta})u-\Delta u+\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)}{\xi^2+\eta+\lambda}f_3(x,\xi)d\xi=f_2+(\lambda+\tilde{\zeta})f_1\quad\text{dans}\ L^2(\Omega),\tag{2.19}$$

on a $u\in H_0^1(\Omega)$ donc on a :

$$u\in L^2(\Omega)\quad\text{et}\quad f_2+(\lambda+\tilde{\zeta})f_1\in L^2(\Omega)\quad\text{et}\quad\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)}{\xi^2+\eta+\lambda}f_3(x,\xi)d\xi\in L^2(\Omega),$$

et en utilisant l'équation (2.19). On obtient $\Delta u\in L^2(\Omega)$.
D'où $u\in H^2(\Omega)$ et on a $u\in H_0^1(\Omega)$.
Alors $u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$.
Par conséquent, en définissant $v=\lambda u-f_1$ par l'équation (2.11), on en déduit que

$$\lambda v-\Delta u+\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\phi(\xi)d\xi=f_2.\tag{2.20}$$

Afin de compléter l'existence de $U\in D(A)$, il faut prouver ϕ et $|\xi|\phi\in L^2(\Omega\times(-\infty,+\infty))$.
d'âpre l'équation (2.10) , nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega\int_{\mathbb{R}} |\phi(\xi)|^2 d\xi dx &= \int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \frac{|f_3(\xi)+\mu(\xi)v(x)|^2}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi dx \\
&= \int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \frac{(|f_3(\xi)|+|\mu(\xi)v(x)|)^2}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi dx \\
&= \int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \frac{|f_3(\xi)|^2+\mu(\xi)^2|v(x)|^2+2|f_3(\xi)|\mu(\xi)|v(x)|}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi dx \\
&= \int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \frac{|f_3(\xi)|^2}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi dx + \int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(\xi)^2|v(x)|^2}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi dx \\
&+ \int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \frac{2|f_3(\xi)|\mu(\xi)|v(x)|}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi dx \\
&= \int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \frac{|f_3(\xi)|^2}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi dx + \int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(\xi)^2|\lambda u-f_1|^2}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi dx \\
&+2\int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \frac{|f_3(\xi)|}{\xi^2+\eta+\lambda}\frac{\mu(\xi)|\lambda u-f_1|}{\xi^2+\eta+\lambda} d\xi dx \\
&\leqslant \int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \frac{|f_3(\xi)|^2}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi dx + \int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(\xi)^2(|\lambda u|+|f_1|)^2}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi dx \\
&+2\int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \frac{|f_3(\xi)|}{\xi^2+\eta+\lambda}\frac{\mu(\xi)(|\lambda u|+|f_1|)}{\xi^2+\eta+\lambda} d\xi dx \\
&= \int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \frac{|f_3(\xi)|^2}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi dx + \int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(\xi)^2(\lambda^2|u|^2+|f_1|^2+2|\lambda||u||f_1|)}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi dx \\
&+2\int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \frac{|f_3(\xi)|}{\xi^2+\eta+\lambda}[\frac{\mu(\xi)|\lambda||u|}{\xi^2+\eta+\lambda}+\frac{\mu(\xi)|f_1|}{\xi^2+\eta+\lambda}] d\xi dx, \\
&\leqslant \int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \frac{|f_3(\xi)|^2}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi dx + \int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(\xi)^2(\lambda^2|u|^2+|f_1|^2+|\lambda|^2|u|^2+|f_1|^2)}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi dx \\
&+ \int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \frac{2|f_3(\xi)|\mu(\xi)|f_1|}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi dx] + \int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \frac{2|f_3|\mu(\xi)|\lambda||u|}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2},
\end{aligned}
$$

Utilisons le théorème de Fubini, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega\int_{\mathbb{R}} |\phi(\xi)|^2 d\xi dx &\leqslant \int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \frac{|f_3(\xi)|^2}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi dx + (2\lambda^2\|u\|_2^2+2\|f_1\|_2^2)\int_{\mathbb{R}} \frac{\mu^2(\xi)}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi \\
&+ \int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2}[|f_3(\xi)|^2+\mu(\xi)^2|f_1|^2] d\xi dx \\
&+ \int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2}[|f_3|^2+\mu(\xi)^2|\lambda|^2|u|^2] d\xi dx \\
&\leqslant \int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \frac{|f_3(\xi)|^2}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi dx + (2\lambda^2\|u\|_2^2+2\|f_1\|_2^2)\int_{\mathbb{R}} \frac{\mu^2(\xi)}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi \\
&+2\int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \frac{|f_3(\xi)|^2}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi dx + (\lambda^2\|u\|_2^2+\|f_1\|_2^2)\int_{\mathbb{R}} \frac{\mu^2(\xi)}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi \\
&\leqslant 3\int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \frac{|f_3(x,\xi)|^2}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi dx + 3(\lambda^2\|u\|_2^2+\|f_1\|_2^2)\int_{\mathbb{R}} \frac{\mu^2(\xi)}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi.
\end{aligned}
$$

.

En utilisant l'équation (2.17) , il est facile de voir que :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(\xi)^2}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(\xi)^2}{(\xi^2+\eta+\lambda)} d\xi < +\infty.$$

D'autre part et, en utilisant le fait que $f_3 \in L^2(\Omega \times (-\infty,+\infty))$, on obtient :

$$\int_{\Omega}\int_{\mathbb{R}} \frac{|f_3(x,\xi)|^2}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi\, dx \leqslant \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} |f_3(x,\xi)|^2 d\xi\, dx < +\infty,$$

donc $\phi \in L^2(\Omega \times (-\infty,+\infty))$. Ensuite, en utilisant l'équation (2.10), nous obtenons :

$$\int_{\Omega}\int_{\mathbb{R}} |\xi\phi(\xi)|^2 d\xi\, dx \leqslant 3\int_{\Omega}\int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|^2|f_3(x,\xi)|^2}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi\, dx + 3(\lambda^2\|u\|_2^2+\|f_1\|_2^2)\int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|^2\mu^2(\xi)}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi.$$

En utilisant l'équation (2.17) , il est facile de voir que :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|^2\mu^2(\xi)}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi \leqslant \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu^2(\xi)}{(\xi^2+\eta+\lambda)} d\xi < +\infty.$$

Maintenant, en utilisant le fait que $f_3 \in L^2(\Omega \times (-\infty,+\infty))$, on obtient :

$$\int_{\Omega}\int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|^2|f_3(\xi)|^2}{(\xi^2+\eta+\lambda)^2} d\xi\, dx \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega}\int_{\mathbb{R}} |f_3(x,\xi)|^2 d\xi\, dx < +\infty,$$

donc $|\xi|\phi \in L^2(\Omega\times(-\infty,+\infty))$. Finalement, puisque $\phi \in L^2(\Omega\times(-\infty,+\infty))$, on obtient :

$$-(\xi^2+\eta)\phi+\mu(\xi)v(x) = \lambda\phi(x,\xi)-f_3(x,\xi) \in L^2(\Omega\times(-\infty,+\infty)).$$

Alors $U \in D(A)$.
Par conséquent, d'après Lumer-Phillips A est le générateur d'un C_0-semi-groupe de contraction $(S(t))_{t\geq 0}$, en utilisant le théorème de Hille-Yosida assure l'existence et l'unicité de la solution de (P).

Chapitre 3

Stabilité du système

Sommaire

3.1 *Manque de stabilité exponentielle* 35
3.2 *Stabilité asymptotique* 39

Le but de la stabilisation est de réduire les vibrations par un feedback, il s'agit de garantir la décroissance de l'énergie vers zéro plus ou moins rapide lorsque $t \longrightarrow +\infty$. Plus précisément, on est intéressé de déterminer le comportement asymptotique de l'énergie $E(t)$.
IL y'a divers types de stabilisation :

1). Stabilisation forte : $E(t) \longrightarrow 0$ lorsque $t \longrightarrow +\infty$.
2). Stabilisation polynomiale : $E(t) \leqslant \frac{C}{t^{\delta}}$, C et δ>0.
3). Stabilisation logarithmique : $E(t) \leqslant \frac{C}{(\ln(t))^{\delta}}$,C, $\delta > 0$.
4). Stabilisation uniforme : $E(t) \leq C e^{-\delta t}$,C, $\delta > 0$.

Dans la première section de ce chapitre, on va établir le manque de Stabilité exponentielle de la solution, où on utilise l'analyse spectrale. Et dans la deuxième section de ce chapitre, on établit la stabilité forte de la solution.

3.1 Manque de stabilité exponentielle

On sait que si les valeurs propres de A sont à partie réelle constante $C < 0$,alors on a la stabilité exponentielle.
Mais si la partie réelle des valeurs propres tend vers zéro, c'est à dire sont assez proches de l'axe imaginaire, alors on a pas une stabilité exponentielle.
Dans cette section, on va établir le manque de stabilité exponentielle, pour ce but on a le théorème principal suivant :

Théorème 3.1.
Le semi-groupe engendré par l'opérateur A n'est pas exponentiellement stable.

Pour démontrer le théorème prancipal, on aura besoin du théorème suivant :

Théorème 3.2. *[19]*
Les deux énoncés suivants sont équivalents dans le contexte d'un espace de Hilbert :

1). *Le semi-groupe* $(S(t))_{t\geq 0}$ *, est exponentiellement stable :*

$$\exists M \geq 1\ ,\ \exists\ \alpha > 0,\ \|S(t)\| \leq M e^{-\alpha t}. \tag{3.1}$$

2).

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}, \tag{3.2}$$

et

$$\sup_{\beta\in\mathbb{R}} \|(i\beta I - A)^{-1}\| < +\infty. \tag{3.3}$$

Démonstration. (du Théorème (3.1))

Soit $-\beta_n^2 = (i\beta_n)^2$ une suite de valeurs propres correspondante à la suite de fonctions propres normalisées u_n de l'opérateur Δ telle que $|\beta_n| \to \infty$, $n \to \infty$ et

$$\begin{cases} \Delta u_n = -\beta_n^2 u_n & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

Notre objectif est de prouver, que si $i\beta_n$ satisfait l'équation (3.2) , alors l'équation (3.3) n'est pas vérifiée. En d'autres terme, nous voulons montrer qu'un nombre infini de valeurs propres de A se rapprochent de l'axe imaginaire, ce qui empêche le système d'ondes (P) d'être exponentiellement stable. En effet, nous calculons d'abord l'équation caractéristique qui donne les valeurs propres de A . Soit λ une valeur propre de A associée à un vecteur propre $U = (u, v, \phi)^T \neq 0$.
Alors :

$$AU = \lambda U. \tag{3.5}$$

L'équation (3.5) est équivalente à :

$$\begin{cases} \lambda u - v = 0, \\ \lambda v - \Delta u + \zeta \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(\xi)d\xi = 0, \\ \lambda\phi + (\xi^2 + \eta)\phi - v(x\phi)\mu(\xi) = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

D'après la première équation du système (3.6) on a :

$$v = \lambda u. \tag{3.7}$$

On injecte (3.7) dans la deuxième équation du système (3.6) , On obtient :

$$\lambda^2 u - \Delta u + \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(\xi)d\xi = 0. \tag{3.8}$$

Ensuite, d'après la première équation du système (3.6) et la troisième équation du système (3.6) , nous obtenons :

$$\phi = \frac{\lambda u(x)\mu(\xi)}{\xi^2 + \eta + \lambda}. \tag{3.9}$$

On injecte l'équation (3.9) dans l'équation (3.8) , On obtient :

$$\lambda^2 u - \Delta u + \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda u(x) \frac{\mu^2(\xi)}{\xi^2 + \eta + \lambda} d\xi = 0, \tag{3.10}$$

L'équation (3.10) est équivalente à

$$\Delta u = \left(\lambda^2 + \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \frac{\mu^2(\xi)}{\xi^2 + \eta + \lambda} d\xi \right) u. \tag{3.11}$$

En vertu de l'équation (3.4) et de l'équation (3.11) , nous obtenons l'existence d'une suite de valeurs propres (λ_n) de A correspondante à la suite (β_n) , telle que

$$-\beta_n^2 u_n = \Delta u_n = \left(\lambda_n^2 + \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n \frac{\mu^2(\xi)}{\xi^2 + \eta + \lambda_n} d\xi \right) u_n, \tag{3.12}$$

alors nous obtenons

$$\beta_n^2 = -\lambda_n^2 - \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n \frac{\mu^2(\xi)}{\xi^2 + \eta + \lambda_n} d\xi. \tag{3.13}$$

En prenant : $\phi = \dfrac{\mu(\xi)}{\xi^2 + \eta + i\beta_n} u_n$ et le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \dfrac{u_n}{i\beta_n} \\ u_n \\ \phi_n \end{pmatrix}$.

On a $U_n \in D(A)$, alors

$$A \begin{pmatrix} u_n \\ \dfrac{u_n}{i\beta_n} \\ u_n \\ \phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\beta_n u_n - \xi \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi_n(\xi)d\xi \\ i\beta_n \phi_n \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Il s'ensuit que :

$$(i\beta_n I - A)U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ i\beta_n u_n \\ i\beta_n \phi_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_n \\ i\beta_n u_n - \xi \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi_n(\xi)d\xi \\ i\beta_n \phi_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta u_n \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\mu^2(\xi)}{\xi^2+\eta+i\beta_n} d\xi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La démonstration de $\|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})} = \dfrac{1}{\|(i\beta I - A)\|} \longrightarrow \infty,\ |\beta_n| \to \infty \quad (n \to \infty)$,
se réduit à montrer que :

$$\|\zeta u_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{\xi^2+\eta+i\beta_n} d\xi\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{\xi^2+\eta+i\beta_n} d\xi \to 0, \quad \text{lorsque } |\beta_n| \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Utilisons le lemme (1.1), et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a toutes les conditions du théorème de convergence dominée sont satisfaites, car

$$\frac{\mu^2(\xi)}{\xi^2+\eta+i\beta_n} \to 0, \quad \text{lorsque } |\beta_n| \to \infty \quad (n \to \infty),$$

et

$$\frac{\mu^2(\xi)}{|\xi^2+\eta+i\beta_n|} \leqslant c|\mu(\xi)|^2 \chi_{[0,R]} + c\prime \frac{|\mu(\xi)|^2}{\xi^2} \chi_{[R,+\infty]} \in L^1(-\infty,+\infty),$$

Du fait que U_n est une fonction propre normalisée de l'opérateur Δ ,pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on obtient la limite souhaitée.
Alors le semi-groupe engendré par l'opérateur A n'est pas exponentiellement stable.
□

3.2 Stabilité asymptotique

3.2.1 Stabilité forte du système (P)

Dans çette partie, nous utilisons un théorème général d'Arendt-Batty dans [3] pour montrer la stabilité forte du C_0-semi-groupe et A associé au système d'ondes (P). Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 3.3.
Le C_0-semi-groupe e^{tA} est fortement stable dans $\mathcal{H}$, c'est-à-dire que pour tout $U_0 \in \mathcal{H}$, la solution de l'équation (2.6) satisfait :

$$\lim_{t\to\infty} \|e^{tA}U_0\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Pour aboutir au résultat du théorème principal (3.3), on utilise le théorème d'Arendt-Batty-Lyubich-Vu suivant :

Théorème 3.4 – (Arendt-Batty-Lyubich-Vu,1988). *[3]*
Soit $S(t)_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur un espace de Banach réflexif E de générateur A si
1) $\sigma_p(A)\cap i\mathbb{R} = \emptyset$.
2) $\sigma_p(A)\cap i\mathbb{R}$ est dénombrable.
Alors $S(t)_{t\geq 0}$ est fortement stable

Pour la preuve du théorème (3.4), nous avons besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 3.1. *[8]*
A n'a pas de valeurs propres dans $i\mathbb{R}$.

Démonstration.

Étape 1 : $\lambda \neq 0$
Nous montrons par l'absurde. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ et $U \neq 0$ telle que

$$AU = i\lambda U. \tag{3.15}$$

$$\begin{pmatrix} v \\ \Delta u - \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(\xi)d\xi \\ -(\xi^2+\eta)\phi + \mu(\xi)v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\lambda u \\ i\lambda v \\ i\lambda\phi \end{pmatrix}, \tag{3.16}$$

alors nous obtenons

$$\begin{cases} i\lambda u - v = 0\,, \\ i\lambda v - \Delta u + \zeta \int_{+\infty}^{-\infty} \mu(\xi)\phi(\xi)d\xi = 0 \quad , \\ i\lambda\phi + (\xi^2+\eta)\phi - v(x)\mu(\xi) = 0. \end{cases} \tag{3.17}$$

Ensuite, un calcul simple donne

$$\mathscr{R}\langle AU,U\rangle_{\mathscr{H}} = -\zeta \int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2+\eta)|\phi(x,\xi)|^2 d\xi\, dx. \tag{3.18}$$

Ensuite, en utilisant l'équation (3.15) et l'équation (3.18) , nous déduisons que

$$\phi = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\times(-\infty,+\infty).$$

D'après la troisième équation du système (3.17) et la première équation du système (3.17) , nous avons :

$$v = 0 \ \text{ et } \ u = 0 \ \text{ dans } \ \Omega,$$

et par conséquent $U = 0$. Ce qui contredit le fait que U est vecteur propre.
Étape 2 :$\lambda = 0$

L'équation système (3.17) devient :

$$\begin{cases} v = 0, \\ \Delta u - \zeta \displaystyle\int_{+\infty}^{-\infty} \mu(\xi)\phi(\xi) d\xi = 0 \quad , \\ +(\xi^2+\eta)\phi - v(x)\mu(\xi) = 0. \end{cases} \tag{3.19}$$

Par conséquent, *à* en vertu la première équation du système (3.19) et la troisième équation du système (3.19) , nous avons :

$$v = 0 \text{ et } \phi = 0 \ \text{ dans } \ \Omega$$

En multipliant la deuxième équation du système (3.19) par $\overline{u}$, et en utilisant l'intégration par parties sur Ω et le fait que $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on obtient :

$$\int_\Omega \overline{u}\Delta u\, dx - \zeta \int_\Omega \int_{+\infty}^{-\infty} \overline{u}\mu(\xi)\phi(\xi) d\xi\, dx = 0, \tag{3.20}$$

comme $\phi = 0$ dans Ω, alors

$$\int_\Omega \Delta u\overline{u}\, dx = [\overline{u}\nabla u]_{\partial\Omega} - \int_\Omega \nabla u\nabla\overline{u} = -\|\nabla u\|_2^2 = 0.$$

Comme u est constant sur tout Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$ alors nous avons $u = 0$ dans tout le domaine Ω.
Il s'en suit que $U = 0$ □

Lemme 3.2. *[8]*
On a :

$$\begin{cases} i\mathbb{R} \subset \rho(A) & si\ \eta \neq 0 \\ i\mathbb{R}^* \subset \rho(A) & si\ \eta = 0. \end{cases} \tag{3.21}$$

Démonstration.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ nous prouvons $i\lambda \in \rho(A)$.
•**1)** On a $i\lambda I - A$ est injectif
•**2)** Nous allons démontrer que l'opérateur $i\lambda I - A$ est surjectif pour $\lambda \neq 0$.
Soit $F = (f_1, f_2, f_3)^T \in \mathscr{H}$, on cherche $X = (u, v, \phi) \in D(A)$ solution de l'équation suivante :

$$(i\lambda I - A)X = F. \tag{3.22}$$

L'équation (3.22) est équivalente à :

$$\begin{cases} i\lambda u - v = f_1, \\ i\lambda v - \Delta u + \zeta \displaystyle\int_{+\infty}^{-\infty} \mu(\xi)\phi(\xi)d\xi = f_2 \quad , \\ i\lambda \phi + (\xi^2 + \eta)\phi - v(x)\mu(\xi) = f_3. \end{cases} \tag{3.23}$$

D'après la première équation du système (3.23) et la deuxième équation du système (3.23) , nous avons

$$-\lambda^2 u - \Delta u + \zeta \int_{+\infty}^{-\infty} \mu(\xi)\phi(\xi)d\xi = f_2 + i\lambda f_1. \tag{3.24}$$

La résolution de l'équation du système (3.24) équivaut *à* trouver $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega (-\lambda^2 u\overline{w} + \nabla u \nabla \overline{w})dx + i\lambda\tilde{\zeta} \int_\Omega u\overline{w}dx \\ \displaystyle= \int_\Omega (f_2 + i\lambda f_1)\overline{w}dx - \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\xi)}{\xi^2 + \eta + i\lambda} \int_\Omega f_3(x,\xi)\overline{w}dxd\xi + \tilde{\zeta} \int_\Omega f_1\overline{w}dx. \end{cases} \tag{3.25}$$

Où $\tilde{\zeta} = \zeta \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{\xi^2 + \eta + \lambda} d\xi.$
Pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$. Alors, on obtient :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega (-\lambda^2 u\overline{w} + \nabla u \nabla \overline{w})dx + i\lambda\tilde{\zeta} \int_\Omega u\overline{w}dx \\ \displaystyle= \int_\Omega (f_2 + i\lambda f_1)\overline{w}dx - \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\xi)}{\xi^2 + \eta + i\lambda} \int_\Omega f_3(x,\xi)\overline{w}dxd\xi + \tilde{\zeta} \int_\Omega f_1\overline{w}dx. \end{cases} \tag{3.26}$$

Nous pouvons écrire l'équation (3.26) comme :

$$-(L_\lambda u, w)_{(H_0^1(\Omega),(H_0^1)')} + a_{H_0^1(\Omega)}(u, w) = l(w), \tag{3.27}$$

avec la forme sesquilinéaire définie par :

$$a_{H_0^1(\Omega)}(u,w)=\int_\Omega \nabla u\nabla\overline{w}\,dx+i\lambda\tilde{\zeta}\int_\Omega u\overline{w}\,dx \quad \text{et} \quad (L_\lambda u,w)_{H_0^1(\Omega)}=\int_\Omega \lambda^2 u\overline{w}\,dx.$$

En utilisant la compacité du plongement de $L^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\omega)$ et de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on en déduit que l'opérateur L_λ est compact de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.
Par conséquent, d'après l'alternative de Fredholm, la prouve d'une solution u de l'équation (3.27) se réduir $à$ la prouve qu'il n'existe pas de solution non triviale pour l'équation (3.27) pour $l\equiv 0$.

En effet, s'il existe $u\neq 0$, telle que

$$(L_\lambda u,w)_{(H_0^1(\Omega),(H_0^1)')}=a_{H_0^1(\Omega)}(u,w) \qquad \forall w\in H_0^1(\Omega), \tag{3.28}$$

alors $i\lambda$ est une valeur propre de A.
On déduit donc du lemme (3.1) que $u=0$.
Maintenant, si $\lambda=0$ et $\eta\neq 0$, en utilisant le lemme de Lax-Milgram, sur l'espace $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ pour la forme sesquilinéaire $(L_\lambda u,w)_{(H_0^1(\Omega),(H_0^1)')}$ et la forme antilinéaire $a_{H_0^1(\Omega)}(u,w)$, nous obtenons le résultat.

□

Démonstration. du théorème (3.3)

Suivant un théorème général d'Arendt-Batty et de Lyubich-Vu dans [3] le C_0semi-groupe de contractions est fortement stable si A n'a pas de valeurs propres sur $i\mathbb{R}$ et $\sigma(A)\cap i\mathbb{R}$ est au plus un ensemble dénombrable. Par lemme (3.1) et lemme (3.2) nous concluons le résultat. □

Conclusion

Nous avons étudié la stabilisation d'une équation d'onde avec un contrôle interne général de type diffusif. En utilisant une analyse spectrale nous avons prouvé que la stabilité est non uniforme. Nous avons également prouvé la stabilité forte du système en utilisant le critère d'Arendt-Batty.

Bibliographie

[1] R. A. Adams, *Sobolev spaces, Academic Press, New-York, 1975.*

[2] K. Ammari, H. Fathi, and L.Robbiano, *(2020), Fractional-feedback stabilization for a class of evolution systems, 220 Journal of Differential Equations, 268(1), 5751-5791.*

[3] W. Arendt, and C. J. K. Batty, *(1988), Tauberian theorems and stability of one-parameter semigroups Trans. Am. Math. Soc., 306, 837-852.*

[4] Attouch, Giuseppe Buttazzo, Gérard Michaille,*Analysis in Sobolev and BV Spaces Applications to PDEs and Optimization.*

[5] V. Barbu, *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems, Springer-Science+ Business Media, B.V 1998.*

[6] A. Boudaoud, A. Benaissa, *Stabiliization of a Wave Equation with a General Internal Control of Diffusive Type*

[7] A. Benaissa, and S.Rafa, *(2019), Well-posedness and energy decay of solutions to a wave equation with a general 218 boundary control of diffusive type, Mathematische Nachrichten, 292(8), 1644-1673.*

[8] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Masson, Paris, 1983.*

[9] C. J. K. Batty, and Duyckaerts, T. *(2008), Non-uniform stability for bounded semi-groups on Banach spaces, J. Evol.Equ., 8(4), 765-780*

[10] R. Dautray, Jacques-Louis Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Tehnology, Volume 2 Functional and variational methods, Sprin-ger. 2000.*

[11] Z.-Hua Luo, Bao-Zhu Guo and O. Morgul, *Stability and Stabilization of infinite Dimentional Systems with Applications,, 629.836 ,Springer-Verlag London 1999.*

[12] N. Lerner, Carleman Inequalities An introduction and more , *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 353.*

[13] Z. Lu, S. Zheng, *Semigroups associated with dissipative systems, Direct all inquiries to CRC press LLC, 2000 Corporate Blvd., N.W, Boca Raton, Florida 33431.*

[14] W. Liu, *Elementary feedback stabilization of the linear reaction-convection-diffusion equation and the wave equation„ 2010 Springer Heidelberg Dordrecht London New-York.*

[15] B. Mbodje, *(2006), Wave energy decay under fractional derivative controls, IMA Journal of Mathematical Control and 216 Information, 23, 237-257.*

[16] J. Necas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques Masson, Paris, 1967*

[17] J. R. Partington, *Linear operators and linear systems An analytical approach to control theory, (2004, CUP)- London Mathematical Society student Texts 60.*

[18] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations; Springer : New York, NY, USA, 1983.*

[19] J. Pruss, *(1984) On the spectrum of C0-semigroups, Transactions of the American Mathematical Society, 284(2), 847- 857.*

[20] J. Rozendaal, D. Seifert, and R.Stahn, *(2019), Optimal rates of decay for operator semigroups on Hilbert spaces, Adv. Math., 346, 359-388*