République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE MEDEA
Faculté de la technologie
Département de Génie des Procédés et Environnement

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention du Diplôme de Master en Génie des Procédés

Option : Pollution Chimique et Gestion Environnementale

Thème

ETUDE ANALYTIQUE ET NUMERIQUE DE LA CONVECTION DOUBLE DIFFUSIVE DANS UNE CAVITE POREUSE HORIZONTAL

Réalisé par :

Mr. Koul Khaled

Mr. Salama Mustafa liasaa

Dirigé par :

Dr. Hadidi Noureddine

Dr. Rebhi Redha

Promotion : 2016/2017

Remerciements

Nous tenons à remercier toutes nos chers collègues qui par leurs participation et leur encouragement, nous a permis defaire un bon travail plus particulière,

Nous remercions nos encadreurs Prof. HADIDI Nourddine Dr. REBHI Redha pour leurs suivi avec patience et intérêt et pour leurs confiance qu'il nous a placé en nous tout au long de ce travail, ses conseils précieux et ses encouragements qui nous a aider pour réaliser ce modeste travail précisément dans la réalisation de ce projet, nous exprimons nos remerciements à touts les professeurs de département de génie de procèdes l' université Dr YAHI Fares de medea.

Je tiens a exprimer mes vifs remerciements a Monsieur le professeur S.RAHAL .pour avoir accepte de présider le jury d'examen de ce memoire. Je remercie egalement Monsieur le professeur Y.KERCHICH et Monsieur le professeur M .LAIDI pour l'honneur qui m'ontfait d'avoir accepter de faire partie du jury et d'avoir consacrer de leur temps a la lecture de ce mémoire.

A mes parents

Pour leur dévouement, leurs sacrifices.leurs endurances et leurs souffrances pour moi.

A mon frére et mes soeurs.

A le peuple saharaoui luttant, souhaitant obtenir l'independence et la souverainete sur l'ensemble rerritoire de la republique arab saharaoui democratique

Salama mustafa liasaa

A mes parents

Pour leur dévouement, leurs sacrifices.leurs endurances et leurs souffrances pour moi.

A mon frére et mes soeurs.

Et tout mes amis specialement (hichem zaoui et mohamed gatfaoui)

Koul khaled

Résumé

Dans la présente mémoire, on étudié analytiquement et numériquement les transferts de chaleur et de masse par convection naturelle dans des milieux poreux. La géométrie considérée est une cavité rectangulaire contenant un milieu poreux saturé par un fluide ou mélange de fluide. Dans cette investigation, les écoulements convectifs sont pilotés par des conditions aux frontières thermiques et solutales de type Neumann (flux constants de chaleur et de masse) avec un champ magnétique uniforme est appliqué dans la direction *x*. Le milieu poreux est modélisé à l'aide du Darcy. Le problème est régi par un ensemble d'équations différentielles non linéaires et fortement couplées appelées équations gouvernantes, en l'occurrence l'équation de la conservation de la masse (équation de continuité), l'équation de mouvement, l'équation de l'énergie et l'équation de la concentration. Ce problème est gouverné par différents paramètres de contrôle, à savoir le nombre de Rayleigh thermique, R_T, le nombre de Hartmann, Ha, le rapport de force de volume, N, le nombre de Lewis, Le, le rapport de forme de la cavité, A , et la porosité normalisée, ε, de la matrice poreuse. On utilise deux approches distinctes et complémentaires : la première, c'est l'approche d'une solution analytique valide pour une cavité élancée $A > 8$ développée sur la base du concept de l'écoulement parallèle lorsque la cavité est soumise à des conditions aux frontières de type Neumann; la deuxième, c'est l'approche d'une méthode aux différences finies employées pour l'obtention des solutions numériques des équations gouvernantes générales. Pour les valeurs des paramètres de contrôle considérées dans cette étude, on obtient un bon accord entre les résultats analytiques et numériques.

Mot clés : convection naturelle, milieu poreux, champ magnétique, convection transfert de chaleur et de masse.

Abstract

In this study, the heat and mass transfer by natural convection in porous media has been analytically and numerically studied. The investigation is conducted in a rectangular enclosure containing a porous medium saturated by a fluid. The convective flow is driven by either applying constant fluxes of heat and mass with a uniform magnetic field is applied in the *x*-direction. The porous medium considered here is modeled according to the Darcy formulation. The problem is defined by a system of strongly coupled non linear differential

equations, called governing equations, which include the masse conservation equation (continuity equation), the momentum equation, the energy equation and species equation. Governing parameters of the problem under study are the following: thermal Rayleigh number, R_T, Hartmann number, Ha, buoyancy ratio, N, Lewis number, Le, aspect ratio of the enclosure, A, and the normalized porosity, ε, of the porous matrix. Two distinct and complementary approaches are used: first, an analytical solution valid for shallow enclosures $A \gg 1$ derived on the basis of the parallel flow approximation when the annulus is subjected to constant heat and mass fluxes; the second approach is a numerical solution based on finite differences method employed to solve the governing equations in porous medium. In the range of the governing parameters considered in this study, a good agreement is found between analytical and numerical results.

Keyword: natural convection, porous medium, magnetic field, heat and mass transfer.

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة انتقال الحرارة و الكتلة تحليليا و عدديا بواسطة الحمل الحراري الطبيعي في الوسط المسام ي. الشكل هندسي هو عبارة عن تجويف مستطيل يحتوي علي وسط مسامي مشبع بسائل أو مزيج من عدة سوائل. في هذا التحقيق ,يتم التحكم في تدفقات الحمل الحراري بواسطة تطبيق ال شروط الحدودية : نوع نيوما ن (تدفق ثابت للحرارة والتركيز) مع تطبيق حقل مغناطيسي منتظم في اتجاه x كما تم استخدام نموذج دارسي . و تخضع هذه المشكلة لمجموعة من المعادلات التفاضلية غير الخطية و هي معادلة الحفاظ علي الكتلة معادلة الاستمرارية، ومعادلة الحركة ، معادلة الطاقة ومعادلة التركيز ، يتم التحكم في هذا المشكل عبر وحدات قياس مختلفة وهي عدد الحراري R_T ، وعدد هارتمان Ha ، معامل قوة الحجم N ، وعدد لويس Le، معامل ابعاد التجويف A ، والمسامية القياسية ε .

كما فمنا باستخدام منهجين مختلفتين من اجل المقارنة : أولا، الحل التحليلي في تجويف يحتوي علي نسبة ابعاد كبيرة تم تطوير هذا الحل استنادا علي مفهوم التدفق الموازي عندما يخضع التجويف للشروط الحدودية نيومان اما في الطريقة الثانية قمنا باستخدام اسلوب الفروق المتناهية للحصول علي الحلول العددية للمعادلات العامة . ,و في نطاق المعايير المتحكمة التي تم النظر فيها في هذه الدراسة، تم التوصل إلى نتائج متقاربة بين المنهجين .

الكلمات الرئيسية: الحمل الحراري الطبيعي ، وسط مسامي ، حقل مغناطيسي ، انتقال الحرارة والكتلة

Sommaire

Remerciements i
Dédicaces. ii
Résumé iv
Sommaire vi
Liste de figure viii
Liste de tableau ix
Nomenclature.....xi
Chapitre I : **INTRODUCTION**
1.1 Type de convection.....1
1.1.1. convection naturelle.....1
1.1.2. convection forcée.....2
1.1.3. convection mixte.....3
1.2. Milieu poreux.....3
1.3.Propriétés structurales et thermo-physique d'un milieu poreux …….....4
1.3.1.Porosité : 4
1.3.2.Perméabilité : 5
1.4.Les Modèles de milieux poreux …….....…...5
I.4.1.Modele de Darcy.....5
I.4.2. Modele Darcy-Dupuit : Forchheimer.....5
I.4.3. modèle Brinkman: 7
I.4.4.Approximation de Boussinesq 7
1.5 Contenu de la thèse.....8
I.6. Revue bibliographique.....8
Chapitre II**: MODÈLE PHYSIQUE ET FORMULATION MATHÉMATIQUE**
2.1 Description du problème.....10
2.2 Hypothèses simplificatrices 11
2.3 Formulation mathématique 11
2.3.1 Équation de continuité 11
2.3.2 Équation de mouvement 11
2.3.3 Equation de conservation de l'énergie 12
2.3.4 Equation de la conservation de la masse 12

2.3.5 Équations adimensionnelles 12
2.4. Équation de fonction de courant 13
2.5. Conditions aux limites 14
2.6. Transfert thermique et massique 14
***Chapitre III* : SOLUTION ANALYTIQUE**
3.1 Introduction.....15
3.2 Concept de l'écoulement parallèle.....15
3.3 Équations de base simplifiées.....16
3.4 Solution générale de la fonction de courant et de la vitesse.....16
3.5 Équation générale du profil de température.....16
3.6 Équation générale du profil de concentration.....17
3.7 Le gradient horizontal de température et concentration…….....17
3.8 Taux de transfert chaleur.....19
***Chapitre IV :* METHODE NUMÉRIQUE**
4.1 Discrétisation des conditions aux frontières thermiques 22
4.1.1 Selon les parois adiabatiques et imperméables : $\frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0$ 22
4.1.2 Selon les parois actives 22
4.2 Discrétisation de l'équation d'énergie et de la concentration 22
4.2.1 Schéma aimplicite en *x* et explicite en *y* 23
4.2.2 Schéma implicite en *x* et explicite en *y* 23
4.3 Discrétisation de l'équation du mouvement 24
4.4 Discrétisation les Champs de vitesse.....25
4.5 Discrétisation les conditions aux frontières des Vitesses 25
4.6 Algorithme de calcul.....26
***Chapitre V :* RESULTATS ET DISCUSSION**
5.1 Validation de code numérique……...……28
5.2 Résultats et discussion……...…29
Conclusion générale……...…….……..50

Liste des figures

Figure (1.1) : Convection naturelle.....2
Figure (1.2) : Convection forcée 3
Figure (1.3) : milieu poreux.....4
Figure (1.4) : les types de porosité 4
Figure(1.5) :perméabilité.....5
Figure(2.1) : Image 3D de notre cavité.....10
Figure(2.2) : Image 2D de notre cavité.....10
Figure(3.1): Représentation schématique d'une cavité élancée.....18
Figure(4.1) : Maillage du domaine de calcul en (i, j).....21
Figure (5.1) : L'effet du maillage.....30
Figure(5.2): Les lignes de courant (gauche), isothermes (milieu) et isoconcentrations (droit) pour $A = 1$pour$R_T = 300$, $Le = 10$, $N = 0.5$ et ε = 1.....31
Figure (5.3) : Les lignes de courant (haut), isothermes (milieu) et isoconcentrations (bas) pour $A = 10$pour$R_T = 200$, $Le = 10$, $N = 0.5$, ε = 1.....32
Figure (5.4) : L'influence du rapport de forme de la cavité sur (a) l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, (b) les transferts de chaleur, (Nu, Nu_m) et (c) les transferts de masse (Sh, Sh_m) pour$R_T = 200$, $Ha = 1$, $Le = 10$,$N = -0.5$ et ε=1.....33
Figure (5.5) : Profils de fonction de courant, Ψ_0, de la vitesse, u, de la température, T, et de la concentration, S, dans le plan médiane horizontal pour $R_T = 200$, $Le = 10$ et $N = 0.5$....35
Figure (5.6): Diagramme de bifurcation en fonction de R_T et Ha sur : (a) l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, (b) taux de transfert de chaleur, Nu et (c) taux de transfert de masse, Sh pour, $Le = 10$, $N = 0.5$ et ε = 1.....37
Figure (5.7): Diagramme de bifurcation en fonction de R_T et Ha sur : (a) l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, (b) taux de transfert de chaleur, Nu et (c) taux de transfert de masse, Sh pour, $Le = 10$, $N = -0.5$ et ε = 1.....39
Figure(5.8): Effets du nombre de Rayleigh, R_T, et nombre de Hartmann, Ha, sur : (a) l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, (b) le nombre de Nusselt, Nu, et (c) le nombre de Sherwood, Sh, pour $Le = 10$, $N = -0.5$ et différentes valeurs de Ha.....40

Figure(5.9): L'effets du nombre de Rayleigh $R_T$et le rapport des forces de volume N sur : (a) l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, (b) le nombre de Nusselt, Nu, et (c) le nombre de Sherwood, Sh, pour $A = 10$, $Ha = 2$ et $Le = 10$..... 42

Figure(5.10) : L'effets du nombre de Rayleigh $R_T$et du nombre de Lewis Le sur : (a) l'intensité de l'écoulement, Ψ_0,(b) le nombre de Nusselt, Nu, et (c) le nombre de Sherwood, Sh, pour $A = 10$, $Ha = 2$ et $N = -0.5$. 43

Figure (5.11) : Effet du nombre de Hartmann, Ha, sur (a) l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, (b) le transfert de chaleur, Nuet (c) transfert de masse,Sh pour$R_T = 200$, $Le = 10$et $N = \pm 0.5$.....45

Figure(5.12) : Effets du nombre de Lewis, Le, et du nombre de Hartmann, Ha, sur les nombres de Rayleigh critiques : a)R_{TC}^{sous} et a) R_{TC}^{sup} pour$N = -0.05$.....47

Figure (5.13) : Diagramme de bifurcation en terme de, Ψ_0, en fonction de R_T pour $Ha = 2$, $Le = 10$ et ε=1.....47

Figure (5.14) : Solutions multiples stables pour $A = 6$. Pour $R_T = 300$, $N = -0.5$, $Ha = 1$ et ε=1.....

Liste des tableaux

Tableau (5.1): Comparaison des valeurs de la fonction de courant, Ψ_0, des nombres de Nusselt, Nu, et de Sherwood, Shavec les résultats donnés par Rakoto et Vasseur pour $A = 8$, $R_T = 200$, $N = 0$,$Ha = 1$, $Le = 1$et$\varepsilon = 1$.....29

Tableau (5.2) : Étude de la sensibilité du maillage et une comparaison entre la solution numérique et analytique pour$A = 10$,$R_T = 200$, $N = -0.5$,$Ha = 1$ et$Le = 10$.....29

Nomenclature

Lettres latines

Symbole	**Définition**
H’	hauteur de cavité [m]
G	Paramètre qui mesure les effets d’inertie
L’	largeur de cavité
K	perméabilité du milieu poreux
ℓ^*	longueur caractéristique de la cavité
*U**	vitesse caractéristique
C	Concentration sans dimension
C_S	Gradient de concentration sans dimension dans la direction x
C_T	Gradient de température sans dimension dans la direction x
D	Diffusivité de masse des espèces,m^2s^{-1}
D’	Coefficient de diffusion thermique $m^2s^{-1}k^{-1}$
g	accélération gravitationnelle ms^{-2}
j’	Flux de soluté par unité de surface kg m^{-2} s^{-1}
N	Fraction de masse
N_0	Fraction de masse de référence
P’	pression
ΔN	Différence caractéristique de la fraction de masse
q’	Flux de chaleur constant par unité de surface W m^{-2}
S	Fraction de masse normalisée
t	Temps sans dimension
T	Température sans dimension
ΔT’	Différence de température caractéristique
U	Vitesse sans dimension dans la direction x
V	Vitesse sans dimension dans la direction y
(x,y)	Coordonnées cartésiennes

Nombres adimensionnels

Da	nombre de Darcy
Re	nombre de Reynolds
Nu	nombre de Nusselt
R_T	nombre de Rayleigh
Sh	nombre de Sherwood local
Le	nombre de Lewis
Ha	nombre de Hartmann
R^*_T	Numéro de Rayleigh thermique modifié

Symboles Grecs

ε	porosité du milieu poreux
μ	viscosité dynamique du fluide
α_p	diffusivité thermique de milieu poreux saturé
Ψ	fonction de courant adimensionnelle
Γ	Coefficient de diffusion de l'équation générale du transport
β_N	Coefficient de dilatation de concentration
β_T	Coefficient de dilatation de concentration
φ	Ratio de flottabilité
σ	conductivité électrique $ohm^{-1}m^{-1}$
p ‘‘	Densité de fluide Kg m^{-3}
$(pC)_f$	Capacité calorifique du fluide W K^{-1}
$(pC)_P$	Capacité calorifique du milieu poreux saturé W K^{-1}
γ	Rapport de capacité thermique $(pC)_P$ / $(pC)_f$
Ψ_0	Fonction de flux sans dimension au centre de la cavité
Φ	potentiel électrique

CHAPITRE I
INTRODUCTION

La convection désigne l'ensemble des mouvements internes (verticaux ou horizontaux) qui animent un fluide et qui impliquent le transport des propriétés des parcelles de ce fluide au cours de son déplacement. ce transfert implique l'échange de chaleur entre une surface et un fluide mobile à son contact, ou le déplacement de chaleur au sein d'un fluide par le mouvement d'ensemble de ses molécules d'un point à un autre. la convection constitue, avec la conduction thermique et le transfert radiatif, l'un des trois modes d'échange de chaleur entre deux systèmes, et diffère de ces derniers par la méthode de transfert. Elle a aussi pour effet d'accélérer l'homogénéisation de la composition chimique du fluide, par rapport à la seule diffusion chimique.

1 Types de convection

1.1.1 convection naturelle

La convection naturelle est un phénomène important de la mécanique des fluides. elle est généralement due à des variations de la masse volumique causées par une distribution non uniforme de la température et/ou de la concentration des espèces dans un mélange. pour cette raison on parle soit de convection thermique et/ou de convection d'origine solutale. les gradients de température et de concentration peuvent agir selon le cas, ensemble ou en opposition, donnant ainsi naissance à des comportements dynamiques intéressants. Deux variantes sont possibles : pour la convection thermosolutale, les gradients de chaleur et de concentration sont tous les deux imposés sur les frontières du système, tandis que dans le problème de soret, le gradient de concentration et induit par le gradient thermique. ce dernier phénomène est connu sous le nom de l'effet soret **[1]**.

L'étude de la convection naturelle a suscité et suscite encore aujourd'hui l'intérêt de nombreux chercheurs scientifiques et de son omniprésente dans les procédés industriels. les recherches menées jusqu'à date, dans ce domaine, s'étendent sur un peu plus d'un siècle. un nombre considérable de travaux a été entrepris, suite à la découverte de ce phénomène par les expériences de Bénard, l'analyse théorique de Rayleigh et de Lapwood au début du vingtième

siècle, jusqu'a présent. Il s'agit principalement de l'étude des mouvements convectifs (écoulements naturels) induits par un gradient de température et un gradient de concentration au sein d'espaces confines ou semi confines, dont le contenu est généralement un milieu fluide ou un milieu poreux sature par un fluide.ces gradients (température et concentration) engendrent u ne distribution non uniforme de la densité du mélange qui génère à son tour un mouvement convectif sons l'effet de la gravite ces deux gradients peuvent agir, selon le cas, ensemble ou en opposition, donnant ainsi naissance a des comportements dynamiques intéressants et compliques. Plusieurs variantes sont possibles : pour la convection thermosolutale, les gradients de chaleur et de concentration sont tous les deux imposes, tandis que dans le problème de sorte, le gradient de concentration et induit par le gradient thermique

la convection naturelle thermosolutale est due principalement à sa présence dans plusieurs, applications industrielles tels que les procédés de séparation en industries chimiques et pétrolières de stockage des déchets nucléaires, la dispersion des contaminants Chimiques dans les couches d'eau souterraine, la migration de l'humidité à travers les isolations fibreuses, les processus de séchage, les opérations de dessalement de l'eau de mer**[2]**.

L'image suivante nous montre la convection naturelle

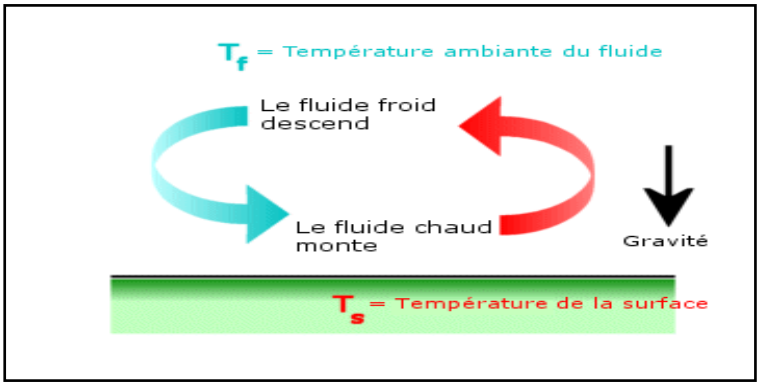


Figure (1.1) : Convection naturelle**[3]**

1.1.2 Convection forcée

La convection forcée est provoquée par une circulation artificielle (pompe, turbine) d'un fluide. Le transfert est plus rapide que dans le cas de convection naturelle. voici quelques exemples de convection forcée dans des appareillages : chauffage central avec accélérateur Chauffages électriques avec soufflerie, chauffe-eau solaire et four à convection de cuisinière.

le corps humain a son propre système de convection forcée, la circulation sanguine dans un environnement à microgravité comme dans l'espace, la convection naturelle n'est pas Possible puisque la poussée d'Archimède s'exerce par la différence de force gravitationnelle sur des volumes de densités différentes. ainsi la circulation de la chaleur doit être forcée dans une capsule spatiale. une flamme aurait également de la difficulté à exister car les gaz de combustion resteraient près de la flamme, la coupant de l'apport d'oxygène. il faut pour l'entretenir une circulation forcée pour éloigner ces gaz et amener l'oxygène **[4]**.

L'image suivante nous montre la convection forcée

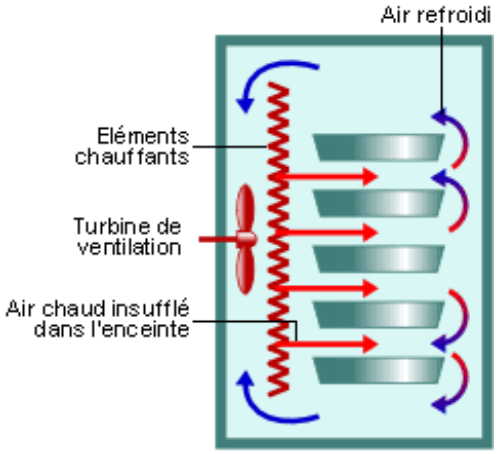


Figure (1.2) :le four a convection forcée **[5]**

La résolution d'un problème type de convection thermique en milieux poreux se ramène à prédire les champs de flux de chaleur et de vitesse ainsi que l'intensité de l'écoulement en fonction des divers paramètres du problème. Il est également important de prédire les taux de transferts thermiques correspondants (en termes de nombre de Nusselt) **[6]**.

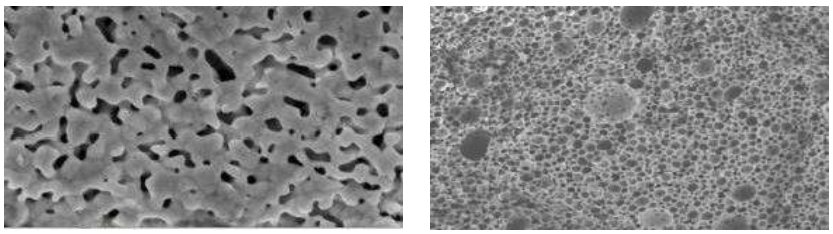
1.1.3 Convection mixte

Couplage des deux phénomènes quand les vitesses d'écoulement fictives, dues aux deux types de convection, sont considérées séparément comme étant du même ordre de grandeur **[7]**.

1.2 Milieu poreux

On appelle milieu poreux un corps composé d'une matrice solide à l'intérieur de laquelle se trouvent Des vides appelés pores. Généralement, ces pores peuvent communiquer entre eux ou Éventuellement sont isolés (Figure 1.3). Dans cette étude, nous nous intéressons

aux phénomènes de transfert de chaleur et de masse dans les milieux poreux. L'étude de la convection naturelle dans des espaces confinés a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs. cela s'explique par le vaste domaine d'applications pratiques. Nous nous limitons à citer quelques exemples parmi les plus typiques : l'extraction de pétrole et de gaz, les problèmes de purification de l'eau, le problème de transport des polluants dans le sol etc **[8]**.



stucture haute porosité (92 %) Image MEB d'un échantillon d'or poreux

Figure (1.3) : milieu poreux **[8]**

I.3 Propriétés structurales et thermo-physique d'un milieu poreux :

1.3.1 Porosité

La porosité d'un milieu poreux notée ε, est la fraction du volume moyen de milieu poreux occupé par les espaces vides .l'espace vide est égale au rapport du volume totale du milieu poreux V_t duquel on soustrait le volume de la matrice solide V_S par le volume total de milieu poreux V_T. **[9]**

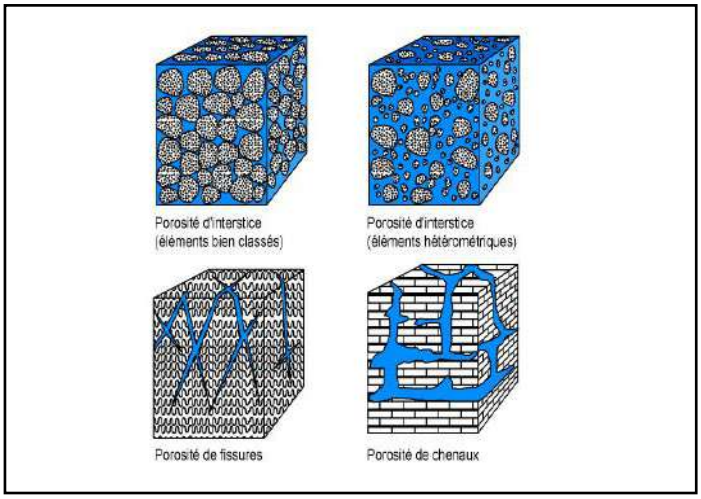
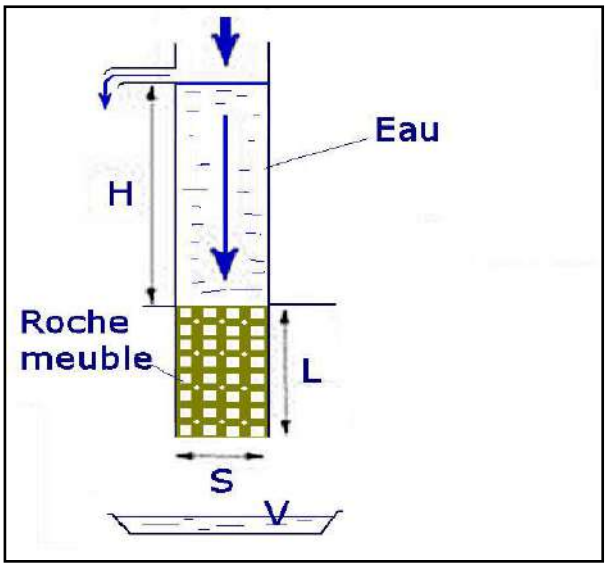


Figure 1.4 : les types de porosité[**10]**

$$\varepsilon = \frac{V_T - V_S}{V_T} \qquad (1.1)$$

1.3.2 Perméabilité :

La perméabilité K d'un milieu poreux dépend de la porosité et de la géométrie de la matrice solide. La valeur de la perméabilité est généralement déterminée expérimentalement et plusieurs modèles empiriques ont été proposées **[11]**.



Figure(1.5) : Perméabilité **[12]**

1.4 Les modeles de milieu poreux:

1.4.1 Modele de Darcy

Le modèle de Darcy, est considéré pour les conditions suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &< 0.8 \\ Da &\le 10^{-6} \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

où ε est la porosité du milieu poreux, Da est le nombre de Darcy **[13]**. Les nombres de Darcy et de Reynolds sont définis par :

$$\left.\begin{aligned} Da &= \frac{K}{\ell^*} \\ \mathrm{Re} &= \frac{V_a \sqrt{K}}{\nu} \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

où V_a est la vitesse moyenne des particules de fluide à travers la matrice solide, K la perméabilité du milieu poreux, ν la viscosité cinématique du fluide et $\sqrt{K}$ une longueur représentative du diamètre des pores. Dans le cas d'un milieu de Darcy, $Re << 1$.

1.4.2 Modele Darcy-Dupuit : Forchheimer

La formulation de Dupuit-Darcy **[14]** a été vérifiée pour des écoulements du nombre de Reynolds (Re>1). Cette formulation introduit un terme de trainée de forme de la matrice poreuse, qui est un terme quadratique de la vitesse considérée faussement reconnu comme un

terme d'inertie dans les études antérieures, le terme est très répondu parmi la communauté scientifique sous le nom de Forchheimer **[15]** ou terme d'inertie.

La forme compacte générale de la loi de Dupuit-Darcy, y compris la force du corps pour les écoulements en milieux poreux isotrope, est donnée par:

$$\nabla P' = -\frac{\mu}{K} V' - \frac{\rho C_{DF}}{K^{1/2}} |V'| V' - \rho g \tag{1.4}$$

où P' est la pression, V' le vecteur de vitesse d'infiltration, μ la viscosité dynamique du fluide, ρ la densité du fluide K la perméabilité de la matrice poreux, g est l'accélération de la pesanteur et C_{DF} est un coefficient indépendant de l'écoulement et des propriétés des fluides, mais il dépend du régime et du comportement de l'écoulement à travers la géométrie de la matrice poreuse ainsi que de la forme et de la taille des grains du milieu poreux. En d'autre terme, le coefficient de C_{DF} est directement lié au coefficient de la trainée de forme (pression) d'un grain ou de la matière solide poreuse élémentaire qui délimite les pores au sein de la matrice poreuse solide. Du point de vue hydrodynamique ou aérodynamique, un écoulement visqueux autour d'un grain submergé induit une force de trainée, appelée trainée de profil dont le coefficient, $C_D = C_{DV} + C_{DF}$, est la somme de coefficient de la trainée visqueuse C_{DV} (lié à Darcy) et du coefficient de la trainée C_{DF} (lié à Dupuit). Pour tout nombre de Reynolds la trainée visqueuse est toujours présente, mais la trainée de forme ou la trainée de pression dépend du comportement de l'écoulement autour du grain si elle est attachée ou séparée. Si l'écoulement est attaché, à très faible nombre de Reynolds, la récupération du gradient de pression autour du grain se produit et la trainée de forme est proche de zéro et la trainée visqueuse est dominante. Cependant, pour un nombre de Reynolds relativement élevé et en raison de la forme non cariné du grain, l'écoulement se sépare et la trainée de forme devient significative et surmonte la trainée visqueuse. Dans une matrice poreuse, un grain est entouré par d'autres et la trainée de forme de « grain individu » prend en compte l'interférence hydrodynamique/aérodynamique mutuelle entre les grains. Ensuite, un grain est soumis à un écoulement amont très complexe et le coefficient de la force de la trainée de forme C_{DF} dépend fortement de la forme du grain et du nombre de Reynolds qui influence le comportement de l'écoulement. Ainsi, il ne peut pas être considéré comme une constante universelle, susceptible pour une sphère solide où le coefficient de la trainée de forme (au-delà de régime d'écoulement de Stokes) est une fonction du nombre de Reynolds.

Globalement, le coefficient de la trainée de forme C_{DF} dépend de la taille et de la forme des grains de la matrice poreuse ainsi que du comportement de l'écoulement.

1.4.3 modèle Brinkman

Brinkman a supposé un écoulement ou les effets visqueux sont dominants avec l'équation darcy pour écrire l'équation du mouvement sous la forme suivante **[16]**:

$$\Delta P' = -\frac{\mu}{K} V' + \mu_e \nabla^2 V' + \rho g \tag{1.5}$$

Cette loi empirique est connue sous le nom de formulation de Darcy-Brinkman, fortement utile pour le cas de haute porosité. Le premier terme à droite de l'équation ci-dessus contenant la viscosité μ est le terme de Darcy et le deuxième contenant la viscosité effective est appelé le terme de Brinkman. La difficulté dans l'utilisation de ce modèle réside dans l'évaluation de la viscosité équivalente du milieu μ_e . En effet cette grandeur est fonction non seulement de la porosité de milieu mais aussi de sa géométrie (tortuosité). Brinkman a assimilé la viscosité équivalente du milieu à celle du fluide $(\mu_e = \mu)$. Le modèle de Brinkman permet ainsi d'imposer la condition de non glissement au champ de vitesse de filtration, au niveau des parois imperméables.

1.4.4 Approximation de Boussinessq

L'approximation de Boussinesq est la base pour la plupart de ce qui est connu à propos de la convection naturelle. L'application de cette approximation aux problèmes technologiques et environnementaux ne peut avoir un sens que lorsque les conditions dans lesquelles les équations de Boussinesq sont valides est explicitement connues.

L'hypothèse de Boussinesq suppose que la densité du fluide dans le terme des forces de volume, varie linéairement avec la température et la concentration comme **[17]** :

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \beta_T \left(T' - T_0'\right) - \beta_S \left(S' - S_0'\right)\right] \tag{1.6}$$

où : T' et S' représentent respectivement, la température et la concentration de fluide en un point du système, T_0', S_0' et ρ_0 représentent la température, la concentration et la masse volumique de référence, β_T et β_S sont respectivement les coefficients d'expansion thermique et solutal du fluide. Ils sont définis par :

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T'}\right)_{P',S'} \qquad \beta_S = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial S'}\right)_{P',T'} \tag{1.7}$$

1.5 Contenu de la thèse

Le contenu de ce mémoire est composé de Cinque chapitres. Le premier chapitre est une introduction au présent travail et une recherche bibliographique des travaux antérieurs trouvés dans la littérature dans ce domaine d'investigation. Le deuxième chapitre de la thèse est consacré à la définition de la géométrie étudiée, et La formulation mathématique du problème où les équations de bases gouvernant le système et les conditions aux frontières associées seront présentées. Dans le troisième chapitre, nous avons développé une solution analytique basée sur la méthode du concept de l'écoulement parallèle dans le cas d'une couche poreuse élancée. Dans cette situation, les équations gouvernant du problème sont réduites à des équations différentielles ordinaires qui sont solvables analytiquement. Toutes les étapes de la démarche numérique (méthode des différences finies) ainsi que l'algorithme de calcul utilisé sont présentés dans le quatrième chapitre. Le cinquième chapitre est consacré à la discussion des résultats obtenus.

1.6 revue bibliographique

La convection naturelle induite en milieu poreux a stimulé l'intérêt des chercheurs et des ingénieurs depuis l'apparition du travail du maître Darcy **[14]**. Ce dernier a établit pour la première fois, une relation entre la vitesse d'écoulement d'infiltration et la chute de pression, ce qui a pris le nom de la loi de Darcy. Cette relation n'est valable que pour des faibles nombres de Reynolds ($\mathrm{Re}=V_a K^{1/2}/\nu$ où V_a est la grandeur de la vitesse d'infiltration, K est la perméabilité de la matrice poreuse et v est la viscosité cinématique du fluide). Dans le passé, de nombreuses recherches ont été menées sur la modélisation du phénomène de la convection thermique . la convection naturelle thermosolutale a été étudiée en premier par Bejan et Poulikakos **[18]** d'âpres avoir réalise la convection naturelle d'une couche limite verticale prés de la paroi solide adjacente à un milieu poreux saturé par un fluide, dans le cas où le nombre de Reynolds, Re_d basé sur le diamètre des pores, est suffisamment grand pour lequel le régime de Darcy n'est plus valide. L'écart par rapport au modèle d'écoulement de Darcy est présenté par le nombre adimensionnel G, avec la limite de grand Re_d ($G\rightarrow\infty$), et la limite de l'écoulement de Darcy ($G\rightarrow 0$). Avec les effets d'inertie, les résultats indiquent que le taux du transfert thermique est complètement différent de celui rencontré dans le cas classique de

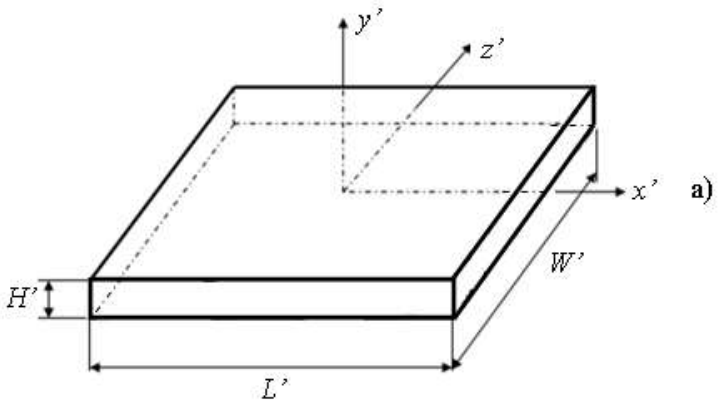
l'écoulement de Darcy. Prasad et Tuntomo **[19]** dans le cadre de l'étude réalise sur l'effet d'inertie sur le transfert de chaleur convectif dans une cavité poreuse verticale. Les équations gouvernantes sont formulées avec le terme Darcy–Forchheimer ou Dupuit pour un écoulement en milieu poreux saturé. Les équations de mouvement sont traitées par la méthode des différences finies. Les résultats ont montré que la couche limite de l'écoulement n'existe pas lorsque le terme $G=Fs/\ Pr \rightarrow \infty$, et par conséquence l'applicabilité d'une solution de la couche limite dans le régime d'inertie et très limité. Lauriat et Prasad **[20]** gras a la mise en œuvre de l'importance des effets visqueux et d'inertie sur la convection naturelle dans le cas d'une cavité chauffée par les cotés. Le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer a été utilisé. La méthode des déférences finies a été utilisée pour résoudre les équations gouvernantes. Les résultats montrent qu'il existe un régime asymptotique pour lequel la solution est indépendante de la perméabilité K de la matrice poreuse et des nombres de Darcy, Da, et de Forchheimer, Fs. Les solutions numériques montrent aussi que le flux de chaleur peut être supérieur à celui calculé dans le cas d'un fluide lorsque la perméabilité K est suffisamment élevée, et lorsque la conductivité thermique du solide K_m est supérieure à celle du fluide. Douglas et Huiping **[21]** la grande importance d'avoir le théorème de la moyenne appliqué aux équations microscopiques pour obtenir l'équation d'écoulement macroscopique. pour cette étude, ils ont choisi un modèle très simple de tube d'écoulement dans un milieu poreux. Les auteurs ont démontré que les termes d'inertie microscopiques ramenés à une moyenne ne pouvant pas mener à une représentation significative des effets d'inertie. Les effets d'inertie microscopiques tordent le champ de vitesse et de pression et par conséquent menant aux changements des intégrales de surface qui résultent du processus d'établissement d'une moyenne Shenoy **[22]** a fait une étude préliminaire sur l'effet d'inertie de Darcy-Forchheimer dans un milieu poreux saturée par un fluide non Newtonien non élastique en utilisant le model en loi de puissance.les équations de base ont été résolues avec la méthode d'intégrale approximative. Les auteurs on trouvé que la similitude de solution existe spécifiquement pour le cas d'une plaque plane verticale isotherme incorporée dans le milieu poreux. Les résultats basés sur la méthode approximative ont été comparés avec les solutions précises existantes. Bahloul et al**. [23]** ont examiné les écoulements dans une cavité horizontale soumise à des flux verticaux de chaleur et de masse avec l'effet Soret. Ils ont démontré que la solution prend la forme d'une bifurcation qui peut être sous critique ou fourche. Bourich et al**. [24]** ont analysé numériquement la convection double diffusive dans une cavité poreuse carrée dont les parois horizontales sont chauffées à des températures constantes et des concentrations sont appliqués sur les parois verticales. Nawaf et Pop **[25]** ont mit l'accent sur l'importance d'une

étude numérique sur la convection naturelle dans une cavité verticale carrée soumise à des températures constantes appliquées sur les parois verticales. l'équation de Darcy avec les termes de Darcy-Forcheimer qui prend en considération l'effet d'inertie a été utilisé pour dériver l'équation de mouvement. Les équations couplées sont résolues par la méthode de volumes finies. les résultats obtenus montrent l'effet du paramètre d'inertie, Pr^*, sur le nombre moyen de Nusselt, Nu_m, et sur la circulation du fluide dans la cavité poreuse pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh thermique, R_T. Hadim **[26]** a explique d'une manière numérique la convection naturelle de non-Darcy dans une enceinte poreuse saturée avec un fluide non Newtonien en utilisant le model en loi de puissance. la configuration est une enceinte chauffée par une paroi latérale avec les parois horizontales isolées. l'écoulement dans le milieu poreux est modélisé à l'aide du model de Brinkman- Forchheimer, qui tient compte des effets d'inertie et visqueux. L'auteur a utilisé une discrétisation en volumes finies pour résoudre les équations gouvernantes. Cette méthode assure la conservation de la masse et d'énergie sur chaque volume de contrôle. le terme nonlinaire de Darcy et le terme de Forchheimer ou Dupuit dans l'équation de mouvement sont traités comme des termes linéaires. les résultats sont obtenus en utilisant la méthode de double balayage (TDMA).ces résultats montrent que l'augmentation du nombre de Darcy, *Da*, augmente la vitesse de l'écoulement prés des murs et provoque un accroissement du nombre de Nusselt dans la cavité. cependant l'augmentation du nombre de Rayleigh thermique R_T, produit des effets similaires pour un exposant de la loi de puissance *n* faible. Krishna et al. **[27]** ont mit en évidence sur le phénomène de la convection thermique dans une cavité rectangulaire poreuse anisotrope, dont les parois verticales sont maintenues à une température constante tandis que les parois horizontales sont supposées adiabatiques et imperméables. cependant, sur la paroi horizontale inférieure, il existe une partie soumise a un flux de chaleur constant. la solution du problème a été obtenue numériquement en utilisant l'extension du model de Darcy.

CHAPITRE II
MODÈLE PHYSIQUE ET FORMULATION MATHÉMATIQUE

2.1 Description du problème

Nous considérons qu'il est de notre cavité rectangulaire de hauteur *H'* et de longueur L contenant un milieu poreux saturé par un fluide . la configuration géométrique bidimensionnelle de notre écoulement est il apparaît sur la figure . les axes de coordonnées *x'* et *y'* sont respectivement orientés suivant les directions horizontale et verticale . Dans cette investigation, les écoulements convectifs sont pilotés par des conditions aux frontières thermiques et solutales de type Neumann (flux constants de chaleur et de masse) avec un champ magnétique uniforme est appliqué dans la direction *x*. Tandis que, les parois verticales sont considérées comme adiabatiques et imperméables.



Figure(2.1) : Image 3D de notre cavité

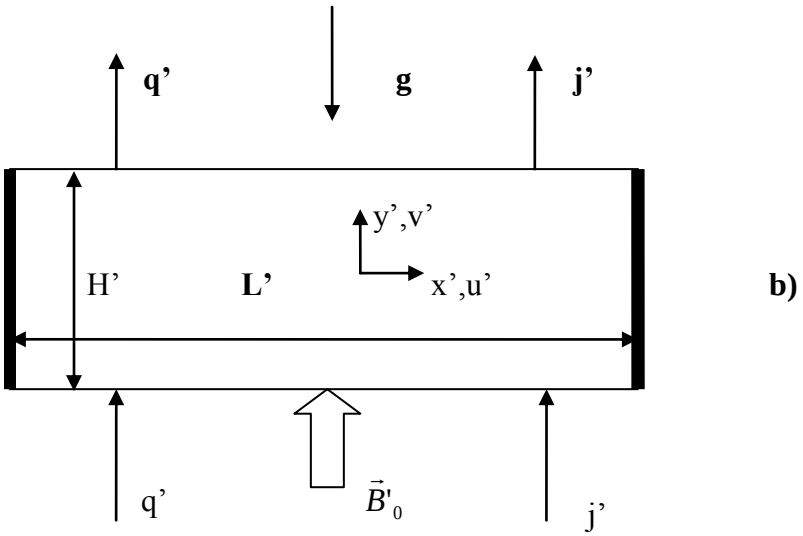


Figure (2.2) : Image 2D de notre cavité.

2.2 Hypothèses simplificatrices :

Lors de notre étude plusieurs approximations ont été adoptées afin de simplifier la formulation du modèle mathématique :

- La largeur de l'enceinte, *W'*, est supposée suffisamment grande par rapport aux autres dimensions (*W'/L'* et *W'/H'* >> 1) de façon à ce que les effets tridimensionnel deviennent négligeables. Ceci nous amène alors à un problème bidimensionnel comme le montre la Fig (2.1).
- On suppose que la solution est un fluide newtonien et incompressible
- la matrice poreuse est isotrope, perméable et homogène
- l'écoulement est supposé laminaire
- Il n'y a aucune réaction chimique ou une source de chaleur et de masse
- Transfert de chaleur par rayonnement est négligeable, et les interactions entre la chaleur et de masse sont négligeables
- Les propriétés thermophysiques du fluide sont constantes et sont évaluées à la température de référence. Cependant, la densité du fluide dans le terme des forces de volume varie linéairement avec la température.

2.3 Formulation mathématique

En tenant compte de toutes les hypothèses considérées, le système d'équations différentielles aux dérivées partielles décrivant ce problème est composé de l'équation de continuité, des équations de la conservation de la quantité de mouvement et des équations de la conservation de l'énergie et de la matière dans un milieu poreux.

Pour que les résultats obtenus soient valides, il faut que la porosité du milieu poreux soit inférieure à 0.8, dans le cas contraire, les forces visqueuses (connues sous les noms de termes de Brinkman) doivent être prises en considération.

Les équations gouvernantes d'un écoulement convectif à travers un milieu poreux s'écrivent alors sous les formes suivantes :

2.3.1 Équation de continuité

$$\nabla.\vec{V}' = 0 \tag{2.1}$$

2.3.2 Équation de mouvement

$$\frac{\mu}{K}\vec{V}' = -\nabla p' + \rho\vec{g} + \vec{J}' * \vec{B}_0' \tag{2.2}$$

2.3.3 Equation de conservation de l'énergie

$$(\rho C)_p \frac{\partial T'}{\partial t'} + (\rho C)_f (\vec{V}'.\nabla T') = k\nabla^2 T' \tag{2.3}$$

2.3.4 Equation de la conservation de la masse

$$\phi \frac{\partial N}{\partial t'} + \vec{V}'.\nabla N = D\nabla^2 N \tag{2.4}$$

Le vecteur $\vec{V}'$ est le vecteur vitesse dont les composantes sont *u'* et *v'* dans les directions *x'* et *y'*, respectivement. En outre, μ est la viscosité dynamique, *k* est la conductivité thermique de milieu poreux et *P'* est la pression hydrodynamique. les paramètres $(\rho C)_p$ et $(\rho C)_f$ sont la capacité calorifique thermique du milieu poreux saturé et la capacité calorifique thermique du fluide respectivement.

2.3.5 Équations adimensionnelles

Pour mettre les équations (2.1)-(2.2)-(2.3) et (2.4) sous une forme adimensionnelle, nous introduisons les variables adimensionnelles suivantes **[28]**:

$$\left.\begin{aligned} &(x,y) = (x',y')/H',(u,v) = '(u',v')H'/\alpha \\ &t = t'\alpha/H'^2, \varepsilon = \phi/y \\ &T = (T - T_0')/\Delta T', \Delta T' = q'H'/k \\ &S = (S - S_0')/\Delta S', \Delta S' = j'H'/D \\ &\psi = \psi_0/\alpha, S = N/\Delta N \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

où ℓ^*, P^*, t^*, U^* sont la longueur, la pression, le temps et la vitesse caractéristiques, respectivement. ces grandeurs sont définies comme suit :

$$t^* = \sigma \frac{\ell^*}{U^*}, \qquad U^* = \frac{\alpha}{\ell^*}, \tag{2.6}$$

$$\alpha = \frac{k}{(\rho C)_f}, \qquad \sigma = \frac{(\rho C)_P}{(\rho C)_f}, \tag{2.7}$$

Avec α est la diffusivité thermique du milieu poreux.

La longueur caractéristique ℓ^* et définie comme :

$$\ell^* = H' \tag{2.8}$$

Le paramètre *A*, quand à lui, désignant le rapport de forme de la cavité, est défini par :

$$A = \frac{L'}{H'} \tag{2.9}$$

Comme les parois actives de l'enceinte sont soumises à des flux chaleurs constants nous prenons :

$$T'_0 = T'_{(0,0)}, \qquad \Delta T^* = \frac{q'H'}{k_P} \tag{2.10}$$

$$S'_0 = S'_{(0,0)}, \qquad \Delta S^* = \frac{j'H'}{D'} \tag{2.11}$$

En introduisant les variables sans dimensions (2.5) dans les équations (2.1)- (2.4), nous obtenons les équations adimensionnelles suivantes**[29] et [30]** :

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2\psi = -R_T\left(\frac{\partial T}{\partial x} + N\frac{\partial S}{\partial x}\right) - Ha^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \\ &\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \nabla^2 T \\ &\varepsilon\frac{\partial S}{\partial t} + u\frac{\partial S}{\partial x} + v\frac{\partial S}{\partial y} = Le^{-1}\nabla^2 S \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

À partir de ces équations, six groupements adimensionnels émergent dans les équations ci-dessus, à savoir le nombre de Rayleigh thermique R_T , le nombre de Lewis, le rapport des forces de volume N , le nombre de Hartmann, *Ha*, le rapport de forme de la cavité et la porosité normalisée, ε, de la matrice poreuse qui sont définis par :

$$\left.\begin{aligned} &R_T = \frac{gKH'\beta'_T\Delta T'}{\alpha\nu}, \qquad Le = \frac{\alpha}{D}, \qquad N = \frac{\beta'_S\Delta S}{\beta'_T\Delta T'} \\ &Ha = B'_0\left(\frac{K\sigma}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad A = \frac{L'}{H'}, \qquad \varepsilon = \phi/\gamma \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

2.4 Équation de fonction de courant

Etant donné que l'écoulement est considéré bidimensionnel, il existe alors une fonction de courant Ψ(*x*, *y*) définie par :

$$u = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} \tag{2.14}$$

En introduisant les expréssions (2.14) dans les équations (2.12) nous obtenons les équations gouvernantes adimensionnelles :

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\psi + Ha^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} &= -R_T\left(\frac{\partial T}{\partial x} + N\frac{\partial S}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} &= \nabla^2 T \\ \varepsilon\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial y} &= Le^{-1}\nabla^2 S \end{aligned}\right\} \quad (2.15)$$

2.5 Conditions aux limites

$$\left.\begin{aligned} x = \pm\frac{A}{2}, \psi = 0, \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \\ y = \pm\frac{1}{2}, \psi = 0, \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial y} = -1 \end{aligned}\right\} \quad (2.16)$$

2.6 Transfert thermique et massique

Dans la présente étude, nous nous intéressons particulièrement aux calculs du taux de transfert de chaleur et de masse à une position x donnée, qui sont exprimés en termes des nombres de Nusselt et Sherwood définis par :

$$\left.\begin{aligned} Nu &= \frac{q'}{k\,\dfrac{\Delta T'}{H'}} = \frac{1}{T_{(x,-1/2)} - T_{(x,1/2)}} \\ Sh &= \frac{j'}{D\dfrac{\Delta S'}{H'}} = \frac{1}{S_{(x,-1/2)} - S_{(x,1/2)}} \end{aligned}\right\} \quad (2.17)$$

Les valeurs moyennes des nombres de Nusselt et Sherwood sur les parois actives sont obtenus par :

$$Nu_m = \int_{-A/2}^{A/2} Nu\,dx \quad (2.18)$$

$$Sh_m = \int_{-A/2}^{A/2} Sh\,dx \quad (2.19)$$

CHAPITRE III
SOLUTION ANALYTIQUE

3.1 Introduction

Les équations aux dérivées partielles non linaires en milieu poreux (2.12) régissant le problème de la convection double diffusive, sont fortement couplées. Une solution analytique pour ces équations est en général impossible, sauf pour certains cas et hypothèses pour lesquels les équations se simplifient considérablement. Dans le cas d'une couche poreuse de grand rapport d'aspect $(A >> 1)$ avec des parois actives exposées à des flux de chaleur et de masse constants, il est possible de trouver une solution analytique approximative. Cette dernière, obtenue en utilisant le concept de l'écoulement parallèle, permet de prédire analytiquement certains phénomènes physiques impliqués dans la convection naturelle doublement diffusive.

3.2 Concept de l'écoulement parallèle

Le concept de l'écoulement parallèle a été utilisé avec succès dans le passé par plusieurs nombre des auteurs du projet de résolution pour l'étude de la convection naturelle dans des cavités élancées ($A>>1$). Parmi les auteurs du projet de résolution : Cormack et al. **[31]**, Sen et al.**[32],** Vasseur et al. **[33]**, Hasnaoui **[34]**, Mamou **[35],** Alavyoon **[36]**et Mamou et al. **[37].**

Ce concept suppose que lorsque la cavité présente un grand rapport de forme $(A >> 1)$, l'écoulement engendré devient relativement parallèle le long des longues parois de la cavité, ce qui permet bien sûr de négliger la composante de la vitesse perpendiculaire à ces parois.

Lorsque la cavité présente un grand rapport de forme $L'>>H'$ (voir la figure (3.1)), les lignes de courant, au centre de la cavité, deviennent parallèles à l'axe de x. Autrement dit, la fonction de courant Ψ devient une fonction de l'ordonnée y seulement. On peut alors écrire : Lorsque la fonction de courant Ψ devient une fonction de l'ordonnée y, nous pouvons alors écrire :

$$\Psi(x, y) = \Psi(y) \tag{3.1}$$

En injectant cette approximation (3.1) dans les équations de conservation de la quantité de mouvement (2.12) nous pouvons montrer que les profils de la température et de la

concentration sont donnés par la somme de deux termes; un définissant une variation longitudinale linéaire et l'autre donnant la distribution transversale :

$$\left.\begin{aligned} T(x,y) &\approx C_T x + \theta_T(y) \\ S(x,y) &\approx C_S x + \theta_S(y) \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

où C_T et C_S sont des constantes exprimant les gradients de température et de concentration selon la direction *x*.

3.3 Équations de base simplifiées

La substitution de ces approximations dans les équations (3.1), (3.2) et en supposant que les flux de chaleur et de masse à l'état permanent, on obtient les équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\Psi}{dy^2} &= -R_T(C_T + NC_s) \\ \frac{d^2\theta_T}{dy^2} &= C_T\frac{d\Psi}{dy} \\ \frac{d^2\theta_T}{dy^2} &= C_S\frac{d\Psi}{dy} \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

3.4 Solution générale de la fonction de courant et de la vitesse

Après l'intégration de l'équation (3.3), la solution générale de l'équation de mouvement (3.3) donne le résultat suivant pour Ψ :

$$\Psi(y) = \Psi_0(1-4y^2) \tag{3.4}$$

La fonction de courant au centre de la cavité, Ψ_0, caractérisant l'intensité de l'écoulement peut s'écrire sous la forme :

$$\Psi_0 = \frac{R_T}{8}(C_T + NC_S) \tag{3.5}$$

L'expression de la distribution de la vitesse suivant *y* comme suit:

$$u(y) = -8\Psi_0 y \tag{3.6}$$

3.5 Équation générale du profil de température

Pour obtenir la forme générale de la distribution θ_T de température en fonction de *y*, pour simplifé le profil de temperature (3.2), ce qui nous donne :

$$\theta_T(y) = -\frac{4}{3} C_T \Psi_0 y^3 + C_T \Psi_0 y - y \tag{3.7}$$

L'équation générale du profil de température peut être obtenue en substituant respectivement l'équation (3.2) dans l'équation de la distribution de la température (3.7) :

$$T(x,y) = C_T x - 4C_T \Psi_0 \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y}{4} \right) - y \tag{3.8}$$

3.6 Équation générale du profil de concentration

La résolution de l'équations (3.3) est alors donnée par:

$$\theta_S(y) = -4LeC_S \Psi_0 (\frac{y^3}{3} - \frac{y}{4}) - y \tag{3.9}$$

L'équation générale du profil de concentration peut être obtenue en substituant respectivement l'équation (3.2) dans l'équation de la distribution de la température (3.9) :

$$S(x,y) = C_S x - 4C_S \Psi_0 \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y}{4} \right) - y \tag{3.10}$$

3.7 Les gradients horizontal de température et de concentration

On considère le volume de contrôle (Ω) montré sur la figure (3.1) pour déterminer les gradients de température C_T et de concentration C_S.

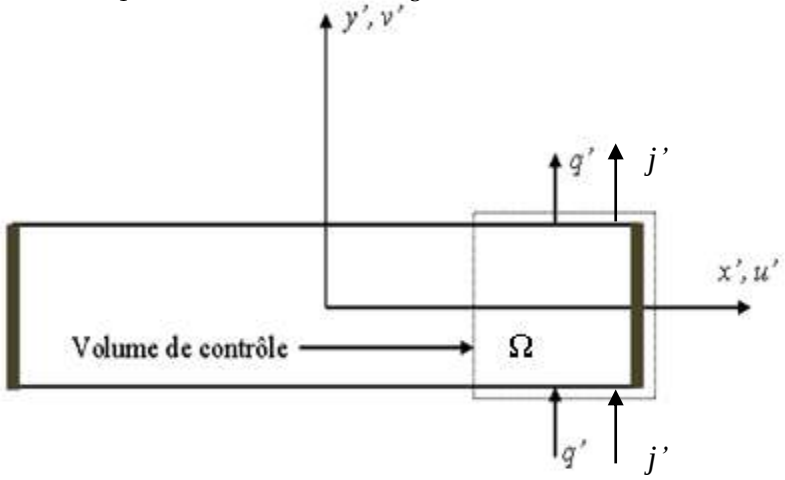


Figure (3.1) : Représentation schématique d'une cavité élancée

Dans le cas des flux de chaleur et de masse imposés, les bilans d'énergie et de matière dans le volume de contrôle (Fig 3.1) s'écrivent selon sous les formes suivantes:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial T}{\partial x} dy = C_T \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \tag{3.11}$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial S}{\partial x} dy = Le^{-1} C_S \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \tag{3.12}$$

Les termes des gradients de température, C_T , et de concentration, C_S , sont obtenus en substituant les profils Ψ , T et S dans les relations (3.4), (3.8) et (3.10), après une manipulation algébrique nous obtenons l'expression suivante :

$$C_T = \frac{10\Psi_0}{15 + 8\Psi_0^2} \quad , \quad C_S = \frac{10\Psi_0 Le}{15 + 8\Psi_0^2 Le^2} \tag{3.13}$$

L'équation (3.13) a été résolu numériquement pour C_T et C_S en utilisant la méthode de Newton-Raphson.

3.8 Taux de transfert chaleur

En substituant les équations (3.8) et (3.10) dans les équations (2.12), les taux des transferts de chaleur et de masse sont donnés par :

$$Nu = \frac{3(15 + 8\Psi_0)}{45 + 4\Psi_0^2} \tag{3.14}$$

$$Sh = \frac{3(15 + 8\Psi_0^2 Le^2)}{45 + 4\Psi_0^2 Le^2} \tag{3.15}$$

En combinant les équations (3.5)et (3.13), on obtient une équation polynomiale d'ordre cinq en Ψ_o admettant comme solutions :

$$\left.\begin{aligned} \Psi_0 &= 0 \\ \Psi_0 &= \pm\left[\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

Avec : $a=64Le^2$

, $$b = 120(1+Le^2) - \frac{10Le^2 R_T}{1+Ha^2}$$

$$c = 75*[12 - \frac{R_T(1+N(1+Le))}{1+Ha^2}] \qquad (3.17)$$

Les solutions correspondant à $0\ \Psi \neq 0$ existent uniquement si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{et} \quad b^2 - 4ac > 0 \qquad (3.18)$$

La résolution de ces inéquations dans le plan ϕ-Le, permet de diviser ce plan en trois régions correspondant à différents comportements. Dans la première région, seule la convection super-critique (démarrage de la convection avec une amplitude nulle) est possible et son seuil de démarrage est donné par :

$$R_{TC}^{\sup} = \frac{12(1+Ha^2)}{1+N(Le+1)} \qquad (3.19)$$

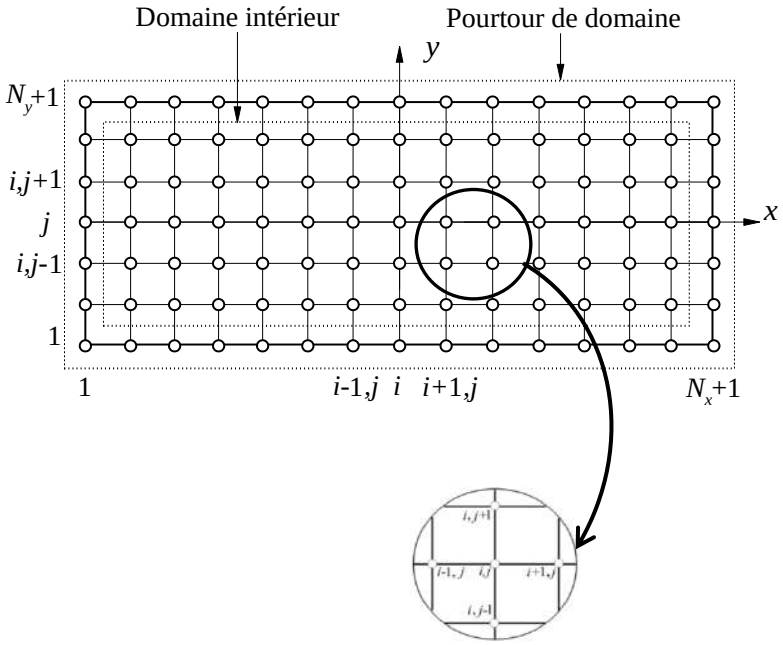
Dans la seconde région, les convections super-critique et sous-critique (démarrage de la convection avec une amplitude non nulle) sont possibles. Le seuil marquant la naissance de la convection sous-critique est donné par :

$$R_{TC}^{sub} = \frac{12(Le+1)(1+Ha^2)}{Le^2}[Le-1-2N+2\sqrt{-N(Le-1-N)}] \qquad (3.20)$$

CHAPITRE IV
METHODE NUMÉRIQUE

Dans cette partir, nous discutons de la méthode numérique utilisée pour la résolution de système d'équations différentielles non-linéaires telles que présentées dans la solution analytique. la méthode proposée est basée sur la technique des différences finies.cette méthode est la plus ancienne des méthodes numériques. elle à été introduire au 18 siècle par Euler, elle s'avère la plus adaptée et la plus facile d'utilisation pour les problèmes à géométrie simple. Cette méthode consiste à discrétiser les équations continues aux nœuds d'un maillage prédéfini (voir figure (4.1)).

Dans un repère cartésien, chaque nœud est désigné par le couple d'indices (*i*, *j*) désignant les lignes d'intersection du maillage. les nœuds voisins sont implicitement définis en augmentant ou en abaissant l'un des indices par un incrément unitaire.



Figure(4.1) : Maillage du domaine de calcul en (*i*, *j*)

Les équations de l'énergie (2.3) et de la concentration (2.4) sont discrétisées avec un schéma centré de deuxième ordre et en utilisant la forme conservatrice pour les termes convectifs. pour chaque pas de temps la méthode implicite aux directions alternées (ADI) donne lieu à deux systèmes matriciels tridiagonaux à résoudre, l'un résultant de la discrétisation implicite en *x* et l'autre de la discrétisation implicite en *y*. la méthode (ADI) divise le pas de temps en deux parties égales, dans la première demi-pas de temps, le système est implicitement en *x* mais explicitement en *y* et le deuxième demi-pas de temps, le système

est implicitement en *y* et explicitement en *x*. pour chaque étape de temps, la solution est obtenue en balayant le domaine de calcul dans la direction des *x* puis dans celle des *y*. connaissant les champs de la température et de la concentration à l'instant $(n+1)\Delta t$, l'étape suivante consiste à déterminer le champ de la fonction de courant à partir de l'équation (2.14), une fois discrétisée avec un schéma centrée classique, et résolue avec la méthode de sur-relaxation successive (SOR) par point proposé par Frankel **[38]**, est une méthode explicite qui donne directement la valeur de Ψ à l'instant (*n*+1) Δ*t*, au nœud considéré, moyennant un nombre suffisant d'itérations pour que le critère de convergence souhaité soit satisfait.

4.1 Discrétisation des conditions aux frontières thermiques

Les conditions aux frontières (2.16) sont discrétisées selon un schéma aux différences finies décentré à droite et à gauche selon la paroi considérée **:**

4.1.1 Selon les parois adiabatiques et imperméables : $\frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0$

où Θ représente soit la température, *T*, $(\Gamma_\varepsilon = 1, \Gamma_L = 1)$ ou la concentration S, $(\Gamma_\varepsilon = \varepsilon, \Gamma_L = Le)$

.
$$\Theta_{1,J} = \frac{4\Theta_{2,j} - \Theta_{3,j}}{3} \quad \text{à} \quad x = -\frac{1}{2} \tag{4.1}$$

$$\Theta_{Nx+1,j} = \frac{4\Theta_{Nx,j} - \Theta_{Nx-1,j}}{3} \quad \text{à} \quad x = \frac{1}{2} \tag{4.2}$$

4.1.2 Selon les parois actives :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = -1 \tag{4.3}$$

$$\Theta_{i,1} = \frac{4\Theta_{i,2} - \Theta_{i,3} + 2\Delta y}{3} \quad \text{à} \quad y = -\frac{1}{2} \tag{4.4}$$

$$\Theta_{i,Ny+1} = \frac{4\Theta_{i,Ny} - \Theta_{i,Ny-1} - 2\Delta y}{3} \quad \text{à} \quad y = \frac{1}{2} \tag{4.5}$$

4.2 Discrétisation de l'équation d'énergie et de la concentration

L'équation d'énergie et de la concentration étant paraboliques par rapport au temps et elliptiques par rapport aux coordonnées spatiales, la méthode implicite aux directions

alternées ADI est choisie comme outil de résolution. compte tenu les équations de l'énergie (2.3) et de la concentration (2.4) se réécrire de la façon suivante :

$$\Gamma_{\varepsilon}\frac{\partial\Theta}{\partial t}+\frac{\partial(u\Theta)}{\partial x}+\frac{\partial(v\Theta)}{\partial y}=\frac{1}{\Gamma_L}\nabla^2\Theta \tag{4.6}$$

4.2.1Schém aimplicite en *x* et explicite en *y :*

C'est un schéma aux différences centrées, au temps (n+1/2) pour les dérivées en x et au temps (n) pour les dérivées en y, est discrétisé comme suit :

$$\left.\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}\right|_{i,j}=\frac{\Theta_{i+1,j}^{n+1/2}-2\Theta_{i,j}^{n+1/2}+\Theta_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2},\qquad \left.\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}\right|_{i,j}=\frac{\Theta_{i,j+1}^{n}-2\Theta_{i,j}^{n}+\Theta_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^2} \tag{4.7}$$

$$\left.\frac{\partial(u\Theta)}{\partial x}\right|_{i,j}=\frac{u_{i+1,j}^{n}\Theta_{i+1,j}^{n+1/2}-u_{i-1,j}^{n}\Theta_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x},\qquad \left.\frac{\partial(v\Theta)}{\partial y}\right|_{i,j}=\frac{v_{i,j+1}^{n}\Theta_{i,j+1}^{n}-v_{i,j-1}^{n}\Theta_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y} \tag{4.8}$$

$$\left.\frac{\partial\Theta}{\partial t}\right|_{i,j}=2\frac{\Theta_{i,j}^{n+1/2}-\Theta_{i,j}^{n}}{\Delta t} \tag{4.9}$$

on obtient un système de la forme :

$$A_i\Theta_{i+1,j}^{n+1/2}+B_i\Theta_{i,j}^{n+1/2}+C_i\Theta_{i-1,j}^{n+1/2}=D_i \tag{4.10}$$

Avec :

$$\left.\begin{aligned}A_i&=\left[\frac{u_{i+1,j}^{n}}{2\Delta x}-\frac{1}{\Delta x^2\Gamma_L}\right],\qquad B_i=2\left[\frac{\Gamma_{\varepsilon}}{\Delta t}+\frac{1}{\Delta x^2\Gamma_L}\right],\qquad C_i=-\left[\frac{u_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x}+\frac{1}{\Delta x^2\Gamma_L}\right]\\ D_i&=\left[-\frac{v_{i,j+1}^{n}}{2\Delta y}+\frac{1}{\Delta y^2\Gamma_L}\right]\Theta_{i,j+1}^{n}+2\left[\frac{\Gamma_{\varepsilon}}{\Delta t}-\frac{1}{\Delta y^2\Gamma_L}\right]\Theta_{i,j}^{n}+\left[\frac{v_{j,j-1}^{n}}{2\Delta y}+\frac{1}{\Delta y^2\Gamma_L}\right]\Theta_{i,j-1}^{n}\end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

En remplaçant l'expression (4.11) dans l'équation (4.10) on obtient la forme discrète implicite en x sous la forme suivant :

Pour $i=2$,
$$\left[A_2-\frac{1}{3}C_2\right]\Theta_{3,j}^{n+1/2}+\left[B_2+\frac{4}{3}C_2\right]\Theta_{2,j}^{n+1/2}=D_2 \tag{4.12}$$

Pour $i=N_x$
$$\left[\frac{4}{3}A_{Nx}-B_{Nx}\right]\Theta_{Nx,j}^{n+1/2}+\left[C_{Nx}-\frac{1}{3}A_{Nx}\right]\Theta_{Nx-1,j}^{n+1/2}=D_{Nx} \tag{4.13}$$

4.2.2Schéma implicite en *x* et explicite en *y*

C'est un schéma aux différences centrées, au temps (n+1/2) pour les dérivées en x et au temps (n+1) pour les dérivées en y. la discrétisation des dérivées partielles est donnée par :

$$\left.\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{\Theta_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\Theta_{i,j}^{n+1/2} + \Theta_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2}, \qquad \left.\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}\right|_{i,j} = \frac{\Theta_{i,j+1}^{n+1} - 2\Theta_{i,j}^{n+1} + \Theta_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \tag{4.14}$$

$$\left.\frac{\partial(u\Theta)}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j}^{n}\Theta_{i+1,j}^{n+1/2} - u_{i-1,j}^{n}\Theta_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x}, \qquad \left.\frac{\partial(v\Theta)}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{v_{i,j+1}^{n}\Theta_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n}\Theta_{i,j-1}^{n+1}}{} \tag{4.15}$$

$$\left.\frac{\partial\Theta}{\partial t}\right|_{i,j} = 2\frac{\Theta_{i,j}^{n+1} - \Theta_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t} \tag{4.16}$$

on obtient un système de la forme :

$$A_i^{'}\Theta_{i,j+1}^{n+1} + B_i^{'}\Theta_{i,j}^{n+1} + C_i^{'}\Theta_{i,j-1}^{n+1} = D_i^{'} \tag{4.17}$$

$$\left.\begin{aligned} A_i^{'} &= \left[-\frac{v_{i,j+1}^{n}}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta y^2\Gamma_L}\right], \quad B_i^{'} = 2\left[\frac{\Gamma_\varepsilon}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta y^2\Gamma_L}\right], \quad C_i = -\left[\frac{v_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y} - \frac{1}{\Delta y^2\Gamma_L}\right] \\ D_i^{'} &= \left[-\frac{u_{i+1,j}^{n}}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2\Gamma_L}\right]\Theta_{i+1,j}^{n+1/2} + 2\left[\frac{\Gamma_\varepsilon}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x^2\Gamma_L}\right]\Theta_{i,j}^{n+1/2} + \left[\frac{u_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2\Gamma_L}\right]\Theta_{i-1,j}^{n+1/2} \end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

En remplaçant l'expression (4.17) dans l'équation (4.16) on obtient la forme discrète implicite en *x* sous la forme suivant :

Pour j=2, $$\left[A_2^{'} - \frac{1}{3}C_2^{'}\right]\Theta_{i,3}^{n+1} + \left[B_2^{'} + \frac{4}{3}C_2^{'}\right]\Theta_{i,2}^{n+1} = D_2^{'} - \frac{2}{3}C_2^{'}\Delta y \tag{4.19}$$

Pour $j=N_y$, $$\left[\frac{4}{3}A_{Ny}^{'} - B_{Ny}^{'}\right]\Theta_{i,Ny}^{n+1} + \left[C_{Ny}^{'} - \frac{1}{3}A_{Ny}^{'}\right]\Theta_{i,Ny-1}^{n+1} = D_{Ny}^{'} + \frac{2}{3}A_{Ny}^{'}\Delta y \tag{4.20}$$

4.3 Discrétisation de l'équation du mouvement

L'équation de mouvement du milieu poreux basé sur le modèle de Darcy pur s'écrire sous la forme suivante :

$$\nabla^2\Psi + Ha^2 = -R_T\left(\frac{\partial T}{\partial x} + N\frac{\partial S}{\partial x}\right) \tag{4.21}$$

Chaque terme de l'équation de mouvement (2.2) est discrétisé selon un schéma centré classique, on trouve l'expression générale suivante de la fonction de courant :

$$\begin{aligned}\Psi_{i,j}^{(n+1),(k+1)} = (1-\omega)\Psi_{i,j}^{(n+1),k} + \omega\{&a_1\left(\Psi_{i+1,j}^{(n+1),k} + \Psi_{i-1,j}^{(n+1),(k+1)}\right) + a_2\left(\Psi_{i,j+1}^{(n+1),k} + \Psi_{i,j-1}^{(n+1),(k+1)}\right) + \\ &a_3\left[\left(T_{i+1,j}^{(n+1)} - T_{i-1,j}^{(n+1)}\right) + N\left(S_{i+1,j}^{(n+1)} - S_{i-1,j}^{(n+1)}\right)\right]\}\end{aligned} \tag{4.22}$$

où a_1, a_2 et a_3 sont des constantes définies par :

$$a_1 = \frac{\mathrm{D}y^2}{2\left(\left(1+ Ha^2\right)\mathrm{D}x^2 + \mathrm{D}y^2\right)}, \quad a_2 = \frac{\mathrm{D}x^2 Ha}{2\left(\left(1+ Ha^2\right)\mathrm{D}x^2 + \mathrm{D}y^2\right)},$$

$$a_3 = R_T \frac{\mathrm{D}x\,\mathrm{D}y^2}{4\left(\left(1+ Ha^2\right)\mathrm{D}x^2 + \mathrm{D}y^2\right)}$$

Le paramètre ω est le facteur de sur-relaxation, compris entre 1 et 2, pour accélérer la convergence. Sa valeur optimale, ω_{opt} dépend de la forme du domaine, du maillage et du type des conditions aux limites. Pour un domaine rectangulaire avec un maillage uniforme, ω_{opt} est donnée par :

$$\omega_{opt} = \frac{2}{\varsigma^2}\left[1-\sqrt{1-\varsigma^2}\right]$$

Avec :

$$\varsigma = \left[\frac{\cos\left(\pi / N_{x+1}\right)+\left(\Delta x^2/\Delta y^2\right)\cos\left(\pi / N_{y+1}\right)}{1+\left(\Delta x^2/\Delta y^2\right)}\right]$$

où N_{x+1} et N_{y+1} désignent les nombres des nœuds suivant les directions horizontales et verticales respectivement.

4.4 Discrétisation les Champs de vitesse

Les composantes du champ de vitesse sont obtenues à partir de la fonction de courant selon les relations (2.14). La discrétisation de ces équations par un schéma de différence finies centré du deuxième ordre donne :

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{\Psi_{i,j+1}^{n+1} - \Psi_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \tag{4.23}$$

$$v_{i,j}^{n+1} = \frac{\Psi_{i,j+1}^{n+1} - \Psi_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \tag{4.24}$$

4.5 Discrétisation les conditions aux frontières des Vitesses

$$\left.\begin{array}{llll} u_{1,j} = 0, & v_{i,1} = -\dfrac{4\Psi_{2,j} - 3\Psi_{1,j} - \Psi_{3,j}}{2\Delta x} & \grave{a} & x = -\dfrac{A}{2} \\ u_{Nx+1,j} = 0, & v_{i,Ny+1} = \dfrac{4\Psi_{Nx,j} - 3\Psi_{Nx+1,j} - \Psi_{Nx-1,j}}{2\Delta x} & \grave{a} & x = \dfrac{A}{2} \end{array}\right\} \tag{4.25}$$

$$\left.\begin{array}{llll} v_{i,1} = 0, & u_{1,j} = \dfrac{4\Psi_{i,2} - 3\Psi_{i,1} - \Psi_{i,3}}{2\Delta y} & \grave{a} & y = -\dfrac{1}{2} \\ v_{i,Ny+1} = 0, & u_{Ny+1,j} = -\dfrac{4\Psi_{i,Ny} - 3\Psi_{i,Ny+1} - \Psi_{i,Ny-1}}{2\Delta y} & \grave{a} & y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \tag{4.26}$$

4.6 Algorithme de calcul

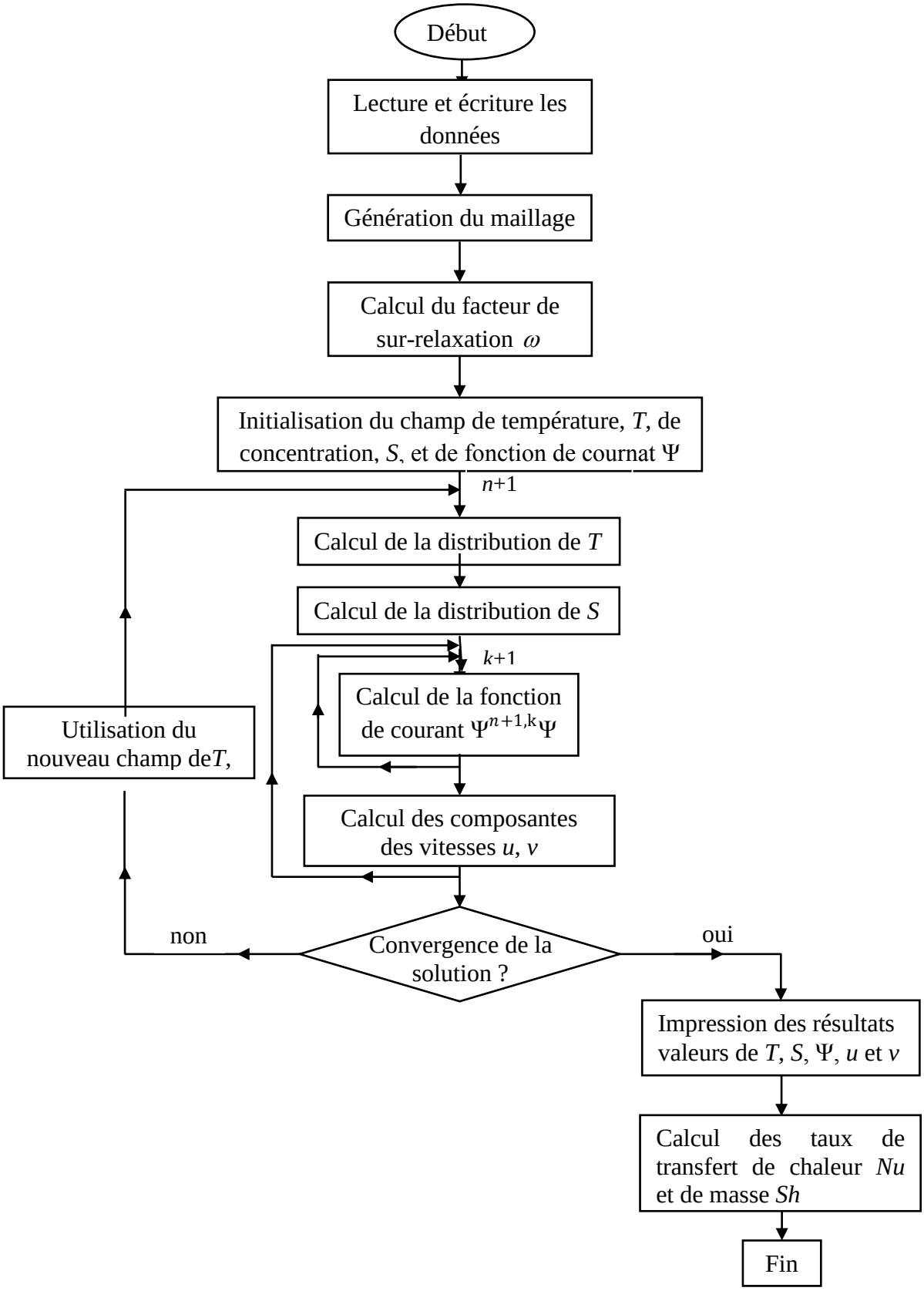
Les principales étapes de notre algorithme de calcul sont :

1. Génération du maillage.
2. Initialisation et lecteur des données.
3. Calcul du facteur de sur-relaxation.
4. Introduction des conditions initiales sur la température, *T*, sur la concentration, *S*, et sur la fonction de courant, Ψ.
5. évaluation du champ de vitesse initiale $u_{i,j}$ et $v_{i,j}$.
6. début de la boucle dans le temps.
   6.1. Résoudre l'équation de l'énergie (2.3) par la méthode ADI et calcul le champ de température $T_{i,j}$.
   6.2. Résoudre l'équation de concentration (2.4) par la méthode ADI et calcul le champ de concentration $S_{i,j}$.
   6.3. Résoudre l'équation de mouvement (2.2) par la méthode SOR et calcul le champ du fonction du courant $\Psi_{i,j}$.
   6.4.Détermination du champ de vitesse $u_{i,j}$ et $v_{i,j}$.
   6.5. Refaire l'étape (6.1) jusqu'à l'obtention de la convergence de la solution.
7. Fin de la boucle sur le temps : une fois la solution permanente ou la solution transitoire est atteinte.
8. Impression des résultats.
9. Fin du programme.

Le critère de convergence

lors de la résolution de l'équation (4.27) est donné par :

$$\frac{\sum_i \sum_j \left|\Psi_{i,j}^{k+1} - \Psi_{i,j}^{k}\right|}{\sum_i \sum_j \left|\Psi_{i,j}^{k}\right|} \leq 10^{-6} \qquad (4.27)$$


Début
Lecture et écriture les données
Génération du maillage
Calcul du facteur de sur-relaxation ω
Initialisation du champ de température, T, de concentration, S, et de fonction de courant Ψ
n+1
Calcul de la distribution de T
Calcul de la distribution de S
k+1
Calcul de la fonction de courant $\Psi^{n+1,k}\Psi$
Calcul des composantes des vitesses u, v
Convergence de la solution ?
non
oui
Utilisation du nouveau champ de$T$,
Impression des résultats valeurs de T, S, Ψ, u et v
Calcul des taux de transfert de chaleur Nu et de masse Sh
Fin

CHAPITRE V
RESULTATS ET DISCUSSION

Ce chapitre s'intéresse à la présentation des résultats analytiques et numériquesdans le cas d'une cavité horizontale soumise à des flux de chaleurq'et de massej'constants avec un champ magnétique uniforme est appliqué dans la direction x. Ce problème est gouverné par les nombres sans dimensions suivant: le rapport de la force de volume, N, le nombre de Rayleigh, R_T, le rapport d'aspect, A, de la cavité le nombre de Hartmann, Ha, et le nombre de Lewis,Le.

5.1 Validation de code numérique

A fin de vérifier l'exactitude du programme développé dans le présent travail, on a comparé les modèles analytiques avec les calculs numériques en se basant sur la détermination destrois paramètres souvent traités dans l'étude des écoulements convectifs, à savoirles nombres de Nusselt, Nu, et de Sherwood, Sh, caractérisant respectivement les taux de transfert de chaleur et de masse au sein de la cavité, et l'intensité de l'écoulement exprimée par la fonction de courant,Ψ. D'abord, nous présentons quelques comparaisons en convection naturelle dans le cas d'une cavité horizontale, dont les parois horizontales de la cavité sont soumises à des flux de chaleur constants et les parois verticales sont adiabatiques et imperméables comme illustré dans le tableau (5.1)pour un rapport d'aspect A=8.

Le programme élaboré pour résoudre les équations de base a été validé en se référant aux différentes études numériques disponibles dans la littérature. Le tableau. (5.1) comparé nos résultats avec ceux de Rakoto et Vasseur**[39]**. Cette étude a été réalisée pour le cas d'une cavité horizontale chauffée par le bas à des flux de chaleur et de masse constants. Notre simulation a été réalisée pour $A = 8$avec $R_T = 200$, $N = 0$,$Ha = 1$, $Le = 10$et $\varepsilon = 1$. La comparaison des champs de la fonction de courant, ainsi que les taux de transfert de chaleur et de masse sont en excellente concordance. Des erreurs variant entre 0.02% et 0.4% ont été observées.

Tableau (5.1): Comparaison des valeurs de la fonction de courant, Ψ_0, des nombres de Nusselt, Nu, et de Sherwood, Shavec les résultats donnés par Rakoto et Vasseur pour $A = 8$, $R_T = 200$, $N = 0$,$Ha = 1$, $Le = 1$et$\varepsilon = 1$.

Rakoto et Vasseur (2007)	present étude	Error (%)
Ψ_0 3.706	3.707	0.026
Nu 3.734	3.742	0.214
Sh 6.059	6.087	0.462

5.2 Résultats et discussion

La solution analytique présentée dans le chapitre 5 a été obtenue pour le cas d'une cavité infiniment longue,$A \to \infty$, Dans le cas de la simple diffusion, N=0, Vasseur et al. **[40]**, Mamou **[41]**. on démontré que, dans le cas d'une cavité chauffée avec un flux de chaleur constant, la solution analytique obtenus avec l'hypothèse de l'écoulement parallèle était satisfaisante à condition que le rapport de forme de la cavité soit supérieur à quatre $A \geq 6$. Pour $A<4$ et pour des valeurs modérées du nombre de Rayleigh, les résultats numériques s'écartement de la solution analytique et les lignes de courant perdent leur parallélisme.

Le tableau (5.2) présente la sensibilité du maillage de la solution numérique et la compare avec la solution analytique pour $A = 10$, $R_T = 100$, $N = -0.5$,$Ha = 1$, $Le = 10$. Les résultats sont donnés en termes de, Ψ_0, NuetSh. Le tableau montre que les valeurs numériques de Ψ_0, Nuet Sh(évalués au centre de la couche poreuse) tendent vers les résultats analytiquement prédits.

Tableau (5.2) : Étude de la sensibilité du maillage et une comparaison entre la solution numérique et analytique pour$A = 10$,$R_T = 200$, $N = -0.5$,$Ha = 1$ et$Le = 10$.

	Solution numérique				Solution numérique
$N_x \times N_y$	50× 25	100× 50	200× 100	300× 200	
Ψ_0	2.292	2.323	2.327	2.327	2.3206
Nu	2.497	2.604	2.625	2.625	2.6186
Sh	5.565	5.765	5.868	5.891	5.8976

Comme illustré sur la figure (5.1.a)-(5.1.b), pour prédire avec précision la solution numérique, un maillage à haute densité est nécessaire. La figure (5.1) montre les profils de température, T, et de concentration, S, obtenus pour différents maillage avec $A = 10$, $R_T = 200$, $N = -0.5$ et $Le = 10$. Pour capturer les profils de température et de concentration, le maillage devrait être dextrement raffiné. La meilleure approche pour obtenir une solution précise avec un maillage raisonnable est d'utiliser une distribution de maillage

non uniforme avec des nœuds concentré au centre de la couche. On remarque que la solution numérique pour un maillage 300×200 est plus proche de la solution analytique.

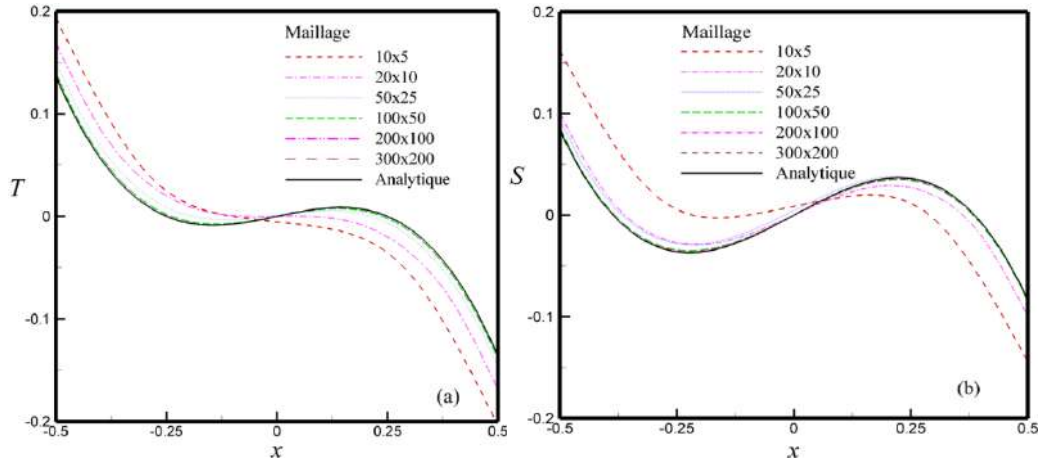
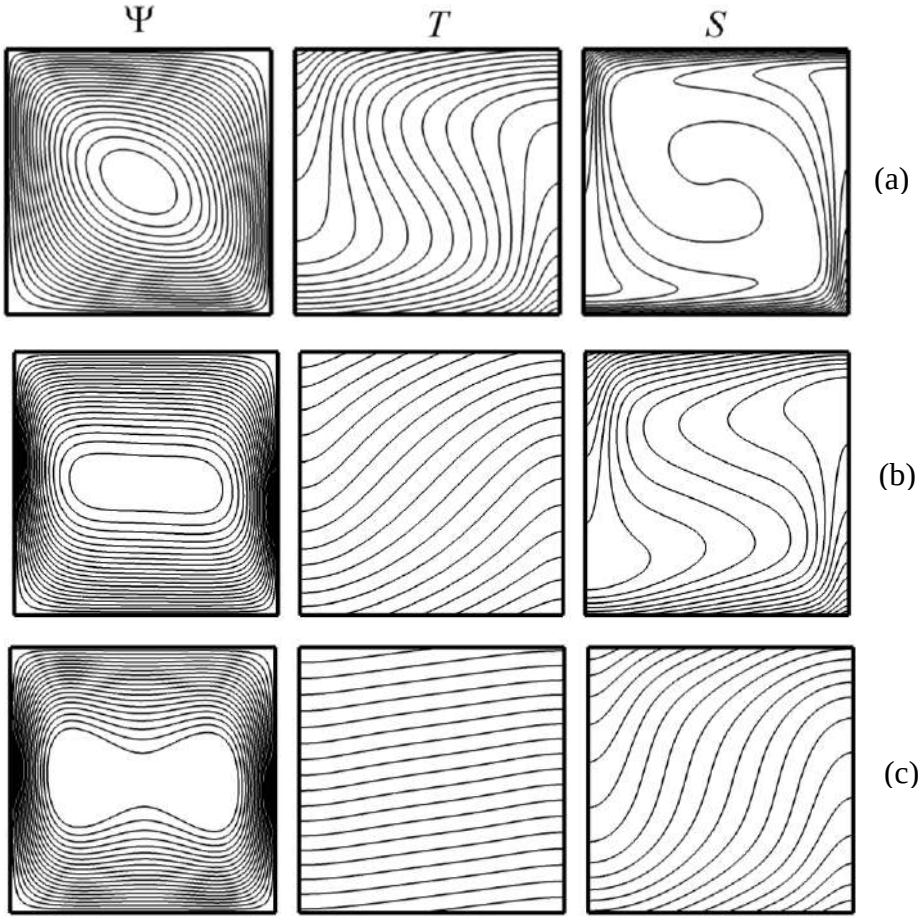


Figure (5.1) : L'effet du maillage sur les profils (a) de température et (b) de concentration pour $A = 10$, $R_T = 200$, $N = -0.5$ et $Le = 10$.

L'effet de la force du champ magnétique sur la convection double-diffusive dans une cavité carrée, $A = 1$pour$R_T = 400$, $Le = 10$, $N = 0.5$, ε = 1 et pour différentes valeurs du nombre de Hartmann, $Ha = 1$, 0, 4 et 7 , respectivement, est illustré sur les figures(5.2.a)-(5.2.c), les lignes de courant, isothermes et iso concentrations sont présentés de gauche à droite, respectivement. Les résultats présentés dans la Fig. (5.2.a) sont obtenus pour$Ha = 0$, c'est-à-dire en absence d'effet de champ magnétique et correspondent à un milieu poreux modélisé selon la loi de Darcy. La structure d'écoulement est monocellulaire, elle remplit toute la cavité avec une circulation dans le sens antihoraire. Un renversement de la circulation de l'écoulement dans le sens antihoraire à horaire et vice versa est observé. L'effet de l'augmentation de champ magnétique sur la structure de l'écoulement est illustré dans les figures(5.2.b) et (5.2.c) pour$Ha = 4$ et 8 respectivement. En général, la figure (5.2.a) illustre clairement le fait que l'augmentation du nombre de Hartmann, Ha, pour un nombre de Rayleigh donné, permet de réduire considérablement la force de mouvement de convection dans la couche, comme indiqué par les valeurs numérique de l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité,$\Psi_0 = 5.781$, pour $Ha = 4$ et $\Psi_0 = 1.158$, pour $Ha = 8$ et $\Psi_0 = 0.204$. Par conséquent, comme on peut le constater à partir des figures. (5.2.b) et (5.2.c), la température et la concentration sont considérablement inhibées par une augmentation du nombre de Hartmann. Figure (5.3) montre les résultats typiques obtenus pour $A = 10$, $R_T = 200$, $Le = 10$, ε = 1 et différentes valeurs de Ha ($Ha = 0$, 2 et 4).Les résultats illustrent clairement la dépendance du problème actuel sur le rapport d'aspect A. Dans ces

graphiques, les lignes de courant, isothermes et iso concentrations sont présentés de haut en bas. Les résultats illustrent clairement le fait que pour une cavité infinie$A \to \infty$, l'écoulement dans la région centrale de l'enceinte est sensiblement parallèle alors que la température et la concentration sont stratifiées de manière linéaire dans les directions horizontales de la cavité. La solution analytique développée dans la section précédente, est fondée sur ces observations. Naturellement, comme de nombreux auteurs l'ont déjà signalé, il est prévu que l'écoulement ne peut être considéré comme parallèle que si le rapport d'aspect de la cavité est grand.



Figure(5.2) :Les lignes de courant (gauche), isothermes (milieu) et isoconcentrations (droit) pour $A = 1$pour$R_T = 300$, $Le = 10$, $N = 0.5$ et ε = 1.

a) $Ha = 0, \Psi_0 = 5.781$, $Nu = 4.666$, $Nu_m = 4.156$, $Sh = 13.720$ et $Sh_m = 13.060$.

b) $Ha = 4, \Psi_0 = 1.158$, $Nu = 1.465$, $Nu_m = 1.424$, $Sh = 6.305$ et $Sh_m = 6.089$.

c) $Ha = 8, \Psi_0 = 0.204$, $Nu = 1.018$, $Nu_m = 1.017$, $Sh = 2.322$ et $Sh_m = 2.231$.

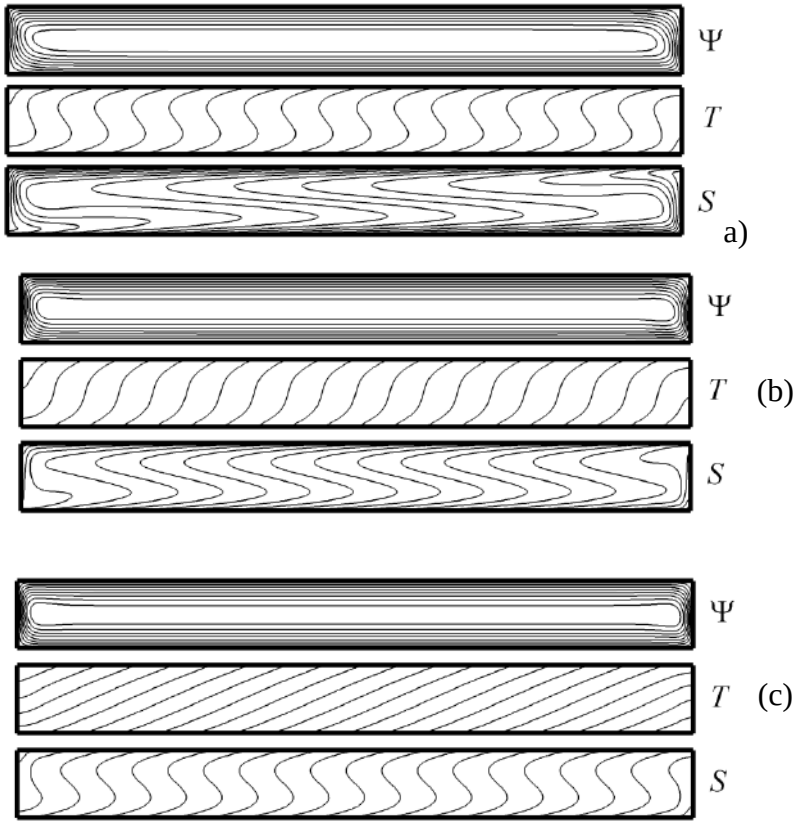


Figure (5.3) :Les lignes de courant (haut), isothermes (milieu) et iso concentrations (bas) pour $A = 10$pour$R_T = 200$, $Le = 10$, $N = 0.5$, ε = 1.

a) $Ha = 0, \Psi_0 = 5.535$, $Nu = 4.586$, $Nu_m = 4.491$, $Sh = 6.202$et $Sh_m = 7.192$.

b) $Ha = 2, \Psi_0 = 2.182$, $Nu = 2.462$, $Nu_m = 2.426$, $Sh = 5.734$et $Sh_m = 5.988$.

c) $Ha = 4, \Psi_0 = 0.647$, $Nu = 1.177$, $Nu_m = 1.174$, $Sh = 4.812$ et $Sh_m = 4.788$.

La figure (5.4) montre l'effet du rapport de forme sur l'intensité de l'écoulement et les taux de transfert de chaleur et de masse obtenu pour$R_T = 200$, $Ha = 1$, $Le = 10$ et $N = -0.5$et ε=1. La solution analytique obtenue pour $A \gg 1$est indiquée sur la figure (trait plein). Pour $A = 1$, on observe que la solution numérique (cercle plein et vide) s'écarte considérablement de la solution analytique et que la structure de l'écoulement (voir figure (5.2)) ne correspond pas aux prédictions de l'écoulement parallèle. Cependant, en augmentant progressivement le rapport de forme, les résultats de la solution numérique s'approchent de plus en plus de la solution analytique et un bon accord est observé au-delà de $A = 8$. Les lignes de courant, les isothermes et isoconcentrations présentées sur la figure (5.3) illustrent clairement les caractéristiques de l'écoulement parallèle.

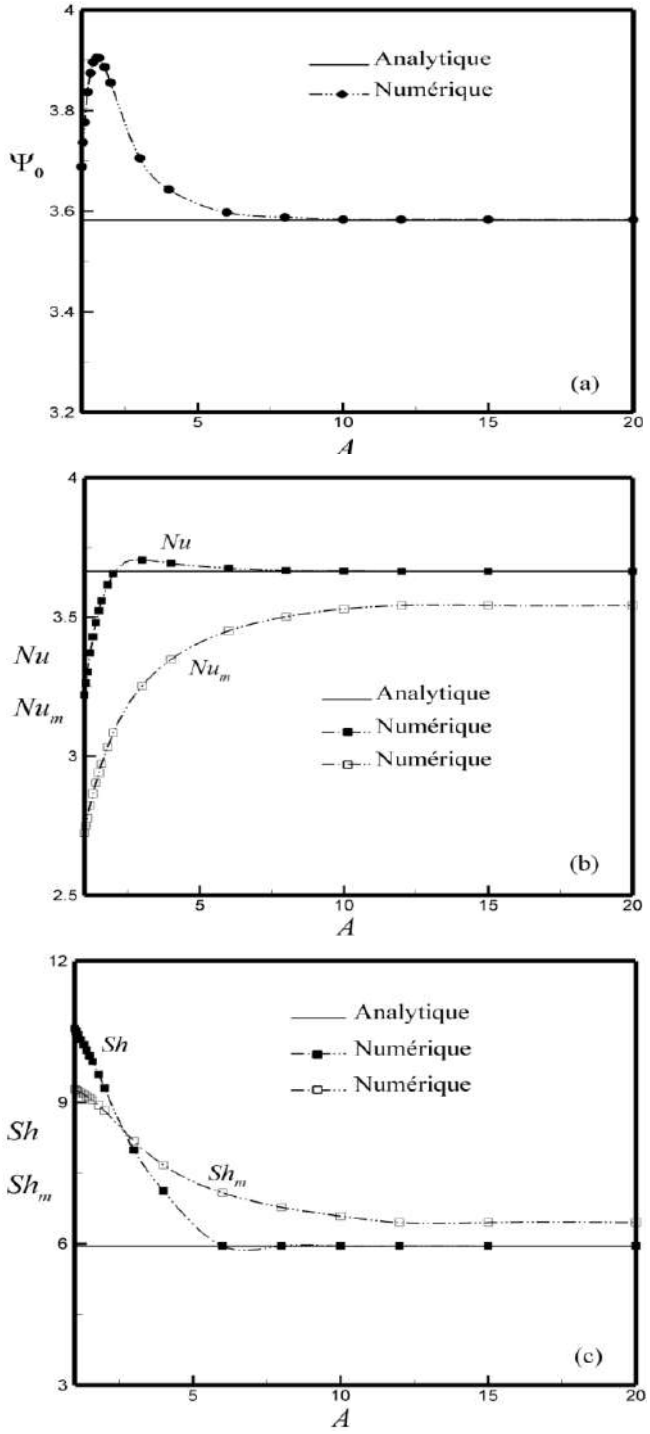


Figure (5.4) : L'influence du rapport de forme de la cavité sur (a) l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, (b) les transferts de chaleur, (Nu, Nu_m) et (c) les transferts de masse (Sh, Sh_m) pour$R_T = 200$, $Ha = 1$, $Le = 10$,$N = -0.5$ et ε=1.

D'autres comparaisons entre la solution analytique et numérique sont présentées dans les figures (5.5.a)-.(5.5.d). Les figures montrent l'effet du paramètre de flux magnétique, Ha, sur les profils de la fonction de courant, Ψ, de température, T, de concentration, S, et de vitesse, u, à la mi-hauteur de la couche poreuse $(x = 0)$, pour $R_T = 200$, $Le = 10$, $N = 0.5$

etdifférentes valeurs de Ha. Un excellent accord est observé entre la solution parallèle, représentée par des traits pleins, et les résultats numériques représentés par des cercles pleins. Les profils de température, de concentration et de vitesse sont symétriques par rapport à x. Puisque le milieu poreux est modélisé selon la loi de Darcy, il est observé à partir de figure (5.5.b) que la vitesse est maximale sur les parois où le cisaillement est annulé. Du plus, ceci résulte du fait que, selon ce modèle le fluide est autorisé à glisser sur les frontières de la cavité. Les profils de la fonction de courant, de vitesse, de température et de concentration obtenus pour $Ha = 0$ sont ceux qui correspondent à un milieu poreux modélisé selon la loi de Darcy. Lors de l'augmentation de la valeur du paramètre de flux magnétique, Ha, on voit que la vitesse au voisinage des parois est considérablement réduit. L'effet de, Ha, sur le profile de température est illustré sur la figure(5.5.c). Une augmentation de, Ha, réduit l'intensité de la convection résultante et causse une augmentation de la température sur les parois de telle sorte que le même flux de chaleur peut être maintenu dans le système . Concernant le profile de concentration, on peut voir dans la figure(5.5.c) que, dans le cas de convection induite par double diffusion, similaire au profile de température, la concentration prés des parois solides est promue avec une augmentation du paramètre de flux magnétique.

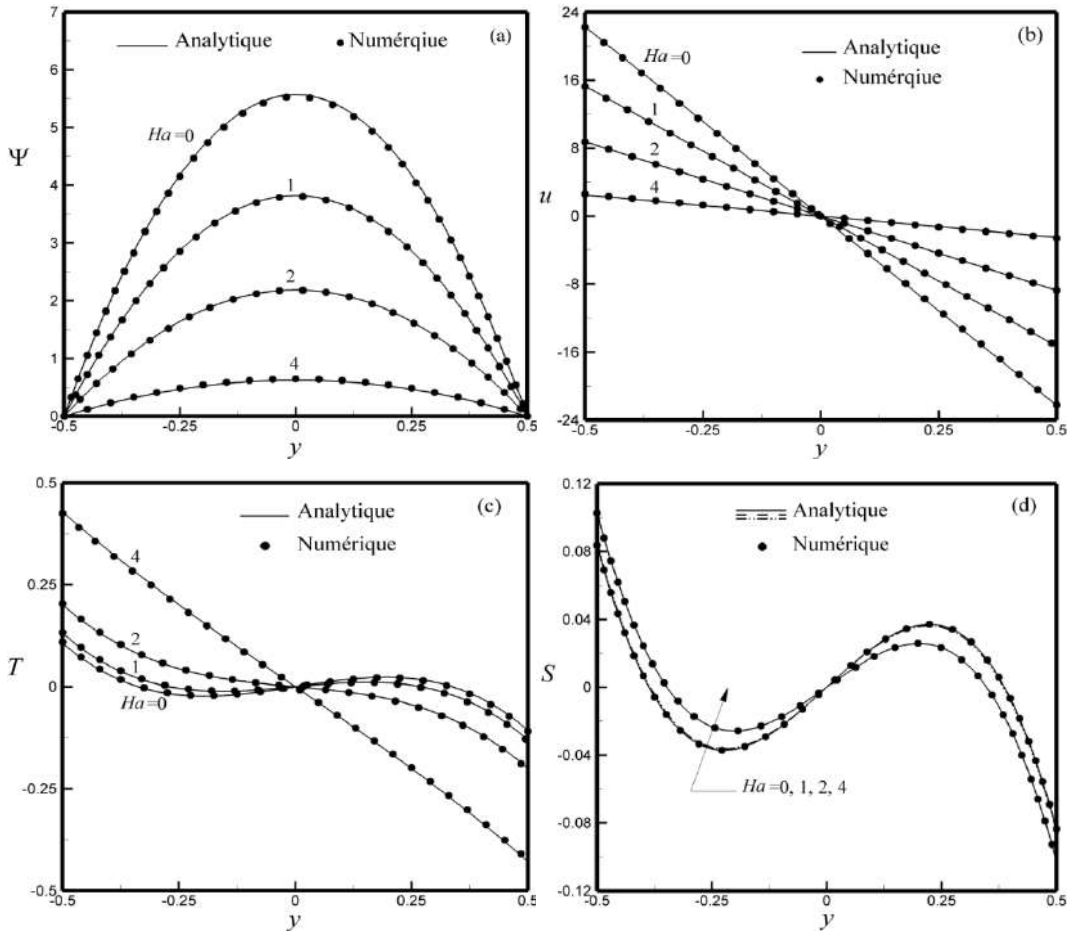
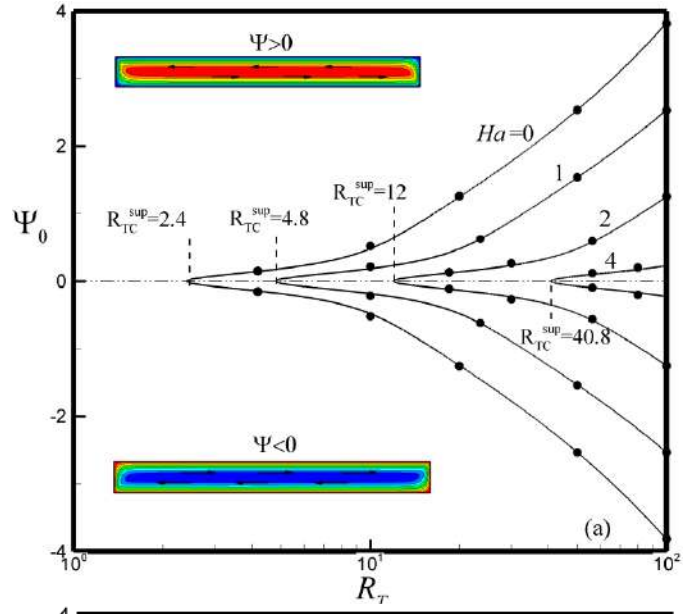
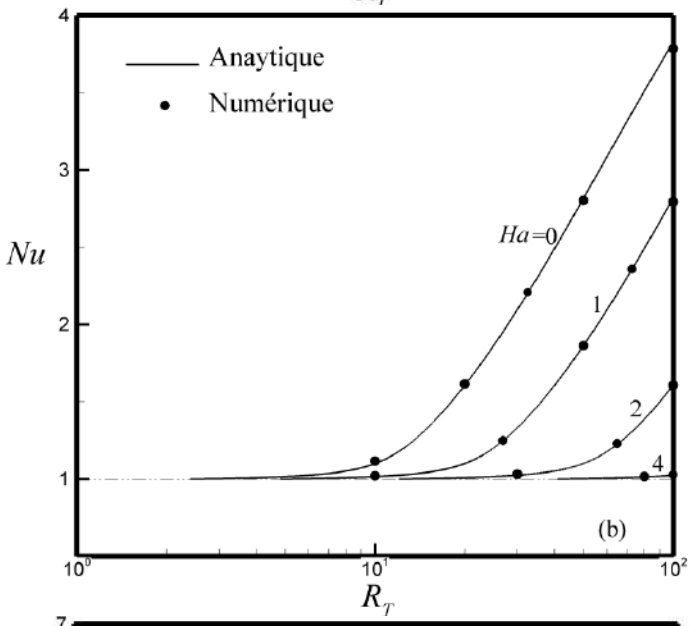


Figure (5.5) : Profils de fonction de courant, Ψ_0, de la vitesse, u, de la température, T, et de la concentration, S, dans le plan médiane horizontal pour $R_T = 200$, $Le = 10$ et $N = 0.5$.

Une vue plus complète de l'effet du nombre de Hartmann, Ha, et du nombre de Rayleigh, R_T, sur l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, et les taux de transfert de chaleur, Nu et de masse, Sh, sont présentés dans la figure (5.6.a)-(5.6.c) pour $N = -0.5$, $Le = 10$ et $\varepsilon = 1$. Les résultats sont obtenus pour des valeurs du nombre de Hartmann, Ha, variant entre $Ha = 0$ (Darcy) et $Ha = 4$. En général, la figure (5.6.a) illustre clairement le fait que l'augmentation du nombre de Hartmann, Ha, pour un nombre de Rayleigh donné, permet de réduire considérablement la force de mouvement de convection dans la couche. Par conséquent, comme on peut l'observer à partir des figures (5.6.b) et (5.6.c), les transferts de chaleur et de masse sont à la fois considérablement inhibés avec une augmentation du nombre de Hartmann. Les digrammes montrent aussi clairement l'effet de, Ha, sur l'existence de bifurcation supercritique. La courbe de bifurcation résultante pour $Ha = 0$est compatible avec les comportements rapportés dans le passé par Mamou et Vasseur **[42]** et Bahloul et al. **[43],** tout en considérant la convection induite par double diffusion et l'effet de Soret dans une couche poreuse modélisée selon la loi de Darcy. Le début du mouvement est caractérisé par une transition du l'état de repos ($\Psi_0 = 0$) vers la convection d'amplitude finie, $\Psi_0 \neq 0$, c'est-à-dire instabilité non linéaires. Cette transition se produit à un nombre de Rayleigh supercritique, $R_{TC}^{sup} = 2.4$, Eq. (3.20). Ce type de seuil, appelé bifurcation supercritique, ne se produit que lorsque les forces de volume thermique et solutalecoopèrent$N > 0$. Dans le graphique, la solution analytique représentée par une ligne solide, elle est confirmée par les résultats numériques représentés par des cercles pleins. En général, les résultats numériques présentés dans les figures(5.6.a)-(5.6.c) indiquent que, en dessous du nombre de Rayleigh supercritique $R_T < R_{TC}^{sup}$, l'état de repos prévaut ($\Psi_0 = 0, Nu = Sh = 1$). Il est bien connu que la circulation de l'écoulement dans la couche peut être indifféremment dans le sens horaire ou antihoraire. Comme les résultats sont symétriques les solutions antihoraire ($\Psi_0 > 0$) et horaire ($\Psi_0 < 0$) sont présentées dans les courbes de bifurcation présentées dans ce cas. Dans le graphique, lignes pleines positives, l'écoulement résultant circule dans le sens antihoraire. D'autre part, dans le cas les lignes pleines négatives, l'écoulement circule dans le sens horaire.


Ψ>0
Ha=0
1
2
4
R_{TC}^{sup}=12
R_{TC}^{sup}=2.4
R_{TC}^{sup}=4.8
R_{TC}^{sup}=40.8
Ψ<0
(a)
Ψ_0
R_T


Anaytique
Numérique
Ha=0
1
2
4
(b)
Nu
R_T

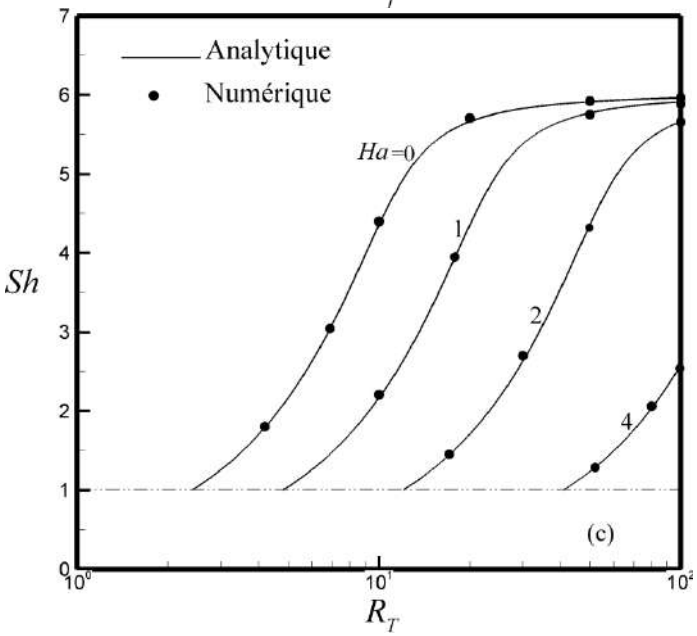
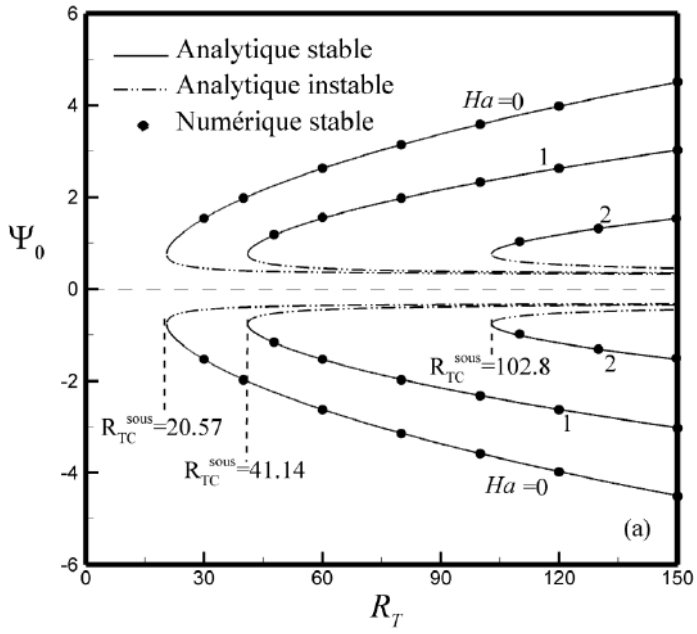
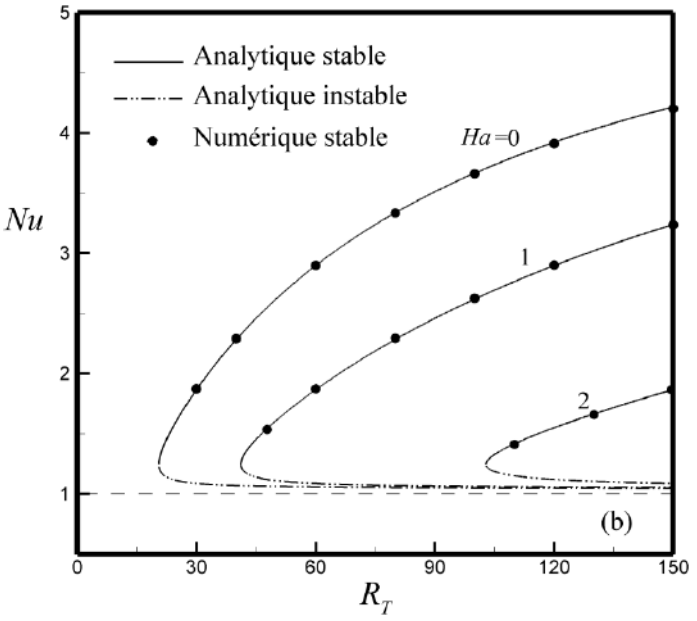

Analytique
Numérique
Ha=0
1
2
4
(c)
Sh
R_T

Figure (5.6): Diagramme de bifurcation en fonction de R_T et Ha sur : (a) l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, (b) taux de transfert de chaleur, Nu et (c) taux de transfert de masse, Sh pour, $Le = 10$, $N = 0.5$ et $\varepsilon = 1$.

Les résultats présentés dans les figures(5.7.a)-(5.7.c)sont obtenus pour une valeur du rapport de la flottabilité négative, à savoir$N = -0.5$.Les diagrammes des bifurcations résultants sont présentés en termes de l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, et les taux de transfert de chaleur, Nu, et de masse, Sh, en fonction du nombre de Rayleigh, R_T, pour $Le = 10$ et $\varepsilon = 1$. Les courbes représentées sur ces graphiques sont les prédictions de la présente théorie (écoulement parallèle), les lignes pleines correspondant aux branches stables et les lignes en pointillées sont les branches instables. Les solutions numériques des équations gouvernantes complètes, sont obtenues pour $A = 10$ et sont représentées par des symboles pleins. Le comportement prédit par ce modèle analytique est qualitativement en accord avec les résultats numériques. Dans les Figures(5.7.a), nous constatons qu'à partir de convection souscritique,R_{TC}^{sous} ,l'intensité de l'écoulement augmente d'une façon monotone avec le nombre de Rayleigh. Dans le cas de convection souscritique, le seuil de bifurcation est donné par la relation (3.20). Avant ce seuil, le transfert de chaleur et de masse se fait par la conduction pure ($\Psi_0, Nu = Sh = 1$). Au de là de ce seuil $R_T \geq R_{TC}^{sous}$, deux solutions convectives à amplitudes finies bifurquent de l'état de repos. Notons que pour la solution instable, représentée en pointillés de cet écoulement, qui est maximale au point de bifurcation $R_T = R_{TC}^{sous}$, diminue avec l'augmentation de R_T. L'amplitude de la solution stable, Ψ_0, quant à elle, augmente continuellement avec R_T. D'autre part Nu et Sh augmentent considérablement au début et convergent par la suite vers une valeur constante comme illustré dans les résultats (voir Figures (5.8)). Notons que d'après la relation (2.13) le nombre de Rayleigh supercritique devient infinie.D'autre part, l'effet du nombre de Hartmann sur l'intensité de l'écoulement et les taux de transfert de chaleuret de masseest qualitativement similaire à ceux obtenus dans la Fig(5.6).


Analytique stable
Analytique instable
Numérique stable
Ha =0
1
2
Ψ_0
R_{TC}^{sous}=102.8
R_{TC}^{sous}=20.57
R_{TC}^{sous}=41.14
(a)
R_T


Analytique stable
Analytique instable
Numérique stable
Ha =0
1
2
Nu
(b)
R_T

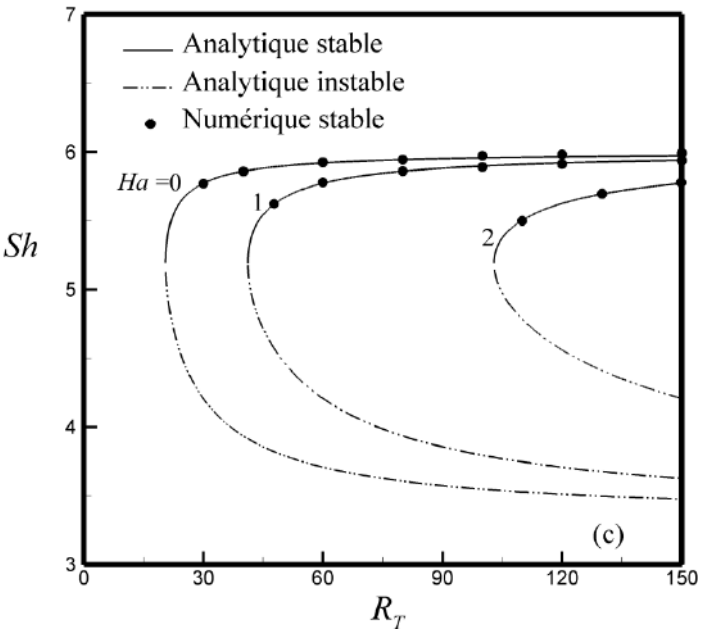
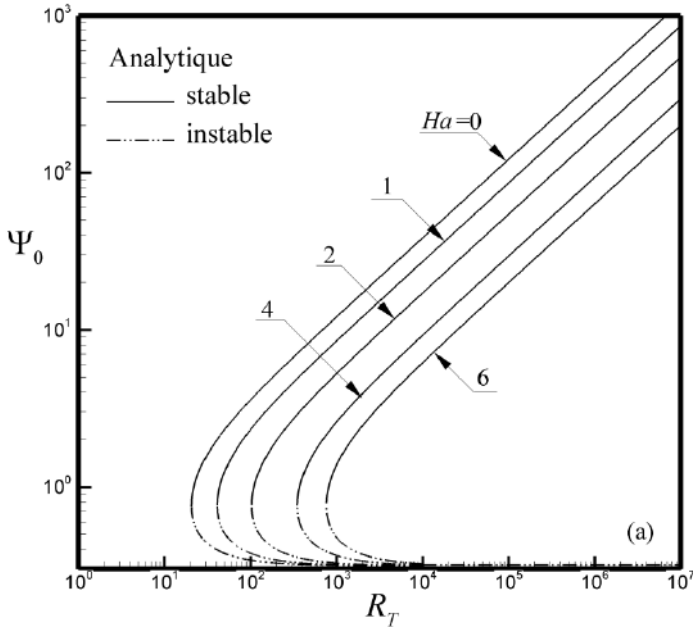
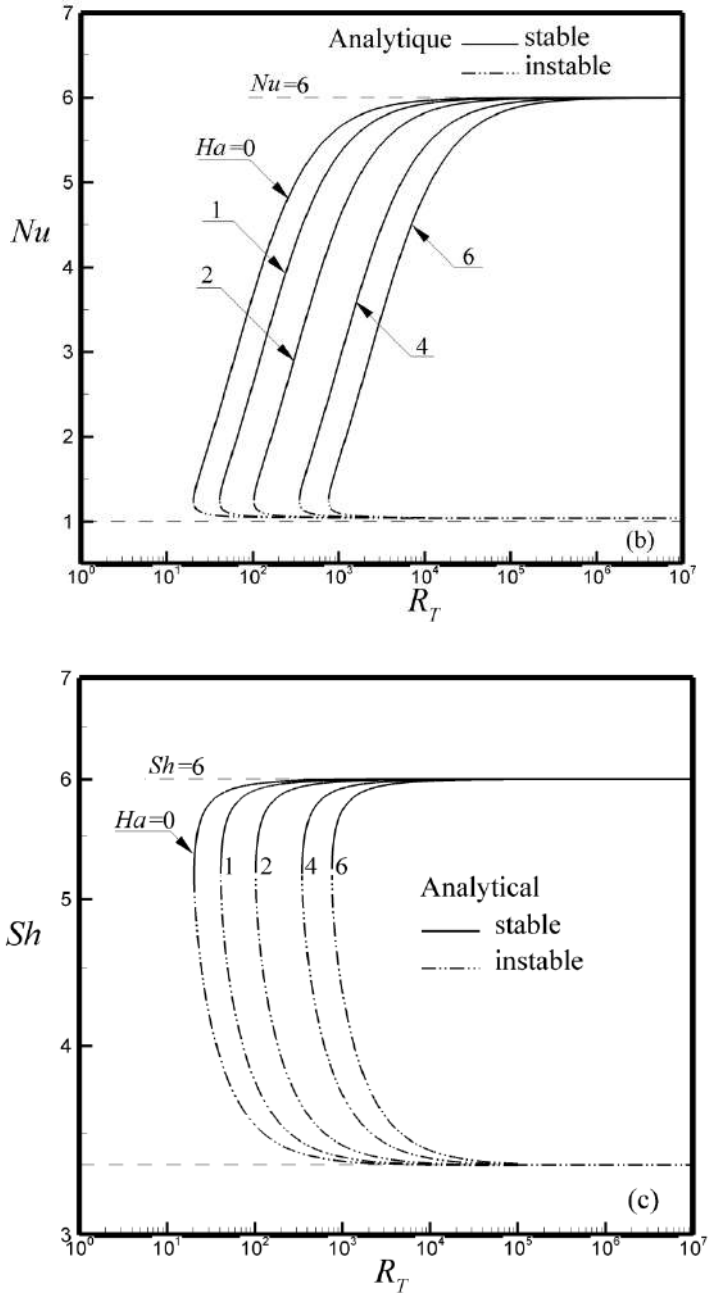

Analytique stable
Analytique instable
Numérique stable
Ha =0
1
2
Sh
(c)
R_T

Figure (5.7) : Diagramme de bifurcation en fonction de R_T et Ha sur : (a) l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, (b) taux de transfert de chaleur, Nu et (c) taux de transfert de masse, Sh pour, $Le = 10$, $N = -0.5$ et ε = 1.

Pour une couche poreuse de rapport d'aspect infini $A \to \infty$, un examen rapide de l'écoulement convectif et du comportement de transfert de chaleur et de masse sur une large gamme du nombre de Rayleigh à partir de régime de Darcy ($Ha = 0$) à $Ha = 6$ est effectué, en utilisant la solution analytique. Les figures (5.8.a)-(5.8.c) montrent la dépendance de la fonction de courant, Ψ_0, Nusselt, Nu, et Sherwood, Sh, sur R_T et Ha pour $Le = 10$ et $N = -0.5$. Les lignes solides affichées dans les graphes correspondent à la prédiction de la présente solution analytique. Les résultats indiquent clairement que, pour une valeur donnée du paramètre de flux magnétique, Ha, il existe un nombre de Rayleigh souscritique, R_{TC}^{sous}, caractérisant le début de la convection d'amplitude finie unicellulaire (comme on a déjà discuté dans laFig (5.7)). Les courbes représentées pour $Ha = 0$correspondent au régime de Darcy pur. Pour cette situation, le nombre de Rayleigh souscritique est donné par $R_{TC}^{sous} = 20.57$ où : $\Psi_0 = 0.747$,$Nu = 1.236$ et $Sh = 5.161$. La figure (5.8.a) montre que, comme prévu, la force du mouvement de convection, Ψ_0, augmente de façon monotone avec R_T et Ha. Cependant, d'après les figures(5.8.b) et (5.8.c), il est claire que pour les grandes valeurs de, R_T, le nombre de Nusselt, Nu, et de Sherwood, Sh, tendent asymptotiquement vers une valeur constante ($Nu = Sh = 6.0$), comme déjà prédit par Mamou et al. **[44]** et ce indépendamment de la valeur du paramètre de flux magnétique.

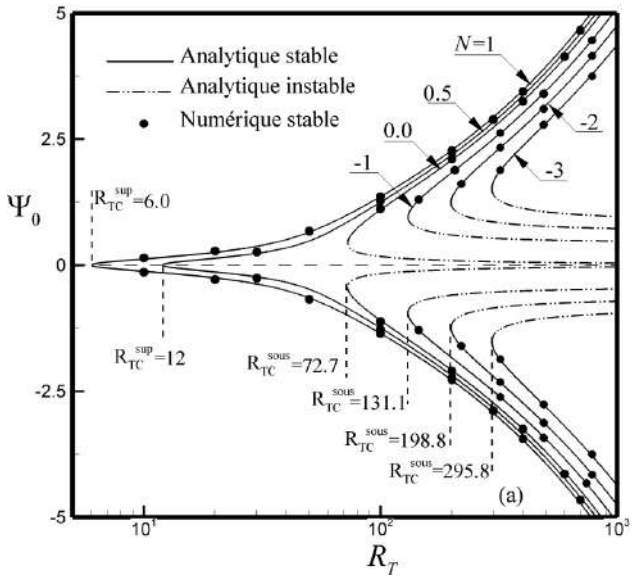


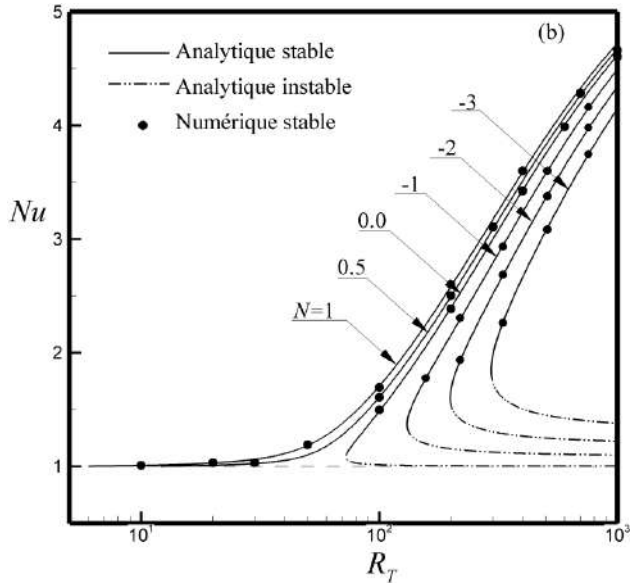


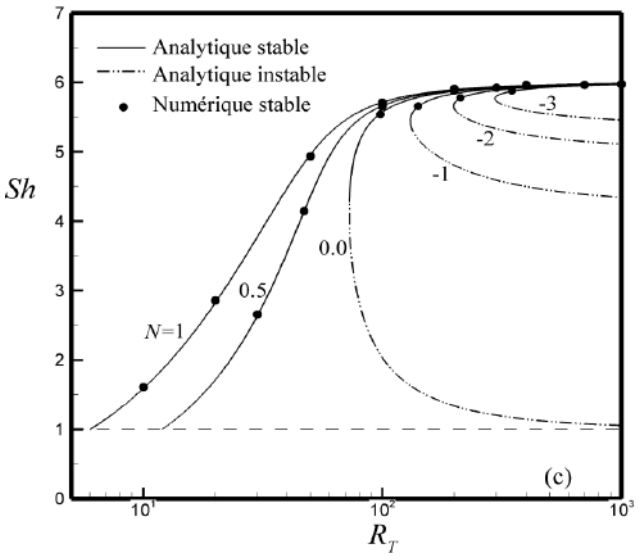
Figure(5.8) : Effets du nombre de Rayleigh, R_T, et nombre de Hartmann, Ha, sur : a) l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, b) le nombre de Nusselt, Nu, et c) le nombre de Sherwood, Sh, pour $Le = 10$, $N = -0.5$ et différentes valeurs de Ha.

Les figures (5.9.a)-(5.9.c) montrent les variations de Ψ_0, Nu et Sh en fonction de R_T et N pour $Ha = 2$ et $Le = 10$. La courbe obtenue pour $N > 0$ (i.e, $N = 1$ et 0.5) correspond à la convection induite par les effets thermiques et solutales positive. Elle donne lieu à une bifurcation de type fourche se produisant à un nombre de Rayleigh supercritique $R_{TC}^{sup} = 6$ et 12, respectivement. La courbe de bifurcation supercritique et affectée suivant la diminution de la valeur du rapport de la flottabilité, N. En effet, l'évolution des courbes de bifurcation avec

le taux de flottabilité est tout à fait semblable à celle décrite dans les figures (5.6)et (5.7) sur l'effet du nombre de Hartmann, Ha.

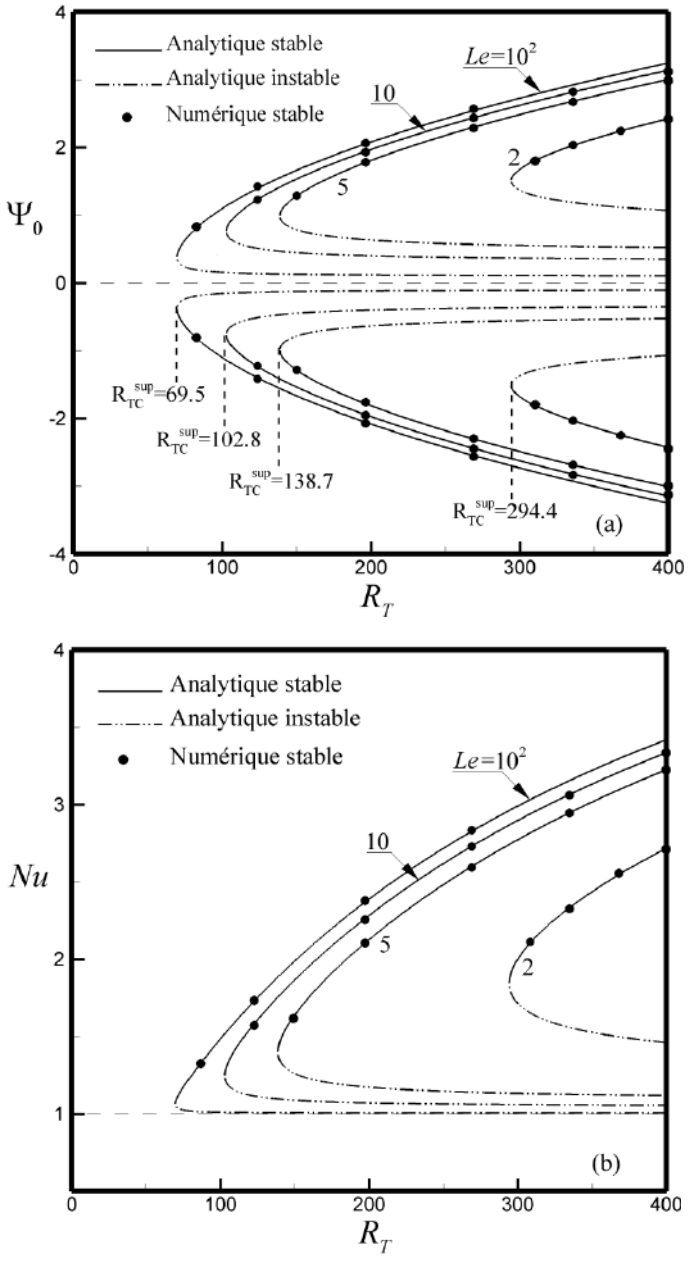


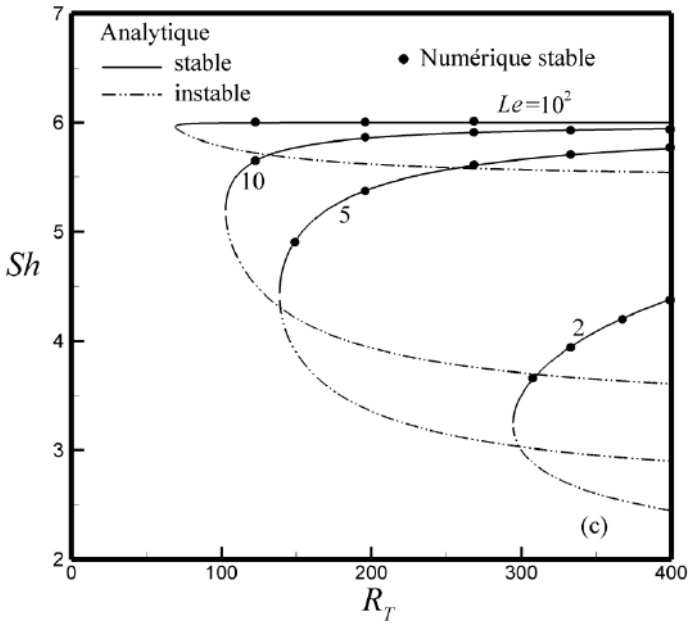




Figure(5.9) : L'effets du nombre de Rayleigh $R_T$et le rapport des forces de volume N sur : (a) l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, (b) le nombre de Nusselt, Nu, et (c) le nombre de Sherwood, Sh, pour $A = 10$, $Ha = 2$ et $Le = 10$.

L'influence des nombres de Rayleigh et de Lewis sur l'intensité de l'écoulement est illustrée sur la figure (5.10). Pour$N = -0.5$, la figure (5.10.a) montre la variation de Ψ_0 en fonction de R_T pour différentes valeur de Le. Le nombre de Rayleigh souscritique(en fonction de Net Le) est donné par la relation (3.20). Ainsi pour $Le = 10^2$, 10, 5 et 2 nous avons une bifurcation souscritique. Notons que, d'après la relation (3.20), le nombre de Rayleigh supercritique devient infinie ou négative.

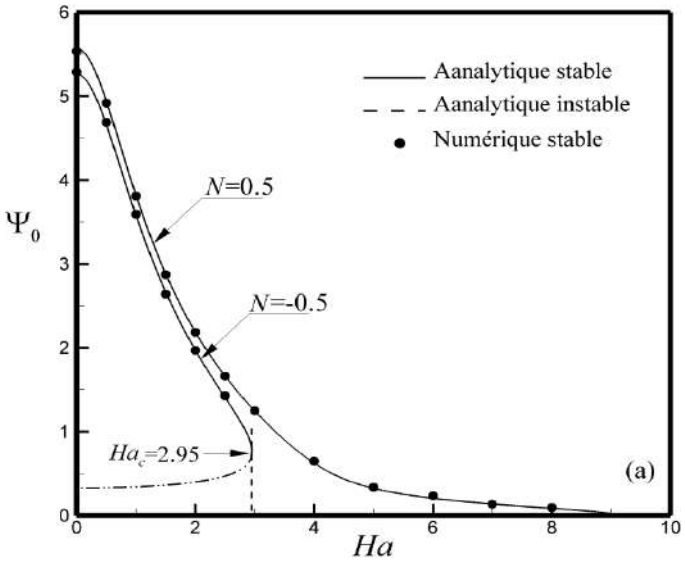


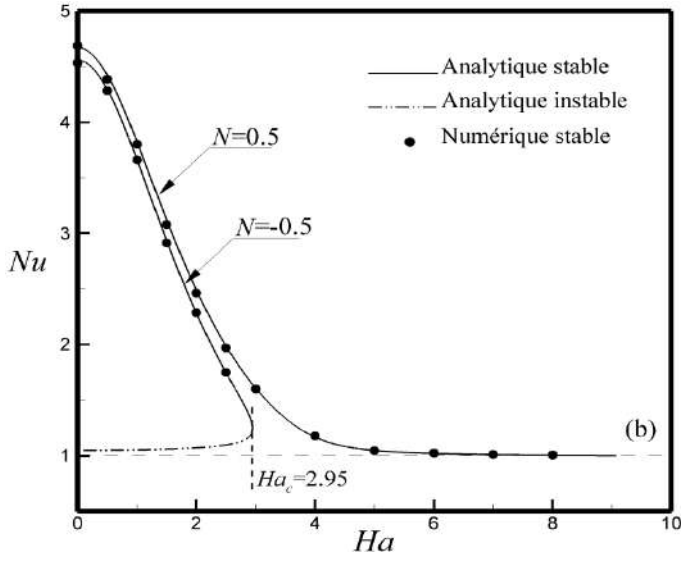


Figure(5.10) : L'effets du nombre de Rayleigh $R_T$et du nombre de Lewis Le sur : (a) l'intensité de l'écoulement, Ψ_0,(b) le nombre de Nusselt, Nu, et (c) le nombre de Sherwood, Sh, pour $A = 10$, $Ha = 2$ et $N = -0.5$.

Le nombre de Hartmann Haest une mesure de la force de poussée magnétique. Son effet sur les évolutions de l'intensité de l'écoulement, Ψ_0, du nombre de Nusselt, Nu, et dunombre de Sherwood,Sh, est montré sur la figure (5.11.a)-(5.11.c) pour$R_T = 200$, $Le = 10$etdifférentes valeurs de N.On pourra noter un effet considérable du champ magnétique sur les caractéristiques de l'écoulement et les transferts de chaleur et de masse. Pour $N = 0.5$ seule la branche stable (celle validée numériquement) existe. L'augmentation de Ha engendre une diminution continue de Ψ_0 vers un état de repos (i.e., $\Psi_0 = 0$) et une diminution similaire de Nu vers une valeur asymptotique ($Nu = 1$).Quant aux variations de Shavec Ha, elles sontcaractérisées par une augmentation vers une valeur asymptotique maximum ($Sh = 6.0$), suivie d'une diminution vers $Sh = 1$; valeur caractérisant le régime diffusif(non encore atteint sur la figure (5.11.c). Le comportement du rapport des forces de volume N est également illustré sur la figure(5.11.a)-(5.11.c) pour $N = -0.5$. Dans cette région la branche instableprédite par le modèle analytique il n'a pas été possible de confirmer numériquement (existent pour Ha variant dans la gamme $0 \leq Ha \leq Ha_c = 2.95$). Pour $\Psi_0$et Nu, les branches stables correspondant à $N = -0.5$ disparaissent avant l'atteinte du régime diffusif et présentent un comportement similaire à celui décrit pour $N = 0.5$ (diminution avec Ha).L'effet de Ha sur Ψ_0 et Nu reste limité dans le cas des branches instables. L'évolution de la branche stable de Shavec Ha dans la gamme$0 \leq Ha \leq Ha_c = 2.95$ est caractérisée par une augmentation similaire à celui obtenu par $N = 0.5$ et suivie d'une diminution avant sa

disparition.L'augmentation de Sh avec Ha est importante pour la branche instable dans sa gamme d'existence ($Ha \leq Ha_c = 2.95$).





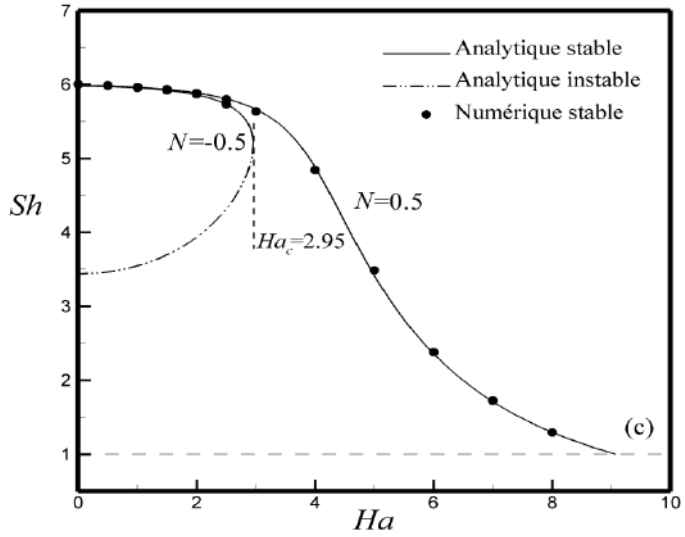
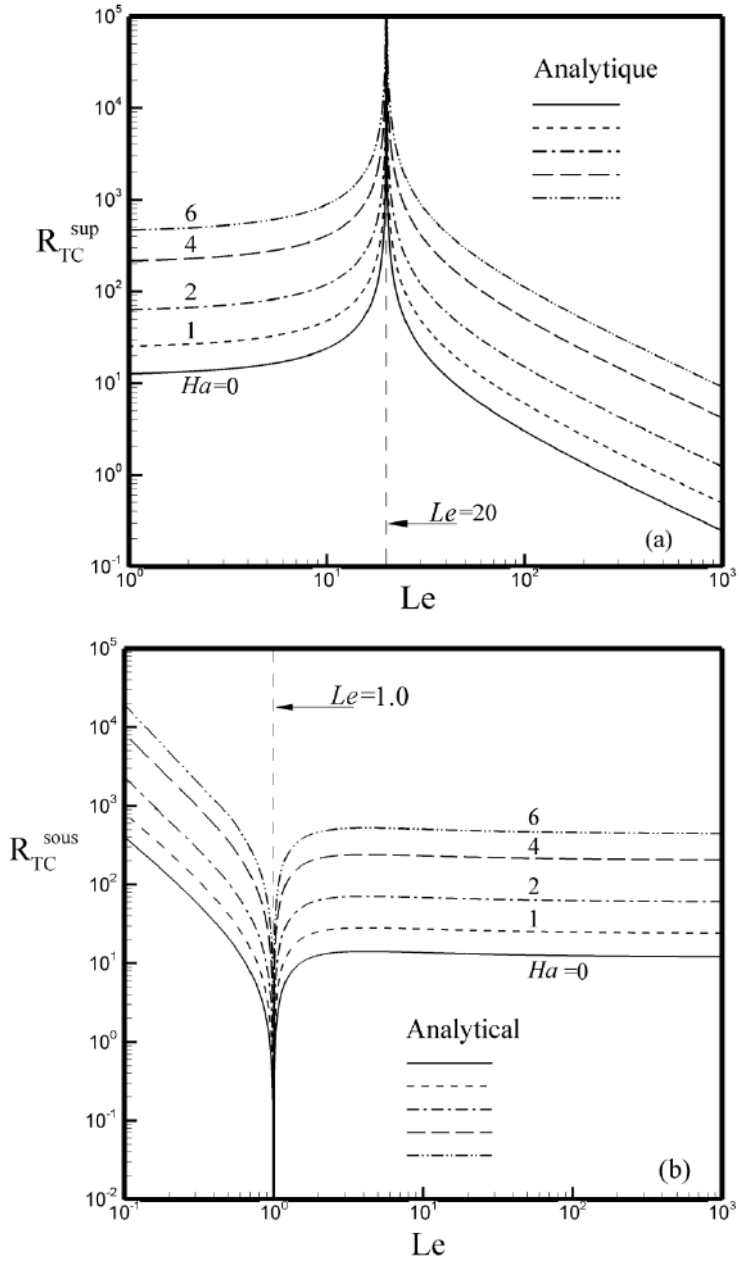


Figure (5.11) : Effet du nombre de Hartmann, Ha, sur (a) l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, Ψ_0, (b) le transfert de chaleur, Nu et (c) transfert de masse,Shpour$R_T = 200$, $Le = 10$et $N = \pm 0.5$.

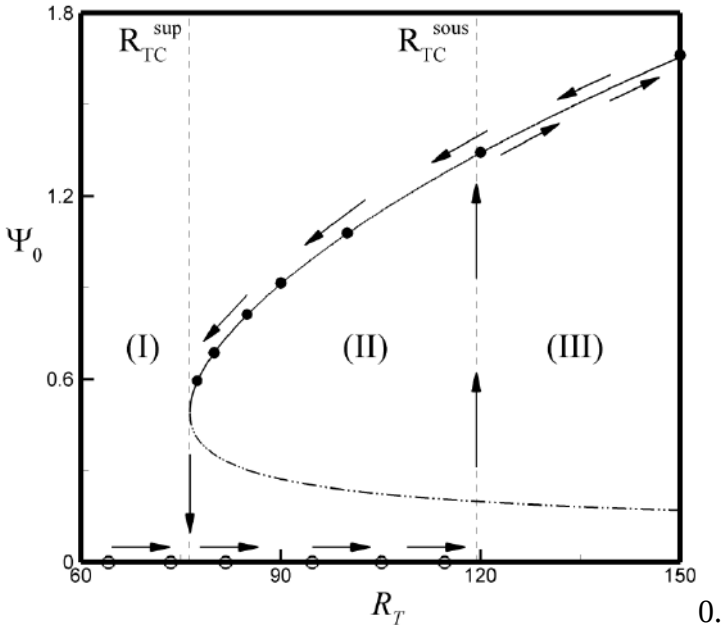
L'influence du nombre de Lewis, Le, sur les nombres de Rayleigh critiques (supercritique et souscritique) sont représentées sur Figures. (5.12.a) et (5.12.b) pour différentes valeurs du nombre de Hartmann, Haet $N = -0.05$. Le nombre de Rayleigh souscritique a été évalué à partir du modèle analytique en recherchant numériquement pour valeur de, R_T, l'inverse de la dérivée de, Ψ_0, par rapport à, R_T, est égale à zéro. Les résultats représentés dans la figure (5.12.a) correspondent à des seuils de souscritique de régime de convection d'amplitude finie unicellulaire. Les courbes obtenus pour $Ha = 0$ sont la prédiction de la solution analytique pour un milieu poreux de Darcy pur. En général, on observe que le système est stable, indépendamment de la valeur de,Ha, quand $Le = 1$ comme prédit par l'équation (3.20). Quand on augmente la valeur de Hartmann, Ha, il est claire que le seuil, R_{TC}^{sous}, augmente puisque l'effet de flux magnétique devient de plus en plus stabilisant. Pour une valeur donnée de, Ha, la Figure (5.12.a) indique que, pour la convection induite par double diffusion, R_{TC}^{sous}, augmente fortement vers une valeur constante quand le nombre de Lewis, Le, augmente au dessus de l'unité. D'autre part, lors de la diminution de la valeur du nombre de Lewis en dessous de l'unité, le nombre de Rayleigh souscritique augmente. Dans la Figure (5.12.b), pour un nombre de Lewis donné, le nombre de Rayleigh supercritique, R_{TC}^{sup}, correspond à la valeur critique du nombre de Rayleigh thermique au dessus duquel le régime diffusif devient purement instable. On constate aussi, quand on augmente la valeur de, Ha, le seuil de convection supercritique, R_{TC}^{sup}, augmente. Pour une valeur donnée de,Ha, la figure montre que, le nombre de Rayleigh supercritique, R_{TC}^{sup}, diminue fortement vers une valeur constante quand le nombre de Lewis, Le, diminue en dessous de l'unité. Par contre, lors de l'augmentation du nombre de Lewis au dessus de l'unité le seuil supercritique diminue de façon monotonevers $R_{TC}^{sup} \to 0$. En général, on observe que, lorsque le nombre de Lewis égale 20 le seuil de convection supercritique tend vers l'infinie.



Figure(5.12) : Effets du nombre de Lewis, Le, et du nombre de Hartmann, Ha, sur les nombres de Rayleigh critiques : a)R_{TC}^{sous} et a) R_{TC}^{sup} pour$N = -0.05$.

Le diagramme de bifurcation présenté sur la Figure (5.13) illustre la variation de l'intensité de l'écoulement en fonction de R_T pour $Le = 10$, $Ha = 2$ et $\varepsilon = 1$. Pour ces données, $R_{TC}^{sous} = 68.78$et $R_{TC}^{sup} = 120$, respectivement. Ces valeurs sont indiquées sur le graphique par des lignes verticales. La solution permanente (écoulement parallèle) est représentée en trait plein, et les résultats numériques représentés par des cercles. A partir de l'état de repos, $\Psi_0 = 0, Nu = Sh = 1$, comme condition initiales de la région (I), le système reste à l'état de repos jusqu'à $R_{TC} = R_{TC}^{sup}$, comme indiqué par les résultats numériques présentés dans le graphique par des cercles vides. Cependant, au fil du temps, la solution du

l'état de repos évolue vers la solution de convection d'amplitudefinie, $\Psi_0 \neq 0$. La boucle d'hystérésis est indiquée sur le graphe par des flèches. Ces derniers indiquent le comportement de la solution du problème quand augmente de zéro à 150 et diminue de 150 à zéro.

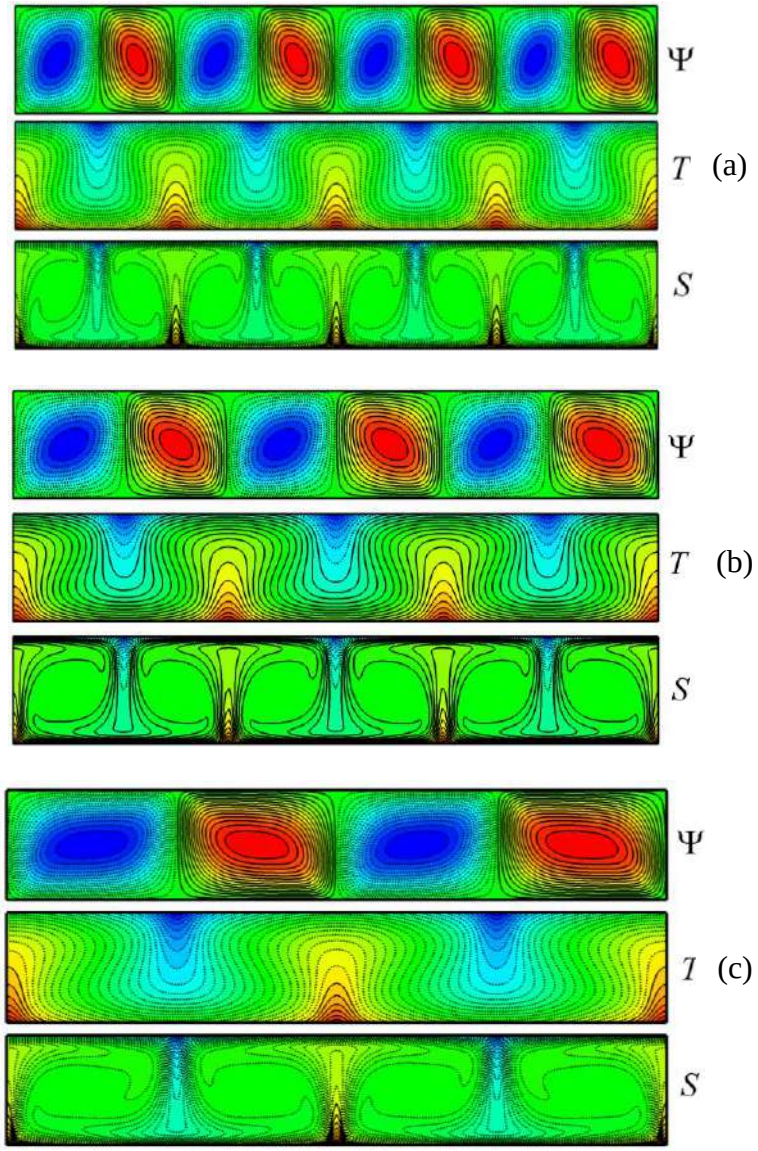


0.

Figure (5.13) : Diagramme de bifurcation en terme de, Ψ_0, en fonction de R_T pour $Ha = 2$, $Le = 10$ et ε=1.

En complément des résultats présents ci-dessus, au-dessous du seuil de bifurcation de Hopf, l'existence des solutions multiples est démontrée. Comme indiqué par Kimura et al**.[45]**, l'écoulement de convection unicellulaire est le mode préféré dans une couche poreuse de Darcy avec les parois horizontales chauffées par le bas par un flux de chaleur constant. Cela est vrai à proximité du début de la convection; toutefois, pour un grand nombre de Rayleigh, divers modes de convection à différents nombres de cellules de convection sont possibles, ce qui est indépendant du rapport d'aspect de l'enceinte. Dans la présente étude, pour la convection Darcy avec un flux magnétique imposé sur les parois horizontales, la multiplicité de solutions convectives est démontrée pour une couche poreuse ayant un rapport d'aspect de $A = 6$. Pour $R_T = 300$, $N = -0.5$,$Ha = 1$ et ε=1au moins quatre modes de convection stables sont constatés, comme indiqué dans la figure (5.15). Huit cellules, six cellules, quatre cellules et une cellule sont calculées en utilisant la même distribution du maillage 400×200. Quel que soit le rapport d'aspect de l'enceinte, comme démontré par Mamou **[46]**, lorsque le nombre de Rayleigh augment juste au-dessus du seuil de la convection supercritiqueR_{TC}^{sup}, le mode de convection monocellulaire reste dominant avec une augmentation du taux de croissance de la perturbation. Comme le

nombre de Rayleigh augmente encore, deux autres cellules, qutre cellules, etc...,de convection émergent et deviennent instables, mais avec différentes valeurs du taux de croissance. Ainsi, dans une enceinte confinée, comme illustré dans la figure(5.15) pour une grande valeur du nombre de Rayleigh, plusieurs modes convectifs avec le nombre de cellules différentes coexistent. Naturellement, pour obtenir les différentes solutions possibles, les simulations numériques sont effectuées en utilisant la convection monocellulaire, avec deux cellules, etc…, comme conditions initiales.



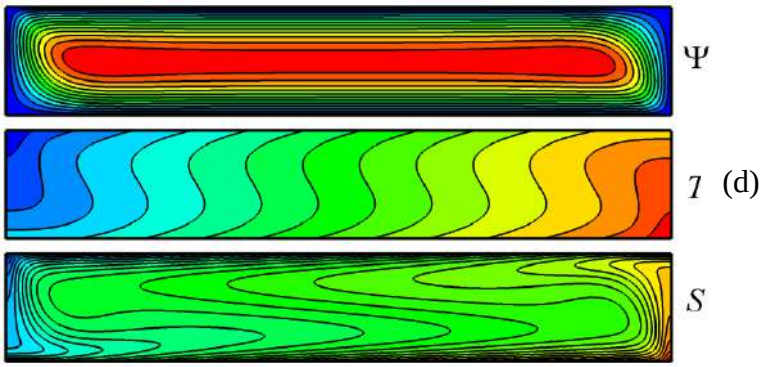


Figure (5.14): Solutions multiples stables pour$A = 6$. Pour $R_T = 300$, $N = -0.5$,$Ha = 1$ et ε=1 a) huit cellules, b) six cellules, c) quatre cellules et d) une cellule.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES

Dans le présente mémoire, on a étudié les transferts de chaleur et de masse par convection naturelle induite par double diffusion dans une couche poreuse rectangulaire horizontale saturée par un fluide binaire soumise à des conditions aux frontières thermiques de type Neumann (flux constants de chaleurs et de concentration) avec un champ magnétique uniforme est appliqué dans la direction *x*. La loi de Darcy a été utilisée pour établir les équations gouvernantes du système.

Grace à l'approximation de Boussinesq, nous avons développé un modèle mathématique décrivant l'écoulement convectif et les transferts de chaleur et de masse. Le problème a été abordé en utilisant deux approches différentes pour résoudre les équations résultantes dans leur intégrité. En premier lieu la méthode numérique basée sur un schéma aux différences finies a été utilisée. En second lieu, pour le cas des cavités élancées soumises à des flux constants de chaleur et de masse, des solutions analytiques basées sur l'approximation de l'écoulement parallèle, ont été dérivées. L'influence de chacun des paramètres du problème a été discutée dans cette mémoire. Ces paramètres sont le nombre de Rayleigh, R_T, le rapport de forme de la cavité, A, le rapport des forces de volume, N, la porosité normalisée, ε , le nombre de Hartmann, Ha, et le nombre de Lewis, Le. Les codes de calculs ont été validés en se basant sur les résultats disponibles dans la littérature.

Les principales conclusions tirées dans cette étude sont résumées ci-dessous :

Dans le cas d'une cavité élancée $A \gg 1$, une approximation d'écoulement parallèle a été supposée pour laquelle une solution analytique est possible. On observe que le mode de convection unicellulaire résultant est en excellent accord avec la solution numérique des équations gouvernantes. Pour $N > 0$, c'est-à-dire quand les forces de volume sont coopérants, le seuil de l'apparition de la convection se produit à un nombre de Rayleigh supercritique donné, R_{TC}^{sup}. Puisque les forces de volume agissent dans le même sens et qu'elles tendent toutes deux à déstabiliser le système, la convection est dite coopérante. Cependant, pour les forces de volume thermique et solutale opposées $N < 0$, la solution analytique prédit que le seuil de mouvement peut être souscritique R_{TC}^{sous}, c'est-à-dire, se produisant à une convection d'amplitude finie. On constate que, pour un ensemble donné de paramètres de contrôle R_T, Le, et N,

l'intensité de l'écoulement Ψ_0, le transfert de chaleur Nu et le transfert de masse Sh diminue quand Ha est plus grande. En fait, pour $Ha \to \infty$ l'état de repos est finalement atteint, pour lequel $\Psi_0 \to 0$ et $Nu = Sh \to 1$. Le modèle analytique montre qu'indépendamment des valeurs du nombre de Hartmann, $Nu = Sh \to 6$ quand le nombre de Rayleigh est suffisamment grand. Cependant, cette limite peut être seulement théorique, car une transition vers la convection oscillante peut se produire à un R_T très élevé. Pour les nombres de Rayleigh relativement élevés, des solutions convectives, stables, multiples et multicellulaires avec différents modes de convection ont été trouvées.

Comme observations finales, le régime d'écoulement de convection Darcy est caractérisé par l'existence d'un écoulement parallèle; l'augmentation du nombre de Hartmann affaiblit à la fois la convection et le taux de transfert de chaleur. L'effet de la trainée de forme n'a pas affecté le seuil du déclanchement de convection. En général, pour les écoulements convectifs unicellulaires ou multiples, les seuils des mouvements convectifs, supercritique et soucritique augmentent avec l'augmentation du nombre de Hartmann, Ha, qui joue le rôle d'un paramètre de stabilisation d'écoulement, ce qui provoque le retard de l'apparition de la convection souscritique et supercritique et la réduction substantielle du mouvement de convection.

Dans la présente étude, le modèle mathématique est basé sur de nombreuses hypothèses simplificatrices. En pratique, les milieux poreux ne sont pas isotropes et les fluides pas toujours Newtonien. Pour approfondir les connaissances dans ce domaine il serait intéressant de reprendre la même étude pour un milieu poreux non-Newtonien, anisotrope, en perméabilité, en conductivité thermique. Il sera aussi intéressant de considéré des configurations géométriques autres que celles étudiées dans ce mémoire. Il est recommandé de généraliser le modèle utilisé par une approche tridimensionnelle qui tient compte des géométries complexes et d'autres conditions aux limites. L'objectif important, sur lequel il conviendra sans doute de porter des efforts prioritaires, est la vérification des résultats obtenus par voie expérimentale.

REFERENCE

[1] DeGroot S.R., and Mazur P., (1969) Non équilibrium thermodynamics, Amsterdam, North Holland Pub.

[2] J.Bear, Y.Bachmat, introduction to Modeling of Transport Phenomena in Porous Media, Springer, p. 553,1990.

[3]https://www.google.dz/ convection+naturelle&oq=convection

[4] Du Xuan Wang and Jian Hua Dit, « Forced Convective Heat Transfer in Vertical Annulus Filled withe Porous Media », Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 36, N°l7, pp. 4207-4213, 1993.

[5] . https://www.energieplus-lesite.be/index

[6] K. Muralidhar, « A Review of Free, Forced and Mixed Convection forcé in Satured Porous Annulus », Sädhanã, Vol. 15, Part. I, pp. 1-41, June 1990.

[7] S.R. De Farias Neto, P. Le gentilhomme et J. Legrand, « Influence de la Diffusion Longitudinale sur le Transfert de la Matière Fluide- Paroi en Ecoulement Non-Etabli dans un Espace Annulaire », Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 40, N°16, pp. 3927-3935, 1997.

[8]http://www.isige.mines-paristech.fr/ .

[9] A.E.Scheidrggerthe.Physics of flow through porous media, 3rd .University of Toronto Press. 3ed edition 19745.

[10] http://www.cima.ualg.pt/piloto/

[11] Kozessy.Flow in porous media.S.B.Akad.Wiss.2a, 126.1927.

[12] http://petroleumandgasengineering.blogspot.com/

[13] Darcy H. P. C. Les fontaines publiques de la ville de Dijon (Victor Dalmont, Paris, 1856).

[14] Darcy-Dupuit J. E. J. Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans les canaux découverts et à travers les terrains perméables (Victor Datmont, Paris, 1863).

[15] Forchheimer P. Wasser bewe gung durch Boden. VDIZ. 45, 1782-1788, (1901).

[16] Brinkman H. C. A calculation for the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particules. Appl. Sci. Res., Vol A1, pp. 27-34, (1947).

[17] Boussinesq J. Théorie analytique de la chaleur. Gauthier-Villars, Paris, (1903).

[18] BEJAN, A. and POULIKAKOS, D. The non Darcy Regime for Vertical Boundary Layer Natural Convection in a Porous Medium. Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 27. No. 5. pp. 717-722. (1983).

[19] PRASAD, A and TUNTOMO, A. Inertia Effects on Natural Convection in a Vertical Porous Cavity. Numerical Heat Transfer .Vol. 11. pp. 295-320. (1987).

[20] LAURIAT, G and PRASAD, V. Non-Darcian Effects on Natural Convection in a Vertical Porous Enclosure. Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 32, No. 11, pp. 2135-2148. (1989).

[21] douglas et huiping . Natural Convection in a Verical Slot Filled with PorousMedium, Int. J. Heat. Fluid. Flow. vo1.3 1, pp. 97-99, 1990.

[22] SHENOY, A. V. Darcy-Forcheimer Natural Forced and Mixed Convection Heat Transfer in Non-Newtonian Power-Law Fluid-Saturated Porous Media. Transport in Porous Media. 7, 219-241. (1993).

[23] A. Bahloul, N. Boutana, P. Vasseur, Double-diffusive and Soret-induced convection in a shallow horizontal porous layer, J. Fluid Mech. 491 (2003) 325–352.

[24] Mohamed Bourich,et al, Mohammed Hasnaoui, Abdelkhalk Amahmid. E_et Soret sur la convection hydromagn_etique dans une couche poreuse horizontale. Jean-Jacques BEZIAN. JITH 2007, Aug 2007, Albi, France. ENSTIMAC, 5p. <hal-00156697>

[25] NAWAF H, S and POP I., Non Darcy Natural Convection in a Square Cavity Filled with a Porous Medium. Fluid Dynamics Research .36 (2005) .35–43. (2005).

[26] Hadim, H. Non Darcy Natural Convection of a Non-Newtonian Fluid in a Porous Cavity. International Communications in Heat and Mass Transfer 33 (2006) 1179–1189. (2006).

[27] krishna et al . Natural Convection in Enclosed Porous Media
with Rectangulaire Boundaries, J. Heat Transfer, vol. 92, pp. 2 1-27.2009

[28] D. S. Rakoto Ramambason and P. Vasseur, Montre´ al, Quebec .

[29] Bergeron, A., Henry, D., Benhadid, H.: Marangoni-Be´nard instability in microgravity conditions with Soret effect. Int. J. Heat Mass Transf. 37, 1545–1562 (1994).

[30] Garandet, J. P., Alboussiere, T., Moreau, R.: Buoyancy-driven convection in a rectangular

[31] D. E. Cormack, L. G. Leal, and J. H. Seinfeld, Natural Convection in a Shallow
Cavity with Differentially Heated end Walls. Part 2 : Numerical Solutions, J. Fluid
mech., Vol. 65, 1974, pp. 23 1-246.

[32] M. Sen, P. Vasseur et L. Robillard, Multiple Steady States for Unicellular Natural Convection in an Inclined Porous Layer, ht J. Heat Mass Transfer, vo1.30, pp. 2097-2113,1987.

[33] P. Vasseur , C. H. Wang et M. Sen, The Brinkman Mode1 for N a W Convection in a Shailow Porous Cavity with Uniform Heat Flw, Numerical. Heat Transfer, part A, vol 15, pp. 221-212, *1989.*

[34]Mohammed Hasnaoui, Mohamed Bourich, Abdelkhalk Amahmid. E_et Soret sur la convection hydromagn_etique dans une couche poreuse horizontale. Jean-Jacques BEZIAN. JITH 2007, Aug 2007, Albi, France. ENSTIMAC, 5p. <hal-00156697> .

[35] M. Mamou, P. Vasseur and E. Bilgen. Double-di fisive Convection Instability in an Vertical Porous Enclosure. J. Fluid Mech., 368,263-289.1993.

[36] F. Alavyoon, S. fimura, M. Vynnycky. "Unicellular Natural Circulation in a Shallow Horizontal Porous Layer Heated frorn Below by a Constant Flux " J. Fluid Mech. 294,23 1 (1993).

[37] M. Mamou, P. Vasseur, E. Bilgen and D. Gobin. Double-Diffisive Convection in an Inclined Slot Filled with Porous Medium. Eur. J. Mechanics, BFluids, 14, 629-652,1995.

[38] Frankel S. P. Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations. Math Tables and Other Aids to Computations, 4, 65-75, (1950).

[39] D. S. Rakoto Ramambason and P. Vasseur, Influence of a magnetic field on natural convection in a shallow porous enclosure saturated with a binary fluid, ActaMechanica 191 (2007) 21-35.

[40] Vasseur P., Satish M. G and Robillard L. Natural convection in a thin inclined porous layer exposed to a constant heat flux.In. J. Heat and Mass Transfer. 30 (3), 537-549, (1987).

[41] Mamou M. Convection naturelle dans une cavité incline à partition multiples. Thèse de Maitrise, École Polytechnique de Montrèal, Canada, (1993).

[42] Mamou M and Vasseur P. Thermosolutal Bifurcation Phenomena in a Porous Enclosure Subject to Vertical Temperature and Concentration Gradients. J. Fluid Mechanics, 395, 61-87, (1999).

[43] Bahloul A., et al and Robillard L. Convection of a binary fluid saturating a shallow porous cavity subjected to cross heat fluxes. J. Fluid Mech, 574, 317-342, (2007).

[44] Mamou, M.,et al Thermosolutal bifurcation phenomena in porous enclosures subject to vertical temperature and concentration gradients. J. Fluid Mech. 395, 61–87 (1999).

[45] S. kimura, M. Vynnycky. et F. Alavyoon, "Unicellular Natural Circulation in a Shallow Horizontal Porous Layer Heated frorn Below by a Constant Flux " J. Fluid Mech. 294,23 1 (1 995).

[46] Mamou, M., Vasseur, P.: Thermosolutal bifurcation phenomena in porous enclosures subject to vertical temperature and concentration gradients. J. Fluid Mech. 395, 61–87 (1999).