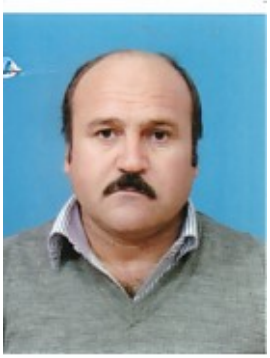
République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Yahia Fares de Médéa
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et d' informatique

Analyse fonctionnelle : Cours et exercices

Rédigé par :
Rafa Saïd



Destiné aux étudiants de M1 "Analyse Mathématique et Applications"

3 octobre 2022

TABLE DES MATIÈRES

1 Généralités et Rappels **5**
- 1.1 Ensembles convexes . . . 5
- 1.2 Espaces vectoriels normés . . . 6
- 1.3 Opérateurs linéaires continus . . . 11
- 1.4 Exercices . . . 22

2 Théorème de Hahn-Banach **34**
- 2.1 Introduction . . . 34
- 2.2 Théorème de Hahn-Banach forme analytique . . . 34
- 2.3 Théorème de Hahn-Banach forme géométrique . . . 43
  - 2.3.1 Séparation des ensembles convexes . . . 43
  - 2.3.2 Première forme géométrique du théorème de Hahn-Banach . . . 45
  - 2.3.3 Deuxième forme géométrique du théorème de Hahn-Banach . . . 48
- 2.4 Exercices . . . 49

3 Théorème de Baire, théorème de Banach-Steinhaus **57**
- 3.1 Théorème de Baire . . . 57
- 3.2 Théorème de Banach-Steinhaus . . . 59
- 3.3 Exercices . . . 62

4 Théorème de l'application ouverte, théorème du graphe fermé, dualité, supplémentaire topologique et relations d'orthogonalité **69**
- 4.1 Théorème de l'application ouverte . . . 69
- 4.2 Opérateur fermé et théorème du graphe fermé . . . 74
- 4.3 Dualité et supplémentaire topologique . . . 76
- 4.4 Opérateur inverse à droite . . . 79
- 4.5 Relations d'orthogonalité . . . 81
- 4.6 Exercices . . . 87

5 Topologie faible et topologie faible-$*$ **96**
- 5.1 Topologie faible . . . 96
  - 5.1.1 Définition et propriétés élémentaires de la topologie faible $\sigma(E, E')$ dans un espace de Banach . . . 98
  - 5.1.2 Topologie faible, ensembles convexes et opérateurs linéaires . . . 105
- 5.2 Topologie faible-$*$ $\sigma(E', E)$ . . . 108
- 5.3 Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki . . . 110
- 5.4 Espaces réflexifs . . . 112
- 5.5 Théorème de Kakutani . . . 114

5.6 Exercices 118
5.7 Exercices sur les espaces réflexifs 124

6 Espaces L^p et espaces de Hilbert : projection sur un convexe fermé non vide, théorème de Riesz, théorème de Stampacchia et de Lax-Milgram et bases hilbertiennes 129
6.1 Rappels sur des résultats d'intégration 129
6.2 Espaces L^p 130
6.2.1 Définitions et propriétés élémentaires 130
6.2.2 Réflexibilité et dualité des espaces $L^p(\Omega)$ 132
6.2.3 Séparabilité des espaces L^p 134
6.2.4 Résumé 136
6.3 Espaces de Hilbert : Définitions et propriétés 136
6.3.1 Système orthogonal et système orthonormal 141
6.4 Projection sur un convexe fermé 145
6.5 Théorème de : Riesz, Stampacchia, et lax-Milgram 149
6.5.1 Théorème de Stampacchia 149
6.5.2 Théorème de Lax-Milgram 152
6.6 Bases hilbertiennes 153
6.7 Exercices sur les espaces L^p 154
6.8 Exercices sur les espaces de Hilbert 160

7 Opérateurs compacts : alternative de Fredholm, spectre d'un opérateur compact et diagonalisation d'un opérateur compact auto-adjoint sur un espace de Hilbert 167
7.1 Définitions, propriétés élémentaires et adjoints 167
7.1.1 Convergence faible et les opérateurs compacts 175
7.1.2 Adjoint d'un opérateur dans les espaces de Hilbert 176
7.2 Alternative de Fredholm 182
7.3 Théorie spectrale d'un opérateur compact 186
7.4 Diagonalisation d'un opérateur compact auto-adjoint sur un espace de Hilbert 194
7.5 Exercices 197

Introduction

Ce polycopié s'agit d'un ensemble de cours d'analyse fonctionnelle qui ont été présentés ces dernières années aux étudiants de première année master 1 filière analyse mathématique et applications de la faculté des sciences de l'université de Médéa.

L'objectif de ce cours est de faire une transition entre les connaissances en topologie (enseigné en licence 2) qui est un des piliers dans la formation en analyse fonctionnelle, ainsi que la mesure et intégrations vus en licence 3.

Nous rappelons que le contenu de ce polycopié est exactement le même proposé dans l'offre de formation officiel applicable actuellement dans tous les départements de Mathématiques des Universités Algériennes.

Venons-en à une description plus précise de ce que l'on trouvera dans ce polycopié.
Ce polycopié débute par le premier chapitre qui rassemblent une bonne partie des résultats de base de Topologie tels que espaces métriques, espaces vectoriels normés et de Banach et les opérateurs linéaires bornés et non bornés sur ces espaces qu'évidemment les étudiants de Master 1 sont supposés connaître et qu'ils peuvent être amenés à utiliser dans différentes de ce cours.

Dans le deuxième chapitre, on se tourne vers le théorème de Hahn-Banach forme analytique et ses conséquences et la première et deuxième forme géométrique de ce théorème.

Quant au troisième chapitre, il est consacré aux théorèmes de Baire et Banach Steinhaus qui sont des grands outils pour faire des démonstrations des divers théorèmes de l'analyse fonctionnelle.

Le quatrième chapitre est consacré aux théorème de l'application ouverte et théorème du graphe fermé.

Le chapitre cinq de ce polycopié traite une porte très importante dans le domaine de l'analyse et dans la recherche scientifique, il s'agit de la topologie faible et la topologie faible-$*$ sur les espace de Banach et de Hilbert, où on va citer plusieurs théorèmes importants comme le théorème de Banach-Aloaglu-Bourbaki et de Kakutani et applications aux espaces fonctionnels.

Le sixième chapitre comprend les espaces L^p et de Hilbert : Projection sur un convexe fermé non vide, théorème de Riesz, théorème d'Ascoli, théorème de Stampachia et de Lax-Milgram.
Le dernier chapitre comprend un concept très important aussi dans le domaine de l'analyse, il s'agit des opérateurs compacts : alternative de Fredholm, spectre d'un opérateur compact, diagonalisation d'un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert.

A la fin de chaque chapitre, nous avons présenté une série d'exercices divers et riches afin d'obtenir une meilleure compréhension du cours, dont une partie de ces exercices ont été abordés dans les séances de travaux dirigés.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS ET RAPPELS

1.1 Ensembles convexes

Définition 1.1.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et C un sous-ensemble de E.
1) Soient $x, y \in E$. On appelle segment de E d'extrémités x et y l'ensemble

$$[x, y] = \{xt + (1-t)y,\ 0 \leq t \leq 1\}.$$

2) On dit que C est convexe si pour tout $x, y \in C$ le segment $[x, y]$ de E est contenu dans C. Autrement dit

$$\Big(C \text{ est convexe }\Big) \Leftrightarrow \Big(\forall t \in [0,1], \forall x, y \in C : tx + (1-t)y \in C\Big).$$

Exemple 1.1.

1. *Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors $\forall a \in E : a + F$ est un sous-ensemble convexe de E.*
2. *Les sous-ensembles convexes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*
3. *L'intersection d'un nombre quelconque d'ensembles convexes est un ensemble convexe.*
4. *Toute somme de parties convexes de E est un convexe de E.*
5. *Le cône positif de $\mathbb{R}^n$ est convexe et, plus généralement, un ensemble défini par un système d'inéquations toutes dans le même sens est un convexe.*

Définition 1.2.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

1. L'application f est dite convexe sur E si pour deux éléments quelconques $x, y \in E$ et pour tout $t \in [0,1]$ on a :

$$f\Big((1-t)x + ty\Big) \leq (1-t)f(x) + tf(y). \tag{1.1}$$

2. L'application f est dite concave sur E si pour deux éléments quelconques $x, y \in E$ et pour tout $t \in [0,1]$ on a :

$$f\Big((1-t)x + ty\Big) \geq (1-t)f(x) + tf(y). \tag{1.2}$$

3. Si l'inégalité (1.1) est stricte, on dit alors que f est strictement convexe.
4. Si l'inégalité (1.2) est stricte, on dit alors que f est strictement concave.

Remarque 1.1.

f est convexe sur $E \Longleftrightarrow -f$ est concave sur E.

Exemple 1.2.

1. *Les fonctions f, g telles que $f(x) =\mid x \mid$ et $g(x) = x^2$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.*
2. *Les fonctions affines sont à la fois convexes et concaves sur $\mathbb{R}$.*

1.2 Espaces vectoriels normés

Les espaces vectoriels normés sont extrêmement utilisés dans de nombreuses branches des mathématiques. Nous étudions dans ce chapitre leurs propriétés élémentaires.

Nous montrons d'abord que sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes son équivalentes. Nous étudions aussi les applications linéaires continues entre ces espaces vectoriels et nous définirons une norme sur ces espaces. En particulier nous introduisons l'importante notion de dual d'un espace vectoriel normé.

Toute application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie dans un espace vectoriel normé est continue. Il n'en est plus de même lorsque l'espace sur lequel l'application est définie n'est pas de dimension finie, et l'existence même de formes linéaires continues n'est pas évidente.

Le théorème de Hahn-Banach que l'on verra dans le deuxième chapitre de ce polycopié qui permet d'affirmer cette existence sera établi.

Définition 1.3.

Une norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est une application

$$\begin{aligned} \|.\| :\ & E \to \mathbb{K}^+ \\ & x \longmapsto \|x\|, \end{aligned}$$

possédant les propriétés suivantes :
1) $\forall x \in E : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| =\mid \lambda \mid \ \|x\|$.
3)$\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Inégalité triangulaire).
L'espace E muni de la norme $\|.\|$ est dit espace normé ou espace vectoriel normé (ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé si on veut préciser le corps $\mathbb{K}$).
On note souvent un tel espace $(E, \|.\|)$.

Remarque 1.2.

Remarquons que dans le cas $\mathbb{R}^n$, la propriété 3) revient à dire que la longueur d'un côté du triangle est toujours inférieure à la somme des deux autres côtés.
Il en découle que la longueur d'un côté dans un triangle est supérieure à la différence des deux autres côtés.
En termes de normes, cette inégalité s'écrit

$$\|x-y\| \geq \Big|\|x\| - \|y\|\Big|.$$

Remarque 1.3.

L'espace métrique est une généralisation de l'espace normé.

Exemple 1.3.

1. *La valeur absolue $|\ .\ |$ est une norme sur $\mathbb{R}$.*
   - Le module $|\ .\ |$ est une norme sur $\mathbb{C}$.
2. *Sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, on peut définir les trois normes suivantes :*
   $\forall x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\ x_i\ |, \|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |\ x_i\ |^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |\ x_i\ |\ .$$

   Pour la norme $\|.\|_p$, si $p = 2$ on reconnait la norme euclidienne sur $\mathbb{K}^n$.
3. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace normée et F un sous-espace vectoriel de E. la restriction de la norme $\|.\|$ sur F est une norme appelée norme induite.*
4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K un compact, $K \subset\subset \Omega$.*
   Si $f \in C(\Omega) = \{$les fonctions continues sur $\Omega\}$, P_K définie par :

$$P_K(f) = \sup_{x\in K} |f(x)|$$

   n'est pas une norme car le premier sens de la première propriété de la norme n'est pas satisfait.
5. *Soit $x = (x_1, ...x_n) \in \mathbb{K}^n$, pour $p \geq 1, x \mapsto \|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$ est une norme tel que $\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$.*
6. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. On a :*
   $\|f\|_p = \Big(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx\Big)^{\frac{1}{p}}$ si $1 \leq p < \infty, \|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} ess|f(x)|$ sont des normes.
7. *Soit l'espace des suites complexes $p-$ sommables*

$$l^p(\mathbb{C}) = \{x = (x_n), x_n \in \mathbb{C}; \sum_{n\geq 1} |x_n|^p < \infty\}, 1 \leq p < \infty.$$

Alors pour $x \in l^p(\mathbb{C})$,

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{n\geq 1} |x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

est une norme.
Si,

$$x \in l^\infty(\mathbb{C}) = \{x = (x_n), x_n \in \mathbb{C}; (x_n) \textit{ est bornée}\},$$

alors,

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \{|x_n|\},$$

est une norme.

Théorème 1.1

Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration.
(Voir [5] page 133). □

Définition 1.4.

Si $(E, \| \ . \ \|)$ est un espace vectoriel normé, on appelle :

1. La boule fermée de centre x_0 et de rayon r, l'ensemble

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in E : \|x - x_0\| \leq r\}.$$

2. La boule ouverte de centre x_0 et de rayon r, l'ensemble

$$B(x_0, r) = \{x \in E : \|x - x_0\| < r\}.$$

3. La sphère de centre x_0 et de rayon r, l'ensemble

$$S(x_0, r) = \{x \in E : \|x - x_0\| = r\}$$

Remarque 1.4.

Il est évident que :

$$\overline{B}(x_0, r) = B(x_0, r) \cup S(x_0, r).$$

Définition 1.5. (limite d'une suite)

Soit E un espace vectoriel normé et (x_n) une suite d'éléments de E.
On dit que l'élément $x_0 \in E$ est la limite de (x_n) si,

$$\|x_n - x_0\| \to 0 \text{ pour, } n \to +\infty.$$

Autrement dit

$$\| \ x_n - x_0 \| \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : \| \ x_n - x_0 \| < \varepsilon$$

Dans ce cas, on note $x_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ ou $x_n \to x_0$ pour $n \to +\infty$ et l'on dit que (x_n) converge ou tend vers x_0 ou (x_n) est convergente dans E.

Exemple 1.4.

1. *On considère $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme $\| \ . \ \|_\infty$. Soit $(x_n) \subset \mathbb{R}^2$ telle que :*
   $x_n = (1 + \frac{1}{n}, 4 - \frac{7}{n^2}), x_0 = (1, 4)$.
   On a :
   $$\| x_n - x_0 \|_\infty = \| (\frac{1}{n}, -\frac{7}{n^2}) \|_\infty = \max\{| \frac{1}{n} |, | -\frac{7}{n^2} |\} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$
   Donc,
   $$x_n \longrightarrow x_0 = (1, 4) \text{ dans } \mathbb{R}^2.$$
2. *On considère $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ et la suite (f_n) telle que :*
   $$f_n(x) = x^n.$$
   La suite (f_n) converge vers la fonction nulle $f = 0$ pour les normes $\| \ . \ \|_1$ et $\| \ . \ \|_2$ mais (f_n) ne converge pas vers la fonction nulle pour la norme $\| \ . \ \|_\infty$.
   En effet,
   $$\| f_n - 0 \|_1 = \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$
   Donc, (f_n) converge vers 0 au sens de la norme $\| \ . \ \|_1$.
   De même on a :
   $$\| f_n - 0 \|_2 = \Big(\int_0^1 x^{2n} \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\frac{1}{2n+1} \Big)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty.$$
   Donc la suite (f_n) converge vers 0 au sens de la norme $\| \ . \ \|_2$.
   D'autre part on a :
   $$\| f_n - 0 \|_\infty = \max \Big\{ x^n, x \in [0, 1] \Big\} = 1 \nrightarrow 0.$$
   Donc la suite (f_n) ne converge pas vers 0 au sens de la norme $\| \ . \ \|_\infty$.

Proposition 1.1

Soient (x_n) et (y_n) deux suites d'un espace vectoriel normé $(E, \| \ . \ \|)$ convergeant respectivement vers x_0 et y_0.
Soit (λ_n) une suite de $\mathbb{K}$ convergeant vers λ_0.
Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Tout voisinage de x_0 contient tous les termes de (x_n) sauf peut être un nombre fini d'entre eux.
2. La limite x_0 est unique.

3. Toute sous-suite de (x_n) converge vers x_0.
4. $\lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0$ pour $n \to +\infty$ dans E.
5. $x_n + y_n \to x_0 + y_0$ pour $n \to +\infty$.
6. $\|x_n\| \to \|x_0\|$ pour $n \to +\infty$.

Proposition 1.2

Soit E un espace vectoriel normé et M un sous-espace vectoriel de E. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes,

1. M est fermé.
2. Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de M convergente vers x lorsque $n \to +\infty$, on a $x \in M$.

Définition 1.6.

1. Une suite (x_n) d'un espace métrique (E, d) est dite suite de Cauchy si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N};\ \forall\, n, m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

2. Un espace métrique est dit complet si toute suite de Cauchy est convergente.
3. Un espace vectoriel normé complet est appelé espace de **Banach** .

Exemple 1.5.

Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.

Définition 1.7. (critère de convergence de Cauchy) :

Dans un espace de Banach, une suite est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Exemple 1.6.

1. *L'espace $E = C([a, b])$ = l'espace des fonctions numériques continues sur $[a, b]$ est de Banach pour la norme de convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{a\le x\le b} |\, f(x)\, |$.*

   la convergence de (f_n) vers f dans E signifie que

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{a\le x\le b} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \ \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

   C'est à dire que la suite de fonctions continues (f_n) telle que $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
2. *Tout espace vectoriel normé de dimension fini est un espace de Banach.*
3. *Tout espace de Hilbert est aussi un espace de Banach.*

4. *Si M un ensemble non vide et E un espace de Banach, alors les fonctions bornées $f : M \to E$, munies de la norme*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in M} \|f(x)\|_E,$$

forment un espace de Banach.

1.3 Opérateurs linéaires continus

Dans cette section E et F désignent deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, dont les normes sont respectivement $\| \, . \, \|_E$ et $\| \, . \, \|_F$.

Définition 1.8.

Un opérateur linéaire T de E dans F est une application linéaire,

$$T : D(T) \subset E \longrightarrow F,$$

définie sur un sous-espace vectoriel $D(T)$, appelé le domaine de T, et à valeurs dans F.

Remarque 1.5.

1. Si T est linéaire, alors $T(0) = 0$.
2. $D(T) \subset \{x \in E : Tx \in F\}$.

Définition 1.9.

Soit $T : E \to F$ un opérateur linéaire. On définit l'image de T par

$$Im(T) = \{Tx : x \in E\},$$

et le noyau de T par

$$Ker(T) = \{x \in E : Tx = 0\}.$$

Définition 1.10.

Soit $T : E \to F$ un opérateur linéaire.
T est continu si et seulement s'il existe une constante positive $C > 0$ telle que

$$\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E, \quad \text{pour tout} \quad x \in E.$$

Exemple 1.7.

Si $\dim(E) < \infty$, alors tout opérateur linéaire est continu.

Proposition 1.3

Soit $T : E \to F$ une application linéaire continue.
Alors on a :

$$\forall x \in E, \|Tx\|_F \leq \|T\|\|x\|.$$

Théorème 1.2

Les assertions suivantes sont équivalentes,

1. T est continu sur E.
2. T est continu en 0.
3. Il existe une constante $C > 0$ telle que $\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E, \forall x \in E$

Définition 1.11. (Norme d'un opérateur linéaire continu)

Soit $T : E \to F$ un opérateur linéaire continu.
On note $L(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F.
Lorsque $E = F$ on note simplement $L(E, E) = L(E)$.
La norme de T dans l'espace $L(E, F)$ est le nombre fini défini par

$$\|T\| = \|T\|_{L(E,F)} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}. \tag{1.3}$$

Remarque 1.6.

$$\|T\| = \inf \Big\{ C > 0 : \|Tx\|_F \leq C\|x\|_E, \forall x \in E \Big\}.$$

Remarque 1.7.

Le nombre défini dans (1.3) vérifie les trois propriétés de la norme. En effet :

1. Montrons que $\|T\| = 0 \Longleftrightarrow T = 0$.
   - Supposons que $\|T\| = 0$ et montrons que $T = 0$.
   D'après la proposition (1.3), on a $\forall x \in E : 0 \leq \|Tx\|_F \leq \|T\|\|x\|_E$, alors on conclut que $\|Tx\|_F = 0$, ce qui implique $Tx = 0$. Comme x est quelconque dans E on en déduit que $T = 0$.
   - Réciproquement, supposons que $T = 0$ et montrons que $\|T\| = 0$.
   Si $T = 0$, alors $\forall x \in E : Tx = 0$. Donc $\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F = 0$.
2. Soit $T \in L(E, F), \lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $\|\lambda T\| = \mid \lambda \mid \|T\|$. On a
   $\|\lambda T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|(\lambda T)x\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|\lambda T(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \mid \lambda \mid \|Tx\|_F = \mid \lambda \mid$

$\sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F$
$= |\lambda| \, \|T\|.$

3. Soit $A, T \in L(E,F)$. Montrons que $\|A+T\| \leq \|A\| + \|T\|$.
Soit $x \in E$. On a
$\|(T+A)x\|_F = \|Tx + Ax\|_F \leq \|Tx\|_F + \|Ax\|_F \leq \|T\|\|x\| + \|A\|\|x\| = (\|T\| + \|A\|)\|x\|$.
On en déduit que $\|T+A\| \leq \|T\| + \|A\|$.
En vertu de i) , ii) et iii) on conclut que l'application $T \longmapsto \|T\|$ est une norme sur $L(E,F)$.

Exemple 1.8.

$E = C([0,1])$, $F = \mathbb{K}$. Soit $T : E \to \mathbb{K}$ une application définie par

$$T(f) = \int_0^1 f(t)\, dt.$$

T est linéaire continue et on a $\|T\| = \|T\|_{L(E,F)} = 1$.

Exemple 1.9.

On considère l'espace $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de convergence uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|.$$

Soit l'opérateur de Volterra

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)dt, \ \forall x \in [0,1].$$

Il est clair que l'opérateur T est linéaire. De plus on a pour tout $f \in E$: $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Donc $T \in L(E)$ et on a :

$$\|T\|_{L(E)} \leq 1. \tag{1.4}$$

D'autre part $\|T\|_{L(E)} = 1$, en effet :
On prend $f_0 = 1 \in E$ et $\|f_0\|_E = 1$.
Alors

$$\|T\|_{L(E)} = \sup_{f \in E, \|f\| \leq 1} \|Tf\| \geq \|Tf_0\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |Tf_0(x)| = 1. \tag{1.5}$$

De (1.4) et (1.5), on conclut que $\|T\|_{L(E)} = 1$.

Proposition 1.4

Si $(F, \|.\|_F)$ est un espace de Banach, alors $(L(E,F), \|.\|)$ est un espace de Banach.

Démonstration.

Pour simplifier l'écriture, on pose $\|.\| = \|.\|_{L(E,F)}$.
Supposons que F est un espace de Banach et montrons que $L(E,F)$ est un espace de Banach.
On montre que toute suite de Cauchy dans $L(E,F)$ est convergente dans $L(E,F)$ c'est á dire par rapport à la norme de l'espace de $L(E,F)$.
Soit (T_n) une suite de Cauchy dans $L(E,F)$, alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N} : (p \geq N, q \geq N) \Longrightarrow \|T_p - T_q\| < \varepsilon.$$

Soit $x \in E$.
Comme,

$$\|T_p x - T_q x\| \leq \|T_p - T_q\| \|x\|,$$

alors on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall p, q \in \mathbb{N} : p \geq q \geq N) \Longrightarrow \|T_p x - T_q x\| < \varepsilon \|x\|.$$

Cela signifie que la suite $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F.
Comme F est de Banach, alors la suite $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans F et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n x = Tx$ existe dans F.
Montrons maintenant que $T \in L(E,F)$.
On considère l'opétateur :

$$T : E \to F : x \longmapsto Tx.$$

T est linéaire car T_n est linéaire.
T est continu, en effet :
Comme la suite (T_n) est de Cauchy, alors elle est bornée , c'est á dire qu' il existe $C > 0$ telle que $\|T_n\| \leq C$ et par conséquent,

$$\|T_n x\| \leq C\|x\| \text{ pour tout, } x \in E. \tag{1.6}$$

En faisant $n \to +\infty$ dans (1.6), on obtient,

$$\|Tx\| \leq C\|x\| \text{ pour tout, } x \in E.$$

Ce qui signifie que T est continu.
Donc $T \in L(E,F)$.
Maintenant, on montre que $\|T_n - T\|_{L(E,F)} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
On a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in E, \forall n, m \in \mathbb{N} : (n > m > N) \Longrightarrow \|T_n(x) - T_m(x)\| < \varepsilon \|x\|.$$

En faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Longrightarrow \|T_n(x) - T_m(x)\| < \varepsilon \|x\|.$$

Par conséquent, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Longrightarrow \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_n(x) - T_m(x)\| < \varepsilon.$$

C'est á dire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Longrightarrow \|T_n - T_m\|_{L(E,F)} < \varepsilon.$$

Ceci signifie que $\|T_n - T_m\| \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
Alors la suite (T_n) converge vers T dans $L(E,F)$. par conséquent l'espace $L(E,F)$ est de Banach.

□

Définition 1.12. (Dual topologique)

On appelle dual topologique de E, et l'on note E', l'ensemble des **formes** linéaires continues sur E, c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ bornées sur la boule unité fermée $\overline{B}_E = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$. Pour $T \in E'$, on utilisera la notation $\langle T, x\rangle$ pour désigner $T(x)$.
L'espace E' est un espace vectoriel normé pour la norme,

$$\|T\| = \|T\|_{E'} = \sup_{x\neq 0} \frac{|Tx|}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|\leq 1} |Tx| = \sup_{\|x\|=1} |Tx|. \tag{1.7}$$

On parlera couramment du dual de E pour désigner E', lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, étant entendu qu'il s'agit du dual topologique.

Remarque 1.8.
$E' = L(E, \mathbb{K})$. Comme $\mathbb{K}$ est un espace de Banach, alors en vertu de la proposition (1.4), E' est un espace de Banach muni de sa norme duale définie dans (1.7).

Théorème 1.3

Un opérateur linéaire T de domaine $D(T)$ est borné si et seulement s'il est continu.

Démonstration.

1. Supposons que T est continu en 0, alors il existe $\delta > 0$ tel que $\|Tx\| < 1$, pour $x \in D(T)$ avec $\|x\| \leq \delta$. Ainsi
$$\|T\| \leq \frac{1}{\delta}.$$
D'où T est borné.
2. Supposons que T est borné.
Alors,
$$\|Tx - Ty\| \leq \|T\| \ \|x - y\|.$$
Par conséquent T est continu.

□

Définition 1.13.

Soient $(E, \| \ . \ \|_E), (F, \| \ . \ \|_F)$ deux espaces de Banach.

1. On appelle opérateur linéaire non borné de E dans F toute application linéaire $T : D(T) \subset E \longrightarrow F$ définie sur un sous-espace vectoriel $D(T) \subset E$, à valeurs dans F.
$D(T)$ est le domaine de T. (L'opérateur T n'est pas défini sur E tout entier).

2. On dit que l'opérateur T est borné si $\| Tx \|$ reste borné sur l'ensemble $\{x \in D(T) :\| x \|_E \leq 1\}$, c'est à dire s'il existe une constante $C > 0$ telle que
$$\| Tx \|_F \leq C \| x \|_E, \ \forall x \in E.$$

Dans le cas contraire on dit que T est non borné.

Définition 1.14. (Caractérisation d'un opérateur linéaire non borné)

Soit $T : D(T) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire.
On dit que T est non borné s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ et une constante $C > 0$ telle que $\| x_n \|_E \leq C$ et $\| Tx_n \|_F \longrightarrow +\infty$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Exemple 1.10.

On considère l'espace vectoriel,

$$E = C\Big([0,1]\Big) = \Big\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continue} \Big\},$$

et on le munit de la norme de la convergence uniforme,

$$\| f \| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

On définit sur l'espace de Banach $\big(E, \| \, . \, \|\big)$ *un opérateur linéaire* $\mathcal{A}$ *par :*

$$D(\mathcal{A}) = \Big\{ f \in C^2\big([0,1]\big); f(0) = f'(0) = 0 \Big\} \text{ et } \mathcal{A}(f) = f'' + f.$$

En considérant la suite de fonctions,

$$f_n(x) = \frac{1}{2}\big[\cos(2n\pi x) - 1\big],$$

l'opérateur $\mathcal{A}$ *n'est pas borné.*

Définition 1.15.

On dit qu'un espace vectoriel E est de dimension infinie si pour tout entier naturel n il existe une famille libre de n éléments dans E.

Exemple 1.11.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
1. Les espace $C([a,b])$ *et* $C^k([a,b])$ *sont de dimension infinie.*
2. Les espaces $L^p([a,b])$ *sont de dimension infinie.*

Théorème 1.4

(Théorème du prolongement d'un opérateur linéaire continu)
Soient E un espace vectoriel normé, F un espace de Banach et $D(A)$ un sous-espace vectoriel normé de E.
Soit $A : D(A) \longrightarrow F$ un opérateur linéaire.
Supposons que
1. $D(A)$ est dense dans E c'est-à-dire que $(\overline{D(A)} = E)$.
2. A est continu sur $D(A)$.

Alors il existe un opérateur unique $\widetilde{A}$ linéaire continu de E dans F tel que $\widetilde{A}\Big|_{D(A)} = A$ où $\widetilde{A}\Big|_{D(A)}$ est la restriction de $\widetilde{A}$ sur $D(A)$. ($\widetilde{A}$ est le prolongement de A.)

Démonstration.

L'unicité de $\widetilde{A}$.
Supposons qu'ils existent $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2$ linéaires continus de E dans F tels que $\widetilde{A}_1\Big|_{D(A)} = \widetilde{A}_2\Big|_{D(A)}$.
Montrons que $\widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_2$ c'est-à-dire que $\widetilde{A}_1 x = \widetilde{A}_2 x$, pour tout $x \in E$.
Montrons par l'absurde. Supposons que $\exists x_0 \in E$ tel que

$$\widetilde{A}_1 x_0 \neq \widetilde{A}_2 x_0. \tag{1.8}$$

D'après l'hypothèse, on a $\overline{D(A)} = E$. Alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ telle que $x_n \longrightarrow x_0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.
On a :

$$\widetilde{A}_1 x_n \longrightarrow \widetilde{A}_1 x_0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty \text{ (puisque } \widetilde{A}_1 \text{ est continu)}$$
$$\widetilde{A}_2 x_n \longrightarrow \widetilde{A}_2 x_0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty \text{(puisque} \widetilde{A}_2 \text{ est continu)).}$$

D'où,

$$\widetilde{A}_1 x_0 = \widetilde{A}_2 x_0,$$

(grâce à l'unicité de la limite, car l'espace F est séparé).
Contradiction avec (1.8).
Maintenant on veut définir $\widetilde{A}x$.
On a $(\overline{D(A)} = E)$, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ telle que $x_n \longrightarrow x_0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.
S'il existe $\widetilde{A}$, alors on a :

$$\widetilde{A}x = \widetilde{A}(\lim_{n\to+\infty} x_n) = \lim_{n\to+\infty} \widetilde{A}x_n = \lim_{n\to+\infty} Ax_n \text{ (puisque } \widetilde{A}\Big|_{D(A)} = A).$$

Donc on établit l'existence de $\lim_{n\to+\infty} Ax_n$.
On a $\lim_{n\to+\infty} x_n = x \Longrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p \geq N_\varepsilon, \forall q \geq N_\varepsilon \Longrightarrow \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon.$$

D'autre part on a :

$$\|Ax_p - Ax_q\| \leq \|A\|_{L(D(A),F)} \|x_p - x_q\|_E.$$

Donc $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F.
Comme F est de Banach, alors $\lim_{n\to+\infty} Ax_n$ existe.
On pose,

$$\lim_{n\to+\infty} Ax_n = \widetilde{A}x \in F.$$

Maintenant on montre que $\lim_{n\to+\infty} Ax_n$ ne dépend que de x (ne dépend pas de x_n).
Soit $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} x'_n = x \text{ et } \lim_{n\to+\infty} Ax_n = y \text{ et } \lim_{n\to+\infty} Ax'_n = y',$$

et on montre que $y = y'$.
On a :

$$\|y - y'\| \leq \|y - Ax_n\| + \|Ax_n - Ax'_n\| + \|Ax'_n - y'\| \leq \|A\| \, \|x_n - x'_n\|.$$

car,

$\lim_{n\to+\infty} \|y-Ax_n\| = \lim_{n\to+\infty} \|Ax'_n-y'\| = 0$ et $\|Ax_n-Ax'_n\| \leq \|A\|\,\|x_n-x'_n\|$ (puisque A est linéaire continu).

Plus de ça, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x'_n\| = 0, \text{ (puisque } \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x'_n = x).$$

D'où,

$$y = y'.$$

Maintenant, montrons que $\widetilde{A} \in L(E,F)$.
On a :

$$\lim_{n\to+\infty} Ax_n = \widetilde{A}x.$$

$\widetilde{A}$ est linéaire (évident d'après la linéarité de la limite).
Montrons maintenant que $\widetilde{A}$ est continu, c'est-à-dire on montre que :

$$\exists C > 0 : \|\widetilde{A}x\|_F \leq C\|x\|_E, \text{ pour tout } x \in E.$$

Soit $x \in E$. Alors il existe une suite $(x_n) \subset D(A)$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$.
On a :
$\|\widetilde{A}x\|_F = \|\lim_{n\to+\infty} Ax_n\| = \lim_{n\to+\infty} \|Ax_n\|_F \leq \lim_{n\to+\infty} (\|A\|_{L(D(A),F)}\|x_n\|_E = \|A\|_{L(D(A),F)} \lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|A\|_{L(D(A),F)}\|x\|$, $(C = \|A\|_{L(D(A),F)})$.
D'où

$$\|\widetilde{A}x\|_F \leq \|A\|_{L(D(A),F)}\|x\|. \tag{1.9}$$

Par conséquent $\widetilde{A}$ est continu.
Montrons que $\|\widetilde{A}\|_{L(E,F)} = \|A\|_{L(D(A),F)}$.
En vertu de (1.9), on a :

$$\|\widetilde{A}\|_{L(E,F)} \leq \|A\|_{L(D(A),F)} \tag{1.10}$$

D'autre part, puisque $\widetilde{A}$ est un prolongement de A on a :

$$\|A\|_{L(D(A),F)} \leq \|\widetilde{A}\|_{L(E,F)} \tag{1.11}$$

On conclut d'après (1.10) et (1.11) l'égalité :

$$\|\widetilde{A}\|_{L(E,F)} = \|A\|_{L(D(A),F)}.$$

□

Proposition 1.5

Soient E, F deux espaces de Banach et soit un opérateur $T : E \longrightarrow F$.
Si,

1. T est continu sur E.
2. $T(x) = 0, \ \forall x \in M, \ \text{avec } \overline{M} = E.$

Alors $T \equiv 0$ sur E tout entier.

Définition 1.16.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $T \in L(E,F)$. On dit que T est inversible s'il existe un opérateur $S \in L(F,E)$ tel que $TS = Id_F$ (inversible à droite) et $ST = Id_E$ (inversible à gauche). Un tel opérateur (s'il existe) est unique. On l'appelle opérateur inverse de T et on le note $S = A^{-1}$.
On désigne par $\mathcal{G}L(E,F)$ l'ensemble opérateurs inversibles de E dans F.

Remarque 1.9.

Si T un opérateur inversible à droite et injectif (resp. inversible à gauche et surjectif) alors il est inversible et tout inverse à droite (ou à gauche) est égal à l'inverse T^{-1}.

Exemple 1.12.

On considère l'espace

$$E = l^2(\mathbb{N},\mathbb{R}) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\},$$

muni de la norme usuelle

$$\|x\| = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On considère l'opérateur $T : l^2 \to l^2$ défini par :

$$Tx = (0, x_0, x_1, x_2, ...x_n, ...), \quad \textit{pour} \quad x = (x_0, x_1, x_2, ...x_n, ...) \in l^2.$$

On a $\|Tx\| = \|x\|$ pour tout $x \in l^2$. Alors T est une isométrie donc continu, c'est à dire que $T \in L(E)$.
L'opérateur T admet un inverse S à gauche (car T est injectif) défini par :

$$Sx = (x_1, x_2, ...x_n, x_{n+1}.....),$$

car $ST = Id_E$. Mais T n'a pas d'inverse à droite (car T n'est pas surjectif).

Proposition 1.6

Soient E un espace de Banach et F un espaces vectoriel normé et $T \in L(E,F)$ bijectif. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes,
a) $T^{-1} \in L(F,E)$.
b) Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in E$: $\|Tx\| \geq C\|x\|$.
c) F est un espace de Banach.

Démonstration.

1. Montrons que $a) \Longrightarrow b)$.
   Comme T^{-1} est continu, alors on a :

$$\forall x \in E, \|T^{-1}Tx\| \leq \|T^{-1}\|\|Tx\|.$$

Il s'en suit que :

$$\forall x \in E : \|Tx\| \geq C\|x\|, \quad C = \|T^{-1}\|^{-1}.$$

2. Montrons que $b) \Longrightarrow c)$.
On montre que F est de Banach. Soit (y_n) une suite de Cauchy dans F et on montre que (y_n) est convergente et sa limite est dans F.
On a $(y_n) \subset F$, alors il existe une suite (x_n) dans E telle que $y_n = Tx_n$.
D'après la propriété b), on a :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \Longrightarrow \|x_n - x_m\| \leq C\|T(x_n - x_m) \leq C\|y_n - y_m\|.$$

Comme la suite (y_n) est de Cauchy, alors la suite (x_n) est de Cauchy dans l'espace de Banach E. Donc (x_n) est convergente vers $x \in E$.
Puisque $T \in L(E, F)$, alors $y_n = Tx_n \to Tx \in F$ quand $n \to +\infty$. D'où F est un espace de Banach.

3. Montrons que $c) \Longrightarrow a)$. Cette implication découle du corollaire 4.2 (chapitre 4) [théorème d'isomorphisme de Banach].

□

Corollaire 1.1.

Soient E, F deux espaces de Banach et $T \in L(E, F)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes,
a) $\exists C > 0 : \forall x \in E$ on a $\|Tx\| \geq C\|x\|$.
b) T est injectif et $Im(T)$ est fermée dans F.

Démonstration.

1) Montrons que $a) \Longrightarrow b)$.
De l'inégalité $\|Tx\| \geq C\|x\|$, on conclut que T est injectif. Donc T est bijectif de E dans $Im(T)$. Alors en vertu de la proposition 1.6, on conclut que $Im(T)$ est un espace de Banach et donc fermée dans F.
2) Montrons que b) $\Longrightarrow a)$.
On suppose que T est injectif et $Im(T)$ est fermée dans F et on montre que :

$$\exists C > 0, \text{ telle que pour tout } x \in E, \text{ on a : } \|Tx\| \geq C\|x\|.$$

Alors T est bijectif de E dans $Im(T)$ qui est de Banach, alors d'après la proposition 1.6 on a :

$$\exists C > 0 : \forall x \in E, \|Tx\| \geq C\|x\|.$$

□

Corollaire 1.2.

Soient E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé et $T \in L(E, F)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes,
a) $\overline{Im(T)} = F$ et $\exists\, C > 0 : \forall x \in E$ on a $\|Tx\| \geq C\|x\|$.
b) T est inversible.

Démonstration.

Montrons que $a) \Longrightarrow b)$.
Supposons que a) est satisfaite, alors en vertu du corollaire 2.1 T est injectif et $Im(T)$ est

fermée dans F.
Alors on a :

$$Im(T) = \overline{Im(T)} = F.$$

Donc, T est surjectif et donc inversible.
Montrons que $b) \Longrightarrow a)$.
Supposons que b) est satisfaite.
On a :

$$F = Im(T) \subset \overline{Im(T)} \subset F.$$

Alors,

$$\overline{Im(T)} = Im(T) = F.$$

Donc d'après le corollaire 2.1 on a le résultat. □

Proposition 1.7

Soit E un espace de Banach et $T \in L(E)$.
Si $\|T\| < 1$, alors $I - T$ est inversible et on a :

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n.$$

Démonstration.

Comme $\|T\| < 1$, alors on conclut que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} T^n$ est normalement convergente.
Puisque l'espace E est de Banach, alors $L(E) = L(E, E)$ est de Banach aussi.
Par conséquent la série $\sum_{n=0}^{+\infty} T^n$ est convergente.
On pose :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n.$$

De plus, on a :

$$S(I - T) = S - ST = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n - \sum_{n=0}^{+\infty} T^{n+1} = T^0 = I. \tag{1.12}$$

De même, on a :

$$(I - T)S = S - TS = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n - \sum_{n=0}^{+\infty} T^{n+1} = T^0 = I. \tag{1.13}$$

Alors $I - T$ est inversible.
En vertu de (1.12) et (1.13), on conclut que :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n = (I - T)^{-1}.$$

□

1.4 Exercices

Exercice 1.1.

Soient E, F deux espaces vectoriels normés.
On considère $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire borné défini sur $D(T) = E$.
- Montrer que :

$$\|T\|_{L(E,F)} = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}.$$

Exercice 1.2.

Soient E, F deux espaces vectoriels normés.
On considère $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire borné défini sur $D(T) = E$ qui vérifie l'inégalité

$$\|Tx\| \leq C\|x\|, \forall x \in E, \text{ où } C \text{ est une constante positive.}$$

- Montrer que :

$$\|T\|_{L(E,F)} = \inf\Big\{C : \|Tx\| \leq C\|x\|, \forall x \in E\Big\}.$$

Exercice 1.3.

On considère les espaces :
$C\Big([-1,1]\Big) = \Big\{f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ est continue}\Big\}.$
$C^1\Big([-1,1]\Big) = \Big\{f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ est dérivable et } f' \text{ est continue }\Big\}.$
$L^2\Big([-1,1]\Big) = \Big\{f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ est mesurable et } \int_{-1}^{1} \mid f(x) \mid^2 dx < +\infty\Big\}.$
Dans les cas suivants, montrer que l'opérateur T est linéaire continu et calculer $\| T \|$:
a) $T : C\Big([-1,1]\Big) \longrightarrow C\Big([-1,1]\Big),\ Tf(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\, dt.$
b) $T : C\Big([-1,1]\Big) \longrightarrow C\Big([-1,1]\Big),\ Tf(x) = f(x).$
c) $T : C\Big([-1,1]\Big) \longrightarrow C\Big([-1,1]\Big),\ Tf(x) = x^2 f(-1).$
d) $T : C\Big([-1,1]\Big) \longrightarrow C\Big([-1,1]\Big),\ Tf(x) = f(x^2).$
e) $T : C^1\Big([a,b]\Big) \longrightarrow C\Big([a,b]\Big),\ Tf(x) = f'(x).$
f) $T : L^2\Big([-1,1]\Big) \longrightarrow L^2\Big([-1,1]\Big),\ Tf(x) = x\int_{-1}^{1} f(t)\, dt.$

Exercice 1.4.

Soient E, F deux espaces vectoriels normés et soit $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire.
Supposons que $\dim(Im(T)) < +\infty$ et $\ker(T)$ est fermé dans E.
- Montrer que l'opérateur T est continu.

Exercice 1.5.

Soit E un espace de Banach et $T : E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire borné tel que $D(T) = E$.
Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall x \in E : \ \|Tx\| \geq C\|x\|.$$

- Montrer que $Im(T)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 1.6.

Soit l'espace $E = C^0\Big([0,1]\Big)$ muni de la norme

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} \ | \ f(x) \ |.$$

1. Soit T l'opérateur de E dans $\mathbb{R}$ défini par :

$$T(f) = \int_0^1 f(t) \sin t dt.$$

-Montrer que $T \in E'$ et calculer $\| \ T \ \|_{E'}$.
2. Soit A l'opérateur de E dans $\mathbb{R}$ défini par :

$$A(f) = \int_0^1 f(t^2)\sqrt{t}dt.$$

- Montrer que $A \in E'$ et calculer $\| \ A \ \|_{E'}$.
3. On définit maintenant sur E les deux normes suivantes :

$$\| \ f \ \|_1 = \int_0^1 \ | \ f(t) \ | \ dt, \qquad \| \ f \ \|_2 = \Big(\int_0^1 \ | \ f(t) \ |^2 \ dt \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On considère l'application linéaire S de $(E, \| \ . \ \|_2)$ dans $(E, \| \ . \ \|_1)$ définie par :

$$S(f) = xf(x).$$

-Montrer que $S \in L(E) = L(E, E)$ et calculer sa norme.

Exercice 1.7.

On considère l'espace :
$G = \Big\{ x = (x_n), x_n \in \mathbb{R} \quad et \quad x_n \to 0 \Big\}$ *muni de la norme :*

$$\|x\| = \sup_{n\geq 1} \ | \ x_n \ |.$$

On définit sur G une forme linéaire g par :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{2^{k-1}}.$$

- Montrer que $g \in G'$ et $\|g\|_{G'} = 2$.

Exercice 1.8.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & si \quad |\ x\ | \geq \frac{1}{n}, \\ n - n^2|x| & si \quad |\ x\ | \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit un opérateur T_n par :

$$T_n(\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n(y)\varphi(x-y)dy, \qquad \forall \varphi \in L^1(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que $T_n \in L\big(L^1(\mathbb{R})\big)$ (c'est à dire que $T_n : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ est linéaire continu) et que $\| T_n \|_{L\left(L^1(\mathbb{R})\right)} \leq 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1.9.

Soit H l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ formé des suites complexes $x = (x_n)$ qui vérifient la condition :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty.$$

On munit H par la norme : $\|x\| = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$.

1. On considère le sous-espace vectoriel E formé par les suites à support fini, c'est à dire :

$$x \in E \Longleftrightarrow x \in H \text{ et } \exists N_x \in \mathbb{N}^* : x_n = 0 \quad \forall n \geq N_x.$$

Montrer que E est dense dans H.
2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ on définit l'application A_p qui fait correspondre chaque x de H $A_p(x)$ dans lui même et telle que :

$$\Big(A_p(x)\Big)_n = \begin{cases} x_n & si \quad p \neq n, \\ px_p & si \quad p = n. \end{cases}$$

a) Vérifier que $A_p \in L(H,H), \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$.
b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to\infty} \| A_p(x) - x \| = 0, \forall x \in E$.
c) En justifiant la réponse, montrer que le résultat : $\lim\limits_{n\to\infty} \| A_p(x) - x \| = 0, \forall x \in H$ n'est pas vrai.

Exercice 1.10.

On considère les espaces,

$$l^\infty(\mathbb{R}) = \Big\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{R}, (x_n) \text{ est bornée}\Big\} \text{ et } l^1(\mathbb{R}) = \Big\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| < \infty\Big\}.$$

On munit l'espace $l^\infty(\mathbb{R})$ de la norme,

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|,$$

et l'espace $l^1(\mathbb{R})$ de la norme,

$$\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|.$$

Pour $f = (f_n) \in l^\infty(\mathbb{R})$, on définit l'opérateur $\mathcal{A}$ de $l^1(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\mathcal{A}x = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n x_n, \text{ pour tout } x \in l^1(\mathbb{R}).$$

1. *Montrer que $\mathcal{A} \in (l^1)'$.*
2. *Montrer que $\|\mathcal{A}\| = \|f\|_\infty$.*

Exercice 1.11.

Soit $1 \leq p < \infty$.
On considère l'espace

$$L^p\Big([0,1]\Big) = \Big\{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \int_0^1 |f(x)|^p\, dx < +\infty\Big\}$$

muni de la norme,

$$\|f\| = \Big(\int_0^1 |f(t)|^p\, dt\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Soit l'opérateur $\big(T, D(T)\big)$ défini par :

$$D(T) = \Big\{f \in C\Big([0,1]\Big), f' \in L^p\Big([0,1]\Big), f(0) = 0\Big\} \text{ et } Tf = f',$$

où $C\Big([0,1]\Big)$ est l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme,

$$\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|.$$

1. *Montrer que T est non borné. (On peut utiliser la suite $f_n(t) = n^{\frac{1}{p}} t^n$).*

Exercice 1.12.

On considère l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbb{R})$ et l'opérateur $T : H \to H$ défini par :

$$D(T) = \Big\{f \in L^2(\mathbb{R}) : Tf \in L^2(\mathbb{R})\Big\} \text{ et } Tf(x) = -if'(x),$$

avec i est le nombre complexe qui vérifie $i^2 = -1$.
1) Montrer que $D(T)$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R})$.
2) Montrer que T est linéaire non borné. On peut utiliser la suite suivante :

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin(nx), & si\, x \in [0, 2\pi] \\ 0, & ailleurs. \end{cases}$$

.

Exercice 1.13.

On considère l'espace de Hilbert,

$$l^2 = \Big\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : x_n \in \mathbb{C} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\Big\},$$

muni du produit scalaire,

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{y_n},$$

et la norme induite,

$$\|x\| = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit l'opérateur $T_n : l^2 \to l^2$ défini par :

$$T_n x = (\underbrace{0, 0, 0, ..., 0}_{nzros}, x_1, x_2, x_3, ...), \text{ où } x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in l^2.$$

1) Montrer que $T_n \in L(l^2)$.

Exercice 1.14.

On considère l'espace de Banach,

$$l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = \Big\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : x_n \in \mathbb{C} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty\Big\},$$

muni de la norme,

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|.$$

On considère l'opérateur $T : l^1 \to l^1$ défini par :

$$Tx = (Tx)_n = (\frac{x_n}{n}) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ..., \frac{x_n}{n}, ...).$$

1. Montrer que l'opérateur $T \in L(l^1)$.
2. Montrer que l'opérateur T n'est pas inversible. (On pourra montrer que T n'est pas surjectif).

Exercice 1.15.

Soit

$$E = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = \Big\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \ x_n \in \mathbb{C}, \ \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\Big\},$$

muni de la norme,

$$\|x\| = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On considère $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite bornée des nombres complexes et* $M = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |\lambda_n|$.
On définit l'opérateur $T : l^2 \longrightarrow l^2$ *par :*

$$Tx = (Tx)_n = \lambda_n x_n, \text{ pour tout } x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in l^2.$$

1) Montrer que $T \in L(l^2)$ *et calculer* $\|T\|$.
2) Montrer que si $|\lambda_n| \geq C$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *avec* $C > 0$, *alors* T *est bijectif.*
- Trouver dans ce cas l'expression de T^{-1} *et calculer* $|T^{-1}\|$.
3) On suppose que l'un des λ_n *est non nul. Montrer que* T *n'est ni injectif ni surjectif et que* $\overline{Im(T)} \neq E$.
4) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \lambda_n \neq 0$ *et* $\inf\{|\lambda_n|,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.
- Montrer que T *est injectif mais non surjectif et que* $\overline{Im(T)} = E$.

Exercice 1.16.

Soit E *un espace de Banach et* $T, S \in L(E)$.
1) Montrer que si $TS = ST$, *alors* TS *est inversible si et seulement si* T *et* S *sont inversibles.*
2) Montrer par un exemple que si $TS \neq ST$, *alors 1) peut être n'est pas vraie.*

Exercice 1.17.

Soit $E = C\Big([0,1]\Big)$ *muni de la norme* $\|.\|_\infty$ *et pour* $f \in E$, *on définit l'opérateur* T *par :*

$$Tf(x) = \int_0^x K(x,t)f(t)\ dt, \text{ où } k(.,.) \in C\Big([0,1]\times[0,1]\Big).$$

Soit $M = \sup_{0\leq x,t\leq 1} |K(x,t)|$.
1) Montrer que $T \in L(E)$.
2) - Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* :\ |T^n f(x)| \leq \frac{M^n}{n!} x^n \|f\|_\infty.$$

- En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* :\ \|T^n\| \leq \frac{M^n}{n!}.$$

Exercice 1.18. *(opérateur de Volterra)*

Soit $E = C\Big([0,1]\Big)$ *muni de la norme* $\|.\|_\infty$ *et pour* $f \in E$, *on définit l'opérateur* T *par :*

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)\ dt.$$

(1) (i) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* :\ T^n f(x) = \int_0^x K_n(x,t)f(t)\ dt, \text{ où } K_n(x,t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

ii) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \ \|T^n\| \leq 1$.
(2) Calculer la somme $\sum_{n\geq 1} T^n$.
(3) Soit $g \in E$. *Résoudre l'équation* $(I-T)f = g$.

Exercice 1.19.

Soit l'opérateur $T : C^1\Big([0,1]\Big) \longrightarrow C\Big([0,1]\Big)$ *défini par :*

$$Tf(x) = f'(x).$$

- Montrer que T *admet un inverse* A^{-1} *à droite.*
- Montrer que T *n'admet pas un inverse à gauche.*

Exercice 1.20.

Soit l'opérateur $A : C\Big([0,1]\Big) \longrightarrow C\Big([0,1]\Big)$ *défini par :*

$$Af(x) = \int_0^x f(t)\ dt.$$

1) Trouver l'ensemble $Im(A)$.
2) L'inverse A^{-1} *existe-t-il sur* $Im(A)$ *et est-il borné ?*

Exercice 1.21.

On définit un opérateur $A : C\Big([0,1]\Big) \longrightarrow C\Big([0,1]\Big)$ *par :*

$$Af(x) = f(x) + \int_0^1 e^{x+y} f(y)\ dy.$$

- Montrer que A *est continûment inversible et chercher* A^{-1}.

Exercice 1.22.

On considère l'opérateur $T : l^2 \longrightarrow l^2$ *défini pour* $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in l^2$ *par :*

$$Tx = \Big(x_1, \frac{1}{2}(x_1+x_2), \frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3), ..., \frac{1}{2^{n-1}}(x_1+x_2+x_3+...+x_n), ...\Big).$$

- Montrer que T *est borné et n'est pas surjectif.*

Exercice 1.23.

Soit H *un espace de Hilbert sur* $\mathbb{R}$ *muni d'un produit scalaire* $(.,.)$ *et la norme induite* $\| \ . \ \|$, *avec* $\forall x \in H :< x, x >=\| \ x \ \|^2$.
Soit $A \in L(H) = L(H,H)$ *et* $M \in]0, \infty[$ *et qui vérifie*

$$\| \ A(x) \ \| \geq M \ \| \ x \ \|, \quad \forall x \in H.$$

1. Montrer que $A(H)$ est fermée. $\big($On rappelle que $A(H) = Im(A)\big)$.
2. Montrer que $\Big(A(H)\Big)^{\perp} = \{0\}$.
- En déduire que A est surjectif.
3. Montrer que A est un isomorphisme de H dans H et que $\| A^{-1} \| \leq \dfrac{1}{M}$.

Exercice 1.24.

On considère les espaces suivants :
$C\Big([-1,1]\Big) = \Big\{f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ est continue}\Big\}$.
$C^1\Big([-1,1]\Big) = \Big\{f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ est continue}\Big\}$.
$L^1\Big([-1,1]\Big) = \Big\{f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ est mesurable et } \displaystyle\int_{-1}^{1} \mid f(x) \mid \ dx < +\infty\Big\}$.
$L^2\Big([-1,1]\Big) = \Big\{f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ est mesurable et } \displaystyle\int_{-1}^{1} \mid f(x) \mid^2 \ dx < +\infty\Big\}$.
Dans les cas suivants, montrer que $T : E \longrightarrow \mathbb{C}$ est une forme linéaire continue $(T \in E')$ puis calculer sa norme $\|T\|$:

1) $E = C\Big([-1,1]\Big)$ *et* $Tf = \displaystyle\int_{-1}^{1} xf(x)\, dx$.
2) $E = C^1\Big([-1,1]\Big)$ *et* $Tf = \displaystyle\int_{0}^{1} xf(x)\, dx$.
3) $E = L^1\Big([-1,1]\Big)$ *et* $Tf = \displaystyle\int_{-1}^{1} xf(x)\, dx$.
4) $E = L^2\Big([-1,1]\Big)$ *et* $Tf = \displaystyle\int_{-1}^{1} xf(x)\, dx$.
5) $E = L^2\Big([0,1]\Big)$ *et* $Tf = \displaystyle\int_{0}^{1} x^{-\frac{1}{3}} f(x)\, dx$.
6) $E = l^2$ *et* $Tx = x_1 + x_2$ *avec* $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in l^2$.
7) $E = l^2$ *et* $Tx = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{k}$, *avec* $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in l^2$.
8) $E = l^1$ *et* $Tx = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{k}$, *avec* $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in l^1$.

Exercice 1.25.

On considère l'espace $E = C\Big([-1,1]\Big)$ muni de la norme $\| \ . \ \|_\infty$ et on définit sur E l'opérateur T.
- Montrer dans tout les cas suivants que T est linéaire continu et calculer $\|T\|$:
1) $Tf = \dfrac{1}{3}\Big(f(-1) + f(1)\Big)$.
2) $Tf = 2\Big(f(1) + f(0)\Big)$.
3) $Tf = \dfrac{1}{2\varepsilon}\Big(f(\varepsilon) + f(-\varepsilon) - 2f(0)\Big),\ \varepsilon \in [-1,1]$.
4) $Tf = \displaystyle\int_{0}^{1} f(t)\, dt$.

5) $Tf = \int_0^1 f(t)\,dt - f(0)$.
6) $Tf = \int_{-1}^1 f(t)\,dt - f(0)$.
7) $Tf = \int_{-1}^0 f(t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt$.

Exercice 1.26.

Soit $E = L^2(0,1)$. *On considère l'opérateur* $T : L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$ *défini par :*

$$Tf = xf.$$

- Montrer que T *est linéaire continu et calculer sa norme* $\|T\|$.

Exercice 1.27.

Soit E *un espace de Banach.*
On considère une suite d'opérateurs $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* $L(E)$ *qui converge vers* A *et soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* E *qui converge vers* x.
- Montrer que la suite $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* Ax.

Exercice 1.28.

On considère l'espace E *tel que*

$$E = \Big\{u \in L^2[-1,1], u' \in L^2[-1,1]\Big\}.$$

On munit E *de la norme :*

$$\| u \|_E^2 = \| u \|_{L^2[-1,1]}^2 + \| u' \|_{L^2[-1,1]}^2 .$$

On définit la fonctionnelle f *de* E *dans* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = \int_{-1}^1 [x(t)\sin t + x'(t)\cos t]dt.$$

1. Montrer que $f \in E'$.
2. Montrer que $\| f \|_{E'} = \sqrt{2}$.

Exercice 1.29.

On considère l'espace :
$E = C^1\Big([-1,1]\Big) = \Big\{f \in C\big([-1,1],\mathbb{R}\big), \quad f' \in C\big([-1,1],\mathbb{R}\big)\Big\}$ *muni de la norme :*

$$\| f \|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[-1,1]} |f'(x)|.$$

Soit l'opérateur A *tel que :*

$$A : E \to \mathbb{R}, \quad A(f) = -f'(0).$$

1. Montrer que $A \in E'$.
2. On munit le même espace E défini ci-dessus de la norme

$$\| f \|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|.$$

- L'opérateur A est-il continu pour cette norme ?
*(**Indication :** utiliser la suite de fonctions définies par : $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2},\ n \in \mathbb{N}$).*

Exercice 1.30.

Soit l'espace $E = C^1([0,1])$ l'espace des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[0,1]$, muni de la norme de la convergence uniforme sur $[0,1]$:

$$\| f \| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|.$$

Soit,

$$M = \Big\{u \in C^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\Big\}.$$

1. Montrer que M est un sous-espace vectoriel fermé de $C^1([0,1])$.
2. Soient a et b deux nombres réels tels que $0 \le a \le b \le 1$ et f la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le x < a, \\ (x-a)^2(b-x)^2 & \text{si} \quad a \le x \le b, \\ 0 & \text{si} \quad b < x \le 1. \end{cases}$$

- Vérifier que $f \in M$ et calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.
3. Soit g une fonction réelle définie et continue sur $[0,1]$.
- Montrer que l'application $G : M \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$G(u) = \int_0^1 g(x)u(x)dx,$$

est linéaire et continue sur M.
4. Montrer que, s'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que la fonction g vérifie l'inégalité $g(x_0) > 0$, il existe un intervalle $[a,b]$ (avec $a < b$) tel que $[a,b] \subset [0,1]$ et un nombre $\alpha > 0$ tels que l'on ait :

$$\forall x \in [a,b] : g(x) \ge \alpha.$$

- En déduire que $\Big(G(u) = 0, \forall u \in M\Big) \Longleftrightarrow (g = 0)$.

Exercice 1.31.

On considère V l'espace des suites complexes défini par :

$$V = \Big\{x = (x_n)_{n\ge0};\quad \sum_{n=0}^{+\infty}(1+n^2)|x_n|^2 < +\infty\Big\}.$$

1. On munit V du produit scalaire :

$$(x,y)=\sum_{n=0}^{+\infty}(1+n^2)x_n\overline{y_n}.$$

- Écrire la norme associée.
- Montrer que V est un espace complet (et donc un espace de Hilbert).
2. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ *une suite complexe bornée et*

$$M=\sup_{n\geq 0}\mid a_n\mid .$$

On considère l'application linéaire A *de* V *dans* V *définie par :*

$$\big(A(x)\big)_n=a_nx_n.$$

- Montrer que A *est continue.*
3. En considérant la suite $(e^p)_{p\geq 0}$ *définie par :*

$$(e^p)_n=\delta_{np}=\begin{cases}0 & si \quad p\neq n,\\ 1 & si \quad p=n.\end{cases}$$

- Vérifier que la suite $(e^p)_{p\geq 0}$ *est dans* V *et calculer* $\parallel e^p\parallel_V$.
- montrer que $\parallel A\parallel=\sqrt{M}$.

Exercice 1.32.

On considère l'espace de Banach $E=l^1$ *tel que :*

$$l^1=\Big\{x=(x_n)_{n\geq 1}:x_n\in\mathbb{R},\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|<+\infty\Big\}.$$

muni de la norme,

$$\parallel x\parallel=\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|.$$

On considère la forme A_n *de* E *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :*

$$A_n(x)=x_n.$$

1. Montrer que $A_n\in E'$ *et calculer* $\parallel A_n\parallel_{E'}$.

Exercice 1.33.

Soit E *et* F *deux espaces de Banach et* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\in L(E,F)$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$.
On suppose que $A_n(x)\to A(x)$ *lorsque* $n\to+\infty$ *pour tout* $x\in E$.
1. Montrer que $\sup_{n\in\mathbb{N}}\parallel A_n\parallel_{L(E,F)}<+\infty$.
2. Montrer que $A\in L(E,F)$.

Exercice 1.34.

Soit E un espace de Banach et (f_n) une suite de E' pour tout $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'on a :

$$\forall x \in E : \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

- Montrer que f est continue.

CHAPITRE 2

THÉORÈME DE HAHN-BANACH

2.1 Introduction

Soient $(E, \| \ . \ \|_E), (F, \| \ . \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $M \subset E$ un sous-espace vectoriel normé de E et soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue.
Supposons que $\overline{M} = E$. Dans ce cas et d'après le théorème (1.4) du prolongement d'une application linéaire continue, il existe une **unique** application $\widetilde{f} \in L(E, F)$ un prolongement de f qui vérifie $\widetilde{f} \ |_M = \ f$ et $\| \ \widetilde{f} \ \| = \| \ f \ \|$. Mais dans le cas où M n'est pas dense dans E ($\overline{M} \neq E$), en général il n'existe pas un prolongement $\widetilde{f}$ de f sur E tout entier, sauf dans le cas où $F = \mathbb{R}$ ou $F = \mathbb{C}$, il existe un prolongement $\widetilde{f}$ de f mais **n'est pas unique** ce qui l'annonce le théorème de **Hahn-Banach**.

Donc le théorème de Hahn-Banach est une généralisation du théorème du prolongement d'une application linéaire continue, c'est un outil puissant, fondamental et utile dans l'analyse fonctionnelle. Il admet deux formes. la première dite **analytique**, assure le prolongement avec conservation de la norme d'une forme linéaire continue définie sur un sous-espace d'un espace vectoriel normé tout entier, et le lemme de **Zorn** est un des piliers pour démontrer la forme analytique du théorème de Hahn-Banach, et la deuxième dite **géométrique**, permet de séparer strictement un ensemble convexe fermé d'un ensemble compact fermé par un hyperplan fermé.

Le théorème de Hahn-Banach dû aux deux mathématiciens sont, l'autrichien Hans Hahn (1897-1934) et le polonais Stefan Banach (1892-1945).

2.2 Théorème de Hahn-Banach forme analytique

Définition 2.1. (**Semi-norme :**)

Une semi-norme sur un espace vectoriel E est une application $p : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les deux conditions suivante

$$1) \ p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \ \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

$$2) \ p(x + y) \leq p(x) + p(y), \ \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Remarque 2.1.

L'implication $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ de la troisième condition de la norme n'est pas satisfaite pour la semi-norme comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 2.1.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (c'est à dire par rapport à la topologie définie sur $\mathbb{R}^n$).
Soit S un compact, $S \subset \Omega$. On considère,

$$E = C^0(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}, f \text{ continue}\}.$$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, pour tout $x \in \Omega$.
$(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$, pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.
On a E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
On définit l'application P_S par :

$$P_S(f) = \sup_{x \in S} |f(x)|.$$

P_S est bien définie car f est continue sur un compact, donc elle atteint sa borne supérieure.
P_S est une semi-norme sur E.
On remarque que l'implication $P_S(f) = 0 \Rightarrow f = 0$ n'est pas satisfaite car $f \neq 0$ sur S.

Définition 2.2.

Soit A un ensemble muni d'une relation d'ordre notée " $\leq$ ".
1) On dit qu'un sous-ensemble $B \subset A$ est totalement ordonné si

$$\forall a, b \in B, \text{ on a : } (a \leq b) \, ou \, (b \leq a).$$

2) Soit $B \subset$ A un sous-ensemble de A. On dit que $m \in A$ est un majorant de B si

$$\forall x \in B : x \leq m.$$

3) On dit que $m \in A$ est un élément maximal de A si

$$(\forall x \in A \text{ tel que } x \geq m) \Rightarrow x = m.$$

4) **Ensemble inductif :**
On dit que A est inductif si tout sous-ensemble totalement ordonné admet un majorant.

Lemme 2.1. ***(de Zorn) (axiome de choix)***
Tout ensemble ordonné, inductif et non vide admet un élément maximal.

Théorème 2.1

(de Hahn-Banach (forme analytique)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et soit $p : E \to \mathbb{R}$ une semi-norme sur E.
Soit $G \subset E$ un sous-espace vectoriel et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que :

$$\forall x \in G : g(x) \leq p(x),$$

où p est l'application définie dans la définition 2.1 avec $\lambda > 0$ dans cette définition.
Alors il existe un prolongement f de g tel que :
1. $f : E \to \mathbb{R}$.
2. f est linéaire.
3. $\forall x \in G : f(x) \leq g(x)$.
4. $\forall x \in E : f(x) \leq p(x)$.

Démonstration.

La démonstration repose sur le lemme 2.1 de Zorn.
On pose

$$A = \left\{ \begin{array}{c} h : D(h) \to \mathbb{R} : \forall x \in G : h(x) = g(x), \\ D(h) \text{ un s.e.v de } E, \\ h \text{ est linéaire}, \\ \forall x \in D(h) : h(x) \leq p(x). \end{array} \right\} \tag{2.1}$$

On veut démontrer qu'il existe un élément k de A qui est défini sur $D(h)$, tel que $D(k) = E$.
On définit une relation d'ordre sur A comme suit :
$h_1 \leq h_2 \Leftrightarrow D(h_1) \subset D(h_2)$ et $\forall x \in D(h_1) : h_1(x) = h_2(x)$ (h_2 prolonge h_1).
La relation $\leq$ est une relation d'ordre et A n'est pas totalement ordonnée.
On va appliquer le lemme 2.1 de Zorn sur A.
On montre alors que A est inductif, c'est à dire que toute partie de A totalement ordonnée admet un majorant.
Soit $B = (h_i)_{i \in I}$ une partie quelconque totalement ordonnée de A.
B est totalement ordonnée $\Leftrightarrow (\forall i \neq j : h_i \leq h_j$ ou $h_j \leq h_i)$.
On trouve h tel que :

$$h \geq h_i \ \forall i \in I.$$

$$h \geq h_i \Leftrightarrow \Big(D(h_i) \subset D(h), \forall i \in I \text{ et } h(x) = h_i(x), \forall x \in D(h_i) \Big).$$

On définit :

$$D(h) = \bigcup_{i \in I} D(h_i) \text{ et } h(x) = h_i(x) \text{ si } x \in D(h_i).$$

$$x \in D(h) \Rightarrow \exists i_0 \in I : x \in D(h_{i_0}), h(x) = h_{i_0}(x).$$

Montrons que h est une application (c'est à dire que h est bien définie).
Soit $i_0, j_0 \in I$ tels que $i_0 \neq j_0$.
Soit $x \in D(h_{i_0}), x \in D(h_{j_0})$.
Montrons que :

$$h(x) = h_{i_0}(x) = h_{j_0}(x).$$

On suppose par exemple que $h_{i_0} \leq h_{j_0}$, donc $D(h_{i_0}) \subset D(h_{j_0})$ (car B est totalement ordonnée).
On a :

$$\forall x \in D(h_{i_0}) : h_{i_0}(x) = h_{j_0}(x).$$

Donc,

$$h_{i_0}(x) = h_{j_0}(x), \forall j_0 : \ i_0 \neq j_0.$$

D'où h est bien définie.
Maintenant, montrons que h est un majorant de B. C'est à dire que $\forall i \in I : h_i \leq h$.
On a :

$$h_i \leq h \Leftrightarrow (D(h_i) \leq D(h) \text{ et } h(x) = h_i(x), \forall x \in D(h_i)).$$

Comme $D(h) = \bigcup_{i\in I} D(h_i)$, alors,

$$\forall i \in I : D(h_i) \subset D(h) \text{ et } h(x) = h_i(x),\ \forall x \in D(h_i) \text{ (d'après la définition de } h).$$

D'où A est inductif (car A est quelconque).
Montons que $A \neq \emptyset$.
On a $g \in A$, alors $A \neq \emptyset$ (car g est un prolongement de lui même).
D'après le lemme 2.1 de Zorn, A admet un élément maximal k tel que :

$$k : D(k) \to \mathbb{R},$$

et vérifie :
• k est linéaire.
• $\forall x \in G : k(x) = g(x)$.
• $\forall x \in D(k) : k(x) \leq p(x)$.
Montrons maintenant que $E = D(k)$.
Montrons par l'absurde. Supposons que $E \neq D(k)$. C'est à dire que $D(k) \subsetneq E$.
Alors $\exists x_0 \in E\backslash D(k)$. On pose $L = [x_0]$ (l'ensemble engendré par x_0).
et $M = D(k) + L \subset E$.
On a M est un sous-espace vectoriel de E, et $M \neq D(k)$ car $x_0 \notin D(k)$ et $D(k) \subsetneq M$.
On construit une application m telle que :

$$m : M \to \mathbb{R} : x + \lambda x_0 \mapsto m(x + \lambda x_0) = m(x) + \lambda\alpha_0 = k(x) + \lambda\alpha_0 \text{ où} alpha_0 = m(x_0).$$

Car m est déjà définie et k un prolongement.
On veut que m soit linéaire car les éléments de A sont linéaires.
On remarque que $x \in D(k) \Leftrightarrow x = x + 0.x_0$.
$m(x) = k(x) + 0.\alpha_0 = k(x)$.
m est linéaire car k est linéaire.
m est un prolongement de k.
On choisit α_0 tel qu'il vérifie la condition précédente, pour démontrer que $m \in A$ et α_0 vérifie :

$$\forall x \in D(k), \forall \lambda \in \mathbb{K} : k(x) + \lambda\alpha_0 = m(x + \lambda x_0) \leq p(x + \lambda x_0).$$

i) Si $\lambda > 0$.
On a :

$$\lambda m(\frac{x}{\lambda} + x_0) \leq \lambda p(\frac{x}{\lambda} + x_0).$$

Donc

$$m(\frac{x}{\lambda} + x_0) \leq p(\frac{x}{\lambda} + x_0). \tag{2.2}$$

On a :
$\Big(x \in D(k), \lambda \in \mathbb{K}^*, D(k) \text{ un sous-espace vectoriel}\Big) \Rightarrow \frac{x}{\lambda} \in D(k)$.
Donc,

$$(2.2) \Leftrightarrow m(y + x_0) \leq p(y + x_0).$$

D'où

$$k(y) + \alpha_0 \leq p(y + x_0), \text{ pour tout } y \in D(k). \tag{2.3}$$

ii) Si $\lambda < 0$.
On a :

$$(-\lambda)m(\frac{x}{-\lambda} - x_0) \leq (-\lambda)p(\frac{x}{-\lambda} - x_0).$$

Alors,

$$m(y - x_0) \leq p(y - x_0) \text{ pour tout} y \in D(k).$$

D'où,

$$k(y) - \alpha_0 \leq p(y - x_0), \text{ pour tout } y \in D(k). \tag{2.4}$$

En vertu de (2.3) et (2.4), on conclut que :

$$k(y) - p(y - x_0) \leq \alpha_0 \leq p(y + x_0) - k(y), \text{ pour tout } y \in D(k).$$

Il faut choisir α_0 tel que on a :

$$\sup_{y \in D(k)} \{k(y) - p(y - x_0)\} \leq \alpha_0 \leq \inf_{x \in D(k)} \{p(x + x_0) - k(x)\}.$$

Un tel choix de α_0 est possible car $k \in A \Rightarrow k(x) \leq p(x)$, $\forall x \in D(k)$.
On a :

$$k(x + y) \leq p(x + y), \forall (x, y) \in D(k) \times D(k).$$

d'où

$$k(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0 - x_0 + y).$$

Comme k est linéaire, alors

$$k(x) + k(y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0).$$

D'où

$$k(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - k(x), \forall x \in D(k), \forall y \in D(k).$$

1) x est fixé.

$$k(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - k(x), \forall y \in D(k).$$

Ce qui implique que

$$\sup_{y \in D(k)} \{k(y) - p(y - x_0)\} \leq \inf_{x \in D(k)} \{p(x + x_0) - k(x)\}.$$

Donc α_0 existe car $k(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - k(x)$, $\forall x \in D(k), \forall y \in D(k)$.
Maintenant, on montre que $m \geq k$.
La dernière inégalité est évidente car :

$$m \geq k \Leftrightarrow \Big(D(k) \subset D(m) \text{ et } m(x) = k(x), \forall x \in D(k)\Big).$$

On a :

$$D(k) \subset D(k) + [x_0] = D(m) \text{ et } m(x + \lambda x_0) = k(x) + \lambda \alpha_0.$$

Donc,

$$\lambda = 0 : x \in D(k) \Rightarrow m(x) = k(x).$$

D'où la contradiction car k est un élément maximal (ce qui contredit la maximalité de k).
Alors,

$$D(k) = E.$$

□

Corollaire 2.1.

Soit E un espace vectoriel normé et soit G un sous-espace vectoriel normé de E.
Soit $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire continue de norme

$$\|g\|_{G'} = \sup_{x \in G, \|x\| \leq 1} |\langle g, x \rangle|.$$

Alors il existe $f \in E'$ (le dual de E) telle que f est un prolongement de g et vérifie

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}.$$

Démonstration.

On pose $p(x) = \|g\|_{G'}\|x\|$.
$p : E \to \mathbb{R}^+$.
On vérifie que les conditions du théorème de Hahn-Banach ont lieu.
On a :

$$p(x+y) = \|g\|_{G'}\|x+y\| \leq \|g\|_{G'}\|x\| + \|g\|_{G'}\|y\|,$$

et

$$p(\lambda x) = \|g\|_{G'}\|\lambda x\| = |\lambda| p(x).$$

Donc p est une semi-norme sur E.
on va montrer que l'application g vérifie l'inégalité $g(x) \leq p(x)$.
On a :

$$g(x) \leq \|g\|_{G'}\|x\| = p(x).$$

Donc toutes les conditions du théorème de Hahn-Banach sont satisfaites.
Alors il existe $f : E \to \mathbb{R}$ qui vérifie :
i) f est linéaire.
ii) $\forall x \in G : f(x) = g(x)$.
iii) $\forall x \in E : f(x) \leq \|g\|_{G'}\|x\| = p(x)$.
Il nous reste à montrer que f est continue.
On a d'après l'inégalité $f(x) \leq \|g\|_{G'}\|x\|$, on conclut que

$$f(x) \leq c\|x\| \text{ et } f(-x) \leq c\|-x\|.$$

Ce qui signifie que :

$$|f(x)| \leq c\|x\|, \text{ pour tout } x \in E.$$

D'où f est continue sur E et on a :

$$\|f\| \leq \|g\|_{G'}. \tag{2.5}$$

Montrons l'inégalité réciproque $\|f\| \geq \|g\|_{G'}$.
On a :

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x\in E, \|x\|\leq 1} |\langle f, x\rangle| \geq \sup_{x\in G, \|x\|\leq 1} |\langle f, x\rangle| = \sup_{x\in G, \|x\|\leq 1} |\langle g, x\rangle| = \|g\|_{G'}.$$

Donc,

$$\|f\| \geq \|g\|_{G'}. \tag{2.6}$$

De (2.5) et (2.6), on conclut que

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}.$$

□

Corollaire 2.2.

Soit E un espace vectoriel normé. Alors pour tout $x_0 \in E$ et $x_0 \neq 0$, il existe $f \in E'$ tel que $\langle f, x_0\rangle = \|x_0\|^2$ et $\|f\| = \|x_0\|$.

Démonstration.

On applique le corollaire 2.1 avec $G = [x_0] = \mathbb{R}x_0 =$ (l'ensemble engendré par x_0) et

$$g : G \to \mathbb{R},\ g(x) = g(\lambda x_0) = \lambda g(x_0) = \lambda \|x_0\|^2.$$

Montrons que $g \in G'$.
La linéarité de g :
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et $x, y \in E$ avec $x = \lambda_1 x_0$ et $y = \lambda_2 x_0$.
$g(\alpha x + \beta y) = \alpha\lambda_1\|x_0\|^2 + \beta\lambda_2\|x_0\|^2 = \alpha g(x) + \beta g(y)$.
La continuité de g :
$|g(x)| = |\lambda|\|x_0\|^2 = (\|\lambda x_0\|)\|x_0\| = \|x_0\|\|x\|$.
D'où g est continu et on a :

$$\|g\|_{G'} \leq \|x_0\|.$$

$$\|g\| = \sup_{x\in G, \|x\|\leq 1} |\langle g, x\rangle| = \sup_{x\in G, x\neq 0} \frac{|\langle g, x\rangle|}{\|x\|} = \sup_{\lambda\in\mathbb{K}^*} \frac{|\langle g, \lambda x_0\rangle|}{\|\lambda x_0\|} = \sup_{\lambda\in\mathbb{K}^*} \frac{|\lambda|\|x_0\|^2}{|\lambda|\|x_0\|} = \|x_0\|.$$

D'où

$$\|g\| = \|x_0\|.$$

$$\forall x \in G : f(x) = g(x) \Rightarrow f(x_0) = \|x_0\|^2,$$

car,

$$f(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\|^2 \Rightarrow \lambda f(x_0) = \lambda\|x_0\|^2 \Rightarrow f(x_0) = \|x_0\|^2.$$

□

Corollaire 2.3.

Soit E un espace vectoriel normé. Pour tout x dans E, on a

$$\|x\| = \sup_{f\in E', \|f\|_{E'}\leq 1} |\langle f, x\rangle| = \max_{f\in E', \|f\|_{E'}\leq 1} |\langle f, x\rangle|.$$

Démonstration.

i) Montrons que $\|x\| \geq \sup_{f\in E', \|f\|_{E'}\leq 1} |\langle f, x\rangle|$
On a pour x fixé dans E et pour tout f dans E',

$$|\langle f, x\rangle| \leq \|f\|\|x\|,\ \forall x \in E.$$

Donc on prend le sup dans les deux membres pour la dernière inégalité, on obtient

$$\|x\| \geq \sup_{f\in E', \|f\|_{E'}\leq 1} |\langle f, x\rangle|. \tag{2.7}$$

ii) Montrons que $\|x\| \leq \sup_{f\in E', \|f\|_{E'}\leq 1} |\langle f, x\rangle|$.
Soit $x \in E$. Alors il existe f dans E' tel que $\langle f, x\rangle = \|x\|^2$ et $\|f\| = \|x\|$ $\Big($d'après le corollaire 4.3 $\Big)$.
Pour $x \neq 0$, on pose :

$$\widetilde{f} = \frac{f}{\|x\|} \in E'.$$

On a :

$$\|\widetilde{f}\| = 1.$$

D'autre part on a :

$$|\langle \widetilde{f}, x\rangle| = |\langle \frac{f}{\|x\|}, x\rangle| = \frac{1}{\|x\|}|\langle f, x\rangle| = \frac{\|x\|^2}{\|x\|} = \|x\|.$$

Donc,

$$\|x\| = |\langle \widetilde{f}, x\rangle| \leq \sup_{f\in E', \|f\|_{E'}\leq 1} |\langle f, x\rangle|. \tag{2.8}$$

En vertu de (2.7) et (2.8), on conclut le résultat. □

Corollaire 2.4.

Soit E un espace vectoriel normé et $x \neq 0$ un élément de E. Alors il existe une application $f \in E'$ telle que

$$\|f\|_{E'} = 1 \text{ et } f(x_0) = \|x_0\|.$$

Démonstration.

On considère le sous-espace G de E tel que

$$G = [x] = \{\alpha x : \alpha \in \mathbb{R}\} \text{ (l'ensemble engendré par } x).$$

On définit sur G l'application linéaire f par :

$$f(\alpha x) = \alpha\|x\|. \tag{2.9}$$

f est bornée et $\|f\| = 1$. En effet,
pour $y = \alpha x$, on a

$$|f(y)| = |f(\alpha x)| = |\alpha|\|x\| = \|\alpha x\| = \|y\|.$$

D'autre part on a :

$$\|f\| = \sup_{y\neq 0} \frac{|f(y)|}{\|y\|} = 1.$$

Le théorème de Hahn-Banach implique que f possède un prolongement $\widetilde{f}$ définie sur E tout entier de norme $\|\widetilde{f}\| = \|f\| = 1$.
D'après (2.9), on conclut que :

$$\widetilde{f}(x) = f(x) = \|x\|.$$

□

Corollaire 2.5.

Soit E un espace vectoriel normé et M un sous-espace vectoriel normé de E tels que $\overline{M} \neq E$ et $x_0 \notin \overline{M}$. Alors il existe $f \in E'$ telle que :
i) $\langle f, x_0\rangle = 1$.
ii) $\forall x \in M, \langle f, x\rangle = 0$.
iii) $\|f\|_{E'} = \dfrac{1}{d}$ *avec* $d = d(x_0, M)$.

Démonstration.

On a $x_0 \in E\backslash\overline{M}$.
On pose,

$$G = M + \mathbb{R}x_0.$$

Soit $g : G \to \mathbb{R}$.
Utilisons le théorème de Hahn-Banach.
On choisit g comme suit :
•$g(m) = 0$ avec $m \in M$.
•$g(x_0) = 1$
•$g(m + \lambda x_0) = \lambda$.
D'où,

$$g\Big|_M = 0 \text{ et } g \neq 0 \text{ car } \langle g, x_0\rangle = 1.$$

- Il est clair que g est linéaire.
- On montre que g est continue :
On a :

$$|g(x)| = |g(m + \lambda x_0)| = |\lambda|.$$

D'autre part, on a :

$$\forall x \in G : \|x\| = \|m+\lambda x_0\| = |\lambda|\|\frac{m}{\lambda}+x_0\| = |\lambda|\|-\frac{m}{\lambda}-x_0\| = |\lambda|\|y-x_0\| \geq |\lambda| \inf_{y\in M}\|y-x_0\| = |\lambda|d.$$

Donc,

$$\|x\| \geq |\lambda|d.$$

D'où,

$$|\lambda| \leq \frac{1}{d}\|x\|.$$

Ce qui signifie que :

$$|g(x)| \leq \frac{1}{d}\|x\|,$$

et on a :

$$\|g\| \leq \frac{1}{d}.$$

Montrons que $\|g\| = \dfrac{1}{d}$.
On a :
$\|g\| = \sup\limits_{m\in M,\lambda\in\mathbb{K}} \dfrac{|\langle g, m + \lambda x_0\rangle|}{\|m + \lambda x_0\|} = \sup\limits_{m\in M,\lambda\in\mathbb{K}} \dfrac{|\lambda|}{\|m + \lambda x_0\|} = \sup\limits_{m\in M,\lambda\in\mathbb{K}} \dfrac{1}{\|\frac{m}{\lambda} + x_0\|} = \sup\limits_{m\in M,\lambda\in\mathbb{K}} \dfrac{1}{\|\frac{-m}{\lambda} - x_0\|} =$
$\sup\limits_{x\in M} \dfrac{1}{\|x - x_0\|} = \dfrac{1}{\inf\limits_{x\in M}\|x - x_0\|} = \dfrac{1}{d(x_0, M)} = \dfrac{1}{d}.$
En vertu du théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in E'$ telle que :

$$f\Big|_G = g \text{ et } \|f\| = \|g\| = \frac{1}{d},$$

(où $f\Big|_G$ est la restriction de f sur G). □

Théorème 2.2

Soit E un espace vectoriel normé et soit M un sous-espace vectoriel normé de E.
Alors M n'est pas dense dans E si, et seulement s'il existe $f \in E'$ tels que $f \neq 0$, telle que $\langle f, x\rangle = 0$ pour tout $x \in M$.
Autrement dit $\Big(\overline{M} = E\Big) \Leftrightarrow \Big(\forall f \in E' : f\Big|_M = 0 \Rightarrow f \equiv 0\Big)$.

Démonstration.

i) $\Rightarrow$) (la condition est nécessaire) :
Supposons que $\overline{M} \neq E$.
Alors,

$$\exists x_0 \in E \backslash \overline{M} \text{ tel que : } d(x_0, M) = \inf_{y \in M} \|x_0 - y\| > 0.$$

Comme M est un sous-espace vectoriel , alors $x_0 \neq 0$ (car $0 \in M$).
En vertu du corollaire 2.5, il existe $f \in E'$ tel que $\langle f, x_0 \rangle = 1 \neq 0$. Ce qui signifie que f n'est pas nulle et $\langle f, x \rangle \doteq 0$, pour tout $x \in M$. C'est à dire que $f\Big|_M = 0$.
ii) $\Leftarrow$) (la condition est suffisante) :
Supposons que $\forall f \in E' : f\Big|_M = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ et montrons que $\overline{M} = E$.
Il suffit de montrer que $M^{\perp} = \{0\}$.
Soit $f \in M^{\perp}$, alors d'après l'hypothèse on a $f \equiv 0$. □

2.3 Théorème de Hahn-Banach forme géométrique

2.3.1 Séparation des ensembles convexes

Définition 2.3.

Soit E un espace vectoriel normé. On appelle hyperplan affine H, l'ensemble sous la forme suivante :

$$H = \big\{x \in E : f(x) = \alpha\big\},$$

où f est une forme linéaire sur E, telle que $f \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
On appelle $[f = \alpha]$ **l'équation** de l'hyperplan H.

Remarque 2.2.

f n'est pas nécessairement continue (lorsque l'espace E est de dimension infinie, il existe toujours des formes linéaires non continues).

Définition 2.4.

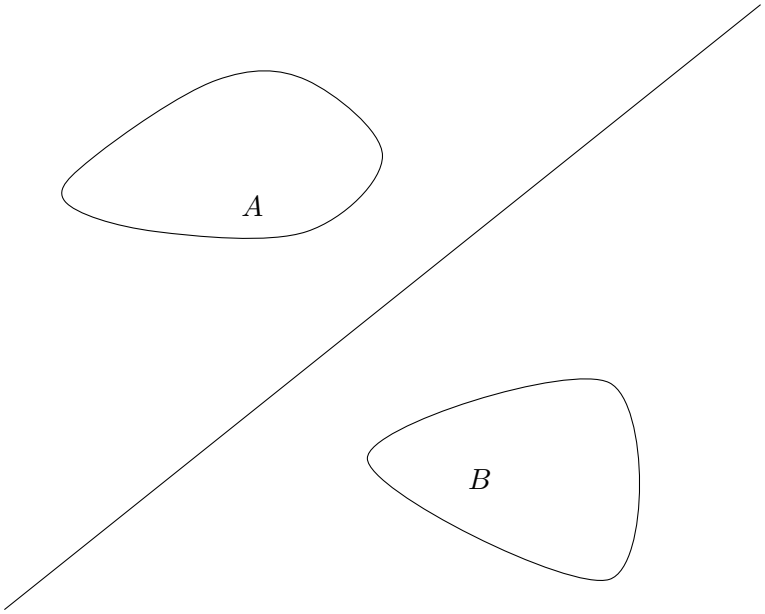
Soient E un espace vectoriel normé. et A et B deux sous-ensembles de E.

1. On dit que A et B sont séparés par l'hyperplan H d'équation $[f = \alpha]$ au sens strict s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$A \subset \{x \in E : f(x) \leq \alpha - \varepsilon\} \text{ et } B \subset \{x \in E : f(x) \geq \alpha + \varepsilon\}.$$

2. On dit que A et B sont séparés par l'hyperplan H d'équation $[f = \alpha]$ au sens large si l'on a

$$A \subset \{x \in E : f(x) \leq \alpha\} \text{ et } B \subset \{x \in E : f(x) \geq \alpha\}.$$



Définition 2.5.

Soient E un espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. On dit que A est convexe si

$$tx + (1-t)y \in A, \ \ \forall x, y \in A, \ \forall t \in [0,1].$$

Théorème 2.3

Soit H un hyperplan d'équation $[f = \alpha]$. Alors

$$\Big(H \text{ est fermé }\Big) \iff \Big(\ f \text{ est continue}\Big).$$

Démonstration.

- La condition est suffisante ($\Longleftarrow$).

Si f est continue, il est bien clair que H est fermé car $H = f^{-1}\Big(\{\alpha\}\Big)$.

- La condition est nécessaire ($\Longrightarrow$).

Supposons que H est fermé et montrons que f est continue.

Comme H est fermé , donc le complémentaire H^c de H est ouvert et non vide car f non identiquement nulle.

Soit $x_0 \in H^c$ et on suppose par exemple que $f(x_0) < \alpha$. Soit $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset H^c$ où $B(x_0, r)$ est la boule ouverte de E de centre x_0 et de rayon $r > 0$, c'est à dire que

$$B(x_0, r) = \Big\{x \in E : \|x - x_0\| < r\Big\}.$$

On a

$$f(x) < \alpha, \ \forall x \in B(x_0, r). \tag{2.10}$$

Soit $x_1 \in B(x_0, r)$ et on suppose que $f(x_1) > \alpha$.

On a :

$$\{x_1 = (1-t)x_0 + tx_1 : \ t \in [0,1] \subset B(x_0, r)\},$$

et donc $f(x_1) \neq \alpha,$ pour tout $t \in [0,1]$.
D'autre part on a :

$$f(x_1) = \alpha \text{ pour } t = \frac{f(x_1) - \alpha}{f(x_1) - f(x_0)}.$$

ce qui contredit le fait que $f(x_1) > \alpha$.
Donc (2.10) a lieu.
En vertu de (2.10), il en résulte que,

$$f(x_0 + ry) < \alpha, \ \forall y \in B(0,1).$$

Ce qui signifie que f est continue et on a :

$$\|f\| \leq \frac{1}{r}\Big(\alpha - f(x_0)\Big).$$

□

2.3.2 Première forme géométrique du théorème de Hahn-Banach

Théorème 2.4

Soient E un espace vectoriel normé et A et B deux sous-ensembles non vides de E.
On suppose qu'on a les propriétés suivantes :
1) A est un ouvert non vide et convexe,
2) B est convexe non vide et $A \cap B \doteq \emptyset$.
Alors ils existent $f \in E'$ telle que $f \neq 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) \leq \gamma \leq f(y), \text{ pour tout } \ x \in A, \ y \in B.$$

Autrement dit, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large.

Démonstration.

i) Soit M un sous-ensemble ouvert, convexe non vide de E tel que $0 \in M$, c'est à dire que (M contient l'origine).
Soit $p : E \to [0, +\infty[$ la fonction définie par :

$$p(x) = \inf\{\beta > 0, \frac{x}{\beta} \in M\}, \text{ pour tout } x \in E. \tag{2.11}$$

Supposons que p possède la propriété suivante :

$$\text{il existe une constante } C \text{ telle que } 0 \leq p(x) \leq C\|x\|, \text{ pour tout } x \in E :$$

$$M = \{x \in E : p(x) < 1\}.$$

La fonction p vérifie les deux propriétés suivantes :

1. $p(\alpha x) = \alpha p(x), \forall \alpha \geq 0, \forall x \in E.$
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in E.$

Comme M est un ouvert et $0 \in M$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset M$.
On a $\forall x \in E, \forall \beta > \dfrac{\|x\|}{r} : \dfrac{x}{\beta} \in B(0,r)$ (donc $\|\dfrac{x}{\beta}\| < r$ et alors $\dfrac{x}{\beta} \in M$.
D'où,

$$p(x) = \inf\{\beta > 0; \frac{x}{\beta} \in M\} \leq \inf\{\beta > \frac{\|x\|}{r}\} = \frac{\|x\|}{r}.$$

Alors,

$$0 \leq p(x) \leq C\|x\|, \forall x \in E, \text{ avec } C = \frac{1}{r}.$$

Soit $x \in M$, alors comme M est un ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $(1+\delta)x \in M$.
Ainsi,

$$p(x) = \inf\{\beta > 0; \frac{x}{\beta} \in M\} \leq \frac{1}{1+\delta} < 1.$$

Réciproquement :
Soit $x \in E$ tel que $p(x) < 1$.
Alors,

$$\exists\ 0 < \beta < 1 \text{ tel que :} \frac{x}{\beta} \in M.$$

Comme M est convexe et $0 \in M$, alors

$$x = (\beta\frac{x}{\beta} + (1-\beta)0) \in M.$$

Par conséquent

$$M = \{x \in E : p(x) < 1\}.$$

On a $\forall \alpha > 0$ et $\forall x \in E$,

$$p(\alpha x) = \inf\{\widetilde{\beta} > 0, \frac{\alpha x}{\beta} \in M\} = \inf\{\alpha\beta >, \frac{\alpha x}{\alpha\beta} = \frac{x}{\beta} \in M\} = \alpha p(x).$$

En outre, $p(0) = 0$.
Ainsi

$$p(\alpha x) = \alpha p(x),\ \forall \alpha \geq 0 \text{ et } \forall x \in E. \tag{2.12}$$

Finalement, soient $x, y \in E$ et $\varepsilon > 0$, alors d'après la propriété (2.12), on a

$$p(\frac{x}{p(x)+\varepsilon}) = \frac{p(x)}{p(x)+\varepsilon} < 1.$$

Donc

$$\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in M \text{ et } \frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in M.$$

Comme M est convexe, alors

$$\frac{\mu}{p(x)+\varepsilon}x + \frac{1-\mu}{p(y)+\varepsilon} \in M,\ \forall\ 0 < \mu < 1.$$

On choisit

$$\mu = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+\varepsilon} \in M,$$

alors,

$$\frac{1}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}(x+y) \in M.$$

Par conséquent,

$$p(x+y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon.$$

Ainsi,

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y),\ \forall \varepsilon > 0. \tag{2.13}$$

Ce qui montre que p est sous-linéaire.
ii) Soit M un sous-ensemble ouvert non vide, convexe de E, et $y_0 \notin M$.
Alors,

$$\exists f \in E' : f(x) < f(y_0),\ \text{pour tout } x \in M.$$

Supposons que $0 \in M$.
Soit $p : E \to [0, +\infty[$ est définie comme (2.11).
Soit $F = Span\{y_0\},\ (y_0 \neq 0$ car $0 \in M$et $y_0 \notin M)$.
Soit

$$f_0 : F \to \mathbb{R},$$

l'application définie par :

$$f_0(\alpha y_0) = \alpha,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Alors,

$$f_0(y) \leq p(y),\ \forall y \in F,$$

et

$$f_0(\alpha y_0) = \alpha \leq \alpha p(y_0) = p(\alpha y_0),\ \text{pour tout}\ \ \alpha \geq 0,$$

(d'après i), $p(y_0) \geq 1$ car $y_0 \notin M$), et

$$f(\alpha y_0) = \alpha \leq 0 \leq p(\alpha y_0),\ \text{pour tout}\ \ \alpha \leq 0,$$

(d'après i), $p(y) \geq y$ pour tout $y \in E$).
Comme p est sous-linéaire d'après i), le théorème de Hahn-Banach (forme analytique), montre qu'il existe une application $f : E \to \mathbb{R}, f \neq 0$ telle que

$$f(y_0) = f_0(y_0) = 1 \text{ et } \ f(x) \leq p(x),\ \text{pour tout } x \in E.$$

De plus, l'inégalité $p(x) \leq C\|x\|$ pour tout $x \in E$ établie dans i) implique que :

$$f(x) \leq p(x) \leq C\|x\| \text{ et } \ -f(x) \leq p(-x) \leq C\|x\|,\ \text{pour tout}\ \ x \in E.$$

Ainsi

$$\mid f(x) \mid \leq C \parallel x \parallel,\ \forall x \in E,$$

c'est à dire que f est continue.
Donc $f \in E'$.
De plus, on a :

$$g(x) \leq p(x) < 1 = f_0(y_0) = f(y),\ \text{pour tout}\ \ x \in M,$$

(d'après i) $p(x) < 1$ pour tout $x \in M$). Ainsi l'assertion est prouvée si $0 \in M$.
Dans la suite, supposons que $0 \notin M$.
On choisit un certain $x_0 \in M$ et on pose :

$$\widetilde{M} = \Big\{x - x_0 \in E; x \in M\Big\} \text{ et } \widetilde{y}_0 = y_0 - x_0. \tag{2.14}$$

Comme $0 \in \widetilde{M}$ et $\widetilde{y}_0 \notin \widetilde{M}$, alors en vertu (2.14) on conclut qu'il existe $f \in E'$ telle que :

$$f(\widetilde{x}) < f(\widetilde{y}_0),\ \text{pour tout}\ \ \widetilde{x} \in \widetilde{M}.$$

Comme f est linéaire, donc $f(x) < f(y_0)$ pour tout $x \in M$.
iii) Finalement, soit A un sous-ensemble ouvert non vide et convexe de E et soit B un sous-ensemble non vide et convexe de E tels que $A \cap B = \emptyset$ (comme l'ennoncé du théorème).
On définit l'ensemble M comme suit :

$$M = \bigcup_{y \in B} \Big\{x - y \in E : x \in A\Big\}.$$

On a M est un ouvert car il est union des ouverts, et M est aussi convexe. En effet :
Soit $z_i = x_i - y_i \in C$ avec $x_i \in A$ et $y_i \in B$ pour $i = 1, 2$.
Comme

$$\mu x_1 + (1 - \mu)x_2 \in A \text{ et } \mu y_1 + (1 - \mu)y_2 \in B \text{ pour tout } 0 < \mu < 1,$$

et comme A et B sont tous les deux convexes, alors on conclut que,

$$\mu z_1 + (1-\mu)z_2 = [\mu x_1 + (1-\mu)x_2] - [\mu y_1 + (1-\mu)y_2] \in M, \text{ pour tout } 0 < \mu < 1.$$

Finalement, comme $A \cap B = \emptyset$, alors $0 \notin M$.
D'après ii),

$$\exists f \in E', f \neq 0 \text{ telle que : } f(z) < f(0) = 0, \text{ pour tout } z \in M,$$

où $z = x - y$ avec $x \in A$ et $y \in B$.
En d'autre terme,

$$f(x) < f(y) \text{ pour tout } x \in A \text{ et pour tout } y \in B.$$

Par conséquent,

$$\exists \gamma \in \mathbb{R} \text{ tel que : } f(x) \leq \gamma \leq \inf_{y \in B} f(y), \text{ pour tout } x \in A.$$

Ce qui achève la démonstration. □

2.3.3 Deuxième forme géométrique du théorème de Hahn-Banach

Théorème 2.5

Soit E un espace vectoriel réel et Soient A et K deux sous-ensembles non vides, tels que :
1) A est fermé et convexe.
2) K est compact et convexe tel que $A \cap K = \emptyset$.
Alors il existe $f \in E', f \neq 0, \gamma \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$ tels que :

$$f(x) \leq \gamma - \delta < \gamma + \delta \leq f(y), \text{ pour tout } x \in A, y \in K.$$

Autrement dit, A et B sont séparés au sens strict par un hyperplan fermé.

Démonstration.

Pour tout $r > 0$, on pose :

$$A_r = \bigcup_{x \in A} B(x, r) \text{ et } K_r = \bigcup_{y \in K} B(y, r).$$

Alors les deux ensembles A_r et K_r sont ouverts non vides et convexes. De plus, il existe $r_0 > 0$ tel que

$$A_r \cap K_r \doteq \emptyset \text{ pour tout } r \leq r_0. \tag{2.15}$$

On montre (2.15) par l'absurde.
Supposons qu'il existe $x_n \in A$ et $y_n \in K$, $n \geq 1$ tels que :

$$x_n + v_n = y_n + w_n \text{ pour tout } n \geq 1 \text{ et } v_n \to 0 \text{ et } w_n \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Comme l'ensemble K est compact, alors il existe une sous-suite (y_{n_k}) qui converge dans K.
Donc la sous-suite (x_{n_k}) converge aussi dans E et $\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} \in A$ car A est fermé.
Ainsi $\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = \lim_{k \to +\infty} y_{n_k} \in A \cap K$. Ce qui contredit le fait que $A \cap B = \varnothing$.
Donc d'après le théorème 2.4, les deux ensembles A_{r_0} et B_{r_0} sont séparés par un hyperplan, c'est-à-dire qu'il existe $f \in E', f \neq 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x+v) \leq \gamma \leq f(y+w) \text{ pour tout } x \in A, y \in K \text{ et pour tout } v, w \in E \text{ avec } \|v\| = \|w\| = r_0.$$

Ainsi

$$f(x)+r_0\|l\| = f(x)+\sup_{\|v\|=r_0} l(v) \leq \gamma \leq f(y)+\inf_{\|w\|=r_0} f(w) = f(y)-r_0\|f\| \text{ pour tout } x \in A, y \in B.$$

Comme $f \neq 0$, on peut prendre $\delta = r_0\|f\|$.
La preuve est achevée. □

Corollaire 2.6.

Soit E vectoriel normé et soit $M \subset E$ un sous-espace vectoriel de E tel que $\overline{M} \neq E$.
Alors, il existe

$$\exists f \in E', f \neq 0 \text{ telle que : } \langle f, x\rangle = 0, \ \forall x \in M.$$

Démonstration.

Soit $x_0 \in E, x_0 \notin \overline{M}$. Appliquons le théorème 2.5 avec $A = \overline{M}$ et $B = \{x_0\}$.
Alors il existe $f \in E'$ et $f \neq 0$ telle que l'hyperplan H d'équation $[f = \alpha]$ sépare au sens strict $\overline{M}$ et $\{x_0\}$.
On a :

$$\langle f, x\rangle < \alpha < \langle f, x_0\rangle, \ \forall x \in M.$$

Par conséquent,
comme $\lambda\langle f, x\rangle < \alpha$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\langle f, x\rangle = 0, \ \forall x \in M.$$

□

Remarque 2.3.

L'intérêt du corollaire 2.6 est qu'on l'utilise pour montrer qu'un sous espace vectoriel M de E est dense dans E (c'est à dire que $\overline{M} = E$).
Et pour cela on utilise le résultat suivant :

$$\overline{M} = E \Leftrightarrow M^{\perp} = \{0\} \text{ où } M^{\perp} = \{f \in E' : \langle f, x\rangle = 0 \ \ \forall x \in M\}.$$

2.4 Exercices

Exercice 2.1.
1. On considère L'espace de Banach $L^{\infty}(0,1)$ muni de la norme $\| \ . \ \|_{\infty}$, définie par :

$$\| \ f \ \|_{\infty} = \sup_{x \in t \in [0,1]} |f(t)|,$$

et le sous-espace $C\big([0,1]\big)$ formé des fonctions continues.
a) Montrer que l'opérateur $T : C\big([0,1]\big) \longrightarrow \mathbb{R}$, défini par :

$$T(f) = f(1)$$

est linéaire et continue, puis calculer $\| T \|$.
b) En déduire qu'il existe une forme linéaire continue $\widetilde{T} : L^\infty(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ *qui vérifie :*

$$\| \widetilde{T} \| = 1 \text{ et } \widetilde{T}(f) = T(f) \quad \forall f \in C\big([0,1]\big).$$

2. On considère l'espace de Banach $L^1(0,1)$ *muni de la norme* $\| \cdot \|_1$*, définie par :*

$$\| f \|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

a) Soit $g \in L^1(0,1)$. *On pose* $L_g(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$.
- Montrer que L_g *est une forme linéaire continue sur* $L^\infty(0,1)$.
b) On considère La suite de fonctions continues $(f_n)_n$ *définie par :*

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 - \frac{1}{n}, \\ nt - (n-1) & \text{si} \quad 1 - \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

- Montrer que $L_g(f_n) \to 0$ *lorsque* $n \to +\infty$.
c) En déduire qu'il n'existe pas $g \in L^1(0,1)$ *tel que :*

$$\widetilde{T}(f) = L_g(f) \quad \forall f \in L^\infty(0,1).$$

Exercice 2.2.
Soit E *un espace de Banach réel.*
Soit $x \in E, x \neq 0$.
- Montrer qu'il existe $T \in E'$ *tel que* $Tx = \| x \|_E$ *et* $\| T \|_{E'} = 1$.
Indication : *On peut définir* T *sur la droite engendrée par* x *et puis on utilise le théorème de prolongement de Hahn-Banach.*

Exercice 2.3.
Soit E *un espace de Banach sur* $\mathbb{R}$ *et* E' *son dual topologique . Soit* $x \in E$ *tel que* $x \neq 0$.
1. Montrer qu'il existe $f \in E'$ *telle que* $\|f\|_{E'} = 1$ *et* $f(x) = \|x\|_E$.
2. Soit F *un espace de Banach sur* $\mathbb{R}$ *tel que* F *est réflexif et* $g \in F'$. *Montrer qu'il existe* $y \in F$, $y \neq 0$ *tel que :*

$$g(y) = \|y\|_F \|g\|_{F'}.$$

3. Soit $G = \big\{x = (x_n)_{n\geq 1}, \quad x_n \in \mathbb{R}, \quad x_n \to 0\big\}$.
On munit G *de la norme,*

$$\|x\| = \sup_{n\geq 1} | \, x_n \, | \, .$$

On rappelle que G *muni de la norme précédente est un espace de Banach sur* $\mathbb{R}$.
a) On définit sur G *une forme linéaire* g *par :*

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{2^{k-1}}.$$

- Montrer que $g \in G'$ *et* $\|g\|_{G'} = 2$.
b) Montrer qu'il n'existe pas $x \in G$ *qui vérifie :*

$$g(x) = 2 \| x \|_G \, .$$

c) En déduire que G n'est pas réflexif.

Exercice 2.4.
Soient E un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ et M un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$.
Montrer que :

$$\Big(x \notin \overline{M}\Big) \Longleftrightarrow \Big(\exists f \in E' \text{ tel que } \ f(x) \neq 0 \text{ et } f(y) = 0, \ \ \forall y \in M\Big).$$

Exercice 2.5.
Soit E un espace vectoriel normé et soient $x, y \in E$ tels que $x \neq y$.
Montrer qu'il existe $f \in E'$ telle que

$$\langle f, x\rangle \neq \langle f, y\rangle.$$

Exercice 2.6.
Soit E un espace de Banach et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E'.
On suppose que pour tout $x \in E$ la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ existe.
- Montrer que f est une forme linéaire continue sue E, c'est à dire que $f \in E'$.

Exercice 2.7.
Soit E un espace vectoriel normé et soit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E'.
On désigne par $\overline{B}_E(0,1) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ la boule unité fermée de E.
- Montrer que :
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $E' \Longleftrightarrow$ la suite $(\langle f_n, x\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente dans $\overline{B}_E(0,1)$.

Exercice 2.8.
Soit E un espace vectoriel normé et $x_0 \in E$.
On suppose que pour tout $f \in E'$ tel que $\|f\|_{E'} = 1$, on a $|\langle f, x_0\rangle| \leq 1$.
- Montrer que $\|x_0\|_E \leq 1$.

Exercice 2.9.
Soit E un espace vectoriel normé et $f \in E'$ et soit $T \in L(E)$.
- Montrer que :

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E=1, \ \|f\|_{E'}=1} |\langle Tx, f\rangle|.$$

Exercice 2.10.
Soit E un espace vectoriel normé et M un sous-ensemble quelconque de E.
On pose $M^\perp = \Big\{f \in E' : \langle f, x\rangle = 0, \ \forall x \in M\Big\}$.
1) Montrer que $M^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E'.
2) Supposons que E est un espace de Hilbert.
- Que peut-on dire de $M^\perp$?
3) Soit M un sous-espace de E.
- Montrer que :

$$M = \Big\{x \in E : \langle f, x\rangle = 0, \ \forall f \in M^\perp\Big\}.$$

Exercice 2.11.
Soit E un espace vectoriel normé.
Supposons que $x_0 \in E$ tel que $|f(x_0)| \leq C$ (où C une constante positive) , pour tout $f \in E'$ et $\|f\| = 1$.
- Montrer que $\|x_0\| \leq C$.

Exercice 2.12.
Soit E un espace vectoriel normé et $\{f_1, f_2, ..., f_p\} \subset E'$ une famille libre.
- Montrer que l'application $T : E \to \mathbb{C}^p$ définie par :

$$Tx = \Big(f_1(x), f_2(x), ..., f_p(x)\Big),$$

est surjective.

Exercice 2.13.
Soit E un espace vectoriel normé et M un sous-espace vectoriel normé de E.
1) Montrer que

$$\overline{M} = \Big\{ \cap \ker(f) : f \in E' \text{ et } M \subset \ker(f)\Big\}.$$

2) En déduire que M est dense dans E si et seulement si toute forme linéaire continue sur E qui s'annule sur M s'annule sur E.

Exercice 2.14.
Soit $E = \Big\{ f \in C([0,1]) : f(0) = 0\Big\}$ muni de la norme $\|f\| = \sup\limits_{0\leq t\leq 1} |f(t)|$.
On considère l'opérateur $T : E \to \mathbb{C}$ défini par :

$$T(f) = \int_0^1 f(t)\, dt.$$

1) Montrer que $T \in E'$ et calculer $\|T\|_{E'}$.
2) Existe-t-il $f \in E$ tel que $\|f\| = 1$ et $T(f) = \|T\|_{E'}$?

Exercice 2.15.
Soit,

$$E = \Big\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \lim_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = 0\Big\},$$

muni de sa norme usuelle,

$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |x_n|.$$

On considère l'opérateur $T : E \to \mathbb{C}$ défini par :

$$T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{2^n}.$$

1) Montrer que $T \in E'$ et calculer $\|T\|_{E'}$.
2) Existe-t-il $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $T(x) = \|T\|_{E'}$?

Exercice 2.16.
Soit E un espace vectoriel normé et soit I un ensemble d'indices.
Soit $(x_i)_{i\in I} \subset E$ et $(\alpha_i)_{i\in I} \subset \mathbb{R}$.
- Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
1) Il existe $f \in E'$ tel que $f(x_i) = \alpha_i,\ \forall i \in I$.
2) Il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall J \subset I,\ \forall (\beta_i)_{i\in J} \subset \mathbb{R}$, on a :

$$|\sum_{i\in J} \beta_i\alpha_i| \leq C\|\sum_{i\in J} \beta_i x_i\|.$$

- Montrer que l'on peut choisir $f \in E'$ avec $\|f\|_{E'} \leq C$ dans l'implication $2) \Longrightarrow 1)$.

Exercice 2.17.
Soit $E = \mathbb{R}^n$. On pose :

$$L = \Big\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, x_i > 0,\ \forall i = 1, 2, ..., n\Big\}.$$

Soit M un sous-espace vectoriel de E tel que $M \cap L = \{0\}$.
- Montrer qu'il existe un hyperplan H de E tel que $M \subset H$ et $H \cap L = \{0\}$.
*(**Indication :** On peut commencer par prouver que $M^\perp \cap \mathring{L} = \emptyset$).*

Exercice 2.18.
Soit E un espace vectoriel normé et $f \in E'$ avec $f \neq 0$.
On considère l'hyperplan H d'équation $[f = 0]$.
Le but de cet exercice est d'établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in E :\ d(x, H) = \inf_{y\in H} \|x - y\| = \frac{|\langle f, x\rangle|}{\|f\|}. \tag{2.16}$$

1) vérifier que :

$$|\langle f, x\rangle| \leq \|f\|\ d(x, H),\ \forall x \in E.$$

2) Soit $u \in E,\ u \notin H$; en supposant que $y = x - \dfrac{\langle f, x\rangle}{\langle f, u\rangle}u \in H$.
- Montrer que

$$d(x, H) \leq \frac{|\langle f, x\rangle|}{|\langle f, u\rangle|}\|u\|,\ \forall x \in E.$$

3) Démontrer (2.16).

Exercice 2.19.
Soit $E = C\Big([0, 1], \mathbb{C}\Big)$.
On désigne par E_1 l'espace E muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{0\leq t\leq 1} |f(t)|,$$

et on note E_2 l'espace E muni de la norme

$$\|f\|_2 = \int_0^1 |f(t)|\ dt.$$

On considère l'application $A : E \to \mathbb{C}$ définie par :

$$Af = \int_0^1 tf(t)\ dt.$$

1) Montrer que $A \in E_1'$ et $A \in E_2'$.
- Calculer $\| A \|_{E_1'}$ et $\| A \|_{E_2'}$.
- Existe-t-il $f \in E$ avec $\|f\| = 1$ et $\|Af\| = \|A\|$? Autrement dit, $\|A\|$ est-elle atteinte ?
2) Soit $g \in E$. On définit l'application $A_g : E_1 \to \mathbb{C}$ par :

$$A_g f = \int_0^1 g(t)f(t)\ dt.$$

- Montrer que $A_g \in E_2'$ et calculer $\| A_g \|$.
- $\| A_g \|$ est-t-elle atteinte ?.
Même question si $A_g \in E_1'$.
3) Soit l'opérateur $T : E \to \mathbb{C}$ défini par :

$$Tf = \int_{0^+}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\ dt.$$

- Montrer que T est bien défini sur E.
- Montrer que T n'est pas continu.

Exercice 2.20.
Soit E un espace vectoriel normé et soit K une partie convexe de E avec $0 \in K$.
On pose
$K_1 = \Big\{ f \in E' : \forall x \in K : \langle f, x\rangle \leq 1 \Big\}$ *et*
$K_2 = \Big\{ y \in E : \forall f \in K_1 : \langle f, y\rangle \leq 1 \Big\}$.
- Montrer que $\overline{K} = K_2$.

Exercice 2.21.
Soit $E = C\Big([0,1]\Big)$ muni de la norme de convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$.
1) On pose :

$$X = \Big\{ f \in E : f(x) > 0,\ \forall x \in [0,1] \Big\}.$$

- Montrer que X est un ouvert convexe de E.
2) Soit,

$$F = \Big\{ g \in E : g(\frac{1}{n}) = -\frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Big\}.$$

- Montrer qu'il existent $\varphi \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\varphi(g) \leq \alpha \leq \varphi(f),\ \ \forall f \in X, \forall g \in F.$$

Exercice 2.22.
Soit

$$S = \Big\{ f \in L^\infty(\mathbb{R}) : \exists\ \Omega \text{ un ouvert de } \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = 0\ \ p.p.\ x \in \Omega \Big\}.$$

On pose : $\mathbb{1} = (1, 1, 1, ...)$.
1) Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $L^\infty(\mathbb{R})$.
2) Montrer que $\|\mathbb{1} - f\|_\infty \geq 1$ pour toute $f \in S$.

3) En déduire qu'il existe $\varphi \in (L^\infty(\mathbb{R}))'$ telle que $\varphi = 0$ sur S et $\varphi(1) = 1$.
*(**Indication :** on construit une forme linéaire continue de norme 1 sur le sous-espace vectoriel engendré par S et 1).*

Exercice 2.23.
On considère l'espace

$$l^\infty = \Big\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{R} \text{ et } (x_n) \text{ est bornée}\Big\}.$$

Soit $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in l^\infty$. On définit l'opérateur T sur l^∞ par :

$$Tx = (x_2, x_3, ...).$$

1) Soit M le sous-espace vectoriel de l'espace réel l^∞ formé par les vecteurs $x - \tilde{x}$ pour $x \in l^\infty$.
On note $1 = (1, 1, 1, ...)$.
- Montrer que $dis(1, M) = 1$.
2) Montrer qu'il existe une forme linéaire continue L sur l^∞ telle que :

$$\|L\| = 1 \text{ et } L(x) = L(\tilde{x}) \text{ pour tout } x \in l^\infty.$$

Exercice 2.24.
1) Soit X un espace vectoriel normé.
On considère une forme linéaire T sur X.
- Montrer que : $\Big(T$ est continue sur $X\Big) \Longleftrightarrow \Big(\ker(T)$ est fermé$\Big)$.
2) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ localement convexe et soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que $\varphi \neq 0$.
a) On suppose que $H = \ker\varphi$ est fermé dans E.
- Montrer qu'il existe $\psi \in E'$ telle que $\psi \neq 0$ et $\psi = 0$ sur H.
*(**Indication :** On utilise le théorème de Hahn-Banach forme géométrique, en séparant H d'un point $a \in E\backslash H$).*
- Montrer que φ est continue.
b) Montrer que si φ n'est pas continue alors $\overline{\ker(\varphi)} = E$.

Exercice 2.25.
1) Soit E un espace de Banach réel et E' son dual.
Soient $\varphi, \psi \in E'$ telles que $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$.
Soit $\varepsilon > 0$ tel que

$$|\varphi(x)| \leq \varepsilon,\ \forall x \in \ker\cap B_E,$$

où B_E est la boule unité fermée de E.
a) On pose $\varphi_1 = \varphi\,|_{\ker\psi}$ (la restriction de φ sur $\ker\psi$).
- En utilisant φ_1, montrer que :

$$\exists\tilde{\varphi} \in E' \text{ et } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tels que } \|\tilde{\varphi}\| \leq \varepsilon \text{ et } \tilde{\varphi} - \varphi = \alpha\psi$$

b) Montrer que $\Big|1 - |\alpha|\Big| \leq \varepsilon$ (on rappelle que $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$).
c) En déduire que $\|\varphi + \psi\| \leq \varepsilon$ ou $\|\varphi - \psi\| \leq \varepsilon$.
*(**Indication :** On sépare les cas $\alpha \geq 0$ et $\alpha < 0$).*
Soit E un espace de Banach.

On dit qu'un sous-espace vectoriel fermé N de E' est normant si

$$\exists a > 0 \text{ tel que : } \sup\Big\{|f(x)|,\ f \in N \cap B_{E'}\Big\} \geq a\|x\|,\ \forall x \in E.$$

2) On suppose que E est un espace de Banach sur $\mathbb{R}$.
Soit $\psi \in E''\backslash E$ et soit $\delta = dist(\psi, E) > 0$.
- Montrer qu'il n'existe pas $x_0 \in E$ tel que :

$$\|x_0\| = 1 \text{ et } \sup\Big\{|f(x_0)|,\ f \in \ker\psi \cap B_{E'}\Big\} \leq \frac{\delta}{4\|\psi\|}.$$

Indication : *On utilise 1) c).*
- Conclusion.

Exercice 2.26.
Le but de cet exercice est de montrer qu'en dimension infinie, on ne peut pas séparer deux convexes fermés.
Soit l'espace de Banach

$$l^1 = \Big\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R} \text{ tel que } \sum_{n=1}^{+\infty}|x_n| < +\infty\Big\},$$

muni de la norme,

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|.$$

On considère les ensembles suivants :
$A = \Big\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^1 :\ \forall n \in \mathbb{N}^* : x_{2n} = 0\Big\}$ *et*
$B = \Big\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^1 :\ \forall n \in \mathbb{N}^* : x_{2n} = \dfrac{x_{2n-1}}{2^n}\Big\}$.
1) Montrer que A et B sont deux sous-espaces fermés de l^1 et que $l^1 = \overline{A+B}$.
2) Soit $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^1$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* :\ y_{2n-1} = 0 \text{ et } y_{2n} = \frac{1}{2^n}.$$

- Montrer que $y \notin A + B$ et que si $D = A - c = \Big\{a - c, a \in A\Big\}$, on a $D \cap B = \varnothing$.
- Montrer que D et B ne peuvent pas être séparés au sens large.

CHAPITRE 3

THÉORÈME DE BAIRE, THÉORÈME DE BANACH-STEINHAUS

3.1 Théorème de Baire

Soit E un espace topologique ; un ouvert U de E est dense dans E si et seulement si le fermé complémentaire U^c est d'intérieur vide. Si on a un nombre fini d'ouverts denses, on vérifie facilement de proche en proche que $U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n$ est encore un ouvert dense. Le théorème de Baire donne un cas où cette propriété triviale d'intersection finie peut s'étendre aux suites d'ouverts denses.

Théorème 3.1

(Théorème de Baire)
Soit E un espace métrique complet ; si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties ouvertes et denses dans E, alors l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense dans l'espace E.

Démonstration.

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses de E, soit V une partie ouverte non vide de E, on doit montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \cap V \neq \varnothing$.
Comme U_0 est dense alors $U_0 \cap V \neq \varnothing$ et on peut choisir un point $x_0 \in V \cap U_0$.
Puisque $V \cap U_0$ est ouvert, alors il existe un nombre $r_0 > 0$, que l'on peut choisir inférieur ou égal à 1, tel que la boule ouverte $B(x_0; 2r_0) \subset V \cap U_0$.
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on construit une suite $(x_n) \subset E$ et une suite $(r_n) \subset \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$r_n \leq \frac{1}{2^n},$$

et tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, B(x_n; 2r_n) \subset U_n \cap B(x_{n-1}; r_{n-1}).$$

En effet,
supposons que x_n et r_n construits, comme U_{n+1} est dense alors,

$$\exists\, x_{n+1} \in U_{n+1} \cap B(x_n; r_n).$$

Comme $U_{n+1} \cap B(x_n; r_n)$ est ouvert alors,

$$\exists r_{n+1} \text{ tel que } 0 < r_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \text{ et } B(x_{n+1}2r_{n+1}) \subset U_{n+1} \cap B(x_n, 2r_n).$$

Notons maintenant B_n la boule fermée de centre x_n et de rayon r_n. On a :

$$B_{n+1} \subset B(x_{n+1}, 2r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \subset B_n.$$

Comme l'espace E est complet et que les ensembles B_n sont fermés, décroissants, non vides et qu'aussi leur diamètre tend vers 0, on a

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \neq \varnothing.$$

Par construction on a

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset V \cap \Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big).$$

Ce qui montre que

$$V \cap \Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big) \neq \varnothing.$$

□

Théorème 3.2

(Théorème de Baire)
Soit (E, d) un espace métrique complet. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des sous-ensembles fermés de E tels que $\overset{\circ}{F_n} = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\Big)^{\circ} = \emptyset,$$

où $\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\Big)^{\circ}$ est l'interieur de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Démonstration.

$\overset{\circ}{F_n} = \emptyset \Leftrightarrow E = \overline{F_n^c} = \overset{\circ}{F_n}^c$.
On pose :

$$\mathcal{O}_n = F_n^c.$$

On a $\mathcal{O}_n$ est dense dans E.
Soit

$$\mathcal{O} = \bigcap_{n\geq 0} \mathcal{O}_n.$$

On a :

$$\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\Big)^{\circ} = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{O} \text{ est dense dans } E.$$

Donc il suffit de montrer que $\mathcal{O}$ est un ensemble dense dans E.
En d'autre terme, on montre que l'intersection de $\mathcal{O}$ avec tout ouvert de E est non vide.
Soit Ω un ouvert non vide de E. on veut montrer que $\Omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$.
Utilisons le théorème des boules emboitées.
Soit $x_0 \in \Omega$ et $r_0 > 0$ tels que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset \Omega$ (puisque Ω est un ouvert).
On choisit $x_1 \in \mathcal{O}_n \cap \overline{B}(x_0, r_0)$ et $r_1 > 0$, $0 < r_1 < \dfrac{r_0}{2}$ et $\overline{B}(x_1, r_1) \subset \overline{B}(x_0, r_0) \cap \mathcal{O}_1$.
Par récurrence on construit une suite qui vérifie les mêmes conditions, on obtient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, r_n > 0$ avec $x_n \in E$.

$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset \overline{B}(x_n, r_n) \cap \mathcal{O}_n$, $0 < r_{n+1} < r_n$.
Donc les boules $\overline{B}(x_i, r_i)$ sont emboitées.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy car,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p > q \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \varepsilon = r_p(\frac{1}{2})^{p-1}.$$

Comme l'espace (E, d) est complet, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite que l'on note x.
Comme les boules $\overline{B}(x_i, r_i)$ sont emboitées alors,

$$\forall p \in \mathbb{N} : x_{n+p} \in \overline{B}(x_n, r_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

$$\lim_{p\to+\infty} x_{n+p} = x \in \overline{B}(x_n, r_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc on a aussi $x \in \overline{B}(x_n, r_n) \cap \mathcal{O}_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est à dire que $x \in \mathcal{O}$.
$x \in \Omega$ puisque $\overline{B}(x_0, r_0) \subset \Omega \cap \mathcal{O}_1$. Et donc $\Omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$.
ce qui signifie que $\mathcal{O}$ est dense dans E.
La démonstration est achevée. □

Corollaire 3.1.

Soit (E, d) un espace métrique complet. ($E \neq \emptyset$).
On considère la suite des sous-ensembles fermés $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E.
Supposons que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathring{F}_{n_0} \neq \emptyset$, en réalité on peut même dire que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{F}_n$ est dense dans E.

Démonstration.

Montrons par l'absurde. c'est-à-dire qu'on suppose que $\mathring{F}_n = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Comme $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, alors d'après le théorème 3.2,

$$\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\Big)^\circ = \emptyset = \mathring{E} = E = \emptyset.$$

Ce qui est impossible car $E \neq \emptyset$. □

3.2 Théorème de Banach-Steinhaus

Théorème 3.3

(Théorème de Banach-Steinhaus)
Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach et $(F, \|.\|_F)$ un espace vectoriel normé quelconque.
On considère la famille d'opérateurs $(A_i)_{i\in I}$ telle que $A_i \in L(E, F)$, pour tout $i \in I$.
C'est-à-dire que :

$$A_i : E \to F \text{ est linéaire continu pour tout } i \in I.$$

On suppose que

$$\exists\, C_x > 0, \forall x \in E : \sup_{i\in I} \|A_i(x)\|_F \leq C_x < +\infty,$$

alors,

$$\exists C > 0 : \sup_{i\in I} \|A_i\|_{L(E,F)} \leq C < +\infty.$$

C'est-à-dire que la famille d'opérateurs $(A_i)_{i\in I}$ est uniformément bornée.

Remarque 3.1.

Le théorème de Banach-Steinhaus est dit aussi théorème de principe de la borne uniforme.

Démonstration.

Rappels :

1. $A : E \to F$ est linéaire continu $\Leftrightarrow \exists C > 0 : \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|_F \leq C, \forall x \in E.$
2. $L(E, F)$ est espace vectoriel normé muni de la norme suivante :

$$\|A\|_{L(E,F)} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|_F.$$

3. Si F est de Banach, alors l'espace $L(E, F)$ est de Banach.

On commence la démonstration du théorème 3.3.
Pour $n \geq 1$, on pose :

$$G_n = \{x \in E : \|A_i x\|_F \leq n, \forall i \in I\}.$$

On va appliquer le théorème de Baire.
$G_n \neq \emptyset$ car $0 \in G_n$ (puisque A_i est linéaire).
L'ensemble G_n est fermé. En effet :
$G_n = \bigcap_{i\in I} G_{n_i}$ où $G_{n_i} = \{x \in E : \|A_i x\| \leq n$ et i est fixé$\}$ est fermé car il est l'image réciproque d'un ensemble fermé par une application continue.
D'après l'hypothèse du théorème, $E = \bigcup_{n\geq 1} G_n$.
En vertu du théorème de Baire 3.1, il existe $n_0 \in \mathbb{N} : \overset{\circ}{G}_{n_0} \neq \emptyset$.
$\overset{\circ}{G}_{n_0} \neq \emptyset$, donc il existe $x_0 \in \overset{\circ}{G}_{n_0}$ et $r > 0$ tels que $B(x_0, r) \subset G_{n_0}$.
D'après la définition de G_{n_0}, on a :

$$\|A_i x\|_F \leq n_0, \forall i \in I, \forall x \in B(x_0, r).$$

Comme $B(x_0, r) = x_0 + rB(0, r)$ (car $B(x_0, r)$ est convexe), on pose $x = x_0 + rz$.
Donc,

$$\|A_i(x_0 + rz)\|_F \leq n_0, \ \forall z \in B(0, 1), \ \forall i \in I.$$

On a :

$$\forall i \in I : \|A_i z\| \leq \frac{1}{r}(\|A_i x_0\|_F + n_0), \ \forall z : \|z\| \leq 1.$$

Donc,

$$\forall i \in I : \|A_i z\| \leq \frac{2n_0}{r} = C.$$

□

Corollaire 3.2.

Soient E et F deux espaces de Banach.
On considère la famille d'opérateurs $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $A_n \in L(E,F)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que $\forall x \in E : A_n(x) \to A(x)$ lorsque $n \to +\infty$. Alors
1. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|_{L(E,F)} < C$.
2. $A \in L(E,F)$.
3. $\|A\| \leq \underline{\lim}\|A_n\|$.

Démonstration.

1. Comme la suite $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans F, alors elle est bornée. Donc,

$$\exists C_x > 0, \text{ pour tout } x \in E : \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n(x)\| \leq C_x.$$

En vertu du théorème de Banach-Steinhaus 3.3,

$$\exists C > 0 \text{ telle que } : \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|_{L(E,F)} < C.$$

En d'autre terme il existe $C > 0$ telle que :

$$\|A_n(x)\| \leq C\|x\|, \forall x \in E.$$

2. Comme A_n est linéaire, alors A est linéaire (la linéarité de la limite).
D'autre part on a :

$$\|A_n(x)\| \leq C\|x\| \Rightarrow \|A(x)\| \leq C\|x\|.$$

Par conséquent A est continu.
D'où $A \in L(E,F)$.
3. On a :

$$\|A_n(x)\|_F \leq \|A_n\|_{L(E,F)}\|x\|, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E,$$

(car A_n est linéaire continu), et donc $(\|A_n\|)$ est bornée.
Alors,

$$\|A\| \leq \underline{\lim}\|A_n\|.$$

□

Proposition 3.1

Soient E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. On considère la famille d'opérateurs $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $A_n \in L(E,F)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on considère $A \in L(E,F)$.
Alors on a l'équivalence suivante :
$\Big(A_n(x) \to A(x), \forall x \in E\Big) \Longleftrightarrow$

$$\left(\begin{array}{c} 1.\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|_{L(E,F)} < C < \infty \\ \text{et} \\ 2.\ A_n(x) \to A(x),\ \forall x \in M,\ \text{tel que}\ \overline{M} = E \end{array}\right).$$

Démonstration.

i) La condition est nécessaire :
Supposons que $A_n(x) \to A(x), \forall x \in E$. Alors la suite $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Et d'après le théorème de Banach-Steinhaus $(\|A_n\|)$ est bornée.
ii) La condition est suffisante :
On a : $\overline{M} = E$. Soit $x \in E$.
Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in M : \|x - x_\varepsilon\| \leq \varepsilon.$$

D'autre part, on a :
$\|A_n x - Ax\| \leq \|A_n x - A_n x_\varepsilon\| + \|A_n x_\varepsilon - Ax_\varepsilon\| + \|Ax_\varepsilon - Ax\| \leq \|A_n\|\|x - x_\varepsilon\| + \|A_n x_\varepsilon - Ax_\varepsilon\| + \|A\|\|x - x_\varepsilon\| \leq C\|x - x_\varepsilon\| + \|A_n x_\varepsilon - Ax_\varepsilon\| + \|A\|\|x - x_\varepsilon\| = \varepsilon'$.

□

3.3 Exercices

Exercice 3.1.

Soit l'espace,

$$C_0 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, x_n \in \mathbb{R},\ x_n \to 0 \text{ quand } n \to +\infty\},$$

muni de la norme :

$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |x_n|.$$

Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie :

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in C_0 : \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x_n < +\infty.$$

On considère l'espace,

$$l^1(\mathbb{R}) = \{y = (y_n), y_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} |y_n| < +\infty\}.$$

Montrer que $\alpha \in l^1(\mathbb{R})$.

Exercice 3.2.

On considère l'espace de Hilbert,

$$H = l^2(\mathbb{C}) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ x_n \in \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\},$$

muni du produit scalaire,

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{y_n}$$

et la norme induite

$$\|x\| = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On considère la suite réelle $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *qui vérifie :*

$$\forall \xi \in H : \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \xi_n < +\infty.$$

- Montrer que $\alpha \in l^2$.

Exercice 3.3.

1) Soit E *un espace de Banach et* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de fermés de* E *tels que* $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$.

- Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathring{F}_n$ *est un ouvert dense dans* E.

*(**Indication :** On peut poser* $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathring{F}_n$ *et on considère* $G_n = F_n \cap (E \setminus U)$.

2) Soient E, F *deux espaces de Banach et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de fonctions continues de* E *dans* F.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$*, on pose :*

$$F_{k,n} = \{x \in E : \forall p, q \geq n : \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \frac{1}{k}\}.$$

- Montrer que $F_{k,n}$ *est fermé et que* $U_k = \cup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathring{F_{k,n}}$ *et un ouvert dans* E.

- En déduire que f *est continue sur un ensemble dense dans* E.

3) Soit $f \in C(\mathbb{R})$ *dérivable.*

- Montrer que f' *est continue sur une partie dense dans* E.

Exercice 3.4.

Soit $1 < p < +\infty$.

On considère l'espace :

$$H = l^p = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ x_n \in \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty\}$$

muni de la norme,

$$\|x\| = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

On considère la suite réelle $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *qui vérifie :*

$$\forall \xi \in H : \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \xi_n < +\infty.$$

Soit q l'exposant conjugué de p , c'est à dire que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
- Montrer que $\alpha \in l^q$.

Exercice 3.5.

Soit l'espace,

$$l^p=\Big\{x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n\in\mathbb{C}, \sum_{n=0}^{+\infty}|x_n|^p<+\infty\},$$

muni de la norme

$$\|x\|=\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}|x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

On note q le conjugué de p (i.e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$).

Soit $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ telle que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx_n$ converge $\forall x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in l^p$.

- Montrer que $a\in l^q$.

Exercice 3.6.

On considère les deux espaces,

$$F=l^2,$$

et

$$E=\Big\{x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\in l^2 : x_k=0 \text{ sauf pour un nombre fini de } k\Big\}.$$

Soit la famille d'opérateurs (T_n) telle que $T_n : E\to F$ défini par :

$$T_n(x)=T_n\Big((x_k)_k\Big)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad k\neq n,\\ nx_n & \text{si} \quad k=n.\end{cases}$$

1) Montrer que la famille (T_n) vérifie les hypothèses du théorème de Banach-Steinhaus.
2) - Montrer que la conclusion du théorème de Banach-Steinhaus n'est pas vérifiée.
- Justifier votre réponse.

Exercice 3.7.

Soit $x=(x_n)\subset\mathbb{C}$ telle que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}x_ny_n$ soit convergente pour tout $y=(y_n)\in l^p$ $(1\leq p\leq+\infty)$.
1) Pour tout entier N, on considère la forme linéaire T_N sur l^p, i.e $T_N : l^p\to\mathbb{C}$, définie par :

$$T_N(y)=\sum_{n=0}^{N}x_ny_n.$$

- En utilisant l'inégalité de Hölder, calculer la norme de T_N.
2) En utilisant le théorème de Banach-Steinhaus, en déduire que $x\in l^q$ où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

3) On pose $T(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.
- Calculer $\lim_{N\to+\infty}(T - T_N)$.

Exercice 3.8.

On considère l'espace,

$$l^1 = \Big\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| < +\infty\Big\}.$$

Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres complexes telle que pour tout* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$, *la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n x_n$ *converge.*
- Montrer que :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| < +\infty.$$

Exercice 3.9.

Soit E *un espace de Banach et* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* E *telle que la suite* $\Big(f(x_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée pour tout* $f \in E'$.
- Montrer que $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*

Exercice 3.10.

Soient E *et* F *deux espaces de Banach et soit* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $L(E,F)$.
- Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
i) $(\|T_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*
ii) $(\|T_n x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée, pour tout* $x \in E$.
iii) $\big(|g(T_n x)|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée, pour tout* $x \in E$ *et pour tout* $g \in F'$.

Exercice 3.11.

Soit E *un espace de Banach et* F *un espace vectoriel normé. On considère une famille d'opérateurs* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $L(E,F)$, *telle que* $\big(T_n x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy dans* F *pour tout* $x \in E$.
- Montrer que $(\|T_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*

Exercice 3.12.

Soit E *un espace de Banach et* F *un espace vectoriel normé complet.*
On considère une famille d'opérateurs $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $L(E,F)$, *telle que* $\big(T_n x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy dans* F *pour tout* $x \in E$.
- Montrer que $T_n x \to Tx$ *lorsque* $n \to +\infty$, *où* $T \in L(E,F)$.

Exercice 3.13.

Soit l'espace,

$$C_0 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, x_n \in \mathbb{C},\ x_n \to 0 \text{ quand } n \to +\infty\}.$$

C_0 est un sous-espace de l^∞.
Soit $y = (y_n)$ telle que $y_n \in \mathbb{C}$ et la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$ est convergente $\forall x = (x_n) \in C_0$.
- Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|$ est convergente.

Exercice 3.14.

Dans cet exercice on va montrer que l'espace $E = C_0(\mathbb{C})$ défini ci-dessous n'est pas de Banach (n'est pas complet).
1) Rappeler de façon précise l'énoncé du théorème de Banach-Steinhaus.
2) On considère l'espace vectoriel normé (l'espace des suites à support fini.)

$$E = C_0(\mathbb{C}) = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{C} \text{ telle que } \exists N \in \mathbb{N} : x_n = 0, \forall n \geq N\right\}$$

muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.
Soit l'opérateur $T_n : E \longrightarrow \mathbb{C}$ défini par :

$$T_n x = \sum_{k=1}^{n} k x_k \text{ avec } x = (x_n) \in E.$$

a) Montrer que $T_n \in E'$.
b) Montrer que la suite numérique $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour tout $x \in E$.
c) Montrer que la famille d'opérateurs $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
d) Conclusion.

Exercice 3.15.

Soient E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. On considère la famille d'opérateurs $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $A_n \in L(E,F)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on considère $A \in L(E,F)$.
Montrer qu'on a l'équivalence suivante :
$\Big(A_n(x) \to A(x),\ \forall x \in E\Big) \Longleftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1.\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|_{L(E,F)} < C < \infty \\ \text{et} \\ 2.\ A_n(x) \to A(x),\ \forall x \in M,\ \text{tel que } \overline{M} = E \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.16.

Soient E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé.
On considère une suite d'opérateurs bornés $T_n : E \longrightarrow F$ telle que :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| = +\infty.$$

- Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n(x_0)\| = +\infty$$

Exercice 3.17.

Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et on considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E'.
On suppose que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ existe pour tout $x \in E$.
On pose pour tout $x \in E$

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

- Montrer que $g \in E'$.

Exercice 3.18.

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et soit S un sous-ensemble de E.
- Montrer que S est borné dans $(E, \|.\|)$ si et seulement si $\sup_{x\in S} |f(x)| = +\infty,\ \forall f \in E'$.

Exercice 3.19.

Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach et $(F, \|.\|_F)$ un espace vectoriel normé, et soit S un sous-ensemble de $\mathcal{L}(E, F)$.
Si pour tout $x \in E$, l'ensemble $\left\{Tx; T \in S\right\}$ est borné dans $(F, \|.\|_F)$, montrer qu'il existe une constante positive $C > 0$ telle que

$$\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E, \text{ pour tout } x \in E \text{ et pour tout } T \in S.$$

Exercice 3.20.

On considère l'espace de Hilbert

$$H = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ x_n \in \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$$

muni du produit scalaire,

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n\overline{y_n},$$

et la norme induite,

$$\|x\| = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On considère la suite complexe $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *qui vérifie la condition suivante :*

$$\forall x \in H : \sum_{n=1}^{+\infty} x_n\alpha_n \text{ est convergente.}$$

- Montrer que $\alpha \in H$.

CHAPITRE 4

THÉORÈME DE L'APPLICATION OUVERTE, THÉORÈME DU GRAPHE FERMÉ, DUALITÉ, SUPPLÉMENTAIRE TOPOLOGIQUE ET RELATIONS D'ORTHOGONALITÉ

4.1 Théorème de l'application ouverte

On sait que l'image d'un ensemble ouvert par une application continue n'est pas nécessairement un ensemble ouvert, par contre l'image réciproque d'un ensemble ouvert par une application continue est un ensemble ouvert. Le théorème de l'application ouverte affirme qu'une application linéaire continue **surjective** entre deux espaces de Banach est ouverte, c'est à dire que l'image directe d'un ensemble ouvert par cette application est ouverte.

Théorème 4.1

Soient E et F deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire continu $\Big(\text{i.e } T \in L(E,F)\Big)$ et surjectif de E sur F.
Alors il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$B_F(0,c) \subset T\Big(B_E(0,1)\Big) \tag{4.1}$$

Remarque 4.1.

La propriété (4.1) entraîne que l'opérateur T transforme tout ouvert de E en un ouvert de F, c'est pour ça le théorème 4.1 s'appelle théorème de l'application ouvert.

Démonstration. **(du théorème 4.1)**

La démonstration sera divisée en deux étapes.

1^{ere} **étape :**

Lemme 4.1.

Soient E et F deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire continu et surjectif de E sur F. Alors il existe une constante positive $c > 0$ telle que :

$$B_F(0, 2c) \subset \overline{TB_E(0, 1)}. \tag{4.2}$$

Démonstration.

La démonstration repose sur le théorème de Baire.
On pose :

$$F_n = n\overline{TB_E(0, 1)}, n \in \mathbb{N}^*.$$

F_n est un ensemble fermé.
Comme T est surjectif, alors on a :

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

En effet :
On montre que $F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.
Soit $y \in F$. Comme T est surjectif, alors $\exists x \in E : Tx = y$.
On a :

$$\frac{x}{\|x\|_E + \varepsilon} \in B_E(0, 1) \Rightarrow \frac{Tx}{\|x\|_E + \varepsilon} \in TB_E(0, 1) \text{ pour tout } \varepsilon > 0.$$

Donc,

$$Tx \in (\|x\|_E + \varepsilon)TB_E(0, 1).$$

D'où,

$$y = Tx \in n\overline{TB_E(0, 1)} = F_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Le théorème de Baire implique qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que l'intérieure de $n_0\overline{TB_E(0, 1)}$ est non vide. Donc l'intérieure de $\overline{TB_E(0, 1)}$ est non vide.
Soie $y_0 \in F$ et $c > 0$ tels que

$$B_F(y_0, 4c) \subset \overline{TB_E(0, 1)}, \tag{4.3}$$

$$y_0 \in \overline{TB_E(0, 1)} \Longrightarrow -y_0 \in \overline{TB_E(0, 1)}. \tag{4.4}$$

En sommant (4.3) et (4.4), on obtient :

$$B_F(0, 4c) \subset \overline{TB_E(0, 1)} + \overline{TB_E(0, 1)},$$

c'est-à-dire que $B_F(0, 4c) \subset 2\overline{TB_E(0, 1)}$ car $\overline{TB_E(0, 1)}$ est convexe.
Donc

$$B_F(0, 2c) \subset \overline{TB_E(0, 1)}.$$

□

2^{eme} **étape :**

> **Lemme 4.2.**
>
> *Soient E et F deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire continu de E sur F tels que $B_F(0,2c) \subset \overline{TB_E(0,1)}$. Alors*
>
> $$B_F(0,c) \subset TB_E(0,1).$$

Démonstration.

Soit $y \in F$ fixé tel que $\|y\| < c$.
On cherche x tel que $\|x\|_E < 1$ et $y = Tx$.
Par hypothèse on a :

$$B_F(0,2c) \subset \overline{TB_E(0,1)}.$$

On a :

$$y \in B_F(0,c) \Longrightarrow 2y \in B_F(0,2c) \Longrightarrow 2y \in \overline{TB_E(0,1)} \Longrightarrow y \in \overline{TB_E(0,\frac{1}{2})}.$$

D'après le lemme 4.1, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists z \in E, \|z\|_E < \frac{1}{2} : \|y - Tz\|_F < \varepsilon.$$

On choisit $\varepsilon = \frac{1}{2}$, alors il existe $z_1 \in E$ tel que :

$$\|z_1\| < \frac{1}{2},\ \|y - Tz_1\| < \frac{c}{2}.$$

On a :

$$y - Tz_1 \in B_F(0,\frac{c}{2}) \text{ et } \varepsilon = \frac{c}{4},$$

alors il existe $z_2 \in E$ tel que :

$$\|z_2\| < \frac{1}{4}, \|y - Tz_1 - Tz_2\| < \frac{c}{4}.$$

Par récurrence, on construit une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\|z_n\| < \frac{1}{2^n}, \|y - T(z_1 + z_2 + ... + z_n\| < \frac{c}{2^n}, \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Soit $x_n = \sum_{k=1}^{n} z_k \in E$. la suite (x_n) est de Cauchy, donc elle converge vers une limite x car,

$$\|\sum_{k=1}^{n} z_k\|_E \leq \sum_{k=1}^{n} \|z_k\|_E \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}.$$

Donc (x_n) est normalement convergente.
Comme E est de Banach, alors (x_n) est convergente.
Donc E est de Banach.
Alors,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_E < \infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty.$$

On a :

$$\left\| y - T(\sum_{k=1}^{n} z_k) \right\|_F \leq \frac{c}{2^n}.$$

$x \in B_E(0,1), \|y - Tx\| = 0.$
$x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} z_k.$
$\|x_n\| = \|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\| < \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^k}}{1-\frac{1}{2}} < 1.$
Donc $\|x\| < 1$ et $y = Tx$ puisque l'opérateur T est continu. □

Corollaire 4.1.

Soient E et F deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire continu et surjectif de E sur F. Alors T est ouvert, c'est-à-dire que pour tout ouvert $U \subset E$, alors T(U) est un ouvert.

Démonstration.

Soit Ω un ouvert de E et on montre que $T(\Omega)$ est un ouvert. Pour cela, on montre que $T(\Omega)$ est un voisinage de chacun de ses points.
Soit $y_0 \in T(\Omega)$. Alors il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $Tx_0 = y_0$.
Comme Ω est un ouvert, alors il existe $r > 0$ tel que $B_E(x_0, r) \subset \Omega$, c'est-à-dire que $x_0 + B_E(0,r) \subset \Omega$. Alors

$$T(x_0 + B(0,r)) = y_0 + T(B_E(0,r)) \subset T(\Omega).$$

En vertu de (4.1), on a :

$$B_F(0, rc) \subset T(B_E(0,r).$$

D'où,

$$B_F(y_0, rc) \subset T(\Omega).$$

Par conséquent $T(\Omega)$ est un ouvert. □

Corollaire 4.2. (Théorème d'isomorphisme de Banach)

Soient E et F deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire continu et bijectif de E sur F.
Alors, T^{-1} est linéaire continu de F sur E.

Démonstration.

T est bijectif et linéaire alors T^{-1} est linéaire (évident).
Montrons que T^{-1} est continu.
D'après (4.1), on a :

$$\exists c > 0 : B_F(0,c) \subset TB_E(0,1).$$

Ce qui implique que :

$$\forall x \in E : \|Tx\|_F < c \Longrightarrow \|x\|_E < 1.$$

C'est-à-dire que,

$$y \in B_F(0,c) \Longrightarrow \|x\|_E < 1.$$

On a :

$$\forall z \in F : z = z\frac{c}{\|z\|_F + \varepsilon}\left(\frac{\|z\|_F + \varepsilon}{c}\right), \text{ pour tout } \varepsilon > 0.$$

Donc,

$$T^{-1}(z) = T^{-1}\left(z.\frac{c}{\|z\|_F+\varepsilon}\right)\frac{\|z\|_F+\varepsilon}{c}.$$

D'où,

$$\|T^{-1}(z)\| = \left\|T^{-1}\frac{cz}{\|z\|_F+\varepsilon}\right\|_E \frac{\|z\|_F+\varepsilon}{c}.$$

Comme $\left\|\frac{cz}{\|z\|_F+\varepsilon}\right\|_F < c$ alors,

$$\left\|T^{-1}\frac{cz}{\|z\|_F+\varepsilon}\right\|_E < 1.$$

Ce qui implique que :

$$\|T^{-1}z\|_E < \frac{\|z\|_F+\varepsilon}{c} \text{ pour tout } \varepsilon > 0.$$

Par conséquent

$$\|T^{-1}z\|_E \leq \frac{1}{c}\|z\|_F.$$

D'où la continuité de T^{-1}. □

Exemple 4.1.

On a le contre-exemple suivant : Soit $E = l^2$ et on considère $i : l^2 \to l^\infty$ l'injection canonique. Soit $F = i(E)$ muni de la norme induite par l^∞. Alors i est continue, bijective de E dans F, mais $i^{-1} : l^\infty \to l^2$ n'est pas continue, c'est à dire il n'existe aucune constante $C > 0$ telle que :

$$\Big(\sum_{n\geq 0} \mid u_n \mid^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq C \sup_{n\in\mathbb{N}} \mid u_n \mid .$$

Corollaire 4.3.

Soit E un espace vectoriel muni des deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$. Supposons que $(E, \|.\|_1)$ et $(E, \|.\|_2)$ sont de Banach et supposons qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\|x\|_1 \leq C_1 > \|x\|_2.$$

Alors il existe une constante $C_2 > 0$ telle que :

$$\|x\|_2 \leq C_2 > \|x\|_1.$$

Démonstration.

On considère $T = Id : (E, \|.\|_2) \longrightarrow (E, \|.\|_1)$.
On a Id est linéaire, et d'après l'hypothèse on a :

$$\|x\|_1 \leq C_1 > \|x\|_2.$$

Donc Id est continu. d'autre part on a $Id = Id^{-1}$, alors d'après le corollaire 4.2, Id est continu, c'est-à-dire qu'il existe une constante C_2 telle que :

$$\|x\|_2 \leq C_2 > \|x\|_1.$$

□

4.2 Opérateur fermé et théorème du graphe fermé

Définition 4.1.

1) Soit X et Y deux ensembles et $T : D(f) \subset X \longrightarrow Y$ une application linéaire, où $D(T)$ est le domaine de définition de T.
Le graphe de T est par définition l'ensemble $G(T)$ tel que

$$G(T) = \Big\{(x, T(x)) \in X \times Y : x \in D(T)\Big\}.$$

2) Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $D(T)$ un sous-espace vectoriel normé de E. On considère l'opérateur linéaire $T : D(T) \longrightarrow F$. On dit que T est fermé si et seulement si $G(T)$ est fermé dans $E \times F$ où $G(T) = \Big\{(x, T(x)) \in E \times F : x \in D(T)\Big\}$.

Caractérisation du graphe fermé :
L'opérateur T est fermé si et seulement si
$\Big[$Pour toute suite (x_n) telle que $(x_n) \subset D(T), x_n \to x$ dans E et $Tx_n \to y$ dans $F\Big]$
$\Longrightarrow \Big[x \in D(T)$ et $Tx = y\Big]$.

Proposition 4.1

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et soit T un opérateur linéaire continu de E dans F. Alors T est fermé.

Démonstration.

D'après l'hypothèse, $D(T) = E$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E telle que $x_n \longrightarrow x$ dans E lorsque $n \to +\infty$ et $Tx_n \longrightarrow y$ dans F lorsque $n \to +\infty$. On montre que $x \in D(T)$ et $Tx = y$.
$x \in D(T) = E$ évident.
Comme T est continu alors,

$$\lim_{n\to+\infty} Tx_n = Tx.$$

Donc $Tx = y$ puisque l'espace F est séparé. □

Proposition 4.2

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $T : D(T) \subset E \longrightarrow Im(T) \subset F$ un opérateur fermé et bijectif. Alors l'opérateur,

$$T^{-1} : D(T^{-1}) = Im(T) \longrightarrow D(T),$$

est fermé.

Démonstration.

T est fermé $\Longleftrightarrow$ $G(T)$ est fermé dans $E \times F$ où,

$$G(T) = \{(x, Tx) \in E \times F : x \in D(T)\},$$

et

$$G(T^{-1}) = \{(y, T^{-1}y) \in F \times E : y \in D(T^{-1})\}.$$

Donc,

$$G(T^{-1}) = \{(Tx, x) \in F \times E : x \in D(T)\}.$$

Comme l'application,

$$J : F \times E \longrightarrow E \times F : J(y, x) = (x, y),$$

est continue, alors

$$G(T^{-1}) = J^{-1}(G(T)),$$

est fermé. □

Théorème 4.2

(Théorème du graphe fermé)
Soient E et F deux espaces de Banach. Soit T un opérateur linéaire de E dans F.
On a :

$$T \text{ est continu } \Longleftrightarrow T \text{ est fermé.}$$

Démonstration.

i) La condition est nécessaire ($\Longrightarrow$) : Supposons que T est continu.
On a T est fermé d'après la proposition 4.1.
La condition est suffisante ($\Longleftarrow$) :
Supposons que $G(T)$ est fermé et montrons que T est continu.
On considère l'espace $(E, \|.\|_G)$ où $\|.\|_G$ est la norme du graphe définie par :

$$\|x\|_G = \|x\|_E + \|Tx\|_F.$$

Comme $G(T)$ est fermé (puisque T est fermé), alors $(E, \|.\|_G)$ est un espace de Banach. En effet.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans l'espace $(E, \|.\|_G)$.
Alors,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p \geq N_\varepsilon, \forall q \geq N_\varepsilon \Longrightarrow \|x_p - x_q\|_G \leq \varepsilon.$$

On a :

$$\|x_p - x_q\|_G = \|x_p - x_q\|_E + \|Tx_p - Tx_q\|_F \leq \varepsilon.$$

Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, \|.\|_E)$ et la suite $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(F, \|.\|_F)$.
Comme les espaces E et F sont de Banach d'après l'hypothèse, alors (x_n) converge vers une limite x et (Tx_n) converge vers une limite y quand n tend vers $+\infty$.
Puisque T est fermé, alors on conclut que $Tx = y$.
Donc on a :

$$x_n \longrightarrow x \text{ dans } (E, \|.\|_E) \text{ quand } n \longrightarrow +\infty \text{ et } Tx_n \longrightarrow Tx \text{ dans } (F, \|.\|_F) \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

D'où,

$$x_n \longrightarrow x \text{ dans } (E, \|.\|_G) \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Par conséquent l'espace $(E, \|.\|_G)$ est un espace de Banach.
Maintenant on considère l'application :

$$Id : (E, \|.\|_G) \longrightarrow (E, \|.\|_E) : Id(x) = x.$$

On a :

$$\|Id(x)\|_E = \|x\|_E \leq \|x\|_G = \|x\|_E + \|Tx\|_F.$$

D'après le corollaire 2.1, on a Id^{-1} est continue.
Donc,

$$\exists\, C > 0 \text{ telle que } \|x\|_G \leq C\|x\|_E.$$

C'est-à-dire que :

$$\|x\|_E + \|Tx\| \leq C\|x\|_E,\ \forall x \in E.$$

D'où,

$$\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E,\ \forall x \in E.$$

Ce qui signifie que T est continu. □

Proposition 4.3

Soient E et F deux espaces de Banach et soit $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire et bijectif. Alors

$$T \text{ est fermé } \Longrightarrow T^{-1} \text{ est continu.}$$

Démonstration.

Montrons que T est fermé $\Longrightarrow T^{-1}$ est fermé.
Supposons que T est fermé. Alors d'après la proposition 4.2, et comme E et F sont des espaces de Banach, alors d'après le théorème 4.2, T^{-1} est continu. □

4.3 Dualité et supplémentaire topologique

On rappelle un résultat dans l'algèbre linéaire est le suivant :
si E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et G, L sont deux sou-espaces vectoriels de E. Alors

$$G + L = G \oplus L \Leftrightarrow G \cap L = \{0\}.$$

On dit dans ce cas que L est un supplémentaire algébrique de G, (et on écrit $E = G \oplus L$),

Théorème 4.3

Soit E un espace de Banach. Soient G, L deux sous-espaces vectoriels fermés tels que

$$G + L \text{ est fermé.}$$

Alors il existe une constante positive C telle que :

$$\forall z \in G + L : z = x + y, \text{ avec } x \in G \text{ et } y \in L \text{ et } \|x\| \leq C\|z\|,\ \|y\| \leq C\|z\|. \qquad (4.5)$$

Démonstration.

Soit l'espace produit $G \times L$ muni de la norme

$$\|(x,y)\|_{G\times L} = \|x\|_E + \|y\|_E,$$

et on considère aussi l'espace $G+L$ muni de la norme de E

$$\|x+y\|_{G+L} = \|x+y\|_E.$$

On a l'espace $G \times L$ est un espace de Banach car $G \times L$ est fermé dans E.
On a aussi l'espace $G+L$ est de Banach.
Soit l'application $T : G \times L \to G+L$ définie par :

$$T\big((x,y)\big) = x+y.$$

L'application T est linéaire continue et surjective, alors en vertu du théorème 4.1 de l'application ouverte, il existe une constante $C>0$ telle que :

$$\forall z \in G+L : \|z\| < C.$$

Donc on peut écrire z sous la forme :

$$z = x+y, \text{ où } x \in G \text{ et } y \in L \text{ et } \|x\| + \|y\| < 1.$$

Par homogénéité, on a :

$$\forall z \in G+L, z = x+y \text{ avec } x \in G, y \in L \text{ et } \|x\| + \|y\| \leq \frac{1}{C}\|z\|.$$

D'où (4.5) a lieu. □

Corollaire 4.4.

Soit E un espace de Banach. Soient G, L deux sous-espaces vectoriels fermés tels que :

$$G+L \text{ est fermé.}$$

Alors il existe une constante positive C telle que :

$$d(x, G\cap L) \leq C\Big(d(x,G) + d(x,L)\Big), \text{ pour tout } x \in E. \tag{4.6}$$

Démonstration.
On sait que,

$$d(x,G) = \inf_{h\in G} \|x-h\|.$$

Donc en vertu de la propriété caractéristique de la borne inférieure, on a :

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists a \in G : \|x-a\| \leq d(x,G) + \varepsilon \text{ et } \exists b \in L : \|x-b\| \leq d(x,L) + \varepsilon.$$

On a : $a-b \in G+L$, car $-b \in L$.
On applique (4.5) sur $z = a-b$, on conclut qu'il existe $a' \in G$ et $b' \in L$ tels que :

$$a-b = a'+b',\ \|a'\| \leq C\|a-b\|,\ \|b'\| \leq C\|a-b\|.$$

Comme $a-b=a'+b' \Rightarrow a-a'=b+b'$, avec $a-a' \in G$ et $b+b' \in L$, donc

$$a-a' \in G \cap L \text{ et } b+b' \in G \cap L.$$

Alors par définition de la borne inférieure $\inf$, on a :
$d(x,G\cap L) \leq \|x-(a-a')\| \leq \|x-a\|+\|a'\| \leq \|x-a\|+C\|a-b\| \leq \|x-a\|+C\Big(\|x-a\|+\|x-b\|\Big)$.
D'où,

$$d(x,G\cap L) \leq (1+C)\Big(d(x,G)+d(x,L)\Big)+\varepsilon(1+2C). \tag{4.7}$$

En faisant ε tendre vers 0 dans (4.7), on conclut l'inégalité (4.6). □

Définition 4.2. (Supplémentaire topologique)

Soient E un espace de Banach et G un sous-espace fermé de E.
on dit qu'un sous-espace L de E est un supplémentaire topologique de G si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :
1) L est fermé.
2) $G \cap L = \{0\}$ et $G+L=E$.
On écrit $E = G \oplus L$.

Exemple 4.2.

1) Dans un espace de Hilbert H tout sous-espace fermé M de H admet un supplémentaire topologique car $M \cap M^{\perp} = \{0\}$ et $M + M^{\perp} = H$ (voir le corollaire (6.3 dans le chapitre six).

Remarque 4.2.

Dans le cas où L est un supplémentaire topologique de G dans E. Alors,
1) $\forall z \in E, \exists! x \in G,\ \exists! y \in L :\ z = x+y,$ c'est à dire que l'application

$$T : G \times L \to G+L,$$

définie par :

$$T(x,y) = x+y,$$

est une bijection.
Donc $\forall z \in E,\ z$ s'écrit de façon unique comme suit :

$$z = x+y \text{ où } x \in G \text{ et } y \in L.$$

2) En vertu du théorème (4.3) on conclut que les projecteurs :

$$P_1 : E \to G,\ P_2 : E \to L,$$

définis par :

$$P_1(z) = x \text{ et } P_2(z) = y,$$

sont des opérateurs linéaires continus c'est à dire qu'il existe $C>0$ telle que :

$$P_1(z) \leq c\|z\| \text{ et } P_2(z) \leq c\|z\|.$$

4.4 Opérateur inverse à droite

On considère E et F deux espaces de Banach et soit $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire continu et surjectif. On sait que

$$\exists C > 0 \text{ telle que : } \forall y \in F, \exists x \in E : Tx = y,$$

(la surjectivité de T).
En vertu du corollaire 4.3 du théorème de l'application ouverte, on a $\|x\|_E \leq C\|y\|_F$.
Question : Est ce qu'il existe un opérateur S linéaire continu tel que $T \circ S = Id_F$?

Théorème 4.4

Soient E, F deux espaces de Banach et soit $T \in L(E, F)$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes,
1) T admet un inverse à droite.
2) $\ker(T) = T^{-1}(\{0\})$ admet un supplémentaire topologique dans E.

Démonstration.

1. Montrons que $i) \Longrightarrow ii)$.
Soit S un inverse à droite de T.
$S : F \longrightarrow E$.
On a :

$$T \circ S = Id_F.$$

Donc,

$$(T \circ S)(f) = f, \ \forall f \in F.$$

On vérifie que $R(s) = S(F)$ est un supplémentaire topologique de $N(T)$.
Tout d'abord on montre que :

$$N(T) \cap S(F) = \{0\}.$$

Soit $x \in N(T) \cap S(F)$, alors $x \in N(T)$ et $x \in S(F)$.
On a :

$$x \in N(T) \Longrightarrow Tx = 0 \text{ et } x \in S(F) \Longrightarrow \exists y \in F : S(y) = x.$$

D'autre part, on a :

$$T(x) = T(S(y)) = 0.$$

Donc, $y = 0$.
Comme S est linéaire alors,

$$x = S(y) = S(0) = 0.$$

Montrons que $S(F)$ est fermé.
Comme $S(F)$ est un espace métrique, donc utilisons les suites. Soit $z_n \in S(F)$ telle que $z_n \longrightarrow z$ quand $n \longrightarrow +\infty$ et montrons que $z \in S(F)$.
On a :

$$z_n \in S(F), \text{ alors il existe } y_n \in F \text{ telle que } z_n = Sy_n.$$

Comme la suite (z_n) est convergente, alors la suite (y_n) est convergente vers une limite y (puisque $y_n = (T \circ S)(y_n) = Id_F(y_n) = y_n$ et T est continu.)
Et comme S est continu et $y_n \longrightarrow y$ quand $n \longrightarrow +\infty$, donc,

$$z_n = S(y_n) \longrightarrow S(y) \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Comme l'espace S est séparé alors,

$$S(y) = z.$$

maintenant on montre que :

$$N(T) + S(F) = E.$$

Soit $x \in E$.
On a :

$$x = [x - S(T(x))] + S(T(x)).$$

Il est clair que :

$$S(T(x)) \in S(F).$$

Il reste à montrer que :

$$x - S(T(x)) \in N(T).$$

On a :

$$T\left(x - S(T(x))\right) = T(x) - T\left(S(T(x))\right) = 0,$$

(puisque $T\left(S(T(x))\right) = T(x)$ car l'opération de composition " $\circ$ " est associative).
2. Montrons que $ii) \Longrightarrow i)$.
Soit L un supplémentaire topologique de $N(T)$.
L est fermé et on a :

$$N(T) + L = E \text{ et } N(T) \cap L = \{0\}.$$

Soit P l'opérateur de projection sur L.

$$P : E \longrightarrow L : x \longmapsto P(x).$$

Alors,

$$P : N(T) + L \longrightarrow L : x = a + b \longmapsto P(x) = b.$$

Cette application est bien définie grâce à l'unicité de l'expression et aussi elle est linéaire continue.
Pour $f \in F$, il existe $x \in E$ (x n'est pas unique) tels que $Tx = f$ (puisque T est surjectif) .
On définit l'opérateur S, en posant :

$$S(f) = P(x).$$

On a S est bien défini car, pour $x' \in E \Longrightarrow Tx' = f$,
On a :

$$Tx = Tx' \Longrightarrow T(x - x') = 0 \Longrightarrow x - x' \in N(T) \Longrightarrow P(x - x') = 0.$$

Comme P est linéaire alors,

$$P(x) - P(x') = 0.$$

Donc,

$$P(x) = P(x').$$

D'où S est bien défini.
On a :
1. S est linéaire car P est linéaire .
2. $T \circ S = Id_F$. En effet,
Soit $f \in F$, alors $T(x) = f$.
Comme $S(f) = p(x)$ alors,

$$T\Big(S(f)\Big) = T\Big(p(x)\Big).$$

On a :

$$x = y + P(x) \in N(T) + L \text{ et } T(y + P(x)) = T(y) + T\Big(p(x)\Big) = T\Big(p(x)\Big) \text{ car } T(y) = 0.$$

Donc,

$$T\Big(S(f)\Big) = T\Big(p(x)\Big) = T(x) = f.$$

D'où,

$$T \circ S = id_F.$$

3. S est continu. En effet ;
D'après le corollaire 4.3 du théorème de l'application ouverte, on a :

$$\|S(f)\| = \|P(x)\| \leq C_1\|x\|_E \leq C_2\|f\|.$$

D'où la continuité de l'opérateur S.

□

4.5 Relations d'orthogonalité

Définition 4.3.
Soit E un espace de Banach, E' le dual topologique de E et M un sous-espace vectoriel de E et N un sous-espace vectoriel de E'.
On pose

$$M^{\perp} = \Big\{ f \in E' : \langle f, x\rangle_{E'\times E} = 0,\ \forall x \in M \Big\}$$

$M^{\perp}$ est dit l'orthogonal de M.

$$N^{\perp} = \Big\{ g \in E'' : \langle g, f\rangle_{E''\times E'} = 0,\ \forall f \in E' \Big\} = \Big\{ x \in E : \langle f, x\rangle_{E'\times E} = 0,\ \forall f \in N \Big\}$$

$N^{\perp}$ est dit l'orthogonal de N.

Proposition 4.4

L'espace $M^{\perp}$ est fermé dans E'.

Démonstration.

Soit (f_n) une suite de $M^{\perp}$ telle que $f_n \to f$ dans E' et $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.
Montrons que $f \in M^{\perp}$.
On a $(f_n) \subset M^{\perp}$, donc $f_n(x) = 0$, pour tout $x \in M$.
On a :

$$f(x) = f_n(x) + \big(f(x) - f_n(x)\big),$$

alors,

$$|\ f(x)\ | \leq |\ f_n(x)\ | + |\ f(x) - f_n(x)\ | \leq \|f(x) - f_n(x)\| \leq \|f - f_n\|_{E'}\|x\|_E. \tag{4.8}$$

En faisant $n \longrightarrow +\infty$ dans (4.8), et Puisque $\|f - f_n\|_{E'} \to 0$, alors on conclut que $|\ f(x)\ | = 0$ pour tout $x \in M$. donc

$$\langle f, x\rangle = f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in M.$$

. Ce qui signifie que $f \in M^{\perp}$.
Par conséquent, $M^{\perp}$ est fermé.

□

Proposition 4.5

L'espace $N^{\perp}$ est fermé dans E.

Proposition 4.6

Soit E un espace de Banach et soient M un sous-espace vectoriel de E et N un sous-espace vectoriel de E'. Alors on a

$$(M^{\perp})^{\perp} = M, \text{ et } \overline{N} \subset (N^{\perp})^{\perp}.$$

Démonstration.

1) Montrons que $\overline{M} \subset (M^{\perp})^{\perp}$.
On a l'inclusion $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$ est évidente, et comme $(M^{\perp})^{\perp}$ est fermé, alors on conclut le résultat.
2) Montrons que $(M^{\perp})^{\perp} \subset \overline{M}$.
Montrons par l'absurde, c'est à dire qu'on suppose qu'il existe $x_0 \in (M^{\perp})^{\perp}$ et $x_0 \notin \overline{M}$.
Alors les deux ensembles $\overline{M}$ et $\{x_0\}$ sont séparés au sens strict par un hyperplan fermé.
Donc d'après le théorème de Hahn-Banach deuxième forme géométrique,

$$\exists f \in E' \text{ et } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tels que, } \forall x \in M : \ f(x) < \alpha < f(x_0). \tag{4.9}$$

Comme M est un sous-espace vectoriel alors $x \in M \Rightarrow -x \in M$ et donc $f(x) < \alpha$ et $f(-x) < \alpha$ et alors $-f(x) < \alpha$ car f est linéaire.
Par conséquent

$$f(x) = 0, \ \forall x \in M.$$

Ce qui implique que $f \in M^{\perp}$.
Et comme $x_0 \in (M^{\perp})^{\perp}$, alors,

$$f(x_0) = 0.$$

Ce qui contredit la propriété (4.9).
- Montrons maintenant que $\overline{N} \subset (N^{\perp})^{\perp}$.
De même, il est clair que $N \subset (N^{\perp})^{\perp}$, et comme N est fermé, alors on conclut que

$$\overline{N} \subset (N^{\perp})^{\perp}.$$

Maintenant on montre que l'égalité n'est pas satisfaite, c'est à dire que $\overline{N} \subsetneq (N^{\perp})^{\perp}$.
Montrons par l'absurde, c'est à dire qu'il existe $f_0 \in (N^{\perp})^{\perp}$ et $f_0 \notin \overline{N}$.
D'après le corollaire de Hahn-Banach , il existe $\varphi \in E''$ tel que $\varphi \neq 0$.
$\varphi(f_0) \neq 0 \Rightarrow f_0 \notin (N^{\perp})^{\perp}$. Ce qui contredit le fait que $f_0 \in (N^{\perp})^{\perp}$. □

Remarque 4.3.

1) On a l'égalité $\overline{N} = (N^\perp)^\perp$ si E est réflexif.
2) Plus généralement si E est un espace de Banach quelconque on a $\overline{N} = (N^\perp)^\perp$ pour la topologie faible $\sigma(E', E)$.

Proposition 4.7

Soit E un espace de Banach et soient G, L deux sous-espaces vectoriels fermés de E. On a

$$G \cap L = (G^\perp + L^\perp)^\perp. \tag{4.10}$$

$$G^\perp \cap L^\perp = (G + L)^\perp. \tag{4.11}$$

Démonstration.

Montrons (4.10).
i) Montrons que $G \cap L \subset (G^\perp + L^\perp)^\perp$.
Soit $x \in G \cap L$ et montrons que $x \in (G^\perp + L^\perp)^\perp$.
Si $f \in G^\perp + L^\perp$, alors il existent $f_1 \in G^\perp$ et $f_2 \in L^\perp$ telles que $f = f_1 + f_2$.
Donc,

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = 0 + 0 = 0.$$

Par conséquent,

$$x \in (G^\perp + L^\perp)^\perp.$$

ii) Montrons que $(G^\perp + L^\perp)^\perp \subset G \cap L$.
On a :

$$G^\perp \subset G^\perp + L^\perp,$$

donc, en vertu de la proposition 4.6, on a :

$$(G^\perp + L^\perp)^\perp \subset G^{\perp\perp} = \overline{G} = G,$$

(car G est fermé) et on sait qu'aussi le résultat :

$$H_1 \subset H_2 \Rightarrow H_2^\perp \subset H_1^\perp.$$

Et de même on a :

$$L^\perp \subset G^\perp + L^\perp \Rightarrow (G^\perp + L^\perp)^\perp \subset L^{\perp\perp} = \overline{L} = L.$$

Donc,

$$\Big[(G^\perp + L^\perp)^\perp \subset G \text{ et } (G^\perp + L^\perp)^\perp \subset L\Big] \Rightarrow (G^\perp + L^\perp)^\perp \subset G \cap L.$$

Montrons que $G^\perp \cap L^\perp = (G + L)^\perp$.
- Montrons la première inclusion $G^\perp \cap L^\perp \subset (G + L)^\perp$:
Soit $f \in G^\perp \cap L^\perp$. Alors $f \in G^\perp$ et $f \in L^\perp$.
Donc,

$$f(x) = 0, \forall x \in G \; et \; f(y) = 0, \; \forall y \in L.$$

D'où,

$$f(x) + f(y) = f(x + y) = 0.$$

Il en résulte que :

$$f \in (G + L)^{\perp} \text{ car } x + y \in G + L.$$

- Montrons la deuxième inclusion $(G + L)^{\perp} \subset G^{\perp} \cap L^{\perp}$:
Soit $f \in (G + L)^{\perp}$. Donc,

$$f(x + y) = f(x) + f(y) = 0, \ \forall x \in G, \forall y \in L.$$

Pour $y = 0$ alors,

$$f(x) + f(0) = f(x) = 0, \forall x \in G.$$

Donc,

$$f \in G^{\perp}. \tag{4.12}$$

Pour $x = 0$ alors,

$$f(0) + f(y) = f(y) = 0, \ \forall y \in L.$$

Donc,

$$f \in L^{\perp}. \tag{4.13}$$

En vertu de (4.12) et (4.13) on conclut que :

$$f \in G^{\perp} \cap L^{\perp}.$$

Finalement,

$$(G + L)^{\perp} = G^{\perp} \cap L^{\perp}.$$

□

Corollaire 4.5.

Soit E un espace de Banach et soient G et L deux sous-espaces vectoriels fermés de E.
On a :
1) $\overline{G^{\perp} + L^{\perp}} \subset (G \cap L)^{\perp}$.
2) $(G^{\perp} \cap L^{\perp})^{\perp} = \overline{G + L}$.

Démonstration.

1) Montrons que $\overline{G^{\perp} + L^{\perp}} \subset (G \cap L)^{\perp}$.
En vertu de la proposition 4.6, on a :

$$\overline{G^{\perp} + L^{\perp}} \subset (G^{\perp} + L^{\perp})^{\perp\perp}.$$

Donc d'après la proposition 4.7, on a :

$$\overline{G^{\perp} + L^{\perp}} \subset \left[(G^{\perp} + L^{\perp})^{\perp}\right] = (G \cap L)^{\perp}.$$

2) En vertu de la proposition 4.7, on a :

$$G^{\perp} \cap L^{\perp} = (G + L)^{\perp}.$$

Il s'en suit que

$$(G^{\perp} \cap L^{\perp})^{\perp} = (G + L)^{\perp\perp} = \overline{G + L}.$$

□

Théorème 4.5

Soit E un espace de Banach et soient G et L deux sous-espaces fermés de E.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
1) $G+L$ est fermé dans E.
2) $G^\perp + L^\perp$ est fermé dans E'.
3) $G+L = (G^\perp \cap L^\perp)^\perp$.
4) $G^\perp + L^\perp = (G\cap L)^\perp$.

Démonstration.

$1) \Leftrightarrow 3)$ résulte de la propriété 2) de la proposition 4.7.
$4) \Rightarrow 2)$ évidente.
Il reste à montrer que $1) \Rightarrow 4)$ et $2) \Rightarrow 1)$.
- Montrons que $1) \Rightarrow 4)$.
En vertu de la première propriété de la proposition 4.7, il suffit de montrer que $(G\cap L)^\perp \subset G^\perp + L^\perp$.
Soit donc $f \in (G\cap L)^\perp$.
On définit l'application φ suivante : $\varphi : G+L \to \mathbb{R}$ comme suit :
Pour tout $x \in G+L$ de sorte que $x = y+z,$ avec $y \in G$ et $z \in L$.
On pose :

$$\varphi(x) = \langle f, y\rangle.$$

φ est linéaire.
D'après le théorème 4.3, on peut choisir une décomposition de x telle que $\|y\| \leq C\|x\|$, donc

$$|\ \varphi(x)\ | \leq C\|x\|,\ \forall x \in G+L.$$

L'application φ peut être prolongée en une forme linéaire continue $\tilde{\varphi}$ sur E.
D'où on trouve :

$$f = (f-\tilde{\varphi}) + \tilde{\varphi}$$

avec $f-\tilde{\varphi} \in G^\perp$ et $\tilde{\varphi} \in L^\perp$.
Montrons que $2) \Rightarrow 1)$.
Grâce au corollaire 4.6, il existe une constante $C>0$ telle que :

$$d(f, G^\perp \cap L^\perp) \leq C\Big[d(f,G^\perp) + d(f,L^\perp)\Big],\ \forall f \in E'. \tag{4.14}$$

D'autre part on a :

$$d(f,G^\perp) = \sup_{x\in G, \|x\|\leq 1} |\ \langle f,x\rangle\ |,\ \forall f \in E'. \tag{4.15}$$

En appliquant le théorème I.11 de **[6]** page 11 avec

$$\varphi(x) = I_{\overline{B}_E(0,1)}(x) - \langle f,x\rangle \text{ et } \psi(x) = I_G(x).$$

De même manière, on a :

$$d(f,G^\perp) = \sup_{x\in L, \|x\|\leq 1} |\ \langle f,x\rangle\ |,\ \forall f \in E'. \tag{4.16}$$

et aussi on a :

$$d(f, G^\perp \cap L^\perp) = d(f,(G+L)^\perp) = \sup_{x\in \overline{G+L}, \|x\|\leq 1} |\ \langle f,x\rangle\ |,\ \forall f \in E'. \tag{4.17}$$

On injecte les relations (4.15), (4.16) et (4.17) dans la relation (4.14), on trouve

$$\sup_{x\in\overline{G+L},\|x\|\leq 1} |\langle f,x\rangle| \leq C\Big[\sup_{x\in G,\|x\|\leq 1} |\langle f,x\rangle| + \sup_{x\in L,\|x\|\leq 1} |\langle f,x\rangle|,\ \forall x\in E'\Big]. \tag{4.18}$$

En vertu de (4.18), on va établir l'inclusion suivante :

$$\frac{1}{C}B_{\overline{G+L}}(0,1) \subset \overline{B_G(0,1)+B_L(0,1)}. \tag{4.19}$$

Donc on montre (4.19).
Utilisons la démonstration par l'absurde. C'est à dire on suppose que :

$$x_0 \in \frac{1}{C}B_{\overline{G+L}}(0,1),$$

ce qui est équivalent à dire que :

$$\exists x_0 \in \overline{G+L} \text{ tel que : } \|x_0\| \leq \frac{1}{C} \text{ et } x_0 \notin \overline{B_G(0,1)+B_L(0,1)}.$$

Alors en vertu du théorème de Hahn-Banach deuxième forme géométrique, les deux ensembles $\{x_0\}$ et $\overline{B_G(0,1)+B_L(0,1)}$ peuvent être séparés au sens strict par un hyperplan fermé dans E.
C'est à dire :

$$\exists g\in E' \text{ et } \exists \alpha\in\mathbb{R} \text{ tels que : } g(x)<\alpha<g(x_0),\ \forall x\in B_G(0,1)+B_L(0,1).$$

Par conséquent, on trouve

$$\sup_{x\in G,\|x\|\leq 1} |g(x)| + \sup_{x\in L,\|x\|\leq 1} |g(x)| \leq \alpha < f(x_0).$$

Ce qui contredit (4.18).
Finalement, on considère les deux espaces $F = G\times L$ et $H = \overline{G+L}$ munis successivement par les normes $\|(x,y)\| = \max(\|x\|,\|y\|)$ et $\|\ .\ \|_E$.
On a l'application $T : F \to H$ définie par :

$$T\Big((x,y)\Big) = x+y,$$

est linéaire continue.
En vertu de (4.19) on a :

$$B_H(0,\frac{1}{2C}) \subset \overline{T\Big(B_F(0,1)\Big)}.$$

D'où, on en déduit d'après la deuxième étape de la démonstration du théorème 4.1 que

$$B_H(0,\frac{1}{2C}) \subset T\Big(B_F(0,1)\Big).$$

T est surjectif de F dans H.
C'est à dire que :

$$G+L = \overline{G+L}.$$

Ce qui montre que $G+L$ est fermé. □

4.6 Exercices

Exercice 4.1.

On considère E, F deux espace vectoriels normés et soit $f : E \to F$ une application.
1) Montrer que : $\big(f$ est ouverte$\big) \Longrightarrow \big(f$ est surjective.$\big)$
2 - Donner un exemple d'application surjective non ouverte.
- Est ce qu'il on a une contradiction avec le théorème de l'application ouverte ?

Exercice 4.2.

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application linéaire.
- Montrer que :

$$f \text{ est ouverte } \iff f(1) \neq 0.$$

2) Soient E, F deux espaces vectoriels normés avec $\dim(E) < +\infty$ et $f : E \to F$ une application linéaire.
- Montrer que :

$$f \text{ est ouverte } \iff f \text{ est surjective}.$$

Exercice 4.3.

Soit $T : l^2 \to l^2$ un opérateur défini par :

$$Tx = (Tx)_{n\in\mathbb{N}^*} = (nx_n).$$

- Montrer que T est fermé.

Exercice 4.4.

Soit $T : l^2 \to l^2$ un opérateur défini par :

$$Tx = (Tx)_{n\in\mathbb{N}^*} = ((n-1)x_n) = (x_2, 2x_3, 3x_4, ...).$$

- Montrer que T est fermé.

Exercice 4.5.

Soit E un espace de Banach et soit $T : D(T) \subset E \to E$ un opérateur linéaire fermé et soit $A \in L(E)$.
- Montrer que les opérateurs $A + T$ et TA sont fermés.

Exercice 4.6.

Soient E, F deux espaces de Banach et soit $T : D(T) \subset E \to F$ un opérateur linéaire fermé.
On suppose que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ satisfont la condition

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

- Montrer que si $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}, (Tv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes simultanément, alors

$$\lim_{n\to+\infty} Tu_n = \lim_{n\to+\infty} Tv_n.$$

Exercice 4.7.

On considère l'opérateur $T : C\Big([0,1]\Big) \to C\Big([0,1]\Big)$ défini par :

$$Tf(t) = \frac{f(t)}{t} \text{ et } D(T) = \Big\{ f \in C\Big([0,1]\Big) : \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t} \text{ existe } \Big\}.$$

- Montrer que T est fermé.

Exercice 4.8.

Soit un opérateur,

$$T : C\Big([0,1]\Big) \to C\Big([0,1]\Big)$$

défini par :

$$Tf(t) = f'(t) \text{ et } D(T) = \Big\{ f \in C^1\Big([0,1]\Big) : \ f(0) = f(1) = 0 \Big\}.$$

- Montrer que T est fermé .

Exercice 4.9.

On considère l'opérateur,

$$T : C\Big([0,1]\Big) \to C\Big([0,1]\Big),$$

défini par :

$$Tf(t) = f''(t) + f(t) \text{ et } D(T) = \Big\{ f \in C^2\Big([0,1]\Big) : \ f(0) = f'(0) = 0 \Big\}.$$

- Montrer que T est fermé et non borné.

Exercice 4.10.

Soient E, F deux espaces de Banach et soit $T : D(T) \subset E \to F$ linéaire borné.
Montrer que :

$$T \text{ est fermé } \iff D(T) \text{ est fermé dans } E.$$

Exercice 4.11.

Soit $T : D(T) \subset E \to F$ un opérateur linéaire.
On munit $D(T)$ de la norme,

$$\|x\|_1 = \|x\|_E + \|Tx\|_F.$$

Montrer que :

$$T \text{ est fermé } \iff D(T) \text{ un espace de Banach.}$$

Exercice 4.12.

Soit E et F deux espaces vectoriels normés et soit $T : D(T) \subset E \to F$ un opérateur linéaire fermé.
- Montrer que $\ker(T)$ est un sous-espace fermé de E.

Exercice 4.13.

Soit T un opérateur linéaire fermé.
On considère deux suites (x_n) et (y_n) dans $D(T)$ telles que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} y_n = \alpha.$$

Supposons que (Tx_n) et (Ty_n) convergent simultanément.
- Montrer que : $\lim_{n\longrightarrow+\infty}(Tx_n) = \lim_{n\longrightarrow+\infty}(Ty_n)$.

Exercice 4.14.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et F est compact.
On considère un opérateur $T : E \to F$ linéaire fermé.
- Montrer que T est borné.

Exercice 4.15.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et E est compact.
On considère un opérateur $T : E \to F$ linéaire fermé et bijectif.
- Montrer que T^{-1} est borné.

Exercice 4.16.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et soit $T : E \to F$ un opérateur linéaire fermé et $S \in L(E, F)$.
- Montrer que $T + S$ est un opérateur linéaire fermé.

Exercice 4.17.

Soient E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé.
On considère un opérateur T linéaire fermé de domaine $D(T) \subset E$ et son image $Im(T) \subset F$.
On suppose que T^{-1} existe et est borné.
- Montrer que $Im(T)$ est fermé.

Exercice 4.18.

On considère l'espace E tel que

$$E = C^1\Big([0,1]\Big) = \Big\{f : [0,1] \to \mathbb{C} \text{ telle que } f \text{ est continue, dérivable et } f' \text{ est continue}\Big\}$$

et

$$F = C([0,1]) = \Big\{ f : [0,1] \to \mathbb{C} \text{ telle que } f \text{ est continue } \Big\}.$$

On munit les deux espaces E et F par la norme $\|f\|_\infty = \sup_{0\le x\le 1} |f(x)|$.
Soit l'opérateur $T : E \to F$ défini par :

$$\forall f \in E : Tf = f'.$$

1) Montrer que T est fermé.
2) Montrer que T n'est pas borné.
*(**Indication :** On peut utiliser la suite $f_n(x) = x^n$).*
3) Expliquer le résultat.

Exercice 4.19.

On considère l'espace
$L^2\Big([0,1]\Big) = \Big\{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \int_0^1 |f(t)|^2\, dt < +\infty \Big\}$ *muni de la norme,*

$$\|f\| = \Big(\int_0^1 |f(t)|^2\, dt \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit l'opérateur $\big(T, D(T)\big)$ défini par :

$$D(T) = \Big\{ f \in C\Big([0,1]\Big), f' \in L^2\Big([0,1]\Big), f(0) = 0 \Big\}, \text{ et } Tf = f',$$

où $C\Big([0,1]\Big)$ est l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{0\le t\le 1} |f(t)|$.
1. Montrer que $T : D(T) \longrightarrow L^2\Big([0,1]\Big)$ est non borné.
*$\big($**Indication :** Utiliser la suite $f_n(t) = \sqrt{n}\, t^n,\ n \in \mathbb{N}\big)$.*
2. Montrer que T est fermé.

Exercice 4.20.

Soit $E = C\Big([0,1]\Big)$ muni de la norme de convergence uniforme,

$$\|u\|_\infty = \sup_{0\le x\le 1} |u(x)|.$$

On considère l'opérateur $A : E \to E$ défini par :

$$Au(x) = u(x) + \int_0^x u(t)\, dt, \quad D(A) = \Big\{ u \in C^1([0,1]) : u(0) = 0 \Big\}.$$

1. Résoudre l'équation différentielle

$$\begin{cases} u'(x) + u(x) = 0, & x \in [0,1] \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

-Montrer que $ker(A) = \{0\}$. En déduire que l'opérateur A est injectif.
2. Soit $f \in C\Big([0,1]\Big)$.

- Montrer que :

$$u(x) = f(x) - \int_0^x e^{t-x} f(t)\, dt$$

est une solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} u' + u = f', \\ u(0) = f(0) = 0. \end{cases}$$

- En déduire que l'opérateur A est surjectif.
- Trouver l'expression de A^{-1}.
3. Montrer que A^{-1} est borné.
4. Montrer que A est fermé.

Exercice 4.21.

Soient les deux espaces $C\Big([0,1]\Big)$ et $C^1\Big([0,1]\Big)$ et on les munit par la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Soit l'opérateur linéaire,

$$\mathcal{A} : C\Big([0,1]\Big) \to C\Big([0,1]\Big),$$

défini par :
$\mathcal{A}f = f'$ *et* $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{ f \in C^1\Big([0,1]\Big) : f(0) = 0 \Big\}$ *= le domaine de définition de $\mathcal{A}$.*
1. Montrer que l'opérateur $\mathcal{A}$ est non borné.
*(**Indication :** On peut utiliser la suite de fonctions $f_n(x) = \sin(n\pi x)$, $n \in \mathbb{N}^*$.)*
2. Montrer que l'opérateur $\mathcal{A}$ admet un inverse $\mathcal{A}^{-1}$.
3. Montrer que $\mathcal{A}^{-1}$ est continu.
4. Montrer que $\mathcal{A}$ est fermé.

Exercice 4.22.

On considère l'espace de Hilbert $\Big(l^2, (.)\Big)$ tel que :

$$l^2 = \Big\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}; x_n \in \mathbb{R}; \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \Big\},$$

muni du produit scalaire,

$$(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n,$$

et de la norme induite

$$\| x \| = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} | x_n |^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on désigne par e^p le vecteur de l^2 défini par :

$$(e^p)_n = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad n = p, \\ 0 & \textit{si} \quad n \neq p \end{cases}$$

et on désigne par M le sous-espace de l^2 engendré par $\{e^p, \quad p \in \mathbb{N}\}$.
1. Montrer que M est dense dans dans l^2.
2. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On pose :

$$D(T) = \{x \in l^2, \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n^2 x_n^2 < +\infty\} \text{ et } \Big(T(x)\Big)_n = \alpha_n x_n.$$

- Montrer que l'opérateur $T : D(T) \to l^2$ est fermé et à domaine dense.

Exercice 4.23.

On considère l'espace suivant :

$$E = l^2 = \Big\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, x_n \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\Big\}.$$

muni de la norme

$$\| \ x \ \|_E = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On rappelle que $(E, \| \ . \ \|_E)$ est un espace de Banach.
On considère $D(T)$ le sous-espace vectoriel de E tel que :

$$D(T) = \Big\{x \in l^2 : \sum_{n=0}^{+\infty} |n^2 x_n|^2 < +\infty\Big\}$$

On définit l'opérateur T comme suit :
T fait correspondre chaque x de $D(T)$, $T(x)$ dans l^2 tel que

$$\big(T(x)\big)_n = n^2 x_n.$$

1. Montrer que $D(T)$ est dense dans l^2.
2. Montrer que T admet un inverse T^{-1}. Trouver l'expression de T^{-1} .
3. Montrer que T n'est pas borné.
4. Montrer que T^{-1} est continu.
- En déduire que T est fermé.

Exercice 4.24.

on considère l'espace $H = L^2(]0, 1[], \mathbb{C})$.
1. Soit l'opérateur T défini par :

$$D(T) = C^1\Big([0, 1], \mathbb{C}\Big) \ \text{ et } \ Tf = f'$$

- Montrer que l'opérateur T n'est pas fermé.
2. Soit l'opérateur S défini par :
$D(S)$ le sous-espace de H tel que :

$$D(S) = \Big\{f \in C\Big([0, 1], \mathbb{C}\Big), f' \in L^2(]0, 1[], \mathbb{C})\Big\} \text{ et } Sf = f'$$

où f' est prise au sens des distributions sur $]0, 1[$.
- Montrer que l'opérateur S est fermé.

Exercice 4.25.

Soit $P(x)$ un polynôme de variable $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.
On considère l'opérateur T défini sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ par :

$$Tf(x) = P(x)f(x), \text{ et } D(T) = \Big\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} |P(x)|^2 |f(x)|^2 \, dx < \infty \Big\}.$$

- Montrer que l'opérateur T est non borné et est fermé.

Exercice 4.26.

Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in L(E, F)$ tel que T est bijectif.
- Montrer que :

$$T^{-1} : T(E) \to E \text{ est borné } \iff T(E) \text{ est fermé dans } F.$$

Exercice 4.27.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés.
Soit $T : E \to F$ un opérateur linéaire fermé.
a) On considère M un sous-ensemble compact de E.
- Montrer que $T(M)$ est fermé dans F.
b) On considère L un sous-ensemble compact de F.
- Montrer que $T^{-1}(L)$ est fermé dans E, où $T^{-1}(L)$ est l'image réciproque de L par T.

Exercice 4.28.

Soit E un espace de Banach. et soit G un sous-espace vectoriel de E. On suppose qu'il existe un sous-espace vectoriel L de E tel que $\dim(L) < +\infty$.
Montrer que si $E = G \oplus L$ alors G admet un supplémentaire topologique.

Exercice 4.29.

Soit E un espace de Banach. On considère un sous-espace vectoriel G de E tel que $\dim(G) < +\infty$, c'est à dire que $G = Vect\{e_i, i = 1, 2, 3, ..., n\}$. Donc $\forall x \in G$, x s'écrit de façon unique $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
- Montrer que G admet un supplémentaire topologique L.
***(Indication :** Considérer l'application $\varphi_i : G \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_i(x) = x_i$, pour tout $x \in G$, puis utiliser le théorème de Hahn-Banach et on pose $L = \cap_{i=1}^{n} {\tilde{\varphi}_i}^{-1}(\{0\})$, avec $\tilde{\varphi}_i$ est le prolongement de φ_i sur E.*

Exercice 4.30.

Soit H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $(.,.)$
Montrer que si G un sous-espace vectoriel fermé de E, alors G admet un supplémentaire topologique $G^{\perp} = \{x \in H : (x, y) = 0, \ \forall y \in G\}$.

Exercice 4.31.

Soient les deux espace,

$$G = \Big\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : x_n \in \mathbb{R} \text{ et } x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Big\}$$

et

$$H = \Big\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : (x_n) \text{ est convergente } \Big\}.$$

On munit H et G de la norme : $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |x_n|$.
- On désigne par l la forme suivante $l : H \to \mathbb{R}$ définie par :

$$l(x) = \lim_{n\to+\infty} x_n,$$

et on désigne par 1 la suite constante telle que $1 = (1)_{n\geq 1} = (1, 1, 1, ...) \in H$.
1) Montrer que $H = G \bigoplus \mathbb{R}1$.
2) Montrer que $H' = G' \bigoplus \mathbb{R}l$.

Exercice 4.32. *(Inverse à gauche)*

Soit E, F deux espaces de Banach. On considère l'opérateur $T : E \to F$ tel que T est linéaire continu et injectif.
Montrer que $1) \Leftrightarrow 2)$,
1) T admet un inverse à gauche.
2) $T(E)$ est fermée et admet un supplémentaire topologique dans F.

Exercice 4.33. *(Inverse à gauche)*

Soit E un espace de Banach, soient F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires, c'est à dire $E = F \oplus G$. On considère P_F (resp P_G) la projection sur F (resp sur G) parallèlement à G (resp à F).
- Montrer que : $\Big(P_F, P_G \text{ sont continues} \Big) \Longleftrightarrow \Big(F \text{ et } G \text{ sont fermés} \Big)$.

Exercice 4.34.

Soit E un espace vectoriel normé.
1) Soit P une projection sur E, c'est à dire une application linéaire $P : E \to E$ telle que $P \circ P = P^2$. On suppose que P est continue .
- Montrer alors que

$$E = Im(P) \oplus \ker(P).$$

2) Réciproquement si E est un espace de Banach et si $E = A \oplus B$ (avec A et B sont deux sous-espaces vectoriels fermés de E), alors la projection de l'image de A et de noyau de B est continue.
3) En déduire qu'un sous-espace vectoriel normé d'un espace de Banach E admet un supplémentaire topologique si et seulement s' il est l'image d'une projection continue sur E.

Exercice 4.35.

Soit E un espace vectoriel normé et M un sous-espace vectoriel normé fermé de E.
- Montrer que M admet un supplémentaire topologique dans E dans les cas suivants :
1) $\dim(E) < +\infty$.
2) $\dim(E/M) < +\infty$.

Exercice 4.36.

Soit $E = l^1$, ainsi $E' = l^\infty$. On considère l'opérateur $T \in L(E)$ défini par :

$$Tx = \left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\geq 1}, \ \ \forall x = (x_n)_{n\geq 1} \in l^1.$$

Déterminer $\ker(T),\ \ker(T)^\perp,\ T^*,\ Im(T),\ \overline{Im(T^*)}$.

CHAPITRE 5

TOPOLOGIE FAIBLE ET TOPOLOGIE FAIBLE-$*$

5.1 Topologie faible

Préliminaire :

Soit X un ensemble et soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques munie de la famille de topologies $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$. Pour chaque $i \in I$, on se donne une application $\varphi_i : X \longrightarrow Y_i$.
Notre but est de chercher une topologie $\mathcal{T}$ sur X qui permet rendre continues toutes les applications $(\varphi_i)_{i\in I}$. Si possible, on construit la topologie $\mathcal{T}$ la moins fine c'est-à-dire que $\mathcal{T}$ contient un minimum d'ouverts. Autrement dit $\mathcal{T}$ la topologie la plus économique qui rend continues toutes les applications $(\varphi_i)_{i\in I}$.
• La topologie $\mathcal{T}$ est différente de la topologie $\mathcal{P}(X)$ = l'ensemble des parties de X.
• La topologie $\mathcal{T}$ est différente de la topologie triviale $\{X, \emptyset\}$.
φ_i est continue, alors pour tout $U_i \in \mathcal{O}_i : \varphi_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}$.
On pose :

$$\mathcal{T} = \left\{ U \subset X, U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda, U_\lambda = \bigcap_{i\in J} \varphi_i^{-1}(U_i), U_i \in \mathcal{O}_i, J \text{ est fini} \right\}$$

•$\mathcal{T}$ est stable par l'intersection finie $\bigcap_{finie}$.

•$\mathcal{T}$ est stable par la réunion quelconque $\bigcup_{quelconque}$.

Proposition 5.1

$\mathcal{T}$ est une topologie sur X.

Définition 5.1.

Pour $x \in X$, on définit la base de voisinages de x comme suit :

$$\mathcal{B}(x) = \left\{ B = \bigcap_{i\in J} \varphi_i^{-1}(V_i), J \subset I, \ J \text{ est fini}, \forall i : V_i \in \mathcal{V}\Big(\varphi_i(x), Y_i, \mathcal{O}_i\Big) \right\}.$$

$\mathcal{B}(x)$ est une base de voisinages de x dans $(X,\mathcal{T})$ ou un système fondamental de voisinages de x, ce qui est équivalent à dire

$$\forall v \in \mathcal{V}(x,,X,\mathcal{T}), \exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subset V.$$

Proposition 5.2

Soit $\varphi_i : X \longrightarrow Y_i$ avec $X = \prod_{i\in I} Y_i : x \longmapsto \varphi_i(x) = y_i$.
La topologie produit coïncide avec la topologie $\mathcal{T}$ définie précédemment.

Proposition 5.3

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X et soit $(Y_i,\mathcal{O}_i)$ l'espace topologique. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes,
i) $x_n \longrightarrow x$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ dans $(X,\mathcal{T})$.
ii) $\varphi_i(x_n) \longrightarrow \varphi_i(x)$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ dans $(Y_i,\mathcal{O}_i)$, pour tout $i \in I$.

Démonstration.

1. $i) \Longrightarrow ii)$.
Supposons que $x_n \longrightarrow x$ et montrons que $\varphi_i(x_n) \longrightarrow \varphi_i(x)$ pour tout $i \in I$ dans $(Y_i,\mathcal{O}_i)$ c'est évident car φ_i est continue pour tout $i \in I$.
2. Supposons que $\varphi_i(x_n) \longrightarrow \varphi_i(x)$ pour tout $i \in I$ dans $(Y_i,\mathcal{O}_i)$ et montrons que $x_n \longrightarrow x$.
Soit U un voisinage de x dans la topologie $\mathcal{T}$, c'est-à-dire que $U \in \mathcal{V}(x,,X,\mathcal{T})$. Alors il existe $B \in \mathcal{B}(x)$ tel que $B \subset U$.
On a :

$$B = \bigcap_{i\in J \text{ fini}} \varphi_i^{-1}(V_i) \text{ tel que } V_i \in \mathcal{V}(\varphi_i(x),,Y_i,\mathcal{O}_i).$$

On a $\varphi_i(x_n) \longrightarrow \varphi_i(x)$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ dans $(\mathcal{O}_i)$, alors,

$$\forall i \in J, \exists N_i \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_i : \varphi_i(x_n) \in V_i,$$

c'est-à-dire que :

$$x_n \in \varphi_i^{-1}(V_i).$$

On pose,

$$N = \max_{i\in J} N_i.$$

N existe car J est fini.
Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N} : \varphi_i(x_n) \in V_i, \forall i \in J.$$

D'où,

$$x_n \in \varphi_i^{-1}(V_i), \forall i \in J.$$

Alors,

$$x_n \in \bigcap_{i\in J} \varphi_i(x_n) \in V_i = B \subset U.$$

Par conséquent,

$$x_n \in U.$$

Alors,

$$\forall U, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \Longrightarrow x_n \in B \subset U.$$

Ce qui signifie que la suite (x_n) converge vers x.

□

Proposition 5.4

Soit $\mathcal{Z}$ un espace topologique et soit ψ une application de $\mathcal{Z}$ dans X. Alors ψ est continue si et seulement si $\varphi_i \circ \psi$ est continue de $\mathcal{Z}$ dans Y_i pour chaque $i \in I$, où

$$\varphi_i : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y_i, \mathcal{O}_i).$$

Démonstration.

i) $\Longrightarrow$).
Comme ψ est continue alors $\varphi_i \circ \psi$ est continue, pour chaque $i \in I$ (c'est évident).
ii) $\Longleftarrow$)
Supposons que $\varphi_i \circ \psi$ est continue, pour chaque $i \in I$ et montrons que ψ est continue.
Soit Ω un ouvert de X, et montrons que $\psi^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de $\mathcal{Z}$.
On sait que Ω est de la forme :

$$\Omega = \bigcup_{quelconque} \bigcap_{fini} \psi^{-1}\left(\varphi_i^{-1}(w_i)\right) = \bigcup_{quelconque} \bigcap_{fini} (\varphi_i \circ \psi)^{-1}(w_i),$$

qui est un ouvert de $\mathcal{Z}$ puisque $\varphi_i \circ \psi$ est continue pour chaque $i \in I$.

□

5.1.1 Définition et propriétés élémentaires de la topologie faible $\sigma(E, E')$ dans un espace de Banach

Soit E un espace de Banach et soit E' son dual topologique. On désigne par :

$$\varphi_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

ou

$$\varphi_f : E \longrightarrow \mathbb{C},$$

l'application définie par :

$$\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle = f(x).$$

Quand f décrit E', on obtient une famille d'applications $(\varphi_f)_{f \in E'}$ de E dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.

Définition 5.2.

La topologie faible $\mathcal{T}$ sur E est la topologie moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f \in E'}$ que l'on désigne par $\sigma(E, E')$. (c'est-à-dire que $\mathcal{T} = \sigma(E, E')$).

Remarque 5.1.

Ici $(X,\mathcal{T})=(E,\sigma(E,E'))$, $(Y_i,\mathcal{O}_i)=(\mathbb{R},|.|)$ ou $(Y_i,\mathcal{O}_i)=(\mathbb{C},|.|)$, $I=E',i=f$.

Proposition 5.5

La topologie faible $\sigma(E,E')$ est séparée.

Démonstration.

On fait la démonstration dans le cas où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Soient $x_1,x_2\in E$ tels que $x_1\neq x_2$. On veut trouver deux ouverts $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ pour la topologie faible $\sigma(E,E')$ tel que $x_1\in\mathcal{O}_1$ et $x_2\in\mathcal{O}_2$ et $\mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2=\emptyset$.
En vertu du théorème 2.5 (deuxième forme géométrique du théorème de Hahn-Banach) il existe un hyperplan fermé séparant $\{x_1\}$ et $\{x_2\}$ au sens strict. Alors il existe $g\in E'$ et $\alpha\in\mathbb{R}$ tels que

$$g(x_1)<\alpha<g(x_2)$$

On pose,

$$\mathcal{O}_1=\{x\in E,g(x)<\alpha\}=\varphi_g^{-1}\Big(]-\infty,\alpha[\Big) \text{ et } \mathcal{O}_2=\{x\in E,g(x)>\alpha\}=\varphi_g^{-1}\Big(]\alpha,+\infty[\Big)$$

On a $x_1\in\mathcal{O}_1$, $x_2\in\mathcal{O}_2$ et $\mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2=\emptyset$. □

Proposition 5.6

Soit E un espace de Banach et soit $x_0\in E$ et soit $\sigma(E,E')$ la topologie faible sur E et soit $(f_i)_{i\in I}$, $f_i\in E'$, $\forall i\in I, I$ est fini.
Pour $\varepsilon>0$, on pose

$$V=\{x\in E,\ |\langle f_i,x-x_0\rangle|<\varepsilon\}.$$

Alors,
1. V est un un voisinage de x.
2. Tous les ensembles de la forme V forment une base de voisinages de x_0.

Démonstration.

1. Montrons que $V=\{x\in E,\ |\langle f_i,x-x_0\rangle|<\varepsilon\}$ est un un voisinage de x.
On a :

$$V=\bigcap_{i\in I}\varphi_{f_i}^{-1}\Big(]f_i(x_0)-\varepsilon,f_i(x_0)+\varepsilon[\Big).$$

En effet,
on a :

$$|\langle f_i,x-x_0\rangle|<\varepsilon\Longrightarrow|f_i(x)-f_i(x_0)|<\varepsilon\Longrightarrow f_i(x)\in]f_i(x_0)-\varepsilon,f_i(x_0)+\varepsilon[,$$

c'est-à-dire que :

$$\varphi_{f_i}(x) \in]f_i(x_0)-\varepsilon, f_i(x_0)+\varepsilon[, \text{ pour tout } i \in I.$$

D'où,

$$x \in \varphi_{f_i}^{-1}\Big(]f_i(x_0)-\varepsilon, f_i(x_0)+\varepsilon[\Big), \text{ pour tout } i \in I.$$

Par conséquent,

$$x \in \bigcap_{i\in I} \varphi_{f_i}^{-1}\Big(]f_i(x_0)-\varepsilon, f_i(x_0)+\varepsilon[\Big) = V.$$

2. Montrons que tout voisinage de x_0 contient un élément de la forme V.
Soit U un voisinage de x_0 dans $\sigma(E,E')$. On sait que qu'il existe un voisinage W de x_0 tel que :

$$W \subset U \text{ et } W = \bigcap_{i\in I, I \text{ fini}} \varphi_{f_i}^{-1}(V_i),$$

où V_i est un voisinage de $\varphi_{f_i}(x_0)$.
D'autre part on a $f_i(x_0) = \varphi_{f_i}(x_0)$ donc V_i est un voisinage de $f_i(x_0)$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On sait aussi que les intervalles ouverts forment une base de voisinages dans $\mathbb{R}$, alors,

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que :}]f_i(x_0)-\varepsilon, f_i(x_0)+\varepsilon[\subset V_i, \text{ pour tout } i \in I \text{ et } I \text{ est fini.}$$

On prend,

$$V = \bigcap_{i\in I} \varphi_{f_i}^{-1}(]f_i(x_0)-\varepsilon, f_i(x_0)+\varepsilon[) \subset W \subset U.$$

□

Notations :

Étant donnée une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E. dans la suite on va utiliser les notations suivantes.
1. $x_n \longrightarrow x$ dans $(E, \|.\|)$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ désigne la convergence forte ou la convergence en norme $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$, et on dit aussi que la suite (x_n) converge fortement vers x.
2. $x_n \rightharpoonup x$ désigne la convergence de (x_n) vers x pour la topologie faible $\sigma(E,E')$, et on dit aussi que la suite (x_n) converge faiblement vers x, et on dit aussi que x est limite faible de la suite (x_n).

Proposition 5.7

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On a :
1. $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E,E') \Longleftrightarrow \langle f, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$.
2. Si $x_n \longrightarrow x$ fortement, alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E,E')$.
3. Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E,E')$, alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.
4. Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E,E')$ et si $f_n \longrightarrow f$ fortement dans E',
(c'est-à-dire que $\|f_n - f\|_{E'} \longrightarrow 0$), alors $\langle f_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$.

Démonstration.

1. Montrons $\Longrightarrow$)
Si $x_n \rightharpoonup x$, alors,

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0 : x_n \in V.$$

D'après la proposition 5.6, on a :

$$\forall f \in E' \text{ et } \varepsilon > 0, \text{ il existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que, } \forall n \geq n_0 : x_n \in \{y \in E : |\langle f, y\rangle - \langle f, x\rangle| \leq \varepsilon\}.$$

C'est-à-dire que :

$$\langle f, x_n\rangle \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle f, x\rangle.$$

Réciproquement, montrons $\Longleftarrow$)
Soit $\varepsilon > 0$ et $f_1, f_2, ..., f_k \in E'$.
On a :

$$\forall j \in \{1, 2, ..., k\}, \langle f_j, x_n\rangle \to \langle f_j, x\rangle \text{ dans } \mathbb{R} \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Donc,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0 \text{ et pour tout } j \in \{1, 2, ..., k\}, \text{ on a :} |f_j(x_n) - f_j(x)| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent,

$$x_n \in V = V_{f_1, f_2, ..., f_k, \varepsilon}.$$

D'où le résultat.

Remarque 5.2.

Si $V \in \mathcal{V}(x_0)$, alors

$$V = V_{f_1, f_2, ..., f_k, \varepsilon} = \Big\{x \in E, \forall j \in \{1, 2, ..., k\} : |f_j(x) - |f_j(x_0) \leq \varepsilon\Big\},$$

(d'après la proposition (5.6)).

2. Supposons que $x_n \longrightarrow x$ dans $(E, \|.\|)$ (pour la topologie forte) et montrons que $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$, c'est à dire qu'on montre que pour tout $f \in E', \langle f, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$.
Soit $f \in E'$. On a :

$$|\langle f, x_n\rangle| = |\langle f, x_n - x\rangle| \leq \|f\|_{E'}\|x_n - x\|.$$

Et comme $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$. On conclut le résultat.
3. On utilise le théorème de Banach-Steinhaus et de Hahn-Banach. On considère l'opérateur

$$T_n : E' \longrightarrow \mathbb{C} : f \longmapsto T_n(f) = \langle f, x_n\rangle.$$

On a d'après la propriété 1.

$$T_n(f) = \langle f, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle.$$

Donc la suite $(T_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, pour tout $f \in E'$, c'est-à-dire que :

$$\exists\, C_f > 0 : \ |T_n(f)| \leq C_f.$$

En vertu du théorème de Banach-Steinhaus,

$$\exists\, C > 0 : \ \|T_n\|_{E'} < C.$$

Et d'après le corollaire 2.3 de Hahn-Banach :

$$\|T_n\|_{E'} = \sup_{\|f\|\leq 1} |\langle T_n, f\rangle| \leq \sup_{\|f\|\leq 1} |\langle f, x_n\rangle| = \|x_n\|.$$

Par conséquent,

$$\|x_n\| < C.$$

Montrons que $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.
Comme $(\|x_n\|)$ est bornée, donc $\liminf \|x_n\|$ existe.
On a :

$$|\langle f, x_n\rangle| \leq \|f\|\|x_n\| \Longrightarrow |\langle f, x\rangle| \leq \|f\| \liminf \|x_n\|.$$

Et d'après le corollaire 2.3 de Hahn-Banach, on a :

$$\| x \| = \sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|.$$

Alors on introduit le $\sup_{\|f\| \leq 1}$ dans la dernière égalité, on trouve,

$$\|x\| \leq \liminf \|x_n\|.$$

4. Supposons que $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ et $f_n \longrightarrow f$ fortement dans E' et montrons que $\langle f_n, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle$.
On a :

$$|\langle f_n, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| \leq |\langle f_n - f, x_n \rangle| + |\langle f, x_n - x \rangle| \leq \|f_n - f\| \|x_n\| + |\langle f, x_n - x \rangle|. \quad (5.1)$$

Comme $\|x_n\|$ est bornée et $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$, on a :

$$\|f_n - f\| \|x_n\| \longrightarrow 0.$$

Et d'autre part d'après la propriété 1. on a :

$$|\langle f, x_n - x \rangle| \longrightarrow 0.$$

Alors (5.1) implique que :

$$|\langle f_n, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| \longrightarrow 0.$$

□

Remarque 5.3.

Dans la propriété 2. la réciproque est fausse en dimension infinie comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 5.1.

On a l'exemple suivant qui montre que la convergence faible n'implique pas la convergence forte en dimension infinie :
On considère l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = l^2(\mathbb{R}) = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{R} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\},$$

muni du produit scalaire

$$(x, y)_{\mathcal{H}} = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n,$$

et la norme induite

$$\|x\| = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On a $\dim \left(l^2(\mathbb{R}) \right) = +\infty$.
On peut identifier $l^2(\mathbb{R})$ *par son dual.*
On considère la suite orthonormée $(e_n) \subset l^2(\mathbb{R}),\ e_n = (0, 0, ..., 0, 1, 0, 0, 0, ...)$.
Pour $x = (x_n) \in l^2(\mathbb{R})$*, on a :*

$$(x, e_n)_{l^2} = x_n.$$

D'autre part on a d'après l'inégalité de Bessel,

$$\sum_{n\geq 0} |(x,e_n)|^2 \leq \|x\|_{l^2}^2.$$

Donc la série $\sum_{n\geq 0} |(x,e_n)|^2$ *est convergente et par conséquent* $(x,e_n)\to 0$. *Ce qui montre que* $e_n \rightharpoonup 0$.
Notons que la suite (e_n) *ne converge pas fortement vers* 0, *car* $\|e_n\|_{l^2}=1$

Remarque 5.4.

On a l'équivalence

$$(u_n \rightharpoonup u) \Leftrightarrow \Big[(u_n) \text{ est bornée et } (u_n,e_i)\to(u,e_i) \quad \forall i\in\mathbb{N}\Big].$$

En effet,
i) $\Rightarrow$). On suppose que $u_n \rightharpoonup u$.
Donc $\|u_n\| < +\infty$ (c'est-à-dire que la suite (u_n) est bornée.)
On a aussi pour tout x dans $l^2(\mathbb{R})$: $(u_n,x)\to(u,x)$ lorsque $n\to+\infty$. En particulier $(u_n,e_i)\to(u,e_i)$ lorsque $n\to+\infty$ pour tout $i\in\mathbb{N}$.
ii) $\Leftarrow$) Supposons que $\Big[(u_n)$ est bornée et $(u_n,e_i)\to(u,e_i) \quad \forall i\in\mathbb{N}\Big]$ et montrons que $u_n \rightharpoonup u$.
Soit $x\in l^2(\mathbb{R})$. Montrons que $(u_n,x)\to(u,x)$ lorsque $n\to+\infty$.
On a $x\in l^2(\mathbb{R})$, alors : $\forall\varepsilon>0, \exists i\in\mathbb{N} : \|x-e_i\|\leq\varepsilon$ car $\{e_i\}$ est une base Hilbertienne de $l^2(\mathbb{R})$ donc $\overline{\{e_i\}} = l^2(\mathbb{R})$ $\Big($l'espace vectoriel engendré par (e_i) est dense dans $l^2(\mathbb{R})\Big)$.
On a $|(u_n,x)-(u,x)| = |(u_n,x-e_i+e_i)-(u,x-e_i+e_i)| = |(u_n,x-e_i)+(u_n,e_i)-(u,x-e_i)-(u,e_i)| \leq |(u_n,x-e_i)|+|(u_n,e_i)-(u,e_i)|+|(u,x-e_i)| \leq \|u_n\|\|x-e_i\|+\|u\|\|x-e_i\|+|(u_n,e_i)-(u,e_i)| \leq M\varepsilon+\|u\|\varepsilon+\varepsilon = \varepsilon(M+\|u\|+1)\to 0$ lorsque $\varepsilon\to 0$.

Proposition 5.8

Lorsque E est de dimension finie, la topologie faible $\sigma(E,E')$ et la topologie forte coïnsident.
En particulier une suite (x_n) converge faiblement si et seulement si elle converge fortement. Si on désigne par $\sigma(E)$ à la topologie forte induite par la norme $\|.\|$, alors on écrit :

$$\sigma(E,E') = \sigma(E).$$

Démonstration.

i)$\sigma(E,E')\subset\sigma(E)$ est toujours vraie.
ii) Montrons que $\sigma(E)\subset\sigma(E,E')$. C'est-à-dire que tout ouvert de $\sigma(E)$ appartient à $\sigma(E,E')$.
Soit $x_0\in E$ et soit Ω un voisinage de x_0 pour la topologie forte $\sigma(E)$. On va chercher un voisinage V de x_0 tel que $V\subset\Omega$.
D'après la proposition 5.6, V est sous la forme :

$$V=\{x\in E,\ |\langle f_i, x-x_0\rangle|<\varepsilon, \forall i\in I\},\ \text{avec}\ \ I \text{ est fini et } f\in E', \varepsilon>0.$$

On suppose que $B(x_0, r) \subset \Omega$. On choisit une base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de E tel que $\|e_i\| = 1, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ (car E est de dimension finie).
Pour tout $x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
Les applications $x \longmapsto x_i$ définissent n formes linéaires continues sur E notées f_i. On a alors

$$\|x - x_0\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\langle f_i, x - x_0\rangle| < n\varepsilon, \text{ pour } x \in V.$$

On choisit $\varepsilon = \frac{r}{n}$, on obtient $V \subset \Omega$. □

Proposition 5.9

Dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimension finie, la convergence faible est équivalente à la convergence forte.

Démonstration.

i) La convergence forte $\Longrightarrow$ la convergence faible est toujours satisfaite d'après la proposition 5.7 (propriété 2).
ii) Montrons que la convergence faible $\Longrightarrow$ la convergence forte. Soit $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}$ et soit (x_n) une suite faiblement convergente et soit x sa limite i.e $x_n \rightharpoonup x$. On a d'après l'égalité de Parseval :

$$\|x_n - x\| = \sum_{i=1}^{p} |\langle e_i, x_n - x\rangle|^2.$$

D'après la propriété 1) de la proposition 5.7, on a :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \langle e_i, x_n - x\rangle = 0, \ \forall i = 1, 2, ..., p.$$

D'où,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

□

Remarque 5.5.

Si E est de dimension infinie, la topologie forte est différente de la topologie faible, c'est-à-dire que $\sigma(E, E') \neq \sigma(E)$, $(\sigma(E, E') \subsetneq \sigma(E))$.

Définition 5.3.

Soient E un espace de Banach et M un sous-ensemble de E. On dit que M est faiblement borné si pour toute $f \in E'$ l'ensemble de nombres

$$D = \{\langle f, x\rangle, x \in M\}$$

est borné.

Proposition 5.10

Tout ensemble borné est faiblement borné.

Démonstration.

Exercice. □

Proposition 5.11

Dans un espace de Banach E, tout sous-ensemble M de E faiblement borné est borné.

Démonstration.

Supposons que M est faiblement borné et montrons qu'il est borné.
Supposons que M n'est pas borné. Alors il existe une suite $(x_n) \subset M$ telle que $\|x_n\| > n^2$.
On considère la suite $(\frac{x_n}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pour toute $f \in E'$ on a :

$$|\langle f, \frac{x_n}{n}\rangle| \leq \frac{1}{n} \sup_{x\in M} |\langle f, x\rangle| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty.$$

Autrement dit,

$$\frac{x_n}{n} \rightharpoonup 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty.$$

Alors d'après la proposition 5.7 (propriété 3), il ressort que la suite $(\|\frac{x_n}{n}\|)$ est bornée, ce qui contredit l'inégalité $\|\frac{x_n}{n}\| > n$. □

5.1.2 Topologie faible, ensembles convexes et opérateurs linéaires

D'après la remarque 5.5, tout ensemble fermé pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ est fermé pour la topologie forte $\sigma(E)$, mais quand $\dim(E) = +\infty$ la réciproque est fausse.
On va voir que pour les ensembles convexes ces deux notions coïncident.

Théorème 5.1

Soit $\mathcal{C}$ un sous-ensemble convexe de E. Alors $\mathcal{C}$ est faiblement fermé pour $\sigma(E, E')$ si et seulement s'il est fortement fermé.

Démonstration.

$\Longrightarrow$) est toujours vraie.
$\Longleftarrow$) :
Supposons que $\mathcal{C}$ est fortement fermé et montrons qu'il est faiblement fermé. Donc on va montrer que $\mathcal{C}^c$ (le complémentaire de $\mathcal{C}$) est un ouvert pour la topologie $\sigma(E, E')$, c'est-à-dire qu'il est un voisinage de chacun de ses points.
Soit $x_0 \in \mathcal{C}^c$. D'après le théorème de Hahn-Banach deuxième forme géométrique, il existe un hyperplan fermé qui sépare $\{x_0\}$ et $\mathcal{C}$ au sens strict, c'est à dire que :

$$\exists f \in E' \text{ et } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tels que } \langle f, x_0\rangle < \alpha < \langle f, y\rangle, \text{ pour tout } y \in \mathcal{C}.$$

On pose

$$V = \{x \in E : \langle f, x\rangle < \alpha\},$$

de sorte que $x_0 \in V$ et $V \cap \mathcal{C} = \emptyset$ (c'est-à-dire que $V \subset \mathcal{C}^c$) et V est un ouvert pour la topologie $\sigma(E, E')$. □

Théorème 5.2

Soient E et F deux espaces de Banach. Soit A un opérateur linéaire de E dans F. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes
1) A est continu de E dans F.
2) A est continu de E faible $\sigma(E, E')$ dans F faible $\sigma(F, F')$.

Démonstration.

i) Montrons que $2) \Longrightarrow 1)$.
Utilisons le théorème du graphe fermé.
On a d'après la propriété 2) l'application,

$$A : \Big(E, \sigma(E, E'\Big) \longrightarrow (F, \sigma(F, E')),$$

est continu. Donc $G(A)$ est fermé dans $\Big(E \times F, \sigma(E \times F, E' \times F')$, et comme $G(A)$ est convexe (puisqu'il un sous-espace vectoriel), alors en vertu du théorème 5.1, $G(A)$ est fermé pour la topologie forte (c'est-à-dire pour la topologie $\Big(E \times F, \sigma(E \times F)\Big)$ et donc A est fermé pour la topologie forte.
Par conséquent, d'après le théorème du graphe fermé 4.2, on conclut que A est continu (pour la topologie forte, i.e $A \in L(E, F)\Big)$.
ii) Montrons que $1) \Longrightarrow 2)$.
On va utiliser la proposition suivante :

Proposition 5.12

Soient E et F deux espaces de Banach et $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire continu (c'est-à-dire que $A \in L(E, F)\big)$. Alors il existe un opérateur $T = A^t : F' \longrightarrow E'$ linéaire continu (c'est-à-dire que $A^t \in L(F', E')\big)$, tel que :

$$\langle f, Ax\rangle_{F',F} = \langle A^t f, x\rangle_{E',E} \text{ et}$$

$$\|A\|_{L(E,F)} = \|A^t\|_{L(F',E')}.$$

Démonstration.

Supposons que :

$$A : (E, \|.\|_E) \longrightarrow (F, \|.\|_F)$$

est continu et montrons que

$$A : \Big(E, \sigma(E,E')\Big) \longrightarrow \Big(F, \sigma(F,F')\Big) \text{ est continu.}$$

Soit (x_n) une suite de E. On va montrer que si $x_n \rightharpoonup x$ (pour la topologie $\sigma(E,E')$), alors $Ax_n \rightharpoonup Ax$ (pour la topologie faible $\sigma(F,F')$). C'est-à-dire qu'on montre que :

$$\langle f, Ax_n\rangle \longrightarrow \langle f, Ax\rangle \text{ pour tout } f \in F' \text{ dans } (\mathbb{C}, |.|).$$

On a :

$$\langle f, Ax_n\rangle = \langle A^t f, x_n\rangle.$$

Comme $A \in L(E,F)$ fortement, alors on a aussi $A^t \in L(F',E')$.
On a $x_n \rightharpoonup x$ alors,

$$\langle g, x_n\rangle \longrightarrow \langle g, x\rangle \text{ pour tout } g \in E'.$$

Puisque $A^t f \in E'$, donc

$$\langle A^t f, x_n\rangle \longrightarrow \langle A^t f, x\rangle.$$

Alors,

$$\langle A^t f, x_n\rangle = \langle f, Ax_n\rangle \longrightarrow \langle A^t f, x\rangle = \langle f, Ax\rangle.$$

D'où le résultat. □

Définition 5.4. (Convergence des suites des opérateurs)

Soient E, F deux espaces normés et soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de l'espace $L(E,F)$.

1. On dit que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers T si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en norme dans $L(E,F)$, c'est à dire que $\| T_n - T \|_{L(E,F)} \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$. On dit alors que T est la limite uniforme de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. On dit que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers T si $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers Tx dans F pour tout $x \in E$, c'est à dire que $\| T_n(x) - T(x) \|_F \longrightarrow 0, \forall x \in E$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$. On dit alors que T est la limite forte de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. On dit que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers T si $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers Tx dans F pour tout $x \in E$, c'est à dire que $|f(T_n x) - f(Tx)| \longrightarrow 0, \forall x \in E, \forall f \in E'$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$. On dit alors que T est la limite faible de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème 5.3

(La convergence faible et la continuité)
Soient E et F deux espaces de Banach et A un opérateur linéaire continu de E dans F.
Si $x_n \rightharpoonup x$ lorsque $n \to +\infty$, alors $Ax_n \rightharpoonup Ax$ lorsque $n \to +\infty$.

Démonstration.

On montre que $\langle Ax_n, g\rangle \to \langle Ax, g\rangle$ dans $\mathbb{R}$ lorsque $n \to +\infty$ pour tout $g \in F'$.
Soit $g \in F'$. On a :

$$\langle Ax_n, g\rangle - \langle Ax, g\rangle = \langle Ax_n - Ax, g\rangle = \langle A(x_n - x), g\rangle = \langle x_n - x, A^*g\rangle.$$

Comme $x_n \rightharpoonup x$ et $A^*g \in E'$, alors,

$$\langle x_n - x, A^*g\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} 0.$$

□

5.2 Topologie faible-$*$ $\sigma(E', E)$

Soit E un espace de Banach, soit E' son dual topologique (muni de la norme duale $\|f\|_{E'} = \sup_{x\in E, \|x\|\leq 1} |\langle f, x\rangle|$) et soit E'' son bidual (c'est-à-dire le dual de E') muni de la norme

$$\|\xi\| = \sup_{f\in E', \|f\|\leq 1} |\langle \xi, f\rangle|$$

Définition 5.5.

la topologie faible-$*$ désignée aussi par $\sigma(E', E)$ est la topologie la moins fine sur E' rendant continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x\in E}$ où $\varphi_x : E' \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\varphi_x(f) = \langle f, x\rangle$$

Remarque 5.6.

1) Comme $E' \subset E''$, il est clair que la topologie $\sigma(E', E)$ est plus fine que la topologie $\sigma(E', E'')$. C'est-à-dire que la topologie $\sigma(E', E)$ possède moins d'ouverts (resp fermés) que la topologie $\sigma(E', E'')$.
2) On utilise la topologie faible-$*$ dans le cas où les espaces ne sont pas réflexifs car dans le cas où les espaces sont réflexifs les topologies $\sigma(E, E')$ et $\sigma(E', E)$ ont le même sens.

Proposition 5.13

La topologie faible-$*$ $\sigma(E', E)$ est séparée.

Démonstration.

On montre que pour tous $f_1, f_2 \in E'$ tels que $f_1 \neq f_2, \exists\, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ deux ouverts pour la topologie $\sigma(E', E)$ tels que $f_1 \in \mathcal{O}_1$ et $f_2 \in \mathcal{O}_2$ et $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$.
Soient $f_1, f_2 \in E'$ avec $f_1 \neq f_2$, il existe donc $x \in E$ tel que $\langle f_1, x\rangle \neq \langle f_2, x\rangle$
(puisque $f_1 \neq f_2$).
On suppose par exemple que $\langle f_1, x\rangle < \langle f_2, x\rangle$ et on introduit α tel que :

$$\langle f_1, x\rangle < \alpha < \langle f_2, x\rangle.$$

On pose :

$$\mathcal{O}_1 = \{f \in E' : \langle f, x\rangle < \alpha\} \text{ et } \mathcal{O}_2 = \{f \in E' : \langle f, x\rangle > \alpha\}.$$

On a :

$$\mathcal{O}_1 = \varphi_x^{-1}(]-\infty, \alpha[),$$

et

$$\mathcal{O}_2 = \varphi_x^{-1}(]\alpha, +\infty[).$$

Comme φ_x est continue alors $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_1$ sont des ouverts pour la topologie $\sigma(E', E)$ et $f_1 \in \mathcal{O}_1,\ f_2 \in \mathcal{O}_2$ et
$\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. □

Proposition 5.14

Soit $f_0 \in E'$.
On pose :

$V = \{f \in E' : |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \varepsilon, \forall i \in I,\ \text{avec } I \text{ est fini}\}$ où $x_i \in E$ pour tout $i \in I$ et $\varepsilon > 0$.

Tous les ensembles de la forme V forment une base de voisinages du point f_0 pour la topologie $\sigma(E', E)$.

Démonstration.

On fait la démonstration de même manière que la démonstration de la proposition 5.6. □

Notations :
Étant donnée une suite (f_n) de E'. On désigne par
1. $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ la convergence de (f_n) vers f pour la topologie faible-$*$ $\sigma(E', E)$.
2. $f_n \to f$ dans E' désigne la convergence forte de (f_n) vers f dans E'.

Proposition 5.15

Soit (f_n) une suite de E'. On a :

1. $\left(f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f\right) \Longleftrightarrow \left(\langle f_n, x\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle, \forall x \in E\right)$.
2. Si $f_n \longrightarrow f$, alors $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.
3. Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, alors $\|f_n\|$ est bornée et $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.

4. Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ et si $x_n \overset{(E,\|.\|)}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} x$ (fortement), alors $\langle f_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$.

Démonstration.

On fait la démonstration de même manière que la démonstration de la proposition 5.7. □

Remarque 5.7.

Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ et si $x_n \rightharpoonup x$, on ne peut pas conclure que $\langle f_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$.
En dimension finie, la topologie forte $\sigma(E)$ et la topologie faible-$*$ $\sigma(E', E)$ coïncident.

5.3 Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki

Théorème 5.4

(de Banach-Alaoglu-Bourbaki)
L'ensemble $B_{E'} = \{f \in E' : \|f\| \leq 1\}$ est compact pour la topologie faible-$*$ $\sigma(E', E)$.

Rappels :
1) Topologie produit :
Soit $X = \prod_{i\in I} X_i$ l'espace produit et $T(P_i)_{i\in I}$ la topologie produit sur X.

Théorème 5.5

„s Soit $\Big((X_i, T_i)\Big)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et (E, T) un espace topologique.
On a :

$$(E,T) \xrightarrow{f} \Big(\prod_{i\in I} X_i, T(P_i)_{i\in I}\Big) \xrightarrow{P_j} (X_j, T_j),$$

$$(E,T) \xrightarrow{P_j\circ f} (X_j, T_j).$$

L'application f est continue si et seulement si l'application $P_j \circ f$ est continue pour tout $j \in I$.

Remarque 5.8.

l'application P_j est continue par définition de la topologie produit $T(P_i)_{i\in I}$ qui fait rendre continues toutes les applications $(P_j)_{j\in I}$.

Définition 5.6. (**Application homéomorphisme**)

Soient (X_1, T_1) et (X_2, T_2) deux espaces topologiques et $f : (X_1, T_1) \longrightarrow (X_2, T_2)$ une application.
On dit que f est un homéomorphisme si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites
1) f est continue

2) f est bijective
3) l'application inverse $f^{-1} : (X_2, T_2) \longrightarrow (X_1, T_1)$ est continue.

Démonstration. (du théorème 5.4)

On pose $\mathbb{R} = \mathbb{R}_x,\ Y = \prod_{x\in E} \mathbb{R}_x = \mathbb{R}^E$, c'est-à-dire que $Y = \{\omega = (\omega_x)_{x\in E}$ et $\omega_x \in \mathbb{R}\}$.
On munit l'espace Y de la topologie produit (la topologie moins fine sur Y rendant continues toutes les applications $P_x : Y \longrightarrow \mathbb{R} : P_x(w) = \omega_x$ pour tout $x \in E$).
On munit E' de la topologie faible-$*$ $\sigma(E', E)$.
On considère l'apllication :

$$\Phi : E' \longrightarrow Y : \Phi(f) = (\langle f, x\rangle)_{x\in E}.$$

Pour chaque $x \in E$ fixé,

$$(\Phi(f))_x = (\langle f, x\rangle)_{x\in E}.$$

On a Φ est continue de E' dans Y car pour chaque x fixé dans E l'application,
$f \longmapsto (\Phi(f))_x = \langle f, x\rangle$ est continue.
On a besoin de la proposition (5.4), pour cela on a le diagramme suivant :

$$E' \xrightarrow{\Phi} Y = \prod_{x\in E} \mathbb{R}_x \xrightarrow{P_x} \mathbb{R}.$$

Donc $P_x \circ \Phi : E' \longrightarrow \mathbb{R}$, avec P_x est continue d'après la définition de la topologie produit.
D'autre part on a $P_x \circ \Phi$ est continue d'après la définition de la topologie faible-$*$ $\sigma(E', E)$, puisque on a vu que l'application $\varphi_x : E' \longrightarrow \mathbb{R} : \varphi_x(f) = \langle f, x\rangle$ et la topologie faible-$*$ fait rendre continues toutes les applications φ_x.
Montrons maintenant que Φ est un homéomorphisme de E' dans $\Phi(E')$.
a) D'après ce qu'on a vu Φ est continue.
b) Montrons que Φ est bijective.
La surjectivité de Φ est évidente.
Montrons l'injectivité de Φ.
Soit $f \in E'$. On a :

$$\Phi(f) = 0 \Rightarrow (\Phi(f))_x = 0, \text{ pour tout } x \in E.$$

Donc,

$$\langle f, x\rangle = 0 \text{ pour tout } x \in E.$$

D'où $f \equiv 0$.
Par conséquent Φ est injective.
D'où Φ est bijective.
c) Montrons que Φ^{-1} est continue.
On a :

$$\Phi^{-1} : \Phi(E') \longrightarrow E'.$$

Grâce à la proposition 5.4, il suffit de prouver que pour tout $x \in E$ fixé, l'application,

$$\omega \longmapsto \langle \Phi^{-1}\omega, x\rangle,$$

est continue sur $\Phi(E')$, ce qui est évident puisque $\langle \Phi^{-1}\omega, x\rangle = \omega_x$.
D'autre part on a $\Phi(B_{E'}) = K$ où

$$K = \{\omega \in Y, |\omega_x| \leq \|x\|, \omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y, \omega_{\lambda x} = \lambda\omega_x, \forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E\},$$

car,

$$\omega_x = \big(\Phi(f)\big)_x = \langle f, x\rangle, \text{ pour } \omega \in K, f \in E'.$$

Donc,

$$|\omega_x| = |\langle f, x\rangle| \leq \|f\|_{E'}\|x\|_E \leq \|x\|_E,$$

et

$$\omega_{x+y} = \langle f, x+y\rangle = \langle f, x\rangle + \langle f, y\rangle = \omega_x + \omega_y \text{ (puisque } f\text{est linéaire)},$$

et

$$\omega_{\lambda x} = \langle f, \lambda x\rangle = \lambda\langle f, x\rangle = \lambda\omega_x \text{ (puisque } f \text{ est linéaire)}.$$

Afin de montrer que $\Phi(B_{E'})$ est compacte de E', il suffit donc de montrer que K est compacte de Y.
On peut écrire K sous la forme :

$$K = K_1 \cap K_2,$$

où

$$K_1 = \{\omega \in Y : |\omega_x| \leq \|x\|, \forall x \in E\},$$

et

$$K_2 = \{\omega \in Y : \omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y \text{ et } \omega_{\lambda x} = \lambda\omega_x, \forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E\}.$$

On a :

$$K_1 = \prod_{x\in E}\Big[-\|x\|, \|x\|\Big].$$

K_1 est compact car il est un produit des intervalles compacts.
D'autre part, on a :

$$K_2 = A \cap B,$$

où

$$A = \{\omega \in Y, \omega_{x+y} - \omega_x - \omega_y = 0\}$$

et

$$B = \{\omega \in Y : \omega_{\lambda x} - \lambda\omega_x = 0\}.$$

Alors,

$$A = h^{-1}\big(\{0\}\big),$$

et

$$B = k^{-1}\big(\{0\}\big),$$

où

$$h : Y \longrightarrow \mathbb{R} : h(\omega) = \omega_{x+y} - \omega_x - \omega_y,$$

et

$$k : Y \longrightarrow \mathbb{R} : k(\omega) = \omega_{\lambda x} - \lambda\omega_x.$$

Les deux applications h et k sont continues, donc A et B sont fermés.
Finalement K_1 est compact et K_2 est fermé, alors $K_1 \cap K_2$ est compact, c'est-à-dire que K est compact. D'où $\Phi(B_{E'})$ est compact de E' (puisque $\Phi(B_{E'}) = K$).
On a $B_{E'} = \Phi^{-1}(K)$ et comme Φ^{-1} est continue et K est compact, alors on conclut que $B_{E'}$ est compacte. □

5.4 Espaces réflexifs

Le fait que le dual E' d'un espace vectoriel normé E soit un espace de Banach va nous permettre de donner certaines propriétés sur le dual E'' de E'qu'on appelle le bidual de E.
Soit $x \in E$ et considérons l'application d'évaluation en x suivante : $Jx : x \in E \longmapsto Jx \in E''$ définie par

$$Jx : E' \to \mathbb{K}, \text{ telle que } Jx(f) = \langle f, x\rangle = f(x)$$

Proposition 5.16

Soit E un espace vectoriel normé. Alors l'application

$$Jx : x \in E \longmapsto Jx \in E''$$

définie pour tout $x \in E$ par

$$Jx(f) = f(x), \quad \text{pour tout } f \in E'$$

est une forme linéaire continue de norme $\|x\|$ sur l'espace E', donc un élément du bidual E'' de E.
De plus l'application :

$$J : E \longrightarrow E'', \ x \longmapsto Jx \tag{5.2}$$

est une injection isométrique de E dans E'', dite isométrie canonique.

Démonstration.

Étant donné $x \in E$, l'opérateur

$$Jx : f \in E' \longmapsto Jx(f) = f(x) \in \mathbb{K},$$

est linéaire continu. En effet,
- la linéarité :
Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et pour tout $f, g \in E'$, on a :

$$Jx(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha Jx(f) + \beta Jx(g).$$

- La continuité :
Soit $f \in E'$. On a :

$$|Jx(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \ \|x\|.$$

D'où Jx est continue.
Montrons que J est isométrique.
Pour tout $x \in E$, on a d'après le corollaire de Hahn-Banach :

$$\|Jx\|_{E''} = \sup_{f \neq 0} \frac{|Jx(f)|}{\|f\|} = \sup_{f \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|x\|.$$

D'où

$$\|Jx\|_{E''} = \|x\|_E.$$

Donc l'application $J : x \longmapsto Jx$ est linéaire isométrique de E dans E''. □

Remarque 5.9.

$J(E)$ est identifié à E, et dans ce cas E est considéré comme sous-espace de E''.
E est dit réflexif si $J(E) = E''$, c'est à dire E est réflexif si et seulement si pour tout $g \in E''$, il fait correspondre $x \in E$ tel que $Jx = g$

Définition 5.7.

Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E''. On dit que E est réflexif si

$$J(E) = E''$$

Remarque 5.10.

Lorsque l'espace E est réflexif, à l'aide de l'isomorphisme on peut identifier implicitement E et E'', c'est à dire que $E \cong E''$.

Remarque 5.11.

Un espace vectoriel normé est réflexif si l'isométrie canonique $J : E \to E''$ définie dans le théorème (5.16) est surjective. Ainsi, il nous permet d'identifier E avec son bidual E''. D'un autre terme E est réflexif si, pour $g \in E''$ donné, il existe (un unique) $x \in E$ tel que :

$$\langle g, f\rangle = \langle f, x\rangle, \ \forall f \in E'.$$

L'essentiel de cette définition est que l'identification de E avec E'' soit réalisée par l'isometrie canonique.
On observe que, comme espace dual, un espace réflexif est nécessairement complet.

Exemple 5.2.

i) Tous les espaces L^p et l^p avec $1 < p < \infty$ sont réflexifs.
ii) Tout espace de Hilbert est réflexif.

5.5 Théorème de Kakutani

Théorème 5.6

(de Kakutani)

Soit E un espace de Banach et E' son dual topologique.
Alors,
E est réflexif si et seulement si la boule unité fermée $B_E = \{x \in E, \|x\|_E \leq 1\}$ de E est compacte pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.

Démonstration.

i) $\Longrightarrow$). Supposons que l'espace E est réflexif et montrons que B_E est compacte pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.
Comme E est réflexif, alors $E = E''$ et donc $J(B_E) = B_{E''} = B_E$.
En vertu du théorème 5.6 $B_{E''}$ est compacte pour la topologie $\sigma\big((E')', E'\big)$.
D'autre part on a $\sigma\big((E')', E'\big) = \sigma(E, E')$ (puisque $E'' = E$), on conclut le résultat.
ii) $\Longleftarrow$)
Supposons que B_E est compacte pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ et montrons que E est

réflexif.
Pour cela on a besoin des deux lemmes suivants : □

Lemme 5.1. ***(de Helly)***

Soit E un espace de Banach, $f_1, f_2, ..., f_n \in E'$ et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ fixés.
Les assertions suivantes sont équivalentes
1) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in E$ *tel que* $\|x_\varepsilon\| \leq 1$ *et* $|\langle f_i, x_\varepsilon\rangle - \alpha_i| < \varepsilon, \ \forall i = 1, 2, ..., n.$
2) $\Big|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\Big| \leq \Big\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\Big\|, \ \forall \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in \mathbb{R}.$

Démonstration. (du lemme 5.1)

i) Montrons que $1) \Longrightarrow 2)$.
On fixe $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ dans $\mathbb{R}$ et on pose $S = \sum_{i=1}^{n} |\beta_i|$.
D'après 1) on a :

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \langle f_i, x_\varepsilon\rangle - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\Big| = \Big|\sum_{i=1}^{n} \beta_i (\langle f_i, x_\varepsilon\rangle - \alpha_i)\Big| \leq \sum_{i=1}^{n} |\beta_i| \, |\langle f_i, x_\varepsilon\rangle - \alpha_i| \leq S\varepsilon.$$

D'où,
$\Big|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i\Big| \ \leq \ \Big|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \langle f_i, x_\varepsilon\rangle\Big| + \Big|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \langle f_i, x_\varepsilon\rangle\Big| \ \leq \ S\varepsilon + \Big|\sum_{i=1}^{n} \langle \beta_i f_i, x_\varepsilon\rangle\Big| \ \leq \ S\varepsilon +$
$\Big\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\Big\|_{E'} \|x_\varepsilon\|.$
Donc,

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i\Big| \leq S\varepsilon + \Big\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\Big\|_{E'}. \tag{5.3}$$

En faisant ε tendre vers 0 dans (5.3), on obtient :

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i\Big| \leq \Big\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\Big\|_{E'}.$$

ii) Montrons que $2) \Longrightarrow 1)$.
On pose $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ et on considère l'application :

$$\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \longmapsto \phi(x) = \Big(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)\Big).$$

On montre que 1) est équivalente à $\alpha \in \overline{\phi(B_E)}$.
Montrons par l'absurde. Supposons que $\alpha \notin \overline{\phi(B_E)}$.
Comme B_E est convexe, alors $\phi(B_E)$ est convexe, et par conséquent $\overline{\phi(B_E)}$ est convexe.
D'autre part on a $(\mathbb{R}^n)' = \mathbb{R}^n$.
En vertu du théorème de Hahn-Banach forme géométrique on peut séparer strictement les ensembles $\{\alpha\}$ et $\overline{\phi(B_E)}$, c'est-à-dire que :

$$\exists \gamma \in \mathbb{R} \quad \text{et } \beta \in (\mathbb{R}^n)' = \mathbb{R}^n \ \text{ tels que : } \langle \beta, \phi(x)\rangle \ < \ \langle \beta, \alpha\rangle, \ \forall x \in B_E.$$

D'où,

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \langle f_i, x\rangle \ < \ \gamma < \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i, \ \forall x \in B_E.$$

Alors,

$$\Big|\sum_{i=1}^{n}\beta_i\langle f_i,x\rangle\Big|\leq\gamma<\sum_{i=1}^{n}\beta_i\alpha_i,\ \forall x\in B_E.$$

Par conséquent,

$$\Big|\sum_{i=1}^{n}\langle\beta_i f_i,x\rangle\Big|\leq\gamma<\sum_{i=1}^{n}\beta_i\alpha_i,\ \forall x\in B_E.$$

D'où,

$$\sup_{\|x\|\leq 1}\Big|\langle\sum_{i=1}^{n}\beta_i f_i,x\rangle\Big|\leq\gamma<\sum_{i=1}^{n}\beta_i\alpha_i.$$

On conclut que :

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n}\beta_i f_i\Big\|_{E'}<\sum_{i=1}^{n}\beta_i\alpha_i.$$

Ce qui contredit la propriété 2).

Lemme 5.2. *(**de Goldstine**)*

Soit E un espace de Banach et soit J l'application définie comme dans (5.2) proposition 5.16.
Alors $J(B_E)$ est dense dans $B_{E''}$ (la boule unité fermée de E'') pour la topologie $\sigma(E'',E')$

Démonstration. (du lemme 5.2)

Soit $\xi\in B_{E''}$ et soit V un voisinage de ξ dans la topologie $\sigma(E'',E')$.
On montre que $V\cap J(B_E)\neq\varnothing$. On peut toujours choisir V sous la forme :

$$V=\Big\{\eta\in E''\ :|\ \langle\eta-\xi,f_i\rangle\ |<\varepsilon,\ i=1,2,...,n,\ \varepsilon>0\text{ et }f_i\in E',\ \forall i=1,2,...,n\Big\}.$$

On cherche $x\in B_E$ tel que $Jx\in V$, c'est à dire que :

$$|\ \langle Jx-\xi,f_i\rangle\ |<\varepsilon,\ \forall i=1,2,...,n,$$

ce qui est équivalent à

$$|\ \langle f_i,x\rangle-\langle\xi,f_i\rangle\ |<\varepsilon,\ \forall i=1,2,...,n.$$

Il suffit de montrer la condition ii) du lemme 5.1, c'est à dire pour $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\in\mathbb{R}$, on montre que

$$|\sum_{i=1}^{n}\beta_i\alpha_i\ |<\|\sum_{i=1}^{n}\beta_i f_i\|_{E'}.$$

On a :

$$|\sum_{i=1}^{n}\beta_i\alpha_i\ |=|\ \langle\xi,\sum_{i=1}^{n}\beta_i f_i\rangle\ |\leqslant\|\xi\|_{E'}\|\sum_{i=1}^{n}\beta_i f_i\|\leqslant\|\sum_{i=1}^{n}\beta_i f_i\|,\ \text{car }\|\xi\|_{E'}\leqslant 1.$$

En vertu du lemme 5.1, il existe $x\in B_E$ tel que $|\ \langle f_i,x\rangle-\alpha_i\ |<\varepsilon$, c'est à dire que :

$$Jx\in JB_E\cap V.$$

□

On revient maintenant à la démonstration de l'implication inverse $\Rightarrow$) du théorème 5.6.
On a d'après la proposition 5.16, $J : E \to E''$ est linéaire continue (pour la topologie forte) et $\|Jx\| = \|x\|$, alors on a :

$$J : \sigma\Big(E, \sigma(E, E')\Big) \to \Big(E'', \sigma(E'', E''')\Big),$$

est continue,
où, $\sigma(E'', E') \subset \Big(E'', \sigma(E'', E''')\Big)$.
Supposons que B_E est compacte par rapport à la topologie $\sigma(E, E')$ donc JB_E est compacte par rapport à la topologie $\sigma(E'', E')$. Comme JB_E est dense dans $B_{E''}$ par rapport à la topologie $\sigma(E'', E')$ alors,

$$JB_E = B_{E''}.$$

D'où,

$$JE = E'',$$

ce qui signifie que E est réflexif. □

Proposition 5.17

Soit E un espace de Banach et $M \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé (muni de la norme induite par E). Alors

$$E \text{ est réflexif } \Rightarrow M \text{ est réflexif .}$$

Démonstration.

i) Supposons que M est réflexif et montrons que E est réflexif.
En utilisant les restrictions et les prolongements des formes linéaires continues, on conclut que $\sigma(M, M') = \sigma(E, E') \mid_M$.
ii) Montrons que B_M est compacte par rapport à la topologie $\sigma(M, M')$.
Comme E est réflexif, alors d'après le théorème 5.6, on a alors B_E est compacte par rapport à la topologie $\sigma(E, E')$.
Comme M est fermé dans E, alors en vertu du théorème 5.1 M est fermé pour la topologie $\sigma(E, E')$.
Et comme $B_M = B_E \cap M \subset B_E$ et que B_E est compacte et $B_E \cap M$ est fermé, alors on conclut que B_M est compacte pour la topologie $\sigma(E, E')$. Par conséquent B_M est compacte pour la topologie $\sigma(M, M')$. □

Proposition 5.18

Soit E un espace de Banach. Alors

$$E \text{ est réflexif} \Leftrightarrow E' \text{ est réflexif.}$$

Démonstration.

i) $\Rightarrow$) Supposons que E est réflexif et montrons que E' est réflexif.
En vertu du théorème 5.4 $B_E$est compacte pour la topologie $\sigma(E, E')$.
Comme E est réflexif alors,

$$E = JE = E'',$$

et par conséquent,

$$(E')'' = (E'')' = E'.$$

Donc E' est réflexif.
ii) $\Leftarrow$) Supposons que E' est réflexif et montrons que E est réflexif.
Comme E' est réflexif, alors d'après la première implication de i) de cette proposition on conclut que E'' est réflexif.
D'autre part on a :

$$E \simeq JE \subset E'',$$

et comme $J(E)$ est fermé dans E'', alors JE est réflexif et donc E est réflexif. □

Corollaire 5.1.

Soit E un espace de Banach réflexif.
Soit $K \subset E$ un sous-ensemble convexe, fermé et borné. Alors K est compact par rapport à la topologie faible $\sigma(E, E')$.

Démonstration.

En vertu du théorème 5.1 K est fermé pour la topologie $\sigma(E, E')$. Et comme K est borné alors il existe une constante m telle que $K \subset mB_E$ et d'après le théorème 5.6, mB_E est compacte par rapport à la topologie $\sigma(E, E')$. Comme K est fermé, alors on conclut que K est compact. □

5.6 Exercices

Exercice 5.1.

Soit E un espace de Banach. soient (x_n) une suite de E et (f_n) une suite de E', $n \in \mathbb{N}$.
Soient $x \in E$ et $f \in E'$. Montrer que $< x_n, f_n > \to < f, x >$ dans les cas suivants :
a) $x_n \to x$, $f_n \to f$.
b) $x_n \rightharpoonup x$, $f_n \to f$.
c) $x_n \to x$, f_n converge vers f au sens faible-$*$.

Exercice 5.2.

Soit E un espace vectoriel normé. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E' et $f \in E'$.
On suppose que $f_n \to f$ lorsque $n \to +\infty$.
- Montrer que f_n converge vers f au sens faible-$*$.

Exercice 5.3.

On considère l'espace de Hilbert $H = l^2$. On considère la suite orthonormée (e_n) dans H.
1. Montrer que la suite (e_n) est bornée dans H.

2. Montrer que la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} |(x, e_n)|^2$ *est convergente.*
- En déduire que $e_n \rightharpoonup 0$.
3. La suite (e_n) *converge-t- elle fortement vers* 0 *? justifier votre réponse.*
4. Montrer l'équivalence : $(u_n \rightharpoonup u) \Leftrightarrow \Big[(u_n)$ *est bornée et* $(u_n, e_i) \to (u, e_i) \quad \forall i \in \mathbb{N}\Big]$.

Exercice 5.4.

Soit H *un espace de Hilbert. Soient* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de* H *et* $x, y \in H$.
Quelle est la convergence de la suite $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dans les cas suivants ? :*
a/ $x_n \rightharpoonup x$ *et* $y_n \to y$.
b/ $x_n \rightharpoonup x$ *et* $y_n \rightharpoonup y$.
c/ $x_n \longrightarrow x$ *(fortement) et* $y_n \longrightarrow y$ *(fortement).*

Exercice 5.5.

Soit H *un espace de Hilbert. Soient* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* H *et* $x \in H$.
On suppose que :
$x_n \rightharpoonup x$ *et que* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|x_n\| = \| x \|$.
- Montrer que $x_n \to x$.

Exercice 5.6.

Soit E *et* F *deux espaces de Banach.*
On considère la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, telle que :* $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \in L(E, F)$.
On suppose que la suite $\Big(< A_n(x), f > \Big)_n$ *est bornée pour tout* $x \in E$ *et pour tout* $f \in F'$.
- Montrer que la suite $\Big(\| A_n \| \Big)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*

Exercice 5.7.

Soit E *un espace vectoriel normé. Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* E.
On désigne par $B_{E'} = \{f \in E' : \| f \|_{E'} \leq 1\}$ *la boule unité fermée de* E'.
- Montrer l'équivalence suivante :
$\big(x_n \to x\big) \Leftrightarrow \Big(x_n \rightharpoonup x$ *et* $< x_n, f > \quad \to \quad < x, f >$ *uniformément sur* $B_{E'}, \forall f \in E'\Big)$.

Exercice 5.8.

On considère l'espace $H = L^2\Big([-1, 1]\Big)$ *muni du produit scalaire :*

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

et de la norme induite :

$$\| f \| = \left(\int_{-1}^{1} | f(t) |^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, on définit une forme linéaire* T_n *qui fait correspondre chaque* f *de* H *dans* $\mathbb{R}$ *telle que :*

$$T_n(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\cos(n\pi t)dt.$$

1. Montrer que T_n est continue (c'est à dire $T_n \in H'$), et montrer que $\| T_n \|_{H'} = 1$
*(**Indication** : Pour calculer $\| T_n \|_{H'}$ en utilisant la suite de fonctions définies par : $f_n(t) = \cos(n\pi t)$).*
2. Montrer que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge faiblement vers 0.
3. La suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge t-elle fortement vers 0 ? justifier.

Exercice 5.9.

On considère l'espace $E = C^2([-1,1],\mathbb{R})$ et on le munit de la norme

$$\| f \|_E = \| f \|_\infty + \| f' \|_\infty + \| f'' \|_\infty .$$

C'est à dire :

$$\| f \|_E = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[-1,1]} |f'(x)| + \sup_{x\in[-1,1]} |f''(x)|.$$

On rappelle que $(E, \| \, . \, \|_E)$ est un espace de Banach.
Pour $0 < \varepsilon < 1$ et $f \in E$ on pose :

$$T_\varepsilon(f) = \frac{f(\varepsilon) + f(-\varepsilon) - 2f(0)}{\varepsilon^2} \quad et \quad T(f) = f''(0).$$

1. Montrer que $T_\varepsilon \in E'$, $T \in E'$.
2. Montrer que $\| T \|_{E'} = 1$.
*(**Indication :** Utiliser la suite de fonctions définies par $f_n(t) = \dfrac{\cos(nt)}{n^2}$).*
3. Montrer que T_ε converge vers T lorsque $\varepsilon \to 0$ dans E' muni de la topologie $*$-faible.
4. Montrer que T_ε ne converge pas vers T lorsque $\varepsilon \to 0$ dans E' par rapport à la topologie forte.
*(**Indication :** Utiliser la suite de fonctions définies ci-dessus.)*

Exercice 5.10.

On considère l'espace de Hilbert

$$l^2(\mathbb{N},\mathbb{C}) = \Big\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \Big\}.$$

Soit l'opérateur $T_n : l^2 \to \mathbb{C}$ défini par :

$$T_n x = (T_n x)_n = x_n.$$

1. Montrer que T_n est une forme linéaire continue sur l^2 et calculer sa norme $\|T_n\|$.
2. Montrer que la suite (T_n) converge au sens de la topologie $*$-faible, (et donc faiblement car l'espace l^2 est de Hilbert) vers 0.
3. La suite (T_n) converge-t-elle fortement vers 0 ?

Exercice 5.11.

Soit E un espace de Banach, M un sous-ensemble de E.
On dit que M est faiblement fermé si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de M qui converge faiblement vers x, alors $x \in M$.
1. Montrer que si M est faiblement fermé, alors il est fermé.
2. Trouver un exemple d'ensemble fermé dans E qui n'est pas faiblement fermé.

Exercice 5.12.

Soit $(E, \| \, . \, \|)$ un espace de Banach uniformément convexe.
1. On considère une suite $(x_n)_n$ et $x \neq 0$ dans E vérifiant :
$x_n \rightharpoonup x$ dans $\sigma(E, E')$ et $\| \, x_n \, \| \to \| \, x \, \|$ dans $\mathbb{R}$.
On pose : $a_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$; $a = \frac{x}{\|x\|}$.
i) vérifier que : $\frac{a_n+a}{2} \rightharpoonup a$ dans $\sigma(E, E')$ et que : $\| \, a \, \| \leq \liminf_{n\to+\infty} \| \, \frac{a_n + a}{2} \, \|$.
ii) montrer qu'en fait on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \| \, \frac{a_n + a}{2} \, \| = 1.$$

Exercice 5.13.

Trouver dans l'espace $C([0, 1])$ un exemple d'une suite faiblement convergente mais non convergente en norme (fortement) de $C([0, 1])$.

Exercice 5.14.

On considère l'espace,

$$l^1 = \Big\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| < +\infty \Big\}.$$

- Montrer que dans l'espace l^1 la convergence faible est équivalente à la convergence en norme (forte).

Exercice 5.15.

Soit E un espace de Banach.
- Montrer que toute suite faiblement de Cauchy dans E est bornée.

Exercice 5.16.

On considère l'espace de Hilbert $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Soient $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in l^2$ et la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l^2 telle que $x^n = (x_1^n, x_2^n, x_3^n, ...)$.
Montrer l'équivalence suivante

$$\Big(\text{la suite } (x^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge faiblement vers } x \Big) \Leftrightarrow \Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\| \leq C \text{ et } x_k^n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_k, \; k \in \mathbb{N} \Big).$$

Exercice 5.17.

Soit E un espace de Banach.
- Montrer que toute suite faiblement convergente dans E est faiblement de Cauchy.

Exercice 5.18.

- Montrer que tout sous-espace vectoriel M d'un espace de Banach E est faiblement fermé.

Exercice 5.19.

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et soit $T : H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire continu.
- Montrer que l'image par T d'une suite faiblement convergente dans H_1 est faiblement convergente dans H_2.

Exercice 5.20.

Soient E, F deux espaces de Banach et soit $T : E \to F$ une application linéaire.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
i) Si $x_n \to x$ dans E, alors $Tx_n \to Tx$.
ii) Si $x_n \rightharpoonup x$ dans E, alors $Tx_n \rightharpoonup Tx$.
iii) Si $x_n \to x$ dans E, alors $Tx_n \rightharpoonup Tx$.

Exercice 5.21.

On considère l'espace l^2 et soit l'opérateur $T_n : l^2 \to l^2$ défini par :

$$T_n x = (\underbrace{0, 0, 0, ..., 0}_{nzros}, x_1, x_2, x_3, ...), \text{ où } x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in l^2.$$

1) Montrer que $T_n \in L(l^2)$.
2) Montrer que $T_n \rightharpoonup 0$.
3) $T_n \to 0$ (fortement) ? Justifier.

Exercice 5.22.

On considère l'espace de Hilbert
$L^2(\mathbb{R}) = \Big\{u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *telle que* u *est mesurable et* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 \, dx < +\infty\Big\}$, *muni du produit scalaire usuel,*

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\overline{v(x)} \, dx,$$

et la norme induite,

$$\|u\|_2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 \, dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\|f\|_2 = 1$. ($\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et à support compact.)
On pose $u_n(x) = \sqrt{n} f(nx)$.
1) Calculer $\|u_n\|_2$.

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0.
3) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle fortement vers 0 ? Justifier.

Exercice 5.23.

On considère l'espace $H = L^2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(u,v)_H = \int_{\mathbb{R}} u(x)v(x)dx$$

et la norme induite

$$\|u\| = \Big(\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ $\big($l'espace de fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et à support compact$\big)$, telle que $\|f\|_H = 1$.
On considère la suite de fonctions $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n(x) = e^{2i\pi nx} f(x).$$

1. Montrer que la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 dans H.
2. La suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle fortement vers 0 dans H ? justifier.

Exercice 5.24.

Soit $x = (x_1, x_2, ...)$ dans l'espace de Hilbert :

$$E = l^2(\mathbb{C}) = \Big\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, x_n \in \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\Big\},$$

muni du produit scalaire :

$$(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{y_n},$$

et la norme induite

$$\| x \|_E = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On définit la suite d'opérateurs $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $T_n : E \to \mathbb{C}$ comme suit :

$$< T_n, x >= x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Montrer que $T_n \in E'$. Calculer $\|T_n\|_{E'}$.
2. Montrer que $T_n \rightharpoonup 0$ $*$-faiblement lorsque $n \to +\infty$.
3. La suite (T_n) converge-t-elle fortement ver 0 lorsque $n \to +\infty$? Justifier.

Exercice 5.25.

Soit l'espace $H = L^2(0,1)$. On considère la suite de fonctions $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$f_n(x) = \sin(n\pi x).$$

- Montrer que $f_n \rightharpoonup 0$ mais $f_n \not\to 0$.

Exercice 5.26.

On considère l'espace de Banach $E = l^1$ *tel que*

$$l^1 = \Big\{x = (x_n)_{n\geq 1} : x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty\Big\},$$

muni de la norme :

$$\| x \| = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|.$$

On considère l'opérateur : $A_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par :*

$$A_n(x) = x_n$$

1. Montrer que $A_n \in E'$ *et calculer* $\| A_n \|_{E'}$.
2. Montrer que la suite (A_n) *converge vers* 0 *au sens* $*-$ *faible .*
3. La suite (A_n) *converge t-elle fortement vers* 0 *? justifier.*

5.7 Exercices sur les espaces réflexifs

Exercice 5.27.

Soit E *un espace de Banach réflexif,* M *un sous-espace vectoriel de* E *et*

$$M^{\perp} = \big\{f \in E' : \langle f, x\rangle = 0,\ \forall x \in M\big\}.$$

- Montrer que : $(M^{\perp})^{\perp} = M$.

Exercice 5.28.

Soit E *un espace de Banach réflexif, et soit* $f \in E'$.
- Montrer qu'il existe $x \in E$ *avec* $x \neq 0$ *tel que :*

$$\langle f, x\rangle = \|f\| \, \|x\|.$$

Exercice 5.29.

Soit E *un espace de Banach.*
- Montrer que :

$$E \text{ est réflexif } \Longleftrightarrow E' \text{ est réflexif.}$$

(indication : on peut montrer qu'un sous-espace fermé d'un espace de Banach réflexif est réflexif. Utiliser ce résultat sans le prouver.)

Exercice 5.30.

Soit E *un espace vectoriel normé et* M *un sous-espace fermé de* E.
Soit $x_0 \in E\backslash M$ *et* $\delta = \inf_{z\in M} \|z - x_0\|$.

- Montrer qu'il existe une fonctionnelle linéaire borné f sur E tel que

$$\|f\| = \frac{1}{\delta}, \quad f(y) = 0, \quad \forall y \in M, \quad f(x_0) = 1.$$

Exercice 5.31.

Soit E un espace vectoriel normé et M un sous-espace vectoriel de E.
Soit $x_0 \in E$.
- Montrer que :

$$x_0 \in D = \overline{Vect(M)} \Longleftrightarrow f(x_0) = 0 \ \forall f \in E' \text{ tel que } f_{/M} = 0,$$

(où $Vect(M)$ est le sous-espace vectoriel engendré par M).

Exercice 5.32.

Soit E un espace vectoriel normé.
- Montrer que :

$$E \text{ est réflexif } \Longrightarrow E' \text{ est réflexif.}$$

Exercice 5.33.

Soit E un espace de Banach.
- Montrer que :

$$E \text{ est réflexif } \Longleftrightarrow E' \text{ est réflexif.}$$

Exercice 5.34.

Soit E un espace vectoriel normé réflexif.
Soit M un sous-espace vectoriel normé fermé de E.
- Montrer que M est réflexif.

Exercice 5.35.

Soit E un espace réflexif, et M un sous-espace vectoriel fermé de E. On définit l'opérateur de restriction R de E' dans M' qui à $\varphi \in E'$ associe sa restriction à M', et T de M'' dans E'' qui à $\xi \in M''$ associe $T\xi \in E''$, forme linéaire sur E' définie par :

$$< T\xi, \varphi > = < \xi, R\varphi >.$$

1. Montrer que pour tout $\xi \in M''$, il existe $x \in E$ tel que :

$$< \xi, R\varphi > = < \varphi, x >, \qquad \forall \varphi \in E'.$$

2. Montrer que l'élément x construit à la question $1)$ est dans M.
3. Montrer que M est réflexif.

Exercice 5.36.

Soit E un espace vectoriel normé et E' son dual.
On note $\langle f, x \rangle = f(x)$ et pour tout $M \subset E$ et $N \subset E'$:

$$M^{\perp} = \{f \in E' : \langle f, x \rangle = 0 \ \forall x \in M\} \text{ et } N^{\perp} = \{x \in E : \langle f, x \rangle = 0 \ \forall f \in N\}.$$

1) Montrer que $M^{\perp\perp} = \overline{Vect(M)}$.
2) Montrer que si E est réflexif, alors $N^{\perp\perp} = \overline{Vect(N)}$.

Exercice 5.37.

Soit E un espace réflexif et soit $f \in E'$.
- Montrer que $\|f\|_{E'}$ est atteinte.

Remarque 5.12.

On peut utiliser ce critère pour montrer qu'un espace n'est pas réflexif.)

Exercice 5.38.

Soit E un espace de Banach réflexif.
1) Montrer que :

$$\forall f \in E', \exists x_0 \in E \text{ tel que } \|x_0\| = 1 \text{ et } \|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = f(x_0).$$

2) Réciproquement : Soit E un espace de Banach.
Montrer que si :

$$\forall f \in E', \exists x_0 \in E \text{ tel que } \|x_0\| = 1 \text{ et } \|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = f(x_0),$$

alors E est réflexif.

Exercice 5.39.

Soit E un espace vectoriel normé, et J est l'isométrie canonique.
- Montrer que :
$J(E)$ est fermée dans $E'' \iff E$ est un espace de Banach.

Exercice 5.40.

Soit E un espace de Banach séparable.
- Montrer que toute suite bornée dans E' contient une sous-suite convergente $*$- faiblement.

Exercice 5.41.

Soit E un espace de Banach tel que $\dim(E) = +\infty$ et satisfait une des deux propriétés suivantes :
1) E' est séparable.
2) E est réflexif.
- Montrer qu'il existe une suite $(x_n) \subset E$ telle que :

$$\|x_n\| = 1 \text{ et } x_n \rightharpoonup 0 \text{ dans } \sigma(E, E').$$

Exercice 5.42.

Soit K un espace métrique compact qui n'est pas fini.
- Montrer que $C(K)$ n'est pas réflexif.

Exercice 5.43.

Soient E un espace de Banach sur $\mathbb{C}$, $F = E'$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de E.
1) On suppose que :

$$\forall f \in E' : (\langle x_n, f\rangle)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite de Cauchy.} \tag{5.4}$$

- Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2) On suppose de plus que, pour une sous-suite $(x_{n(p)})_{p\in\mathbb{N}^*}$ de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ il existe $y \in F$ telle que $x_{n(p)} \rightharpoonup y$ lorsque $p \to +\infty$.
- Montrer que $x_n \rightharpoonup y$ lorsque $n \to +\infty$.

3) On suppose que

$$E \text{ est réflexif (c'est à dire que } E'' = E). \tag{5.5}$$

- Montrer que toute suite bornée de E admet une sous-suite faiblement convergente.
4) On suppose que l'espace E et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifient (5.4) et (5.5).
- Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est faiblement convergente dans E.

Exercice 5.44.

Soient E, F deux espaces de Banach tel que E est réflexif et $T : E \to F$ un opérateur linéaire.
Supposons que l'opérateur T vérifie la propriété suivante :

$$x_n \rightharpoonup x \text{ dans } E \Rightarrow Tx_n \to Tx \text{ dans } F.$$

- Montrer que T est compact.

Exercice 5.45.

Soit E un espace vectoriel normé.
a) On suppose que E est de dimension finie. Soit $C \subset E$ un fermé non vide.
- Montrer que la distance de tout point x à C est atteinte, c'est à dire qu'il existe $y \in C$ tel que

$$d(x, C) = \inf_{z\in C} \|z - x\| = \|y - x\|.$$

b) On suppose maintenant que E (éventuellement $\dim(E) = +\infty$) est un espace réflexif. Soit C un convexe fermé non vide.
- Montrer que la distance de tout point x à C est atteinte.
c) Montrer que la propriété précédente est fausse en général si l'on ne suppose pas que C convexe.

*(**Indication :** On peut considérer l'ensemble $C \subset l^2$ défini par :*

$$C = \Big\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2 : x_n = 0 \text{ ou } x_n = 1 + \frac{1}{2^n} \text{ et } \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } x_N \neq 0) \Big\}.$$

Exercice 5.46.

Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ et E' son dual topologique . Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$.
1. Montrer qu'il existe $f \in E'$ telle que $\|f\|_{E'} = 1$ et $f(x) = \|x\|_E$.
2. Soit F un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ tel que F est réflexif et $g \in F'$. Montrer qu'il existe $y \in F$, $y \neq 0$ tel que

$$g(y) = \|y\|_F \|g\|_{F'}.$$

3. Soit $G = \big\{ x = (x_n)_{n\geq 1}, \quad x_n \in \mathbb{R}, \quad x_n \to 0 \big\}$.
On munit G de la norme

$$\|x\| = \sup_{n\geq 1} \mid x_n \mid .$$

On rappelle que G muni de la norme précédente est un espace de Banach sur $\mathbb{R}$.
a) On définit sur G une forme linéaire g par :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{2^{k-1}}.$$

- Montrer que $g \in G'$ et $\|g\|_{G'} = 2$.
b) Montrer qu'il n'existe pas $x \in G$ qui vérifie :

$$g(x) = 2 \parallel x \parallel_G.$$

c) En déduire que G n'est pas réflexif.

CHAPITRE 6

ESPACES L^P ET ESPACES DE HILBERT : PROJECTION SUR UN CONVEXE FERMÉ NON VIDE, THÉORÈME DE RIESZ, THÉORÈME DE STAMPACCHIA ET DE LAX-MILGRAM ET BASES HILBERTIENNES

Dans la suite Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

6.1 Rappels sur des résultats d'intégration

Théorème 6.1

(Théorème de convergence monotone de Beppo-Levi)
Soit (f_n) une suite de fonctions croissante de $L^1(\Omega)$ telle que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n(x)\,dx < \infty$.
Alors $f_n(x)$ converge vers une limite finie notée $f(x)$; de plus $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Théorème 6.2

(Théorème de convergence dominée de Lebesgue)
Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que
1. $f_n(x) \to f(x)$ $p.p$ *sur* Ω.
2. Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ $p.p$ sur Ω. Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Lemme 6.1. (de Fatou)

Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ telle que
a) pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \geq 0$ $p.p$ $x \in \Omega$.
b) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n(x)\,dx < \infty$.
Pour chaque $x \in \Omega$, on pose $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \inf_{x\in\Omega} f_n(x)$.

Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \int_\Omega f(x)\,dx \leq \lim_{n\to+\infty} \inf_{x\in\Omega} \int_\Omega f_n(x)\,dx$$

6.2 Espaces L^p

6.2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 6.1.

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$; on pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p\,dx < \infty \right\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$\|.\|_p$ est une norme.

Définition 6.2.

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ mesurable}, \ \exists C > 0 \text{ telle que } |f(x)| \leq C \ p.p. \text{ sur } \Omega \right\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f\|_\infty = \inf \left\{ C : |f(x)| \leq C \ p.p. \text{ sur } \Omega \right\}.$$

Remarque 6.1.

Si $f \in L^\infty(\Omega)$.
On a alors,

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \ p.p. \text{ sur } \Omega.$$

En vertu de la remarque 6.1, $\|.\|_\infty$ est une norme.

Notation :

Soit $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par q l'exposant conjugué de p, c'est à dire que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Théorème 6.3

Soit $1 \leq p \leq \infty$ et soient $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$. Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et on a :

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Démonstration.

Supposons le cas $1 < p < \infty$.
Utilisons l'inégalité de Young suivante :

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \ \forall a \geq 0, \forall b \geq 0,$$

on obtient,
$|f(x)| \ |g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q$ *p.p.* sur Ω.
Il en résulte donc que $fg \in L^1(\Omega)$ et que

$$\int_\Omega |f(x)| \ |g(x)| \ dx \leq \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\|g\|_q^q. \tag{6.1}$$

Dans (6.1), en remplaçant f par αf, où $\alpha > 0$, on trouve,

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| \ dx \leq \frac{\alpha^{p-1}}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{\alpha q}\|g\|_q^q.$$

On choisit $\alpha = \|f\|_p^{-1}\|g\|_q^{\frac{q}{p}}$, on obtient le résultat.
La démonstration des cas $p = 1$ et $p = \infty$ est évidente.

□

Théorème 6.4

Soit $1 \leq p \leq \infty$.
L'espace $L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel et $\|.\|_p$ est une norme.

Démonstration.

On démontre le cas $1 < p < \infty$.
Montrons que $L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel.
Soient $f, g \in L^p(\Omega)$. On a

$$|f(x) + g(x)|^p \leq \big(|f(x)| + |g(x)|\big)^p \leq 2^p\big(|f(x)|^p + |g(x)|^p\big).$$

Donc $f + g \in L^p(\Omega)$.
Montrons que $\|.\|_p$ est une norme. On montre seulement l'inégalité triangulaire

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

On a :

$$\|f+g\|_p^p = \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)+g(x)| \ dx \leq \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)| \ dx + \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)| \ dx.$$

Comme $|f + g|^{p-1} \in L^q(\Omega)$ et en vertu de l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f + g\|_p^{p-1}\|f\|_p + \|f + g\|_p^{p-1}\|g\|_p.$$

C'est à dire que,

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Pour les cas $p = 1$ et $p = \infty$, on utilise la remarque 6.1.

□

6.2.2 Réflexibilité et dualité des espaces $L^p(\Omega)$

Théorème 6.5

L'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ c'est à dire que $(L^p)''(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Démonstration.

La démonstration sera divisée en trois étapes.

□

Étape 1 :

Lemme 6.2. (Première inégalité de Clarkson.)

Soit $2 \leq p < \infty$; alors on a :

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}\Big(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\Big), \quad \forall f, g \in L^p(\Omega).$$

Démonstration.
(**du lemme 6.2**)

Il suffit de montrer l'inégalité :

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}\Big(|a|^p + |b|^p\Big), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

On a $\alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{p}{2}}, \quad \forall \alpha, \beta \geq 0.$
(La dernière inégalité a lieu au cas $\beta = 1$ et le fait que la fonction $x \longmapsto (x^2+1)^{\frac{p}{2}} - x^p - 1$ est croissante sur $[0, +\infty[$.)
On choisit $\alpha = \left|\frac{a+b}{2}\right|$ et $\beta = \left|\frac{a*b}{2}\right|$, on obtient :

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \left(\left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2\right)^{\frac{p}{2}} = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}} \leq \frac{1}{2}|a|^p + \frac{1}{2}|b|^p,$$

car le fait que $p \geq 2$, alors la fonction $x \longmapsto |x|^{\frac{p}{2}}$ est convexe.

□

Étape 2 :

Lemme 6.3.

Soit $2 \leq p \leq \infty$. L'espace $L^p(\Omega)$ est uniformément convexe, et donc réflexif.

Démonstration.
(**du lemme 6.3**)

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.
Supposons que :

$$\|f\|_p \leq 1, \ \|f\|_p \leq 1 \ \text{ et } \|f-g\|_p > \varepsilon.$$

En vertu du lemme 6.2, on en déduit que :

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p < 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

D'où $\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p < 1-\delta$, où $\delta = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} > 0$.
On en déduit que l'espace $L^p(\Omega)$ est uniformément convexe, et donc réflexif.

□

Étape 3

Lemme 6.4.

Soit $1 < p \leq 2$. L'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif.

Démonstration.
(**du lemme 6.4**)
Soit $1 < p \leq 2$.
On considère l'opérateur $T : L^p(\Omega) \to (L^q)'(\Omega)$ défini par :
pour $u \in L^p(\Omega)$ fixé ; l'application,

$$Tu : L^q(\Omega) \to \mathbb{R}$$

définie par :

$$\langle Tu, f\rangle = \int_\Omega u(x)f(x)\,dx, \quad \forall f \in L^q(\Omega),$$

est continue.
En effet :
Grâce à l'inégalité de Hölder, on a :

$$|\langle Tu, f\rangle| \leq \|u\|_p \, \|f\|_q$$

D'où,

$$\|Tu\|_{(L^q)'(\Omega)} \leq \|u\|_p. \tag{6.2}$$

Montrons que $\|Tu\|_{(L^q)'(\Omega)} = \|u\|_p$.
Pour cela, montrons que $\|Tu\|_{(L^q)'(\Omega)} \geq \|u\|_p$.
On a :

$$\|Tu\|_{(L^q)'(\Omega)} = \sup_{f\neq 0} \frac{|\ \langle Tu, f\rangle\ |}{\|\ f\ \|} \geq \frac{|\ \langle Tu, f_0\rangle\ |}{\|\ f_0\ \|}, \text{ où } f_0 \in L^q(\Omega) \text{ et } f_0 \neq 0.$$

On prend :

$$f_0(x) = |u(x)|^{p-2}u(x).$$

Il est facile de montrer que $f_0 \in L^q(\Omega)$ et $\|f_0\|_q = \|u\|_p^{p-1}$.
D'autre part on a :

$$|\ \langle Tu, f_0\rangle\ | = \|u\|_p^p.$$

Donc,

$$\|Tu\|_{(L^q)'(\Omega)} \geq \frac{|\ \langle Tu, f_0\rangle\ |}{\|f_0\|} = \|u\|_p. \tag{6.3}$$

En vertu de (6.2) et (6.3), on obtient

$$\|Tu\|_{(L^q)'(\Omega)} = \|u\|_p.$$

Il en résulte que l'opérateur T est une isométrie de $L^p(\Omega)$ vers un sous-espace fermé de $(L^q)'(\Omega)$.
Or d'après le lemme 6.3 $L^q(\Omega)$ est réflexif, donc $(L^q)'(\Omega)$ est réflexif.
Il s'ensuit que $T(L^p(\Omega))$ est réflexif et donc $L^p(\Omega)$ est réflexif. □

Proposition 6.1

On a :

$$\big(L^1(\Omega)\big)' = L^\infty(\Omega).$$

Proposition 6.2

On a :

$$L^1(\Omega) \subsetneq \big(L^\infty(\Omega)\big)'.$$

6.2.3 Séparabilité des espaces L^p

Théorème 6.6

L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$

Théorème 6.7

L'espace $L^p(\Omega)$ est séparable, pour $1 \leq p < +\infty$.

Démonstration.

On considère la famille $(P_i)_{i\in I}$une famille dénombrable des pavées P de la forme :

$$P = \prod_{i=1}^{n}]a_k, b_k[\,, \text{ où } a_k, b_k \in \mathbb{Q} \text{ et } P \subset \Omega.$$

Soit la fonction indicatrice $1_P : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que

$$1_P(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in P \\ 0 & \text{si} \quad x \notin P. \end{cases}$$

On considère $E = \Big(\{1_{P_i},\ i \in I\}\Big)$ l'espace engendré par les fonctions 1_{P_i} sur $\mathbb{Q}$, c'est à dire que,

$$f \in E \Leftrightarrow \Big(f = \sum_{j\in J} \lambda_j 1_{P_j},\ J \text{ est fini},\ \lambda_j \in \mathbb{Q}\Big).$$

- On a E est dénombrable.
On montre que E est dense dans $L^p(\Omega)$ $(i.e\overline{E} = L^p(\Omega))$.
On a en vertu du théorème 6.6 :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall f \in L^p(\Omega),\ \exists f_1 \in \mathcal{D}(\Omega) : \|f - f_1\|_p \leq \varepsilon.$$

Soit $f \in L^p(\Omega)$ et soit $\varepsilon > 0$ fixés.
$f_1 \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors $supp(f_1) \subset\subset \Omega$ (i.e $supp(f_1)$ est compact dans Ω). En d'autre terme $supp(f_1) \subset \Omega' \subset\subset \Omega$ (Ω' est compact dans Ω.)
Comme f_1 est continu sur un compact, alors il existe $f_2 \in E$ tel que $supp(f_2) \subset \Omega'$ telle que

$$|\ f_2(x) - f_1(x)\ | \leq \frac{\varepsilon}{(mes(\Omega'))^{\frac{1}{p}}},\ \ p.p\ x \in \Omega'.$$

Donc on a

$$\|f - f_2\|_p \leq \|f - f_1\|_p + \|f_1 - f_2\|_p < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

D'où E est dense dans $L^p(\Omega)$. □

Lemme 6.5.

Soit E un espace de Banach. On suppose qu'il existe une famille $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ telle que
1) $\forall i \in I : \mathcal{O}_i$ est un ouvert non vide de E.
2) $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \varnothing,\ \forall i \neq j$.
3) I est non dénombrable.
Alors E n'est pas séparable.

Démonstration.

Montrons par l'absurde, c'est à dire qu'on suppose que E est séparable.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\overline{\{u_n, n \in \mathbb{N}\}} = E$.
On a donc, puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans E,

$$\forall i \in I : \mathcal{O}_i \cap \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing.$$

On choisit alors $n(i)$ tel que $u_{n(i)} \in \mathcal{O}_i$ (car l'intersection est non vide).
On a l'application : $A : I \to \mathbb{N}$ définie par :

$$A(i) = n(i),$$

est injective. En effet,
si $n(i) = n(j)$, alors,

$$u_{n(i)} = u_{n(j)} \in \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j.$$

Donc,

$$i = j.$$

Ce qui contredit le fait que I est non dénombrable. □

Proposition 6.3

L'espace $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.

Démonstration.

la démonstration repose sur le lemme 6.5.
On pose $I = \Omega$.
Pour tout $a \in \Omega$, on choisit $r_a = d(a, \Omega^c) > 0$ car $\{a\}$ est compact et Ω^c est fermé. (Ω^c est le complémentaire de Ω).
Soit

$$B(a, r_a) = \{x : \|x - a\| < r_a\}.$$

On considère la fonction indicatrice $1_{B(a,r_a)}$ de $B(a, r_a)$.
On a $1_{B(a,r_a)} \in L^\infty(\Omega)$.
On pose $u_a = 1_{B(a,r_a)}$ et

$$\mathcal{O}_a = \{f \in L^\infty(\Omega) : \|f - u_a\|_\infty < \frac{1}{2}\}.$$

On a $\mathcal{O}_a$ vérifie les hypothèses du lemme 6.5.
L'hypothèse 2) du lemme 6.5 revient au $a \neq b \Rightarrow B(a, r_a) \neq B(b, r_b)$, donc $\mathcal{O}_a \cap \mathcal{O}_b = \varnothing$ car $\|u_a - u_b\| = 1$. □

6.2.4 Résumé

1) Pour $1 < p < +\infty,\ L^p$ est réflexif, séparable et $(L^p)' = L^q,$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$
2) $p = 1,\ L^1$ n'est pas réflexif, séparable et $(L^1)' = L^\infty$.
3) $p = +\infty,\ L^\infty$ n'est ni réflexif ni séparable et $L^1 \subsetneq (L^\infty)'$.

6.3 Espaces de Hilbert : Définitions et propriétés

Définition 6.3. (Espace préhilbertien)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
L'application :

$$(.,.) : E \times E \to \mathbb{C}, \tag{6.4}$$

est dite produit scalaire sur E si pour tous $x, y, z \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, les conditions suivantes sont satisfaites :
a) $(x, y) = \overline{(y, x)},$ (la barre désigne le nombre complexe conjugué) ;
b) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, y) + \beta(y, z)$;
c) $(x, x) \geq 0$ et $(x, x) = 0$ implique $x = 0$.
Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit espace préhilbertien.

- En vertu de la définition 6.3 le produit scalaire de deux vecteurs de E est un nombre complexe.
- **Notation :**
On désigne par (x, y) le produit scalaire entre les vecteurs x, y.
D'après la condition a) de la définition 6.3, on a $(x, x) = \overline{(x, x)}$ qui signifie que $(x, x) \in \mathbb{R},$ pour tout $x \in E$.
- Il vient de la condition b) de la définition 6.3 que :

$$(x, \alpha y + \beta z) = \overline{(\alpha y + \beta z, x)} = \overline{\alpha(y, x) + \beta(z, x)} = \overline{\alpha}(x, y) + \overline{\beta}(x, z).$$

En particulier,

$$(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \text{ et } (x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y).$$

Ainsi si $\alpha = 0$, alors on a $(0, y) = (x; 0) = 0$.

Définition 6.4.

Une forme sesquilinéaire sur E, est toute application sous la forme (6.4) vérifiant :
$\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ On a :
1) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$.
2) $(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x, y) + \overline{\beta}(x, z)$.
On dit que l'application (la forme) (6.4) est hermitienne si elle vérifie les propriétés 1), 2) et la condition a) de la définition 6.3

Remarque 6.2.

1) Notons que dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une forme sesquilinéaire est simplement une forme bilinéaire, et une forme hermitienne est une forme bilinéaire symétrique.
2) On dit que la forme (6.4) est positive si (x, x) est positive, c'est à dire que

$$(x, x) \geq 0, \ \forall x \in E.$$

Exemple 6.1.

1) $\mathbb{C}$ *est un espace préhilbertien, muni du produit scalaire* $(x, y) = x\overline{y}$.
2) $\mathbb{C}^n$ *est un espace préhilbertien, muni du produit scalaire :*

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k, \ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n, y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Exemple 6.2.

L'espace,

$$l^2 = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} : x_n \in \mathbb{C} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \mid x_n \mid^2 < +\infty \right\}$$

est un espace préhilbertien, muni du produit scalaire,

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{y}_n, \ x = (x_1, x_2, ...) \in l^2, \ y = (y_1, y_2, ...) \in l^2.$$

Exemple 6.3.

L'espace

$$C([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \to \mathbb{C} \text{ telle que } f \text{ est continue sur } [a, b] \right\},$$

est un espace préhilbertien, muni du produit scalaire :

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} \, dx.$$

Exemple 6.4.

L'espace

$$L^2([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \to \mathbb{C} \text{ telle que } f \text{ est mesurable et } \int_a^b \mid f(x) \mid^2 \ dx < +\infty \right\},$$

est un espace préhilbertien, muni du produit scalaire :

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Remarque 6.3.

1) Tout espace préhilbertien est aussi un espace vectoriel normé muni de la norme définie par

$$\|x\|=(x,x)^{\frac{1}{2}}.$$

2) On remarque que $\|.\|$ est bien définie car (x,x) est toujours un nombre réel non négatif.
3) La condition c) de la définition (6.3) implique que $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$. De plus

$$\|\lambda x\|=\sqrt{(\lambda x,\lambda x)}=\sqrt{\lambda\overline{\lambda}(x,x)}=\mid\lambda\mid\|x\|.$$

Théorème 6.8

(Inégalité de Cauchy Schwarz)
Pour tout x,y d'un espace préhilbertien E, on a

$$\mid(x,y)\mid\leq\|x\|\,\|y\|. \tag{6.5}$$

L'égalité $\mid(x,y)\mid=\|x\|\,\|y\|$ aura lieu si et seulement x,y sont linéairement indépendants.

Démonstration.

- Si $y=0$, alors (6.5) est satisfaite car les deux membres sont nuls.
Si $y\neq 0$. D'après la condition c) de la définition 6.3, on a :

$$0\leq(x+\alpha y,x+\alpha y)=(x,x)+\overline{\alpha}(x,y)+\alpha(y,x)+\mid\alpha\mid^2(y,y). \tag{6.6}$$

On pose maintenant $\alpha=\dfrac{-(x,y)}{(y,y)}$ dans (6.6) et on multiplie par (y,y), on obtient

$$0\leq(x,x)(y,y)-\mid(x,y)\mid^2.$$

D'où le résultat.
- Si x,y sont linéairement indépendants alors $y=\alpha x$, pour $\alpha\in\mathbb{C}$.
Ainsi,

$$\mid(x,y)\mid=\mid(x,\alpha x)\mid=\mid\overline{\alpha}(x,x)\mid=\mid\overline{\alpha}\mid\|x\|\,\|x\|=\|x\|\,\|\alpha x\|=\|x\|\,\|y\|.$$

Maintenant, soient x,y deux vecteurs tels que $\mid(x,y)\mid=\|x\|\,\|y\|$ ou équivalente à

$$(x,y)(y,x)=(x,x)(y,y). \tag{6.7}$$

On va montrer que $(y,y)x-(x,y)y=0$.
On prouve que x,y sont linéairement indépendants. En effet,
En vertu de (6.7), on a :
$\Big((y,y)x-(x,y)y,(y,y)x-(x,y)y\Big)=(y,y)^2(x,x)-(y,y)(y,x)(x,y)-(x,y)(y,y)(y,y)+(x,y)(y,x)(y,y)=0$.
La preuve est achevée. □

Corollaire 6.1. (Inégalité triangulaire)

Soit E un espace préhilbertien et soient $x, y \in E$. On a

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|. \tag{6.8}$$

Démonstration.

Lorsque $\alpha = 1$ l'égalité (6.6) peut prendre la forme suivante :

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2\Re e(x,y) + (y,y) \leq (x,x) + 2 \mid (x,y) \mid + (y,y).$$

Utilisons l'inégalité de Cauchy Schwarz,

$$2 \mid (x,y) \mid \leq 2\|x\| \, \|y\|.$$

D'où

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2 \tag{6.9}$$

□

Définition 6.5. (Norme d'un espace préhilbertien)

D'après la norme dans un espace préhilbertien E, la fonction définie par

$$\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$$

désigne la norme dans E.

Remarque 6.4.

On a montré que tout espace préhilbertien est un espace vectoriel normé. Il est naturel de poser la question : un espace vectoriel normé est-il un espace préhilbertien ? Plus précisément, est-il possible définir dans un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ un produit scalaire $(.,.)$ tel que $\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}} \ \forall x \in E$?
En général la réponse est négative.
Dans le théorème suivant, on prouve une propriété de la norme dans un espace préhilbertien qui est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace vectoriel normé soit préhilbertien.

Théorème 6.9

(Identité de parallélogramme)
Soit E un espace préhilbertien.
Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) \tag{6.10}$$

Démonstration.

On a :

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y).$$

Donc

$$\|x+y\|^2+ = \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2. \tag{6.11}$$

En remplace maintenant y par $-y$ dans (6.11), on obtient,

$$\|x-y\|^2+ = \|x\|^2 - (x,y) - (y,x) + \|y\|^2. \tag{6.12}$$

En sommant (6.11) et (6.12) membre à membre, on trouve l'identité voulue. □

Théorème 6.10

(Formule de Pythagore)
Soit E un espace préhilbertien. Pour tout $x, y \in E$, on a

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \tag{6.13}$$

Démonstration.

On a :

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2\Re e(x,y) + (y,y) = \|x\|^2 + 2\Re e(x,y) + \|y\|^2. \tag{6.14}$$

Si $x \perp y$. alors $(x,y) = 0$. Donc On remplace dans l'égalité (6.14), on obtient,

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

□

Définition 6.6. (Espace de Hilbert)

Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$ qui est complet pour la norme $\| x \| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$.

Remarque 6.5.

Un espace de Hilbert est donc encore un espace de Banach , dont la norme provient d'un produit scalaire. Une telle norme est parfois appelée norme de la convergence en moyenne quadratique.

Exemple 6.5.

1) Comme l'espace $\mathbb{C}$ est complet, alors il est de Hilbert.
2) Comme l'espace $\mathbb{C}^n$ est complet, alors il est de Hilbert.
3) L'espace,

$$l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = \Big\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \Big\},$$

muni du produit scalaire usuel

$$(x,y)=\sum_{n=0}^{+\infty}x_n\overline{y_n}$$

et la norme induite

$$(x,x)^{\frac{1}{2}}=\|x\|=\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}|x_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

est un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$.
4) De même l'espace,

$$l^2(\mathbb{N},\mathbb{R})=\Big\{x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}:x_n\in\mathbb{R}\ \textit{et}\ \sum_{n=0}^{+\infty}|x_n|^2<+\infty\Big\},$$

muni du produit scalaire usuel :

$$(x,y)=\sum_{n=0}^{+\infty}x_ny_n,$$

et la norme induite

$$(x,x)^{\frac{1}{2}}=\|x\|=\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}|x_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

est un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$.
5)) L'espace,

$$L^2([a,b],\mathbb{C})=\Big\{f:[a,b]\to\mathbb{C}:f\ \textit{est mesurable et}\ \int_a^b|f(x)|^2dx<+\infty\Big\},$$

muni du produit scalaire usuel,

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx,$$

et la norme induite,

$$\|f\|=\Big(\int_a^b|f(x)|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

est un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$.

6.3.1 Système orthogonal et système orthonormal

Définition 6.7.

Soit H un espace préhilbertien. Une famille S des éléments non nuls de H est dit système orthogonal si $x\perp y$ pour tous $x,y\in S$ tels que $x\neq y$.
De plus, si $\|x\|=1,\ \forall x\in S,$ alors S est dit système orthonormal.

Théorème 6.11

Tout système orthogonal est linéairement indépendant.

Démonstration.
Soit S un système orthogonal. Supposons que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0,$ pour tous $x_1, x_2, ..., x_n \in S$ et pour tous $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$. Alors

$$0 = \Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \Big) = \sum_{k=1}^{n} \mid \alpha_k \mid^2 \ \|x_k\|^2.$$

Donc $\alpha_k = 0$ pour tout $k \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Par conséquent $x_1, x_2, ..., x_n$ sont linéairement indépendants. □

Définition 6.8. (Suite orthonormale)

Une suite finie ou infinie de vecteurs qui forment un système orthonormal s'appelle une suite orthonormale.

Remarque 6.6.

La condition d'orthogonalité de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être écrite en terme de symbole de Kroneker :

$$(x_n, x_m) = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad m = n, \\ 0 & \text{si} \quad m \neq n. \end{cases}$$

Exemple 6.6.

Soit $e_n = (\underbrace{0, 0, 0, ..., 0}_{(n-1)\ zros}, 1, 0, 0, ...)$.
$S = (e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est un système orthonormal dans* l^2.

Exemple 6.7.

Soit,

$$\phi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

L'ensemble $\{\phi_n\}$ *est un système orthonormal dans* $L^2\big([-\pi, \pi]\big)$. *En effet, pour* $m \neq n$, *on a :*

$$(\phi_m, \phi_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} \, dx = \frac{e^{i\pi(m-n)} - e^{-i\pi(m-n)}}{2i\pi(m-n)} = 0.$$

D'autre part, on a :

$$(\phi_n, \phi_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-n)x} \, dx = 1.$$

Donc $(\phi_m, \phi_n) = \delta_{mn},$ *pour tout* $m, n \in \mathbb{N}$.

Lemme 6.6.

i) Soit $\{u_1, u_2, ..., u_N\}$ *une suite orthonormée de* H.
Alors on a :

$$\|u_1 + u_2 + ... + u_N\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + ... + \|u_N\|^2.$$

ii) Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite orthonormée de* H. *On a alors*

a) $\forall u \in H, \forall N \in \mathbb{N} : \|u\|^2 = \sum_{k=0}^{N} |\ (u, e_k)\ |^2 + \|u - \sum_{k=0}^{N}(u, e_k)e_k\|^2.$

b) L'inégalité de Bessel :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\ (u, e_n)\ |^2 \leq \|u\|^2.$$

Démonstration.

i) Par récurrence à partir de l'identité de Pythagore pour 2 vecteurs.

ii) a) On pose $u_1 = \sum_{k=0}^{N}(u, e_k)e_k$ et $u_2 = u - \sum_{k=0}^{N}(u, e_k)e_k$.

Alors,

$$u_1 \perp u_2.$$

Comme $u = u_1 + u_2$, alors d'après l'identité de Pythagore on a :

$$\|u\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2.$$

b) D'après la propriété a), on a $\forall N \geq 1$ et en minorant simplement $\|u_2\|^2$ par 0, on aura

$$\sum_{k=0}^{N} |\ (u, e_n)\ |^2 \leq \|u\|^2.$$

Par passage à la limite quand $N \to +\infty$, on obtient l'inégalité de Bessel. □

Lemme 6.7.
Soit H *un espace de Hilbert. une suite orthonormée* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base hilbertienne si*

$$(u, e_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow u = 0.$$

Théorème 6.12

Soit H un espace de Hilbert et soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée.
Les conditions suivantes sont équivalentes :
1) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne.
2) $\forall u \in H : u = \sum_{n\in\mathbb{N}}(u, e_n)e_n$.
3) $\forall u \in H : \|u\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\ (u, e_n)\ |^2$ **(Identité de Parseval)**.

Démonstration.

- Montrons que $1) \Rightarrow 2)$.
$\forall j \in \mathbb{N}$, on a :

$$\Big(u - \sum_{n\in\mathbb{N}}(u, e_n)e_n, e_j\Big) = (u, e_j) - (u, e_j) = 0,$$

alors, l'hypothèse 1) de ce théorème entraîne,

$$u - \sum_{n\in\mathbb{N}}(u, e_n)e_n = 0,$$

c'est à dire que :

$$u = \sum_{n\in\mathbb{N}}(u, e_n)e_n.$$

- Montrons $2) \Rightarrow 3)$.
D'après la propriété ii) a) du lemme 6.6, on a :

$$\forall N \in \mathbb{N} : \|u\|^2 = \sum_{k=0}^{N} |\ (u, e_k)\ |^2 + \|u - \sum_{k=0}^{N}(u, e_k)e_k\|^2.$$

Ainsi quand $N \to +\infty$, on obtient l'identité de Parseval.
- Montrons $3) \Rightarrow 1)$.
Comme par l'hypothèse, on a :

$$(u, e_n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'après l'identité de Parseval, on en déduit que :

$$\|u\|^2 = 0.$$

C'est à dire que :

$$u = 0.$$

□

Notation :
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On note $\mathcal{S}_2(E)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des formes sesquilinéaires continue sur E.
Si $B \in \mathcal{S}_2(E)$, on pose

$$\|B\| = \sup_{x,y\in E,\ \|x\|\leq 1,\ \|y\|\leq 1} |B(x, y)|.$$

Ce qui définit une norme sur $\mathcal{S}_2(E)$.
En particulier, on a

$$\forall x, y \in E : |B(x, y)| \leq \|B\|\ \|x\|\ \|y\|.$$

Définition 6.9.

Soit H un espace de Hilbert et soit $T \in L(H)$. On dit que T est coercif (ou elliptique) s'il existe $\alpha > 0$ telle que

$$\forall x \in H : |(Tx, x)| \geq \alpha\|x\|^2.$$

Proposition 6.4

Soient E et F deux espaces de Banach sur $\mathbb{K}$ et soit $T \in L(E,F)$.
Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes,
1) $\overline{Im(T)} = F$ et $\exists C > 0$ telle que, $\forall x \in E : \|Tx\|_F \geq C\|x\|_E$.
2) T est inversible.

Proposition 6.5

Soit $T \in L(H)$.
Alors on a :

1. $\ker(T) = \Big(Im(T^*)\Big)^{\perp}$.
2. $\overline{Im(T)} = \Big(\ker(T^*)\Big)^{\perp}$.

Proposition 6.6

Soit H un espace de Hilbert muni de son produit scalaire $(.,.)$ et $T \in L(H)$.
Si T est coercif, alors il est inversible sur $L(H)$.

Démonstration.

On a d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz et la coercivité de T :

$$\forall x \in H : \| Tx \| \| x \| \geq (Tx, x) \geq \alpha \|x\|^2.$$

Donc

$$\forall x \in H : \| Tx \| \geq \|x\|.$$

Donc en vertu de la proposition 6.4, il suffit de montrer que $\overline{Im(T)} = H$.
Or, $\forall x \in H$, on a

$$| (T^*x, x) | = | (x, Tx) \geq \alpha \|x\|^2 .$$

Donc T^* est aussi coercif. Ce qui entraîne comme pour T l'injectivité de T^*.
Donc en vertu de la proposition 6.5 on obtient :

$$\overline{Im(T)} = \big(\ker T^*\big)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H.$$

Ce qui donne le résultat.

□

Dans la suite H désigne un espace de Hilbert.

6.4 Projection sur un convexe fermé

Théorème 6.13

(**de projection sur un convexe fermé**).
Soit $K \subset H$, un convexe fermé tel que $K \neq \emptyset$. Alors
i) $\forall f \in H$, il existe une unique $u \in K$ tel que

$$\|f-u\| = \min_{v\in K} \|f-v\|,$$

de plus, la fonction u est caractérisée par :

$$ii) \begin{cases} u \in K, \\ (f-u, v-u) \leq 0, \quad \forall v \in K. \end{cases}$$

Notation :
On pose $u = Pr_K(f) =$ la projection de f sur K.

Démonstration.

i) L'ensemble $\{\|f-v\|,\ v \in K\}$ est minoré (par 0) non vide. Il admet donc une borne inférieure : $d = \inf_{v\in K} \|f-v\|$.
Par suite, d'après la caractérisation de la borne inférieure, on a :

$$\forall \varepsilon = \frac{1}{n} > 0,\ \exists v_\varepsilon \in K \text{ tel que } d \leq d_n = \|f-v_n\| \leq d+\varepsilon,$$

c'est à dire qu'il existe une suite (appelée suite minimisante) $(v_n) \subset K$ vérifiant

$$d_n = \|f-v_n\| \longrightarrow d = \inf_{v\in K} \|f-v\|, \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty.$$

- la suite $(v_n)_n$ est de Cauchy. En effet :
d'après l'identité de parallélogramme, en posant :

$$\lambda = f - v_n \in H, \mu = f - v_m \in H.$$

On a :

$$\|\frac{\lambda+\mu}{2}\|^2 + \|\frac{\lambda-\mu}{2}\|^2 = \frac{1}{2}\Big(\|\lambda\|^2 + \|\mu\|^2\Big),$$

soit

$$\|f - \frac{v_n+v_m}{2}\|^2 + \|\frac{v_n-v_m}{2}\|^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2).$$

Mais, puisque d est la borne inférieure et que $\frac{v_n+v_m}{2} \in K$, on a :

$$d^2 \leq \|f - \frac{v_n+v_m}{2}\|^2.$$

D'où

$$d^2 + \frac{1}{4}\|v_n - v_m\|^2 \leq \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2),$$

i.e

$$\|v_n - v_m\| \leq 2\Big[\frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2) - d^2\Big] \longrightarrow 0 \text{ quand } n, m \longrightarrow +\infty.$$

Par suite il existe $u \in H$ telle que la suite $(u_n)_n$ converge vers u.
Mais K est fermé, donc $u \in K$ et l'on a $d = \|f-u\|$, c'et à dire que :

$$u \in K \text{ et } \|f-u\| = \min_{v\in K} \|f-v\|.$$

ii) On montre que $ii) \Leftrightarrow i)$
Soit $u \in K$ vérifiant i), i.e $\|f-u\| \leq \|f-v\|,\ \forall v \in K$.
Soit $w \in K$ quelconque.
Puisque K est convexe on a :

$$v = (1-t)u + tw \in K,\ \forall t \in [0,1].$$

Donc,

$$\|f-u\| \leq \|f-vu\| = \|(f-u) - t(w-u)\|.$$

D'où :

$$\|f-u\|^2 \leq \|(f-u)-t(w-u)\|^2 = \|f-u\|^2 - 2t(f-u, w-u) + t^2\|w-u\|^2. \tag{6.15}$$

Faisons tendre t vers 0 dans (6.15), on obtient :

$$(f-u, w-u) \leq 0,\ \forall w \in K.$$

Inversement, soit $u \in K$ vérifiant ii), c'est à dire que :

$$(f-u, v-u) \leq 0,\ \forall v \in K.$$

On a, pour tout $v \in K$:

$$(f-u, v-u) = \big(f-u, (f-u)-(f-u)+(v-u)\big) = \big(f-u, (f-u)-(f-v)\big) = \|f-u\|^2 - (f-u, f-v) \leq 0,\ \forall v \in K.$$

Donc d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, on obtient,

$$\|f-u\|^2 \leq (f-u, f-v) \leq \|f-u\|\ \|f-v\|.$$

D'où :

$$\|f-u\| \leq \|f-v\|,\ \forall v \in K.$$

- Montrons l'unicité de u :
Supposons que u_1, u_2 soient deux solutions de i). On a :

$$(f-u_1, v-u_1) \leq 0,\ \forall v \in K, \tag{6.16}$$

et

$$(f-u_2, v-u_2) \leq 0\ \forall v \in K. \tag{6.17}$$

On remplace v par u_2 dans (6.16) et v par u_1 dans (6.17), puis faisons l'addition, on obtient

$$\|u_2-u_1\|^2 \leq 0.$$

D'où : $u_2 = u_1$.

□

Corollaire 6.2.

Soit $K \subset H$ un convexe fermé tel que $K \neq \emptyset$. La fonction Pr_K est lipschitzienne sur H, i.e

$$\|Pr_K(f_1) - Pr_K(f_2)\| \leq \|f_1 - f_2\|,\ \forall f_1, f_2 \in H.$$

Démonstration.

On pose $u_1 = Pr_K(f_1),\ u_2 = Pr_K(f_2)$. on a :

$$\begin{cases} (f_1 - u_1, v - u_1) \leq 0 \quad \forall v \in K, \\ (f_2 - u_2, v - u_2) \leq 0 \quad \forall v \in K. \end{cases} \tag{6.18}$$

On remplace v par u_2 dans la première inégalité de (6.18) et v par u_1 dans la deuxième inégalité de (6.18), il vient,

$$\begin{cases} (f_1 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0 \quad \forall v \in K \\ -(f_2 - u_2, u_2 - u_1) \leq 0 \quad \forall v \in K. \end{cases} \tag{6.19}$$

Faisons l'addition des deux inégalités de (6.19), il vient,

$$\Big((f_1 - f_2) + (u_2 - u_1), u_2 - u_1\Big) \leq 0,$$

c'est à dire que :

$$\|u_2 - u_1\|^2 \leq (f_1 - f_2, u_2 - u_1) \leq \|f_2 - f_1\|\ \|u_2 - u_1\|.$$

En simplifiant par $\|u_2 - u_1\|$, on obtient le résultat. □

Corollaire 6.3.

Soit L un sous-espace vectoriel fermé de H et $f \in H$. Alors
$u = Pr_L(f) \Leftrightarrow$

$$iii) \begin{cases} u \in L, \\ (f - u, v) = 0 \quad \forall v \in L. \end{cases}$$

Démonstration.

Si $u = Pr_L(f)$ alors,

$$(f - u, v - u) \leq 0,\ \forall v \in L.$$

Donc,

$$(f - u, tv - u) \leq 0,\ \forall v \in L,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent

$$t(f - u, v) \leq (f - u, u),\ \forall v \in L,\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{6.20}$$

Faisons $t = 0$ dans (6.20) , on obtient $(f - u, u) \geq 0$
Faisons $t = 1$ ou $t = -1$ dans (6.20) alors,

$$|(f - u, v)| \leq (f - u, u).$$

Lorsque $t > 0$, alors (6.20) est équivalente à

$$|(f - u, v)| \leq \frac{1}{t}(f - u, u).$$

Lorsque $t \longrightarrow +\infty$, alors, $(f - u, v) = 0,\ \forall v \in K$.
Réciproquement : Si $u \in L$ vérifie iii), c'est à dire que :

$$(f - u, v) = 0,\ \forall v \in L,$$

alors

$$(f - u, v - u) = 0,\ \forall v \in L.$$

□

6.5 Théorème de : Riesz, Stampacchia, et lax-Milgram

Notation :
Soit H un espace de Hilbert, H' le dual topologique de H, $\langle .,. \rangle$ le crochet de dualité et $(.,.)$ le produit scalaire sur H.

Théorème 6.14

(Riesz-Frechet)
Soit $f \in H'$. Il existe $u \in H$ unique telle que :

$$\langle f, v \rangle = (u, v),\ \forall v \in H.$$

De plus on a :

$$\| \varphi \|_{H'} = \| f \|_H .$$

Démonstration.

Soit l'application $T : H \longrightarrow H'$ telle que $\forall \varphi \in H : T\varphi = f$ et $\langle T\varphi, v \rangle = (\varphi, v)$.
On vérifie que $T\varphi$ est une forme linéaire continue qui vérifie grâce à l'inégalité de Cauchy Schwarz

$$|\langle T\varphi, v \rangle| = |(\varphi, v)| \leq \|\varphi\|\ \|v\|,\ \forall v \in H.$$

Donc $\|T\varphi\|_{H'} = \|\varphi\|_H$, i.e T est une isométrie.
Par conséquent

$$\| \varphi \|_{H'} = \| f \|_H .$$

Par suite $T(H)$ est fermé dans H'.
Pour montrer que T est surjectif, il suffit de montrer que $T(H)$ est dense dans H' (car $T(H)$ est fermé dans H') .
H étant réflexif car il est de Hilbert, (donc $H'' = H$).
Soit $F \in H''$ tel que :

$$\langle F, T\varphi \rangle_{H'' \times H'} = 0,\ \forall \varphi \in H,$$

(ce qui veut dire que $\forall T\varphi \in T(H)$) , i.e grâce á l'identification $H'' = H$, on a

$$(F, T\varphi)_{H \times H'} = 0,\ \forall \varphi \in H.$$

Soit, par définition de T : $(F, \varphi) = 0,\ \forall \varphi \in H$. Donc $F = 0$.
Par suite, toute forme linéaire nulle sur $T(H)$ est nulle partout, ce qui veut dire que

$$T(H) = \overline{T(H)} = H'.$$

□

6.5.1 Théorème de Stampacchia

On considère dans la suite H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et
$a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R} : (u, v) \longmapsto a(u, v)$ une forme bilinéaire sur H.

Définition 6.10.

1) a est une forme continue sur H s'il existe $C > 0$ telle que

$$|a(u,v)| \leq C\|u\| \ \|v\|, \ \forall u, v \in H.$$

2) a est dite coercive, s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2, \ \forall u \in H.$$

Remarque 6.7.

En dimension finie ($H = \mathbb{R}^n$), et dans le cas où la forme bilinéaire continue et coercive est de plus symétrique (c'est à dire que $a(u,v) = a(v,u)$ pour tous $u, v \in H$), on retrouve la notion de forme bilinéaire associée à une matrice symétrique définie positive. La coefficient α est alors la plus petite valeur propre de la matrice associée, et la constante C de la continuité sa plus grande valeur propre.

Théorème 6.15

(de Stampacchia)
Soient a un forme bilinéaire, continue coercive sur H et K un convexe fermé dans H tel que $K \neq \emptyset$.
Alors,

$$\forall f \in H' : \text{ il existe } u \in K \text{ unique vérifiant } a(u, v-u) \geq \langle f, v-u\rangle, \ \forall v \in K.$$

De plus, a est une forme symétrique $\Big(i.e\ a(u,v) = a(v,u), \forall u, v \in H\Big)$, alors la solution u est caractérisée par :

$$\begin{cases} u \in K, \\ \frac{1}{2}a(u,u) - \langle f, u\rangle = \min\limits_{v\in K}\big\{\frac{1}{2}a(v,v) - \langle f, v\rangle\big\}. \end{cases}$$

Démonstration.

Soit $f \in H'$. D'après le théorème (6.14) de Riesz il existe $\varphi \in H$ unique telle que :

$$\langle f, v\rangle_{H'\times H} = (\varphi, v), \ \forall v \in H \text{ et } \|f\|_{H'} = \|\varphi\|_H.$$

Pour u fixé dans H : la forme $H \longrightarrow \mathbb{R} : v \longmapsto a(u,v)$ est linéaire continue, donc appartient à H'.
Donc d'après le théorème 6.14 de Riesz, il existe $Au \in H$ unique telle que :

$$a(u,v) = (Au, v) \ \forall v \in H.$$

En vertu de la continuité de a, on en déduit que $\|Au\| \leq C\|u\|, \ \forall u \in H$ et de la coercivité de a, on en déduit que :

$$\|Au\| \geq \alpha\|u\|, \ \forall u \in H.$$

Cette dernière s'obtient grâce à l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$\alpha\|u\|^2 \leq (Au, u) = a(u,u) \leq \|Au\| \ \|u\|.$$

Le problème

$$\mathcal{P}\left\{\begin{array}{c}\text{trouver } u\in K \text{ vérifiant :}\\ a(u,v-u)\geq\langle f,v-u\rangle,\ \forall v\in K,\end{array}\right.$$

devient équivalent à

$$\mathcal{P}'\left\{\begin{array}{c}\text{trouver } u\in K \text{ vérifiant :}\\ (Au,v-u)\geq(\varphi,v-u),\ \forall v\in K.\end{array}\right. \tag{6.21}$$

Soit $r>0$, à choisir. Alors la dernière inégalité de (6.21) est équivalente à

$$\Big((r\varphi-rAu+u)-u,v-u\Big)\leq 0,\ \forall v\in K.$$

D'après le théorème de projection, cela signifie que :

$$P_K(r\varphi-rAu+u)=u,$$

ou encore, que l'application

$$T:H\longrightarrow H \text{ telle que } \forall v\in H: T(v)=P_K(r\varphi-rAv+v), \tag{6.22}$$

admet un point fixe unique dans K.
Pour cela rappelons le théorème de point fixe de Banach suivant :

Théorème 6.16

On considère (X,d) un espace métrique complet et $T:X\longrightarrow X$ une application vérifiant :

$$d(Tx_1,Tx_2)\leq k(x_1,x_2),\ \forall x_1,x_2\in X,\ \text{avec } k<1.$$

Alors T admet un point fixe unique $u=Tu$.

C'est le théorème des approximations successives de Piccard.
T est dite contraction stricte.
Appliquons le théorème 6.16 à l'application T dans (6.22) définie sur H.
On a :
$\|Tv_1-Tv_2\|=\|P_K(r\varphi-rAv_1+v_1)-P_K(r\varphi-rAv_2+v_2)\|\leq\|(r\varphi-rAv_1+v_1)-(r\varphi-rAv_2+v_2)\|$, (car P_K est lipschitzienne).
Donc,

$$\|Tv_1-Tv_2\|=\|(v_1-v_2)-r(Av_1-Av_2)\|.$$

D'où,
$\|Tv_1-Tv_2\|\leq r^2\|A(v_1-v_2)\|^2+\|v_1-v_2\|^2-2r\Big(A(v_1-v_2),v_1-v_2\Big)\leq r^2\Big(C^2\|v_1-v_2\|^2\Big)+\|v_1-v_2\|^2-2r\Big(\alpha\|v_1-v_2\|^2\Big)=\Big(r^2C^2+1-2r\alpha\Big)\|v_1-v_2\|^2$.
Il suffit alors de choisir r de sorte que $k=r^2C^2+1-2r\alpha<1$, soit : $0<r<\dfrac{2\alpha}{C^2}$, pour que T dans (6.22) admette un point fixe.
On suppose que a est symétrique. Alors : $a(u,v)$ définit un autre produit scalaire sur H et la norme associée $|u|=\big(a(u,u)\big)^{\frac{1}{2}}$ est équivalente à la norme initiale $\|u\|=(u,u)^{\frac{1}{2}}$.
Grâce aux deux inégalités suivantes :

$$a(u,u)\geq\alpha\|u\|^2 \text{ et } a(u,u)\leq C\|u\|^2,\ \forall u\in H.$$

Dans ce cas, le problème

$$\mathcal{P}\left\{\begin{array}{c}\forall f\in H', \text{il existe un unique } u\in K :\\ a(u,v-u)\geq\langle f,v-u\rangle\ \forall v\in K,\end{array}\right.$$

devient grâce au théorème 6.14 de Riez comme suit :

$$\mathcal{P}' \left\{ \begin{array}{c} \forall f \in H', \text{il existe un unique } u \in K : \\ a(u, v-u) \geq a(\psi, v-u)\ \forall v \in K,\ \psi \in H \ \text{ telle que } \langle f, v\rangle = a(\psi, v). \end{array} \right.$$

Or,

$$a(u, v-u) \geq a(\psi, v-u) \Leftrightarrow a(\psi - u, v-u) \leq 0 \ \ \forall v \in K.$$

Cela est équivalent à dire, grâce au théorème de projection appliqué au produit scalaire a,

$$u = P_K \psi \ (\text{ projection au sens du produit scalaire } \ a)$$

et ceci est équivalent â dire (théorème de projection encore) que :

$$a(\psi - u, \psi - u)^{\frac{1}{2}} = \min_{v \in K} a(\psi - v, \psi - v)^{\frac{1}{2}},$$

ou encore,

$$a(\psi - u, \psi - u) = \min_{v \in K} a(\psi - v, \psi - v),$$

ou encore,

$$a(\psi, \psi) + a(u, u) - 2a(\psi, u) = \min_{v \in K} \Big[a(\psi, \psi) + a(v, v) - 2a(\psi, v) \Big],$$

ou encore

$$\frac{1}{2} a(u, u) - \langle f, u\rangle = \min_{v \in K} \Big[\frac{1}{2} a(v, v) - \langle f, v\rangle \Big].$$

□

6.5.2 Théorème de Lax-Milgram

On a l'important corollaire suivant, qui est en fait le théorème de lax-Milgram.

Théorème 6.17

(lax-Milgram)

Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue et coercive. Alors

$$\forall f \in H', \text{ il existe une unique } u \in H \text{ telle que } a(u, v) = \langle f, v\rangle, \ \forall v \in H.$$

Si de plus a est symétrique, alors u est caractérisée par :

$$u \in H \text{ et } \frac{1}{2} a(u, u) - \langle f, u\rangle = \min_{v \in H} \Big\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \langle f, v\rangle \Big\}.$$

Démonstration.

On applique le théorème de Stampacchia.
Donc $a(u, v-u) \geq \langle f, v-u\rangle \ \ \forall v \in H, \ u$ solution appartient à H.

$$a(u, w) \geq \langle f, w\rangle \ \ \forall w \in H. \tag{6.23}$$

On change dans (6.23) w par $-w$, on obtient :

$$-a(u, w) \geq -\langle f, w\rangle \ \forall w \in H,$$

c'est à dire que :

$$a(u,w) \leq \langle f,w\rangle \ \ \forall w \in H. \tag{6.24}$$

Comparons (6.23) et (6.24) il vient,

$$a(u,w) = \langle f,w\rangle, \ \ \forall w \in H.$$

□

6.6 Bases hilbertiennes

Définition 6.11.

On appelle base hilbertienne de H, une suite (e_n) d'éléments de H telles que
1) $\|e_n\| = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$.
2) $(e_n, e_m)_H = 0, \ \forall n,m \in \mathbb{N}, \ n \neq m$.
3) L'espace vectoriel engendré par les (e_n) est dense dans H, c'est à dire

$$\overline{Vect\{e_n, n \in \mathbb{N}\}} = H.$$

Proposition 6.7

Tout espace de Hilbert séparable H admet une base orthonormée.

Démonstration.

Soit (y_n) une suite dense dans H.
Soit n_k le premier index tel que $y_1, ...y_{n_k}$ engendrent un sous-espace de dimension k, alors (y_{n_k}) est une sous-suite libre, et

$$y_1, ...y_{n_k} \text{ et } y_{n_1}, ..., y_{n_k}$$

engendrent le même sous-espace pour chaque k. On écrit $x_k = y_{n_k}$ pour simplifier, et on pose

$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \text{ et } e_n = \frac{x_n - \sum_{k<n}(x_n, e_k)e_k}{\|x_n - \sum_{k<n}(x_n, e_k)e_k\|}, \ n = 2,3,.....$$

Alors la suite (e_n) est orthonormée. En outre,

$$x_1, x_2, ..., x_n \text{ et } \ e_1, e_2, ..., e_n$$

engendrent le même sous-espace pour chaque n.
Par conséquent, le sous-espace engendré par (e_n) est dense dans H. □

6.7 Exercices sur les espaces L^p

Exercice 6.1. *(lemme de Riemann-Lebesgue).*

On considère une fonction f telle que f est bornée et mesurable sur $(0,+\infty)$ et vérifie :

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{c}\int_0^m f(x)\,dx=0.$$

1) Soit $g=\chi_{[m,l]}$, où $[m,l]\subset(0,+\infty)$.
- Montrer que

$$\lim_{\omega\to+\infty}\int_0^{+\infty} g(x)f(\omega x)\,dx=0. \tag{6.25}$$

2) En déduire que (6.25) est vraie pour tout $g\in L^1(0,+\infty)$.
3)Soit $a>0,b>0$ et on suppose que $g\in L^1(a,b)$.
Établir l'égalité suivante :

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g(x)\cos(nx)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx=0.$$

Exercice 6.2.

On considère $C([0,1])$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ et soit $f\in C([0,1])$ telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N}:\int_0^1 x^n f(x)\,dx=0.$$

- Montrer que $f\equiv 0$.

Exercice 6.3.

1) Soient $\alpha,\beta>0$ et $p\geq 1$.
On considère la fonction g définie par :

$$g(x)=x^p.$$

- Montrer que

$$(\alpha+\beta)^p\leq 2^{p-1}(\alpha^p+\beta^p).$$

2) Soient $\alpha,\beta>0$ et $0<p<1$ et on considère la fonction h définie par :

$$h(x)=\alpha^p+x^p-(\alpha+x)^p.$$

- Montrer que

$$(\alpha+\beta)^p\leq\alpha^p+\beta^p.$$

Exercice 6.4.

Soit $a,b\in\mathbb{R}$.
- Montrer que $L^2([a,b])\subset L^1([a,b])$.

Exercice 6.5.

Soient $\alpha > 0,\ \beta > 0$.
On pose

$$f(x) = \Big(1 + |x|^{\alpha}\Big)^{-1}\Big(1 + \big|\lg|x|\big|^{\beta}\Big)^{-1}.$$

- Donner les conditions sur lesquelles $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 6.6.

Soit $(0,1) \subset \mathbb{R}$.
I) On considère la suite de fonctions (f_n) *définie par :*

$$f_n(x) = ne^{-nx}.$$

- Montrer que :
1) $f_n \to 0,\ p.p\ x \in (0,1)$.
2) (f_n) *est bornée dans* $L^1((0,1))$.
3) $f_n \nrightarrow 0$ *fortement dans* $L^1((0,1))$.
4) (f_n) *ne converge pas faiblement vers* 0 *dans* $\sigma(L^1((0,1)), L^{\infty}((0,1)))$, *c'est à dire qu'il n'existe pas une sous-suite qui converge faiblement dans* $\sigma(L^1((0,1)), L^{\infty}((0,1)))$.
II) On considère la suite de fonctions (g_n) *définie par :*

$$g_n(x) = n^{\frac{1}{p}}e^{-nx}.$$

- Montrer que :
1) $g_n \to 0,\ p.p\ x \in (0,1)$.
2) (g_n) *est bornée dans* $L^p((0,1))$.
3) $g_n \nrightarrow 0$ *fortement dans* $L^p((0,1))$.
4) $g_n \rightharpoonup 0$ *faiblement vers* 0 *dans* $\sigma(L^p((0,1)), L^{p'}((0,1)))$.

Exercice 6.7.

Soient $a > 0, b > 0$.
On considère les suites de fonctions $(f_n), (g_n)$ *définies par :*

$$f_n(x) = \cos(nx) \text{ et } g_n(x) = \sin(nx).$$

- Pour $1 \leq p < +\infty$, *montrer que* $f_n \rightharpoonup 0$ *et* $g_n \rightharpoonup 0$ *dans* $L^p\Big((a,b)\Big)$.
2) Soit la suite de fonctions (h_n) *définie par :*

$$h_n(x) = \cos^2(nx)$$

Supposons que $1 \leq p < +\infty$.
- Montrer que $(h_n) \subset L^p\Big((a,b)\Big)$.
- Trouver la limite faible de la suite de fonctions (h_n), *c'est à dire :* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} w - h_n(x)$.

Exercice 6.8.

I) Pour $1 < p < \infty$, on considère la suite de fonctions (f_n) telle que $(f_n) \subset L^p(\Omega)$, et soit $f \in L^p(\Omega)$.
On suppose que :
1) $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans $\sigma(L^p(\Omega), L^{p'}(\Omega))$.
2) $\|f_n\|_{L^p(\Omega)} \to \|f\|_{L^p(\Omega)}$ fortement dans $L^p(\Omega)$.
- Montrer que $f_n \to f$ fortement dans $L^p(\Omega)$, c'est à dire : $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \| f_n - f \|_{L^p(\Omega)} = 0$.
II) Trouver une suite de fonctions $(f_n) \subset L^1\big((0,1)\big),\ f_n \geq 0$ telle que
1) $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans $\sigma(L^1\big((0,1)\big), L^\infty\big((0,1)\big)$.
2) $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$.
3) $\|f_n - f\|_1 \nrightarrow 0$, c'est à dire que (f_n) ne converge pas fortement vers f.

Exercice 6.9. ***(Inégalité de Hardy)*** *:*

Soit $0 < p < +\infty$ et soit q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Pour f est une fonction ou une classe de fonctions sur $]0, +\infty[$, on définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{\frac{x}{p}} f(e^x).$$

Supposons que $f \in L^p(]0, +\infty[)$. Pour $x > 0$, on définit l'opérateur T comme suit :

$$Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt.$$

1) Montrer que :

$$\Big(f \in L^p(]0, +\infty[)\Big) \Longleftrightarrow \Big(g \in L^p(\mathbb{R})\Big) \text{ et que } \|f\|_{L^p(]0,+\infty[)} = \|g\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = e^{-\frac{x}{q}} 1_{]0,+\infty[}(x).$$

avec $1_{]0,+\infty[}(x)$ est la fonction caractéristique de $]0, +\infty[$.
- Montrer que $h \in L^1(\mathbb{R})$ et que si $f \in L^p(]0, +\infty[), \widehat{Tf} = g * h$.
- En déduire que $T \in L\Big(L^p(]0, +\infty[)\Big)$ et que $\| T \| \leq q$.
3) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(t) = (nt)^{-\frac{1}{p}} 1_{[1,e^n]}(t).$$

- Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_n \in L^p(]0, +\infty[),$$

et que

$$\lim_{n\to+\infty} \|Tf_n\|_{L^p(]0,+\infty[)} = q.$$

- En déduire que $\| T \| = q$.
- Montrer que :

$$, \lim_{n\to+\infty} Tf_n(x) = 0, \text{ pour } x > 0.$$

Exercice 6.10.

Soit $h \in \mathbb{R}^n$. Pour une fonction f mesurable (au sens de Lebesgue) définie sur $\mathbb{R}^n$, on définit une translation par h par :

$$f_h(x) = f(x+h).$$

Supposons que, $\forall 1 \leq p < +\infty : \ f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.
- Montrer que :

$$f_h \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ et que } \|f - f_h\|_p \to 0 \text{ lorsque } h \to 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n.$$

Exercice 6.11.

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
- Montrer que :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\, dy,$$

est bien définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$.
- Montrer que :

$$f * g \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ et que } \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Exercice 6.12.

Soit $\varepsilon > 0$.
On définit la famille de fonctions (ρ_ε) telle que $(\rho_\varepsilon) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0 : \ \rho_\varepsilon(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

et $supp(\Big(\rho_\varepsilon\Big) \subset B(0,\varepsilon)$, où $B(0,\varepsilon)$ est la boule fermée définie par :

$$B(0,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \| \ x \ \| \leq \varepsilon\}.$$

Supposons que la famille (ρ_ε) vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)\, dx = 1.$$

1) Soit $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ (l'espace des fonctions continues à support compact.) .
- Montrer que : $\rho_\varepsilon * \psi$ converge uniformément vers ψ sur $\mathbb{R}^n$ lorsque $\varepsilon \to 0$.
2) Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Déduire alors que : $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} \rho_\varepsilon * f = f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 6.13.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq +\infty$.
On considère la suite de fonctions (f_n) de $L^p(]a,b[)$ telle que (f_n) est bornée.
- Supposons que $1 \leq p < +\infty$.

- Montrer que $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(]a,b[)$ et

$$\Big(f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{dans } L^\infty(]a,b[)\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall \varphi \in C_c^\infty(]a,b[) \text{ on a : } \int_a^b f_n\varphi\, dx \to \int_a^b f\varphi\, dx\Big)$$

où $C_c^\infty(]a,b[)$ est l'espace des fonctions infiniment dérivables sur $]a,b[$ et à support compact.

Exercice 6.14.

Soit $1 \leq p < +\infty$ et soient les fonctions $f_k \in L^p(\Omega),\ k \geq 1$ et $f \in L^p(\Omega)$ telles que

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} \|f_k\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)}\ p.p\ x \in \Omega \text{ et } \lim_{k\longrightarrow+\infty} f_k = f\ p.p\ x \in \Omega.$$

. - Montrer que :

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} \|f_k - f\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Exercice 6.15.

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ telle que $1 \leq p \leq \infty$.
1) On considère la fonction h telle que

$$h(y) = f(x-y)g(y).$$

- Montrer que : $h \in L^1(\mathbb{R}^n)\ p.p\ x \in \mathbb{R}^n$.
- Montrer que la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) = (f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy$$

est bien définie $p.p\ x \in \mathbb{R}^n$.
(La fonction φ s'appelle le produit de convolution de f et g.)
2) Montrer que $f*g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f*g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Exercice 6.16.

Soient $p,q,r \in \mathbb{R} \in$ tels que $p \geq 1$, $q \geq 1$ et $r \geq 1$ et qui vérifient : $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$.
- Montrer que si $f \in L^p, g \in L^q$, alors $fg \in L^r$ et

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

Exercice 6.17.

1) Soit g une fonction mesurable sur E telle que pour tout $f \in L^p$, on a $fg \in L^p$.
- Montrer que $g \in L^\infty$.
2) Pour $g \in L^\infty$, on définit l'application linéaire $T_g : L^p \longrightarrow L^p$ par :

$$T_g f = gf.$$

Soit $T : L^p \longrightarrow L^p$ une application linéaire continu qui commute avec tous les T_g, $g \in L^\infty$.
- Montrer qu'il existe un $h \in L^\infty$ tel que $T = T_h$.
Indication : *Construire une fonction $g > 0$ telle que $g \in L^p \cap L^\infty$. Soit alors $h = \dfrac{T(g)}{g}$. Puis montrer que*

$$\forall f \in L^p \cap L^\infty : T(f) = hf,$$

et conclure.

Exercice 6.18.

Pour $\varepsilon > 0$, on considère la fonction f_ε définie par :

$$f_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon|x|}.$$

Soit

$$E = \Big\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } f_\varepsilon \text{ est intégrable} \Big\}.$$

1) Montrer que $L^p \subset E$.
2) Montrer que si $f \in L^p$, alors $f_\varepsilon \in L^p$ et que

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} f_\varepsilon = f, \text{ dans } L^p.$$

Exercice 6.19.

On considère $C_c(\mathbb{R}^n)$ = l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ à support compact.
a) Trouver $\overline{C_c(\mathbb{R}^n)}$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
b) Montrer que : $\overline{C_c(\mathbb{R}^n)} \neq L^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour la convergence faible-$*$, c'est à dire que pour tout $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, il existe une suite de fonctions $(f_n) \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\forall \varphi \in L^1, \langle f_n, \varphi \rangle = \int_\Omega f_n(x)\varphi(x)\, dx \to \int_\Omega f(x)\varphi\, dx.$$

c) Montrer que $\overline{C_c(\mathbb{R}^n)} \neq L^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour la convergence faible, c'est à dire qu'il existe des fonctions f de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles qu'il n'existe aucune suite de $C_c(\mathbb{R}^n)$ qui converge faiblement vers f.

Exercice 6.20.

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall 1 \leq p \leq +\infty,\ f_n \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

On suppose que :

$$\forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}^n),\ \text{on a : } \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(0).$$

- Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n\|_{L^p} = +\infty,\ \forall 1 \leq p \leq +\infty.$$

Exercice 6.21.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p < +\infty$.
Soient la suite de fonctions (g_n) et la fonction g dans $L^p(\Omega)$.
On suppose que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} g_n(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ (la convergence simple.)}$$

- Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
i) $g_n \to g$ dans $L^p(\Omega)$.
ii) $\|g_n\|_{L^p} \to \|g\|_{L^p}$.

Exercice 6.22.

a)- *Soient $p, q \in]1, \infty[$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On considère les suites de fonctions $(f_n)_n$ dans $L^p(\mathbb{R})$ et $(g_n)_n$ dans $L^q(\mathbb{R})$ telles que :*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n = f \text{ dans } L^p \quad ; \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} g_n = g \text{ dans } L^q.$$

- Montrer que l'on a : $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n g_n \, dx = \int_{\mathbb{R}} fg \, dx.$

b)- *Étudier le cas particulier où $p = 1$ et $q = \infty$.*

Exercice 6.23.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p < \infty$.
Soient la suite de fonctions (f_n) et la fonction f dans $L^p(\Omega)$.
On suppose que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n = f \text{ dans } L^p(\Omega),$$

et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq C \text{ p.p sur } \Omega.$$

- Montrer que :

$$|f| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega.$$

6.8 Exercices sur les espaces de Hilbert

Exercice 6.24.

Soit H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $(.,.)$.
1) Montrer que si H est réel, alors

$$(x, y) = \frac{1}{4}\Big[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\Big].$$

2) Montrer que si H est complexe, alors

$$(x,y)=\frac{1}{4}\Big[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2+i\|x-iy\|^2\Big].$$

Exercice 6.25.

Soit $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, et on suppose que la norme $\|\ .\ \|$ satisfait

$$\forall x,y\in E:\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

- Montrer que

$$(x,y)=\frac{1}{4}\Big[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\Big]$$

définit un produit scalaire et que la norme est induite par ce produit scalaire.

Exercice 6.26.

Soit H un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire et la norme induite associée. Pour $x,y\in H$, en développant $\Big\|\|y\|x-\|x\|y\Big\|^2$, établir l'inégalité de Cauchy Schwarz.

Exercice 6.27.

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $(.,.)$,
- Montrer qu'on a

$$\big[\|x\|=\|y\|\big]\Longrightarrow(x+y,x-y)=0.$$

Exercice 6.28.

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(.,.)$ et soient $x,y\in E$.
1) Montrer que

$$(x,y)=0\Leftrightarrow\Big[\|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\|,\ \textit{pour tout}\ \alpha\in\mathbb{K}\Big].$$

2) Montrer que

$$(x,y)=0\Leftrightarrow\Big[\|x+\alpha y\|\geq\|x\|,\ \textit{pour tout}\ \alpha\in\mathbb{K}\Big].$$

Exercice 6.29.

Soit E un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire $(.,.)$ et soient $x,y\in E$. On suppose que $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$.
- Y'a-t-il $(x,y)=0$?.

Exercice 6.30.

Soit $T:L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})$ un opérateur linéaire satisfait

$$f\geq 0\Longrightarrow Tf\geq 0.$$

- Montrer que $\|T(|f|)\| \geq \|T(f)\|$.

Exercice 6.31.

Soit H *un espace de Hilbert et soit* (e_n) *une base orthonormale de* H .
- Montrer que l'opérateur T *défini par :*

$$T\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_n e_n\Big) = (x_1, x_2, ...),$$

définit un isomorphisme entre H *et* l^2 *et satisfait* $(Tx, Ty) = (x, y),\ \forall x, y \in H$.

Exercice 6.32.

Soit H *un espace de Hilbert et* M *un sous-ensemble de* H.
1) Montrer que $M^{\perp}$ *est un sous-espace fermé de* H.
2) Montrer que $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$ *et que* $(M^{\perp})^{\perp}$ *est le plus petit sous-espace fermé qui contient* M.

Exercice 6.33.

Soit H *un espace de Hilbert.*
1) Montrer que si M *est un sous-espace fermé de* H*, alors*

$$(M^{\perp})^{\perp} = H. \tag{6.26}$$

2) Est ce que (6.26) est vraie si M *n'est pas fermé dans* H *? Justifier.*

Exercice 6.34.

Soit H *un espace de Hilbert et soit* (x_n) *une suite orthogonale dans* H*, satisfaisant*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^2 < \infty.$$

- Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *est convergente dans* H.

- Si on supprime l'hypothèse d'orthogonalité, est ce que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *est convergente dans* H *?*

Exercice 6.35.

Soit H *un espace de Hilbert tel que* $\dim(H) = +\infty$.
- Montrer qu'il existe une suite (x_n) *de* H *telle que :*

$$\|x_n\| = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in H : (x_n, x) = 0.$$

Exercice 6.36.

Soit H un espace de Hilbert.
- Montrer que :

$$\Big(\|x-z\| = \|x-y\| + \|y-z\|\Big) \Longleftrightarrow \Big(y = \alpha x + (1-\alpha)z \text{ pour } \alpha \in [0,1]\Big).$$

Exercice 6.37.

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et soit (e_n) une suite orthonormale dans $L^2([a,b])$.
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et $f \in L^2([a,b])$.
On suppose que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \exists \ c_1, c_2, ..., c_N \text{ (des constantes)}, \text{ telles que : } \Big\| f - \sum_{k=1}^{N} a_k e_k \Big\| < \varepsilon.$$

- Montrer que (e_n) est une base orthonormale pour $L^2([a,b])$.

Exercice 6.38.

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire $(.,.)$ et soient $T, S \in L(H)$.
- Montrer que :

$$\Big(\forall x \in H : (Tx,x) = (Sx,x)\Big) \Longrightarrow \big(T = S\big). \tag{6.27}$$

- En donnant un contre-exemple, montrer que si H est un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, (6.27) est fausse.

Exercice 6.39.

Soit H un espace de Hilbert séparable. Montrer que toute famille orthonormée est au plus dénombrable dans H.

Exercice 6.40.

Soit H un espace de Hilbert et soit $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ une famille orthogonale dans H.
Supposons que :

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

- Montrer que :

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2$$

.

Exercice 6.41.

Soit H un espace de Hilbert et soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée dans H.
On considère $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes.

- Montrer que :

$$\Big(\text{la série } \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e_n \text{ est convergente dans } H\Big) \Longleftrightarrow \Big(\sum_{n=1}^{+\infty}]\lambda_n]^2 < +\infty\Big).$$

Exercice 6.42.

On considère H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(.,.)$ et soit M un sous-espace de H de dimension 1.
Soit $M^{\perp}$ l'orthogonal de M.
Soit $a \in M$ tel que $a \neq 0$.
- Soit $x \in H$. Montrer que :

$$d(x, M^{\perp}) = \frac{|(x,a)|}{\|a\|}.$$

Exercice 6.43.

Soit $H = L^2([0,1])$ muni du produit scalaire usuel $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.
1) Montrer que le sous-espace

$$M = \Big\{f \in H : \int_0^1 f(x)\,dx = 0\Big\},$$

est un hyperplan fermé de H.Trouver son orthogonal $M^{\perp}$.
2) Calculer la distance de la fonction $f(x) = x^2$ au sous-espace M.

Exercice 6.44.

Soit H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $(.,.)$ et $a \in H$ tel que $a \neq 0$.
- Montrer que :

$$\forall x \in H : d(x, \{a\}) = \frac{|(x,a)|}{\|a\|}.$$

2) On considère l'espace de Hilbert $L^2\Big([0,1]\Big)$.
a) Montrer que si $f \in L^2\Big([0,1]\Big)$, alors $f \in L^1\Big([0,1]\Big)$.
- On considère l'ensemble F tel que :

$$F = \Big\{f \in L^2\Big([0,1]\Big) : \int_0^1 f(t)\,dt = 0\Big\}.$$

b) Montrer que F est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2\Big([0,1]\Big)$.
c) Déterminer $F^{\perp}$.
d) Calculer $d(f,F)$ pour $f(t) = e^t$.

Exercice 6.45.

Soit H un espace de Hilbert et $P : H \to H$ un projecteur, c'est à dire une application linéaire telle que $P^2 = P$.
1) On désigne par I_H l'identité de H et $\oplus$ la somme directe algébrique.

- Montrer que :

$$Im(P) = \ker(I_H - P) \text{ et que } H = \ker(P) \oplus Im(P)$$

On suppose dans la suite que P est continu et $P \neq 0$.
2) a) Montrer que $\|P\| \geq 1$.
b) Montrer que l'opérateur adjoint P^* est aussi un projecteur.
3) On suppose maintenant que $P = P^*$.
a) Montrer que $\|P\| = 1$.
b) Montrer que P est la projection orthogonale sur $Im(P)$.
4) On suppose maintenant que $\|P\| = 1$.
a) Développer $\|x - P^*x\|^2$ et en déduire que $\ker(I_H - P) \subset \ker(I_H - P^*)$.
b) Montrer que $P = P^*$.

Exercice 6.46.

Soit H un espace préhilbertien sur $\mathbb{R}$.
On considère l'isométrie $T : H \to H,\ (\forall x, y \in H : \|Tx - Ty\| = \|x - y\|)$ telle que $T(0) = 0$.
1) Montrer que :

$$\forall x, y \in H : (Tx, Ty) = (x, y).$$

2) En déduire que T est linéaire.
*(**Indication :** Développer $\|T(x + y) - Tx - Ty\|^2$).*

Exercice 6.47.

On considère l'espace de Hilbert $L^2([0, 1])$.
Soit la suite de fonctions (u_n) définie par :

$$u_n(x) = sign\Big(\sin(2^n \pi x)\Big),\ n \in \mathbb{N},\ x \in [0, 1],$$

et

$$sign(x) = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad x \geq 0, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) La suite (u_n) est-elle un système orthonormal de $L^2([0, 1])$?
2) La suite (u_n) est-elle une base hilbertienne de $L^2([0, 1])$?
*(**Indication :** montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \int_0^1 \cos(2\pi x) u_n(x)\, dx = 0$).*

Exercice 6.48.

On considère l'espace de Hilbert :

$$l^2(\mathbb{N}) = \Big\{x = (x_n) : \sum_{n=1}^{+\infty} |\, x_n \,|^2 < +\infty\Big\},$$

et soit la famille (e_n) la base canonique de $l^2(\mathbb{N})$.
On définit la famille d'opérateurs $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$A_n e_k = \begin{cases} e_n & si \ \ k = n, \\ 0 & si \ \ k \neq n. \end{cases}$$

- Montrer que :

$$\forall x \in l^2(\mathbb{N}) : \lim_{n\longrightarrow+\infty} A_n x = 0 \ \ et \ \ \|A_n\| = 1, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

- Montrer que :

$$\| \ A_n \ \| \nrightarrow 0.$$

Exercice 6.49.

Soit H un espace de Hilbert séparable tel que $\dim(H) = +\infty$, muni d'un produit scalaire $(.,.)$ et la norme induite $\|.\|$.
Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base Hilbertienne de H.
On définit l'application N par :

$$N(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \mid (u, e_n) \mid .$$

1) Montrer que N est une norme sur H., et que $N(u) \leq \|u\|$.
2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de H.
Montrer que :

$$u_n \rightharpoonup u \Longrightarrow N(u_n - u) \to 0.$$

3) Montrer que :

$$\Big[N(u_n - u) \to 0 \ et \ (|u_n|) \ est \ bornée\Big] \implies \big[u_n \rightharpoonup u\big].$$

4) Donner un exemple d'une suite (u_n) telle que $N(u_n) \to 0$ et (u_n) ne converge pas faiblement vers 0.
5) Montrer que H muni de la norme N n'est pas complet.
6) Montrer que (B_H, N) (la boule unité de H pour la norme Hilbertienne $\|.\|$, munie de la norme N) est compacte.

CHAPITRE 7

OPÉRATEURS COMPACTS : ALTERNATIVE DE FREDHOLM, SPECTRE D'UN OPÉRATEUR COMPACT ET DIAGONALISATION D'UN OPÉRATEUR COMPACT AUTO-ADJOINT SUR UN ESPACE DE HILBERT

Introduction :

Les opérateurs compacts, et surtout leurs spectres sont une généralisation naturelle de l'algèbre linéaire en dimension finie. Ce sont les opérateurs intégraux (étudiés par E. Fredholm et V. Volterra, ...), premiers exemples d'opérateurs compacts, qui sont à l'origine de cette classe d'opérateurs. Les notions essentielles des opérateurs compacts ont été introduites par D. Hilbert en 1906. Onze ans après, F. Riesz publie une étude presque complète sur les opérateurs compacts. En 1930, J. Schauder rajoute quelques raffinements à la théorie en montrant que l'adjoint d'un opérateur compact est lui même compact. La plupart des résultats des sections de ce chapitre sont dus à F. Riesz.

7.1 Définitions, propriétés élémentaires et adjoints

Définition 7.1.

Soient E et F deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire continu $T \in L(E,F)$ est dit compact si l'image de la boule unité fermée de E, $T(\overline{B}_E(0,1))$ est une partie relativement compacte de F pour la topologie forte (c'est à dire que $\overline{T(\overline{B}_E(0,1))}$ est compacte dans F). On note $\mathcal{K}(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F.

Théorème 7.1

(Théorème d'Ascoli)
Soit K un espace métrique compact .
On considère l'espace de Banach des fonctions complexes continues sur K

$$C(K) = \Big\{ f : K \to \mathbb{C} \text{ tel que } f \text{ est continue} \Big\},$$

muni de la norme de convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in K} |f(x)|$.
Soit $\mathcal{H} \subset C(K)$. Si
1) $\mathcal{H}$ est borné, c'est à dire que : $\exists M > 0, |f(x)| \leq M,\ \forall x \in K, \forall f \in \mathcal{H}$.
2) $\mathcal{H}$ est équicontinu, c'est à dire que :

$(\forall \varepsilon > 0), (\exists \delta > 0) : d(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,\ \forall f \in \mathcal{H},\ (\delta$ ne dépend pas de $f)$.

Alors $\mathcal{H}$ est relativement compact.

Démonstration.
Voir ([8]). □

Exemple 7.1.

$E = F = C\Big([a,b]\Big)$. Soit $K \in C\Big([a,b]\times[a,b]\Big)$.
On pose $M = \sup\limits_{(x,y)\in[a,b]\times[a,b]} | K(x,y) |$.
Soit $f \in C\Big([a,b]\Big)$.
On définit,

$$Tf(x) = \int_a^b K(x,y) f(y)\, dy.$$

T s'appelle opérateur intégral et K s'appelle le noyau de T.
T est un opérateur compact.
En effet :
Utilisons le théorème d'Ascoli 7.1.
1) on montre que $T\overline{B}_E(0,1)$ est borné, c'est à dire que :

$$\exists C > 0, \forall f \in \overline{B}_E(0,1) : \|Tf\|_E \leq C.$$

2)On montre que l'ensemble, $T\overline{B}_E(0,1)$ est équicontinu, c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, d(x_1,x_2) < \delta \Rightarrow | Tf(x_1) - Tf(x_2) | < \varepsilon,\ \forall f \in \overline{B}_E(0,1).$$

Montrons 1).
Soit $f \in \overline{B}_E(0,1)$, alors $\|f\| \leq 1$.
On a :

$$\|Tf\|_E = \sup_{x\in[a,b]} | Tf(x) | .$$

$$| Tf(x) | \leq \int_a^b | K(x,y) | | f(y) |\ dy \leq M \int_a^b | f(y) |\ dy \leq M(b-a).$$

D'où,

$$\|Tf\| \leq M(b-a).$$

Montrons 2).
Soit $\varepsilon > 0$ et soit $f \in \overline{B}_E(0,1)$.
On a :

$$| Tf(x_1) - Tf(x_2) | \leq \int_a^b | K(x_1,y) - K(x_2,y) | | f(y) |\ dy.$$

Puisque K est uniformément continu sur $[a,b]\times[a,b]$ (car$[a,b]\times[a,b]$ est compact) , alors on a :

$$\exists\delta>0, \|(x_1,y)-(x_2,y)\|<\delta \Rightarrow \mid K(x_1,y)-K(x_2,y)\mid<\varepsilon.$$

Donc,

$$\mid Tf(x_1)-Tf(x_2)\mid\leq \varepsilon\int_a^b \mid f(y)\mid\ dy\leq \varepsilon(b-a)\|f\|_E\leq\varepsilon(b-a).$$

En vertu de 1) et 2) on conclut que $T\overline{B}_E(0,1)$ est relativement compact et donc T est un opérateur compact.

Exemple 7.2.

Soit $(a,b)\subset\mathbb{R}$ un intervalle fini et soit $1\leq p<+\infty$.
L'injection canonique $i: W^{1,p}\big(a,b)\big)\to L^p\big(a,b)\big)$ est compacte d'après le théorème 6.6.4 de Rellich, voir ([15]).

Théorème 7.2

(de Riesz)
Soit E un espace vectoriel normé, alors la boule unité fermée $\bar{B}_E(0,1)$ de E est compacte si et seulement si la dimension de E est finie i.e $\dim(E)<+\infty$.

Démonstration.

La démonstration repose sur le lemme 7.3.
Montrons que :
$\dim(E)=+\infty\Longleftrightarrow$ la boule unité fermée de E n'est pas compacte.
Alors on construit par récurrence (en commençant par un point $x_0\in E$ unitaire et arbitraire) une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle qu'en notant E_n l'espace vectoriel (de dimension finie fermé) engendré par $(x_k)_{k\leq n}$ on ait

$$x_n\in E_n, \|x_n\|_E=1 \text{ et } d(x_n,E_{n-1})\geq\frac{1}{2}.$$

En particulier on a

$$\forall m<n, \|x_n-x_m\|_E\geq\frac{1}{2}.$$

Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet aucune sous-suite convergente.
Donc la boule unité fermée n'est pas compacte. Ce qui contredit l'hypothèse. □

Remarque 7.1.

1) Si T est compact, on écrit $T\in\mathcal{K}(E,F)$.
2) Si $E=F$, on pose $\mathcal{K}(E)=\mathcal{K}(E,E)$.
3) Si E est un espace de Banach de dimension infinie, alors l'opérateur identité $Id_E: E\to E$ n'est pas compact car la boule unité fermée de E n'est pas compacte puisque $\dim(E)=+\infty$ d'après le théorème de Riesz. Et de même l'opérateur identité Id_E est compact si et seulement si la dimension de E est finie.

4) Si E et F sont de dimensions infinies, le théorème de Riesz entraîne que si $T \in L(E,F)$ est inversible, alors T n'est pas compact.

Proposition 7.1

Soient E et F deux espaces de Banach.
L'ensemble $\mathcal{K}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L(E,F)$.

Démonstration.

- Montrons que $\mathcal{K}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E,F)$.
Si $T \in \mathcal{K}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors il est clair que $\lambda T \in \mathcal{K}(E,F)$.
Soient $T, S \in \mathcal{K}(E,F)$ et montrons que $T+S \in \mathcal{K}(E,F)$.
On a :

$$(T+S)(\overline{B}_E(0,1)) \subset T(\overline{B}_E(0,1)) + S(\overline{B}_E(0,1)).$$

Comme $T(\overline{B}_E(0,1))$ et $S(\overline{B}_E(0,1))$ sont relativement compacts alors, $T(\overline{B}_E(0,1))+S(\overline{B}_E(0,1))$ est relativement compact et donc $(T+S)(\overline{B}_E(0,1))$ est relativement compact.
Montrons maintenant que $\mathcal{K}(E,F)$ est fermé dans $L(E,F)$.
On considère la suite $(T_n) \subset \mathcal{K}(E,F)$ Qui converge vers T dans $L(E,F)$ c'est dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T_n - T\| = 0$ et on montre que $T \in \mathcal{K}(E,F)$.
On a $\overline{T\overline{B_E}(0,1)}$ est compact dans F et comme l'espace F est de Banach donc il est complet et métrique ce qui est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists f_1, f_2, ..., f_{N_\varepsilon} \in F \text{ telles que } \overline{T\overline{B_E}(0,1)} \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B_F(f_i, \varepsilon).$$

Puisque T_{N_ε} est compact, alors $\overline{T_{N_\varepsilon}\overline{B_E}(0,1)}$ est compact. Donc

$$\exists f_1, f_2, ..., f_{N_\varepsilon} \in F \text{ telles que } \overline{T_{N_\varepsilon}\overline{B_E}(0,1)} \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B_F(f_i, \frac{\varepsilon}{2}).$$

On veut $\overline{T\overline{B_E}(0,1)} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N_\varepsilon} B_F(f_i, \varepsilon)$.
On a :
$\|Tx - f_i\| \leq \|Tx - T_{N_\varepsilon}x\| + \|T_{N_\varepsilon}x - f_i\| \leq \|T - T_{N_\varepsilon}\|\|x\| + \|T_{N_\varepsilon}x - f_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|x\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Car $\|x\| \leq 1$.

□

Proposition 7.2

Soient E et F deux espaces de Banach et soit $T \in L(E,F)$.
Les deux assertions suivantes sont équivalentes.
1) $T \in \mathcal{K}(E,F)$.
2) Pour tout sous-ensemble borné M de E, l'ensemble $T(M)$ est relativement compact

de F.

Démonstration.

$2) \Longrightarrow 1)$ est claire car on prend $M = \overline{B}_E(0,1)$.
- Montrons $1) \Longrightarrow 2)$.
Comme M est borné alors,

$$\exists c > 0 \text{ tel que : } M \subset \overline{B}_E(0,c) = c\overline{B}_E(0,c),$$

car $\overline{B}_E(0,c)$ est convexe.
Donc,

$$T(M) \subset cT\overline{B}_E(0,1),$$

car T est linéaire.
Comme $T\overline{B}_E(0,1)$ est relativement compacte alors $cT\overline{B}_E(0,1)$ l'est. Et par conséquent $T(M)$ est relativement compact.

□

Proposition 7.3

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $T \in L(E,F)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :
i) T est compact.
ii) Pour tout $M \subset E$ borné, $T(M)$ est compact.
iii) Toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence.

Démonstration.

1. Montrons que i)$\Longrightarrow$ ii).
Soit $M \subset E$ borné.
Alors,

$$\exists r > 0 \text{ tel que} M \subset r.\overline{B}_E(0,1).$$

D'où,

$$\overline{T(M)} \subset r\overline{T\bar{B}_E(0,1)}.$$

Ainsi, $T(M)$ est compact, comme fermé dans le compact $r.\overline{T\bar{B}_E(0,1)}$.
2. Montrons que ii) $\Longrightarrow$ iii).
Il suffit de poser $M = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.
3. Montrons que iii) $\Longrightarrow$ i).
Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\overline{T\bar{B}_E(0,1)}$.
On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists z_n \in T(B_E(0,1)) \text{ tel que :} \|y_n - z_n\|_F \leq \frac{1}{2^n}.$$

Comme d'après l'hypothèse, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence, alors il en est de même pour $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

□

Lemme 7.1.

Soit (E,d) un espace métrique complet et soit M un sous ensemble de E. Si M est fermé de E, alors M est compact si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $y_1, y_2, ..., y_{N_\varepsilon} \in E$ tels que $M \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B_E(y_i, \varepsilon)$. Où $B_E(y_i,\varepsilon) = \{x \in E : d(x,y_i) < \varepsilon\}$.

Proposition 7.4

(Caractérisation des opérateurs compacts)

Si $T \in L(E,F)$, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :
1) $T \in \mathcal{K}(E,F)$.
2) Pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, la suite $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans F.

Théorème 7.3

Si E ou F est de dimension finie, alors $\mathcal{K}(E,F) = L(E,F)$

Démonstration.

Si $\dim(E) < +\infty$, alors $\bar{B}_E(0,1)$ est compacte d'après le théorème de Riesz. Donc $T\bar{B}_E(0,1)$ est compacte pour tout $T \in L(E,F)$ (car T est continu).
Si $\dim(F) < +\infty$, alors $T\bar{B}_E(0,1)$ est bornée, donc elle est relativement compacte car $\dim(F) < +\infty$. □

Exemple 7.3.

1) Toute forme linéaire continue $T \in E'$ c'est à dire $T : E \to \mathbb{K}$ est compacte, car $\dim(\mathbb{K}) = 1$.
2) Les opérateurs intégraux sont des opérateurs compacts.

Définition 7.2. (**Opérateur de rang fini**)

Soit $T \in L(E,F)$. On dit que l'opérateur T est de rang fini si et seulement si $T(E)$ est de dimension finie, c'est à dire que $\dim T(E) < +\infty$.

Exemple 7.4.

On considère l'espace $E = L^2(]0,1[,\mathbb{R})$ et soit l'opérateur $T : E \to E$ défini par :

$$\text{Pour tout } \ f \in E : Tf(x) = \int_0^1 xy(1-xy)f(y)dy, \ \forall x \in]0,1[.$$

> *On a T est à valeurs dans l'espace $\mathbb{R}_2[X]$= l'espace des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2.*
> *On sait que $\dim(\mathbb{R}_2[X]) < +\infty$, alors T est de rang fini.*

Proposition 7.5

Tout opérateur borné de rang fini est compact.

Démonstration.

Soit $T \in L(E,F)$ un opérateur de rang fini.
Comme T est continu, alors

$$\forall x \in \bar{B}_E(0,1) : \|Tx\| \leq \|T\|.$$

Alors $T\bar{B}_E(0,1)$ est borné dans F et par conséquent $\overline{T\bar{B}_E(0,1)}$ aussi.
De plus $Im(T)$ est fermée car est un sous-espace vectoriel de dimension finie.
Donc,

$$\overline{T\bar{B}_E(0,1)} \subset \overline{Im(T)} = Im(T).$$

Finalement $\overline{T\bar{B}_E(0,1)}$ est fermé borné de $Im(T)$, donc il est compact de $Im(T)$.
D'où $T \in \mathcal{K}(E,F)$. □

Remarque 7.2.

Si $T(E)$ est de dimension finie, alors l'opérateur T est compact.

Corollaire 7.1.

On considère la suite d'opérateurs $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $T_n \in L(E,F)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $T_n(E)$ est de dimension finie (c'est à dire que T_n est compact) pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $T_n \to T$ lorsque $n \to +\infty$ (c'est à dire que $\|T_n - T\| \to 0$ lorsque $n \to +\infty$). Alors T est compact.

Remarque 7.3.

On a la réciproque, pour un espace de Hilbert :

Tout opérateur compact est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.

Proposition 7.6

Soit $T \in \mathcal{K}(E,F)$. Alors $Im(T)$ est fermée si et seulement si T est de rang fini.

Démonstration.

i) $\Leftarrow$) Supposons que T est de rang fini. Donc $Im(T)$ est de dimension finie et alors il est évident que $Im(T)$ est fermé.
ii)$\Longrightarrow$). La preuve de cette implication repose sur le théorème de l'application ouverte.
Supposons que $Im(T)$ est fermé dans l'espace de Banach F, alors $Im(T)$ est de Banach.
D'autre part T est continu et surjectif de E dans $Im(T)$. Donc d'après le le théorème de l'application ouverte on conclut que T est ouvert.
Comme la boule unité fermée $B_E(0,1)$ est un voisinage de 0 dans E et T ouvert, alors $TB_E(0,1)$ est un voisinage de $T(0)=0$ dans $Im(T)$. Alors il existe $r>0$ tel que

$$B_{Im(T)}(0,r)=\{z\in Im(T):\|z\|<r\}\subset TB_E(0,1).$$

On a $\overline{B_{Im(T)}(0,r)}^F$ est fermé dans $\overline{TB_E(0,1)}$, donc $\overline{B_{Im(T)}(0,r)}^F$ est compact de F.
De plus, on a

$$\overline{B_{Im(T)}(0,r)}^F\subset\overline{TB_E(0,1)}^F\subset\overline{Im(T)}^F=Im(T).$$

Donc $\overline{B_{Im(T)}(0,r)}$ est compact de $Im(T)$.
On en déduit que la boule unité de $Im(T)$ est un compact de $Im(T)$, ce qui prouve d'après le théorème de Riesz que $\dim(Im(T))<+\infty$. Par conséquent T est de rang fini. □

Proposition 7.7

Soient E,F et G des espaces de Banach et soient $T\in L(E,F)$ et $S\in L(F,G)$.
Si $T\in\mathcal{K}(E,F)$ ou $S\in\mathcal{K}(F,G)$, alors $S\circ T\in\mathcal{K}(E,G)$.

Démonstration.

Si T est compact, alors pour tout sous-ensemble borné M de E, $\overline{T(M)}$ est compact.
Or l'image d'un compact par une application continue est compacte, donc $S(\overline{T(M)})$ est compact. Il en résulte que $S\circ T(M)\subset S(\overline{T(M)})$ est relativement compacte.
Si S est compact, alors pour tout sous-ensemble borné M de E, on a $T(M)$ est borné aussi et donc $S\circ T(M)$ est relativement compacte. □

Corollaire 7.2.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. Alors l'opérateur identité Id de E n'est pas compact. Plus généralement, tout isomorphisme $T:E\to E$ n'est pas compact.

Démonstration.

1) Montrons que $Id:E\to E$ n'est pas compact.
On a $\overline{Id\bar{B}_E(0,1)}=\bar{B}_E(0,1)$ qui ne peut pas être compacte car $\dim(E)=+\infty$.
2) Soit $T:E\to E$ un isomorphisme. Supposons que T est compact, alors en vertu de la proposition 7.7 $Id=T^{-1}\circ T$ est compact ce qui est impossible car Id n'est pas compact dans le cas où $\dim(E)=+\infty$. □

Définition 7.3. (Opérateur de Hilbert-Schmidt)

Soit H un espace de Hilbert séparable. Un opérateur $T \in L(H)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt s'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 < +\infty.$$

Le réel $\|T\|_{HS} = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$ est appelé la norme de Hilbert-Schmidt de l'opérateur T.

Proposition 7.8

Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact.

Démonstration.

Soit H un espace de Hilbert et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H et soit T un opérateur de Hilbert-Schmidt.
On pose $C = \sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2$.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors,

$$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \sum_{n>N_\varepsilon}^{+\infty} \|Te_n\|^2 \leq \varepsilon^2.$$

On pose $F_\varepsilon = Vect\{e_0, e_1, ..., e_{N_\varepsilon}\}$ et $P_\varepsilon : H \to H$ la projection orthogonale sur F_ε. Alors $T_\varepsilon = P_\varepsilon \circ T$ est de rang fini et,

$$\|T - T_\varepsilon\|^2 \leq \|T - T_\varepsilon\|_{HS}^2 = \sum_{n>N_\varepsilon}^{+\infty} \|Te_n\|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Ainsi T est limite d'opérateurs de rang fini, il est donc compact. □

7.1.1 Convergence faible et les opérateurs compacts

Lemme 7.2.

Soit E un espace de Banach et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E qui converge faiblement vers x i.e $(x_n \rightharpoonup x)$ et $\{x_n\}$ est compact. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers x (c'est à dire $x_n \to x$).

Démonstration.

Montrons par l'absurde.
Supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers x ce qui est équivalent à :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N : \|x_n - x\| \geq \varepsilon.$$

Donc,

$$\exists \varepsilon > 0, \exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} : \|x_{n_k} - x\| \geq \varepsilon.$$

Comme $\{x_n\}$ est compact et l'espace E est métrique , alors il existe une sous-suite $(x_{n_{k_l}})$ convergente vers y.
D'autre part, on sait que la convergence forte implique la convergence faible toujours, et on sait aussi que la topologie faible est séparée, donc on conclut que $x = y$.
Alors la suite $(x_{n_{k_l}})$ converge fortement vers x ce qui contredit l'hypothèse. □

Théorème 7.4

Soient E et F deux espaces de Banach et soit $T \in L(E, F)$. On a :

$$T \text{ est compact } \Longrightarrow \Big(x_n \rightharpoonup x \Longrightarrow Tx_n \to Tx\Big).$$

Remarque 7.4.

la réciproque n'est pas vraie sauf si E est réflexif.

Démonstration. (du théorème 7.4)

Comme $x_n \rightharpoonup x$ alors $\{(x_n\}$ est bornée.
Puisque T est compact, alors $\{(Tx_n\}$ est compact car $\{(x_n\}$ est bornée.
On sait que la continuité par rapport à la topologie forte est équivalente à la continuité par rapport à la topologie faible. Donc

$$x_n \overset{\sigma(E,E')}{\rightharpoonup} x \Longrightarrow Tx_n \overset{\sigma(F,F')}{\rightharpoonup} Tx$$

Utilisons le lemme 7.2 pour l'espace F, on conclut que $Tx_n \to Tx$. □

7.1.2 Adjoint d'un opérateur dans les espaces de Hilbert

Définition 7.4.

Soient E et F deux espaces de Banach. On appelle opérateur linéaire non borné de E dans F toute application linéaire $T : D(T) \subset E \to F$ définie sur un sous-espace vectoriel $D(T) \subset E$, à valeurs dans F. On appelle $D(T)$ le domaine de l'opérateur T.
On dit que T est borné s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que :

$$\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E, \ \forall x \in D(T).$$

Remarque 7.5.

Dans la pratique, la plupart des opérateurs non bornés que l'on rencontrera sont fermés et à domaine dense dans E, c'est dire que $\overline{D(T)} = E$).

Notations :
$(E, \|.\|)$ un espace de Banach.
$(E', \|.\|)$ le dual topologique de E.
$\langle ., . \rangle$ le crochet de dualité.
Pour $x \in E$ et $f \in E'$, on a $f(x) = \langle f, x \rangle \in \mathbb{C}$

Définition 7.5. (Adjoint d'un opérateur)

Soit $T : D(T) \subset E \to F$ un opérateur non borné à domaine dense (i.e $\overline{D(T)} = E$).
On définit un opérateur non borné $T^* : D(T^*) \subset F' \to E'$ comme suit :
$D(T^*) = \Big\{ y \in F'; x \longmapsto \langle y, Tx \rangle$ est continue sur $D(T)$ i.e $\exists C > 0$ tel que $|\langle y, Tx \rangle| \leq C\|x\|, \ \forall x \in D(T) \Big\}$

Il est clair que $D(T^*)$ est un sous-espace vectoriel de F' car $0 \in D(T^*)$.
On définit $T^*(y)$ pour $y \in D(T^*)$.
Soit $y \in D(T^*)$. On considère l'application $l_y : D(T) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$l_y(x) = \langle y, Tx \rangle \ \forall x \in D(T).$$

On a :

$$|l_y(x)| \leq C\|x\|, \ \forall x \in D(T).$$

Comme $D(T)$ est dense dans E, alors d'après le théorème de prolongement, l_y se prolonge de façon unique en une application linéaire continue $\widetilde{l_y} : E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\langle \widetilde{l_y}, x \rangle = \langle y, Tx \rangle, \ \forall x \in D(T),$$

et on a :

$$|\widetilde{l_y}(x)| \leq C\|x\|, \ \forall x \in E.$$

Par suite $l_y \in E', \widetilde{l_y} \in E'$
On définit aussi un opérateur $T^* : E' \to E'$ par :

$$T^* y = \widetilde{l_y},$$

de domaine $D(T^*)$.
Il est clair que T^* est linéaire.
L'opérateur :

$$T^* : D(T^*) \subset F' \to E',$$

s'appelle l'adjoint de T.
Par conséquent on a la relation fondamentale entre T et T^* suivante :

$$\langle y, Tx \rangle_{F',F} = \langle T^* y, x \rangle_{E',E}, \ \forall x \in D(T), \ \forall y \in D(T^*).$$

Proposition 7.9

Soit $T : D(T) \subset E \to F$ un opérateur non borné à domaine dense. Alors T^* est fermé, c'est à dire que $G(T^*)$ est fermé dans $F' \times E'$.

Démonstration.

Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $D(T^*)$ telle que $y_n \to y$ dans F' et $T^*y \to z$ dans E'. On montre que $y \in D(T^*)$ et $T^*y = z$.
On a :

$$\langle y_n, Tx\rangle = \langle T^*y_n, x\rangle,\ \forall x \in D(T). \tag{7.1}$$

On passe à la limite dans (7.1), on obtient :

$$\langle y, Tx\rangle = \langle z, x\rangle,\ \forall x \in D(T).$$

Par conséquent, en vertu de la définition de $D(T^*)$, on a :

$$y \in D(T^*) \text{ et } T^* = z.$$

Donc T^* est fermé.

□

Proposition 7.10

Soient E, F deux espaces de Banach et soit $T \in L(E,F)$ et T est fermé. Alors on a :
1) $\ker(T) = \Big(Im(T^*)\Big)^{\perp}$, $\ker T^* = \Big(Im(T)\Big)^{\perp}$.
2) $\overline{Im(T^*)} \subset \Big(\ker(T)\Big)^{\perp}$, $\overline{Im(T)} = \Big(\ker(T^*)\Big)^{\perp}$.
3) $Im(T)$ est fermée $\Leftrightarrow$ $Im(T^*)$ est fermée $\Leftrightarrow$ $Im(T) = \Big(\ker(T^*)\Big)^{\perp} \Leftrightarrow Im(T^*) = \big(\ker(T)\big)^{\perp}$.

Cas d'un espace de Hilbert :
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $(.,.)$ et soit $T : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un opérateur linéaire non borné défini sur $\mathcal{H}$.
On suppose que $D(T)$ est dense dans $\mathcal{H}$. On a

$$D(T^*) = \Big\{z \in \mathcal{H} :\ \text{l'application } x \longmapsto \langle Tx, z\rangle \ \text{ est linéaire continue sur } D(T)\Big\}.$$

Comme l'application $x \longmapsto \langle Tx, z\rangle$ est linéaire continue sur $D(T)$ et $D(T)$ est dense dans $\mathcal{H}$, alors elle se prolonge de façon unique en une application linéaire continue $l_z : \big(\mathcal{H}, (.,.)\big) \to \mathbb{C}$.
D'après le théorème de représentation de Riesz il existe $y \in \mathcal{H}$ unique tel que :

$$l_z(x) = (x, y),\ \forall x \in \mathcal{H}.$$

Donc

$$\langle Tx, z\rangle = (x, y),\ \ \forall x \in D(T),\ \forall z \in D(T^*).$$

On a défini donc un opérateur T^* de domaine $D(T^*)$ par

$$T^*z = y.$$

On a donc

$$\langle Tx, z\rangle = \langle x, T^*z\rangle,\ \ \forall x \in D(T),\ \forall z \in D(T^*).$$

Définition 7.6.

L'application $T^* : H_2 \to H_1$ définie par :

$$\forall x \in H_1, \forall y \in H_2 : (Tx, y)_2 = (x, T^*y)_1,$$

s'appelle l'adjoint de T.

Définition 7.7.

On dit qu'un opérateur $T \in L(H)$ est auto-adjoint si $T = T^*$, c'est à dire

$$(Tx, y) = (x, Ty), \quad \forall x, y \in H.$$

Proposition 7.11

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert munis des deux produits scalaires $(.,.)_1$ et $(.,.)_2$ successivement et les normes induites $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ et soit $T \in L(H_1, H_2)$. Alors,

$$\forall y \in H_2, \text{ il existe un unique } z \in H_1 \text{ tel que } \forall x \in H_1 : (Tx, y)_2 = (x, z)_1.$$

On note

$$z = T^*y$$

Démonstration.

Soit $y \in H_2$. On définit l'application $l_y : H_1 \to \mathbb{K}$ par

$$l_y(x) = (Tx, y)_2.$$

- Montrons que l_y est une forme linéaire continue. Il est clair que l_y est linéaire.
Montrons que l_y est continue sur H_1.
Soit $x \in H_1$. On a

$$|l_y(x)| = |(Tx, y)| \leq \|T\| \, \|y\|_2 \, \|x\|_1 \text{ pour tout } \; x \in H_1.$$

(On a utilisé l'inégalité de Cauchy Schwartz et le fait que T est continu).
Ce qui signifie que l_y est une forme linéaire continue sur H_1, c'est à dire que $l_y \in H_1'$.
Donc en vertu du théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $z \in H_1$ tel que

$$l_y(x) = (x, z)_1, \; \forall x \in H_1.$$

C'est à dire que,

$$(Tx, y)_2 = (x, z)_1.$$

□

Proposition 7.12

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert munis des deux produits scalaires $(.,.)_1$ et $(.,.)_2$

successivement et les normes induites $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ et soit $T \in L(H_1, H_2)$. Alors

$$T^* \in L(H_2, H_1) \text{ et } \|T^*\| = \|T\|.$$

Démonstration.

i) Montrons que $T^* : H_2 \to H_1$ est linéaire.
Soient $y_1, y_2 \in H_2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
Pour $x \in H_1$, on a :
$(x, T^*(y_1 + \alpha y_2))_1 = (Tx, y_1 + \alpha y_2)_2 = (Tx, y_1)_2 + \bar{\alpha}(Tx, y_2)_2 = (x, T^*y_1)_1 + \bar{\alpha}(x, T^*y_2)_1 = (x, T^*y_1 + \alpha T^*y_2)_1$.
D'où,

$$T^*(y_1 + \alpha y_2) = T^*y_1 + \alpha T^*y_2.$$

Alors T^* est linéaire.
Montrons que T^* est continu.
Soit $y \in H_2$.
On a :

$$\|T^*y\|_1^2 = (T^*x, T^*x)_{H_1} = (y, TT^*y)_{H_2}. \tag{7.2}$$

Utilisons l'inégalité de Cauchy Schwarz dans (7.2), on obtient :

$$\|T^*y\|_1^2 = (y, TT^*y)_{H_2} \leq \|y\|_2 \, \|T\| \, \|T^*y\|_1.$$

D'où,

$$\|T^*y\|_1 \leq \|y\|_2 \, \|T\|.$$

Ce qui signifie que $T^* \in L(H_2, H_1)$ et on a :

$$\|T^*\| \leq \|T\|. \tag{7.3}$$

Montrons que $\|T^*\| = \|T\|$.
Soit $x \in H_1$. On a :

$$\|Tx\|_2^2 = (Tx, Tx)_2 = (x, T^*Tx)_1 \leq \|x\|_1 \, \|T^*\| \, \|Tx\|.$$

Donc,

$$\|Tx\|_2 \leq \|T^*\| \, \|x\|_1.$$

D'où,

$$\|T\| \leq \|T^*\|. \tag{7.4}$$

En vertu de (7.3) et (7.4), on conclut que

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

□

Proposition 7.13

Soient $T, S \in L(H_1, H_2)$ et $Q \in L(H_2, H)$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On a
1) $(Id_H)^* = Id_H$.
2) $T^{**} = T$.
3) $(\alpha T + \beta S)^* = \bar{\alpha}T^* + \bar{\beta}S^*$.
4) $QT \in L(H_1, H)$ et $(QT)^* = T^*Q^*$.
5) $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$.

Démonstration.
La démonstration est facile, elle découle de la définition 7.6. □

Théorème 7.5

Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert et soit $T \in L(H_1, H_2)$.
On a :

$$T \text{ est inversible} \iff T^* \text{ est inversible,}$$

et on a :

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

Démonstration.

i) Montrons $\Longrightarrow$).
Supposons que T est inversible et montrons que T^* est inversible.
D'après la proposition 7.13 on a :

$$(T^{-1})^* T^* = (TT^{-1})^* = Id_{H_2},$$

et

$$T^*(T^{-1})^* = (T^{-1}T)^* = Id_{H_1}.$$

Donc $T^* \in L(H_2, H_1)$ est inversible et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.
ii) Montrons $\Longleftarrow$).
Supposons que $T^* \in L(H_2, H_1)$ est inversible et montrons que T est inversible.
D'après $i)$, on a $(T^*)^* \in L(H_1, H_2)$ est inversible.
Or d'après la proposition 7.13, on a $T^{**} = T$. Donc T est inversible. □

Définition 7.8.

Un opérateur $T \in L(H_1, H_2)$ est dit unitaire si

$$TT^* = Id_{H_2} \text{ et } T^*T = Id_{H_1}.$$

Définition 7.9.

Un opérateur $T \in L(E)$ est dit normal s'il commute avec son adjoint, c'est à dire si $TT^* = T^*T$.

Dans la suite, on considère un espace de Hilbert H et l'opérateur $T \in L(H)$. D'après l'identification de H avec H', on peut considérer que l'adjoint T^* de T est aussi dans $L(H)$.

7.2 Alternative de Fredholm

Le théorème de Fredholm permet, entre autre, de montrer l'existence et l'unicité des équations aux dérivées partielles de type elliptique ne vérifiant pas la condition de coercivité.

Définition 7.10.

Soit E un espace de Banach et $T \in L(E)$.
- On dit que T est un opérateur de Fredholm si les trois conditions suivantes sont satisfaites
1) $Im(T)$ est fermée.
2) $\ker(T)$ est de dimension finie.
3) $Im(T)$ est de codimension finie. (ce qui est équivalent à dire $\dim\big(\ker(T^*)\big) < +\infty$).
On note

$$Ind(T) = \dim(\ker(T)) - codim(Im(T)) = \dim(\ker(T)) - \dim\big(\ker(T^*)\big).$$

Le nombre entier $Ind(T)$ s'appelle l'indice de T.
- On dit que T est un opérateur semi-Fredholm si
1) $Im(T)$ est fermée.
2) $\ker(T)$ est de dimension finie.

Exemple 7.5.

Si T est un opérateur compact sur E, alors $I + T$ est un opérateur de Fredholm et $Ind(I + T) = 0$.

Définition 7.11.

Soit E, F deux espaces de Banach et soit $T \in L(E, F)$.
L'opérateur T est dit semi-Fredholm si
1) La dimension de $\ker(T)$ est finie.
2) L'image de T est fermée.
On note $S\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm de E dans F.

Remarque 7.6.

Le fait que $\ker(T)$ est de dimension finie implique qu'il existe un sous-espace M fermé M de E tel que $E = \ker(T) \oplus M$ (voir **[6]** page 38). De plus $Im(T) = T(M)$ est un espace de Banach muni de la norme $\| \, . \, \|_F$.

Théorème 7.6

Soit $T \in L(E, F)$ et supposons que $\ker(T)$ est de dimension finie. Alors on a $T \in S\mathcal{F}(E, F)$ si et seulement si

$$\exists C > 0, \forall x \in M : \| Tx \|_F \geq \| x \|_E \, . \tag{7.5}$$

Démonstration.

i) Supposons que (7.5) est satisfaite et montrons que $T \in S\mathcal{F}(E,F)$.
On a (7.5) implique que $Im(T)$ est fermée. En effet, soit $(y_n) = (Tx_n)$ telle que $y_n \longrightarrow y$ dans F.
Soit (u_n) et (v_n) telles que $x_n = u_n + v_n$ avec $(u_n) \subset M$ et $(v_n) \subset \ker(T)$. Ainsi $y_n = Tu_n$.
Comme la suite (y_n) est de Cauchy car elle est convergente, donc la suite (u_n) est de Cauchy. En effet,

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \text{ on a } \| u_n - u_m \| \leq \frac{1}{C} \| y_n - y_m \|_F .$$

Donc la suite (u_n) est convergente. On pose $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = u$.
On a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} Tu_n = Tu$. D'où $y = Tu$.
ii) Réciproquement.
Supposons que $T \in S\mathcal{F}(E,F)$ et montrons que (7.5) est satisfaite.
On a $Im(T)$ est un espace de Banach et $S = T\,|_M : M \longrightarrow Im(T)$ est bijective, donc d'après le théorème des isomorphismes de Banach on conclut que S^{-1} est continue. Ce qui entraîne que (7.5) a lieu. □

Théorème 7.7

(Alternative de de Fredholm [1866-1927])
Soit E un espace de Banach et soit T un opérateur compact de E dans lui même i.e $T \in \mathcal{K}(E)$. Alors
1) $\ker(I-T)$ est de dimension finie.
2)$Im(I-T)$ est fermée et $Im(I-T) = \Big(\ker(I-T^*)\Big)^{\perp}$.
3) L'opérateur $I-T$ est injectif si et seulement s'il est surjectif, c'est à dire $Im(I-T) = E \Leftrightarrow \ker(I-T) = \{0\}$.
4) $\dim\ker(I-T) = \dim\ker(I-T^*)$.

Remarque 7.7.

1) On emploie ce résultat dans le cas d'un opérateur de la forme $\lambda I - T$ où T est un opérateur compact et $\lambda \neq 0$ pour exprimer que deux cas, et deux seulement peuvent se présenter :
- Ou l'équation homogène $(\lambda I - T)u = 0$ n'admet que la solution nulle, et alors l'équation $(\lambda I - T)u = f$ admet une solution unique pour tout f .
- Ou l'équation $(\lambda I - T)u = 0$ admet un nombre fini n de solutions linéairement indépendantes et alors l'équation $(\lambda I - T)u = f$ admet des solutions si et seulement si f vérifie n relations linéairement indépendantes (n conditions d'orthogonalités), auquel cas l'équation $(\lambda I - T)u = f$ admet n solutions.
2) Le même résultat est vrai pour l'opérateur $I - T$ puisque $\dfrac{T}{\lambda}$ est compact.

Démonstration. (du théorème 7.7)

1) Montrons que $\dim(I-T) < +\infty$.
Pour faciliter l'écriture, on pose $M = \ker(I-T)$.
On a la boule unité fermée de M vérifie $B_M \subset T(B_M)$ et on a :

$$B_{K_0} \subset T(B_M) \subset T(B_E).$$

Donc B_M est compacte, et en vertu du théorème de Riesz on en déduit que $\dim(M) < +\infty$, c'est à dire que $\dim(I-T) < +\infty$.
2) Montrons que : $Im(I-T)$ est fermée.
En vertu de la proposition 7.10, pour montrer que $Im(I-T) = \ker(I-T^*)^{\perp}$.
Il suffit de montrer que $Im(I-T)$ est fermée.
Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Im(I-T)$ une suite convergente vers y et montrons que $y \in Im(I-T)$.
Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $y_n = x_n - Tx_n$.
On pose,

$$d_n = d\Big(x_n, \ker(I-T)\Big).$$

Tout d'abord, on montre d'abord que la suite (d_n) est bornée.
Montrons par l'absurde, c'est à dire on suppose qu'il existe une sous-suite qu'on la note toujours $(d_n))_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $d_n \to +\infty$.
Comme $\dim\ker(I-T) < +\infty$, alors il existe une suite $x'_n \subset \ker(I-T)$ telle que :

$$d_n = \|x_n - x'_n\|_E.$$

Posons $z_n = \dfrac{x_n - x'_n}{d_n}$.
Donc on a :

$$d\Big(z_n, \ker(I-T)\Big) = \frac{1}{d_n} d\Big(x_n, \ker(I-T)\Big) = 1,$$

et $z_n - Tz_n = \dfrac{y_n}{d_n} \to 0$.
Comme T est compact, quitte à extraire à nouveau une sous-suite il existe z tel que $Tz_n \to z$, et donc comme $z_n - Tz_n \to 0$, on a $z_n \to z$.
Mais alors,

$$z \in \ker(I-T) \text{ et } d\Big(z, \ker(I-T)\Big) = 1.$$

Ce qui est absurde.
la suite (d_n) est donc bornée, et comme T est compact, il existe alors x tel que

$$T(x_n - x'_n) \to x \text{ et } x_n - x'_n \to y + x,$$

Comme $y_n = x_n - x'_n - T(x_n - x'_n)$, alors on a :

$$y = (y+x) - T(y+x) \in Im(I-T).$$

Ce qui montre que $Im(I-T)$ est fermée.
Par conséquent, on conclut d'après la proposition 7.10 que,

$$Im(I-T) = \ker(I-T^*)^{\perp}.$$

3) Montrons que :
$I-T$ est injectif $\Longleftrightarrow Im(I-T) = E \Leftrightarrow \ker(I-T) = \{0\}$.
Montrons Le premier sens $\Longrightarrow$), c'est à dire on suppose que
que $I-T$ est injectif et $I-T$ n'est pas surjectif.
Soit la suite $E_n = (I-T)^n(E)$.
Comme $I-T$ n'est pas surjectif, alors $E_1 \subsetneq E$ est un sous-espace de E.
Par ailleurs E_1 est stable par T.
De même on montre que $E_2 \subsetneq E_1$ est un sous-espace de E_1, car $I-T$ est injectif et pas surjectif, et par récurrence on obtient que E_{n+1} est un sous-espace de E_n et l'inclusion est stricte car $I-T$ est injectif et pas surjectif.
Par conséquent, d'après la propriété 2) de ce théorème 7.7, comme la restriction $T\,|_{E_n}$ est un

opérateur compact de E_n, alors l'image E_{n+1} de $(I-T)\mid_{E_n}$ est fermée.
la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite strictement croissante de sous-espaces fermés. Et d'après le lemme 7.3, il existe donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$x_n \in E_n,\ \|x_n\| = 1 \text{ et } d(x_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Soient alors n et m tels que $n > m$, on a :

$$T(x_n - x_m) = \Big((x_m - Tx_m) - (x_n - Tx_n) + x_n\Big) - x_m,$$

et comme

$$(x_m - Tx_m) - (x_n - Tx_n) + x_n \in E_{m+1},$$

alors il vient que,

$$\|T(x_n - x_m)\|_E \geq \frac{1}{2}.$$

Ce qui montre que la suite $\Big(T(x_n - x_m)\Big)$ n'est pas de Cauchy, donc n'est pas convergente.
Comme (x_n) est bornée et T est compact alors on a une contradiction.
Finalement on a $I-T$ est surjectif.
Deuxième sens $\Longleftarrow$). Supposons que $I-T$ est surjectif c'est à dire que $Im(I-T) = E$ et montrons que $I-T$ est injectif.
Ce sens s'obtient, en appliquant le même raisonnement précédent à T^*, en utilisant les résultats de la proposition 7.10.
4) Montrons que $\dim\ker(I-T) = \dim\ker(I-T^*)$.
Pour cela on pose $d_1 = \dim\big(\ker(I-T)\big)$ et $d_2 = \dim\big(\ker(I-T^*)\big)$.

Remarque 7.8.

On commence par remarquer que si $\dim(E) = d_1$, alors $Im(I-T) = \{0\}$.
Donc,
$\ker(I-T^*) = \{0\}$ et le résultat est vrai.

i) Montrons que $d_1 \geqslant d_2$.
Montrons par l'absurde, c'est à dire qu'on suppose $d < d^*$.
Comme $\dim\big(\ker(I-T)\big) < +\infty$, alors $\ker(I-T)$ admet un supplémentaire topologique dans E. En effet :
Soit l'application :

$$\varphi_i : \ker(I-T) \longrightarrow (e_i),$$

telle que

$$\varphi_i(x) = x_i,$$

où (e_i) est la base de $\ker(I-T)$.
En vertu du théorème de Hahn-Banach forme analytique, il existe un prolongement de φ_i sur E tout entier.
Donc on peut prendre $\bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}(\{0\})$ comme supplémentaire topologique de $\ker(I-T)$.
Soit le projecteur continu :

$$p : E \longrightarrow \ker(I-T).$$

Comme $Im(I-T) = \ker(I-T^*)$ et de codimension finie d_2, alors il admet un supplémentaire topologique dans E que l'on note F tel que

$$\dim(F) = (d_2)^2.$$

Comme $d_1 < d_2$, alors il existe une application linéaire $f : \ker(I-T) \to F$ qui est injective et non surjective.
On définit maintenant sur l'espace E l'opérateur

$$A = T + f \circ p,$$

($f \circ p$ est de rang fini).
Soit $x \in \ker(I-T)$ alors

$$0 = x - Ax = (x - Tx) - f(px).$$

Donc $x - Tx = 0$ et $px = 0$ car f est injective. Donc $x = 0$.
D'après la propriété 3) de ce théorème 7.7 appliquée à A on a $Im(I-A) = E$.
Ce qui contredit le fait qu' il existe $y \in F \setminus Im(f)$ et pour y quelconque, l'équation $x - Ax = y$ n'admet pas de solution.
Donc

$$d_1 \geq d_2. \tag{7.6}$$

ii) Montrons que $d_1 \leq d_2$.
En appliquant le résultat de i) à T^*, on trouve

$$\dim\Big(\ker(I-T^{**})\Big) \leq \dim\Big(\ker(I-T^*)\Big) \leq \dim\Big(\ker(I-T)\Big).$$

Il est facile de remarquer que $\ker(I-T) \subset \ker(I-T^{**})$.

$$d_1 \leq d_2. \tag{7.7}$$

De (7.6) et (7.7), on conclut que :

$$d_1 = d_2.$$

C'est à dire que

$$\dim\ker(I-T) = \dim\ker(I-T^*).$$

□

7.3 Théorie spectrale d'un opérateur compact

La théorie spectrale d'un opérateur compact est pour l'essentiel de création du mathématicien F. Riesz aux alentours de 1910. Le théorème de Riesz (qui affirme que si E est un espace vectoriel normé, alors $\overline{B}_E(0,1)$ est compacte si et seulement si E est de dimension finie) est l'un des points clés de cette théorie.

Définition 7.12.

Soit E un espace de Banach et soit $T \in L(E)$.
1) On appelle ensemble résolvant de l'opérateur T l'ensemble

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - T \text{ est inversible}\}.$$

Un élément λ de $\rho(T)$ est appelé valeur résolvante de T.
2) L'application

$$R(\cdot, T) : \rho(T) \to L(E),$$

où $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$, $\forall \lambda \in \rho(T)$.
S'appelle la résolvante de l'opérateur T.
3) Le spectre $\sigma(T)$ de l'opérateur T est le complémentaire de l'ensemble résolvant, c'est à dire qu'il est l'ensemble

$$\sigma(T) = \mathbb{K} \backslash \rho(T).$$

Un élément λ de $\sigma(T)$ est appelé valeur spectrale de T.
L'espace $\ker(\lambda I - T)$ est l'espace propre associé à λ.
4) On dit $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de T si $\lambda I - T$ n'est pas injectif, autrement dit l'ensemble des valeurs propres $V_p(T)$ de l'opérateur T est donné par

$$V_p(T) = \Big\{\lambda \in \mathbb{K} : \ker(\lambda I - T) \neq \{0\}\Big\}.$$

Remarque 7.9.

1. $\Big(\ker(\lambda I - T) \neq \{0\}\Big) \Longleftrightarrow \Big(\exists x \in E \setminus \{0\} : x \in \ker(\lambda I - T) : Tx = \lambda x\Big) \Longleftrightarrow \Big(\exists x \in E \setminus \{0\} : Tx = \lambda x\Big)$.
   Dans ce cas x s'appelle le vecteur propre associé à la valeur propre λ.
2. Les définitions ci-dessus restent valables même si l'espace E n'est pas de Banach.
3. On a toujours $V_p(T) \subset \sigma(T)$ et l'ensemble des valeurs propres s'appellent aussi spectre ponctuel noté $\sigma_p(T)$.
   En général l'inclusion est stricte, c'est à dire $V_p(T) \subsetneq \sigma(T)$ (un tel λ appartient au spectre mais n'est pas une valeur propre) sauf bien entendu si $\dim(E) < +\infty$ car alors $\lambda I - T$ est inversible si et seulement si $\ker(\lambda I - T) = \{0\}$. Donc $V_p(T) = \sigma(T)$.
   la situation est plus délicate comme la montre les deux exemples ci-dessous.

Exemple 7.6.

On considère l'espace de Hilbert $H = l^2$ et l'opérateur (shift à droite) $T : l^2 \to l^2$défini par :

$$Tx = (0, x_1, x_2, ...) \text{ où } x = (x_1, x_2, ...) \in l^2.$$

On a $\dim(l^2) = +\infty$. Alors $0 \in \sigma(T)$, mais $0 \notin V_p(T)$.

Exemple 7.7.

Soit $E = C\Big([0,1], \mathbb{K}\Big)$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{K}$ muni de la norme de convergence uniforme $\|f\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} | f(x) |$.
On définit l'opérateur de Volterra T sur E par :

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)\, dt, \ \forall x \in [0,1].$$

On a $\dim(E) = +\infty$.
D'autre part, on a $\ker(T) = \{0\}$ et $Im(T) = \Big\{g \in C^1\big([0,1], \mathbb{K}\big) : g(0) = 0\Big\}$.
T est injectif, donc $0 \notin V_p(T)$, et T est non surjectif, donc $0 \in \sigma(T)$.

Proposition 7.14

Soit E un espace de Banach et $T \in L(E)$.

1. Si $| \lambda | > \|T\|$, alors $\lambda \in \rho(T)$. En particulier on a $\sigma(T) \subset D(0, \|T\|)$.

2. $\rho(T)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{K}$.
3. $\sigma(T)$ est un compact de $\mathbb{K}$.
4. $\overline{V_p(T)} \subset \sigma(T)$.

Démonstration.

1. Supposons que $|\lambda| > \|T\|$. Donc $\lambda \neq 0$ et $\|\lambda^{-1}T\| < 1$. Donc d'après la proposition 1.7 on a $I - \lambda^{-1}T$ est inversible, c'est à dire que $\lambda^{-1}(I\lambda - T)$ est inversible. Ce qui montre que $\lambda \in \rho(T)$.

2. Montrons que $\rho(T)$ est un ouvert de $\mathbb{K}$.
   On a d'après 1), $\rho(T) \neq \varnothing$.
   On considère l'application $\varphi : \mathbb{K} \longrightarrow L(E)$ définie par :

   $$\forall \lambda \in \mathbb{K} : \varphi(\lambda) = \lambda I - T.$$

   Alors

   $$\rho(T) = \varphi^{-1}(\mathcal{G}L(E)),$$

   où $\mathcal{G}L(E)$ est l'ensemble des application linéaires continues et inversibles.
   De plus l'application φ est continue. En effet :

   $$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \|\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)\| = \|(\lambda - \mu)I\| \leq |\lambda - \mu|.$$

   Alors d'après la proposition 1.7 $\mathcal{G}L(E)$ est un ouvert de $L(E)$. Ainsi $\rho(T) = \varphi^{-1}(\mathcal{G}L(E))$ est un ouvert de $\mathbb{K}$.

3. Montrons que $\sigma(T)$ est un compact de $\mathbb{K}$.
   On a d'après 2), $\sigma(T) = \mathbb{K}\backslash\rho(T)$ est fermé, donc en vertu de 1) $\sigma(T)$ est borné, et donc compact.

4. Montrons que : $\overline{V_p(T)} \subset \sigma(T)$.
   Comme $V_p(T) \subset \sigma(T)$ et $\sigma(T)$ est fermé, alors on conclut que

   $$\overline{V_p(T)} \subset \sigma(T).$$

□

Proposition 7.15

(**Identité de la résolvante**)

Soit E un espace de Banach et soient $T \in L(E)$, et $\lambda, \mu \in \rho(T)$. Alors

$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda)R(\lambda, T)R(\mu, T) \tag{7.8}$$

De plus, l'application $\lambda \longmapsto R(\lambda, T)$ est dérivable sur $\rho(T)$ et sa dérivée est donnée par

$$\frac{dR(\lambda, T)}{d\lambda} = -R(\lambda, T)^2. \tag{7.9}$$

Démonstration.

Montrons l'égalité (7.8).
On a $R(\lambda,T)=(\lambda I-T)^{-1}$. Donc,
$R(\lambda,T) = R(\lambda,T)(\mu I-T)R(\mu,T) = R(\lambda,T)\Big[\lambda I-T+(\mu-\lambda)I\Big]R(\mu,T) = \Big[I+(\mu-\lambda)R(\lambda,T)\Big]R(\mu,T) = R(\mu,T)+(\mu-\lambda)R(\lambda,T)R(\mu,T)$.
Montrons l'égalité (7.9).
D'après la proposition 1.7 l'application $T\longmapsto T^{-1}$ est continue sur $\mathcal{G}L(E)$, on en déduit que l'application $\lambda\longmapsto R(\lambda,T)$ est continue. De plus, pour tout $h>0$, on a :

$$\frac{1}{h}(R(\lambda+h,T)-R(\lambda,T))=-R(\lambda,T)R(\lambda+h,T).$$

Alors la continuité de l'application $\lambda\longmapsto R(\lambda,T)$ entraîne sa dérivabilité et donc on a l'égalité (7.9).

□

Définition 7.13. (Rayon spectral)

Soit $T\in L(E)$. On définit le rayon spectral de l'opérateur T noté $r(T)$ par

$$r(T)=\sup\{|\lambda| : \lambda\in\sigma(T)\},$$

et on a toujours $r(T)\leq\|T\|$.
Si $\sigma(T)=\varnothing$, alors par convention, on pose $r(T)=0$.

Remarque 7.10.

1) On a $r(T)\in[0,\|T\|\,]$.
La définition est plus précise : $\overline{D(0,r(T))}$ est le plus petit disque fermé centré en 0 contenant $\sigma(T)$.
2) En particulier, $\rho(T)$ contient la couronne ouverte $\mathbb{K}\backslash\overline{D(0,r(T))}$ et l'application $\lambda\longmapsto R(\lambda,T)$ est définie et dérivable sur cette couronne.

Proposition 7.16

Soit $T\in L(E)$. Alors la suite $\left(\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente dans $\mathbb{R}_+$ et on a

$$\lim_{n\to+\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}=\inf_{n\geq1}\|T^n\|\leq\|T\|.$$

Notation : $r(T)=\lim\limits_{n\to+\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Démonstration.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$0\leq\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\leq\|T\|.$$

Donc les limites suivantes $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$, $\underline{\lim_{n\to+\infty}}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}, l=\inf_{k\geq 1}\|T^k\|^{\frac{1}{k}}$ sont des réels positifs.
Soit $\varepsilon>0$ fixé, il existe $q\in\mathbb{N}^*$ tel que $\|T^q\|^{\frac{1}{q}}\leq l+\varepsilon$.
Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la division euclidienne de n par q assume qu'il existe $(b_n,r_n)\in\mathbb{N}^*)^2$ tel que $n=b_nq+r_n$, avec $0\leq r_n<q$.
Supposons que $\|T\|\neq 0$, alors on obtient :

$$\|T^n\|^{\frac{1}{n}}=\|T^{b_nq+r_n}\|^{\frac{1}{n}}\leq\|T^q\|^{\frac{b_n}{n}}\|T^{\frac{r_n}{n}}\leq(l+\varepsilon)^{\frac{qb_n}{n}}\|T\|^{\frac{r_n}{n}}.$$

On aura :

$$\lim_{n\to+\infty}(l+\varepsilon)^{\frac{b_nq}{n}}\|T\|^{\frac{r_n}{n}}.$$

Comme $0\leq r_n<q$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{r_n}{n}=0,\text{ et }\frac{qb_n}{n}=1-\frac{r_n}{n}.$$

D'où

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\leq l+\varepsilon. \tag{7.10}$$

En vertu de (7.10), on conclut que

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\leq l.$$

D'autre part, on a

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\geq\underline{\lim_{n\to+\infty}}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}=\underrightarrow{\lim_{n\to+\infty}}\inf_{k\geq n}\|T^k\|^{\frac{1}{k}}\geq l,$$

car $\inf_{k\geq n}\|T^k\|^{\frac{1}{k}}\geq\inf_{k\geq 1}\|T^k\|^{\frac{1}{k}}=l$.
Enfin, on obtient :

$$l=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}=\underline{\lim_{n\to+\infty}}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\|T\|^{\frac{1}{n}}.$$

□

Lemme 7.3.

Soit E un espace vectoriel normé et $F\subsetneq E$ un sous-espace fermé de E. Alors on a

$$\forall\varepsilon>0,\exists u\in E:\|u\|=1\text{ et }d(u,F)\geq\frac{1}{\varepsilon+1}.$$

Si $\dim(E)<\varepsilon$, on peut prendre $\varepsilon=0$.

Démonstration.

On choisit $v\notin F$.
Comme $\overline{F}=F$, alors $d=d(v,F)>0$. Donc il existe $w\in F$ tel que :

$$\|v-w\|<(1+\varepsilon)d.$$

On pose $u=\dfrac{v-w}{\|v-w\|}$. Alors

$$\forall z\in F:\|u-z\|=\frac{\|v-w-\|v-w\|\,\|z\|}{\|v-w\|}\geq\frac{1}{(\varepsilon+1)d}d=\frac{1}{\varepsilon+1}\text{ car }w-\|v-w\|z\in F.$$

Si $\dim(E)<+\infty$, on a $\varepsilon=\dfrac{1}{n}$ fournit une suite (u_n) qui admet une sous-suite convergente vers u et ça grâce à la compacité de la boule unité fermée de E, avec donc $d(u,F)=1$. □

Proposition 7.17

Soit E un espace de Banach, et T un opérateur compact de E dans E c'est à dire que $T \in \mathcal{K}(E)$.
Alors,
1) $\dim\Big(\ker(I-T)\Big) < +\infty$ et $Im(I-T)$ est fermé.
2) $I-T$ est inversible si et seulement s'il est injectif.
En d'autre terme $1 \in \sigma(T) \Leftrightarrow 1 \in V_p(T)$.

Proposition 7.18

Soit E un espace de Banach et soit $T \in L(E)$ un opérateur compact i.e $T \in \mathcal{K}(E)$.
Alors
1) si $\dim(E) = +\infty$, alors $0 \in \sigma(T)$.
2)$(\lambda \neq 0 \in \sigma(T)) \Leftrightarrow (\lambda \in V_p(T))$. Le sous-espace propre associé est de dimension finie.
3) $\sigma(T)$ est un compact au plus dénombrable, et s'il est fini, on peut ranger ses éléments en une suite (λ_n), $\mid \lambda_{n+1} \mid \leq \mid \lambda_n \mid$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$.

Démonstration.

1) Supposons que $\dim(E) = +\infty$ et montrons que $0 \in \sigma(T)$.
Utilisons la contraposée, c'est à dire qu'on suppose $0 \notin \sigma(T)$ et montrons que $\dim(E) < +\infty$.
Si T est inversible et compact, alors on a $I = TT^{-1}$ est compact et on a vu qu'alors $\dim(E) < +\infty$.
2) Montrons que :$(\lambda \neq 0 \in \sigma(T)) \Leftrightarrow (\lambda \in V_p(T))$.
Si $\lambda \neq 0$, on a $\lambda I - T = \lambda(I - \dfrac{T}{\lambda})$. Alors en vertu de la proposition 7.17 on conclut que

$$\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow 1 \in V_p(\frac{T}{\lambda}) \Leftrightarrow \lambda \in V_p(T).$$

D'après 1) de cette proposition 7.18, on conclut que la dimension de l'espace propre est finie.
3) Soit $\varepsilon > 0$. On montre qu'il n'existe qu'un nombre fini d'éléments de $\sigma(T)$ de module supérieur à ε.
Montrons par l'absurde.
Supposons qu'il existe une suite $(\lambda_n) \subset \sigma(T)$ telle que ses éléments sont distincts et $\mid \lambda_n \mid \geq \varepsilon$.
En vertu de 2) de cette proposition 7.18, se sont des valeurs propres, et soit e_n un vecteur propre unitaire associé à λ_n.
Les vecteurs e_n forment alors une famille libre, et soit E_n l'espace de dimension n engendré par les n premiers vecteurs de cette famille.
D'après le lemme 7.3, il existe pour chaque n un vecteur unitaire u_n tel que

$$u_n \in E_{n+1}, d(u_n, E_n) = 1.$$

On pose $v_n = \dfrac{u_n}{\lambda_n}$.
la suite (v_n) est bornée par $\dfrac{1}{\varepsilon}$, et on va montrer que la suite $(T(v_n))_n$ n'admet pas une sous-suite convergente, ce qui contredit la compacité de T.

Pour cela, on montre que les points de la suite $(T(v_n))_n$ sont isolés.
Pour $n > m$, on peut écrire

$$Tv_n - Tv_m = u_n - v_{n,m} \text{ avec } v_{n,m} \in E^n,$$

de sorte que $\|Tv_n - Tv_m\| \geq 1$.
Il suffit donc de poser $v_{n,m} = Tv_m - \dfrac{\lambda_{n+1}I - T}{\lambda_{n+1}}u_n$.
On a par construction, $Tv_m \in E_{m+1} \subset E_n$, et $(\lambda_{n+1}I - T)(E_{n+1}) \subset E_n$.
On a donc $v_{n,m} \in E_n$. □

Théorème 7.8

(spectre d'un opérateur compact)
Soit E un espace de Banach de dimension infinie et T un opérateur compact de E sur lui même. Alors
1) $0 \in \sigma(T)$.
2) $\sigma(T)\backslash\{0\} = V_p(T)\backslash\{0\}$.
3) On a l'une des situations suivantes : soit $\sigma(T) = \{0\}$, soit $\sigma(T)\backslash\{0\}$ est fini, soit $\sigma(T)\backslash\{0\}$ est une suite qui tend vers 0.

Démonstration.

La démonstration repose sur le théorème de Fredholm 7.7.
1) Montrons que $0 \in \sigma(T)$.
Montrons par l'absurde.
Supposons que $0 \notin \sigma(T)$.
Alors T est bijectif. Et comme T est compact, on en déduit alors que $I = TT^{-1}$ est compact.
En particulier la boule unité fermée B_E est compacte, ce qui implique d'après le théorème de Riesz que $\dim(E) < +\infty$. Ce qui contredit le fait que $\dim(E) = +\infty$.
2) Montrons que $\sigma(T)\backslash\{0\} = V_p(T)\backslash\{0\}$.
On a $\sigma(T)\backslash\{0\} \supset V_p(T)\backslash\{0\}$ est toujours vraie. Donc il suffit de montrer l'autre inclusion $\sigma(T)\backslash\{0\} \subset V_p(T)\backslash\{0\}$.
Soit $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$. Montrons par l'absurde, c'est à dire qu'on suppose $\lambda \notin V_p(T)\backslash\{0\}$.
Alors,

$$\ker(\lambda I - T) = \{0\}.$$

Donc d'après le théorème 7.7 point 3) on a $Im(\lambda I - T) = E$, et donc $\lambda \in \rho(T)$. Contradiction car $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$.
3) Commençons par montrer que tous les points de $\sigma(T)\backslash\{0\}$ sont isolés.
Soit donc une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de valeurs propres de T distinctes et non nulles, convergeant vers une limite λ et montrons que $\lambda = 0$.
On a par définition et d'après 2) de ce théorème 7.8 il existe une suite de vecteurs non nuls $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E tels que

$$(\lambda_n I - T)e_n = 0.$$

Soit $E_k = Vect(e_k),\ 1 \leq k \leq n$.
On montre par récurrence que les vecteurs $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendants. En effet,
si ce résultat est vrai à l'ordre k, alors on suppose que $e_{k+1} = \sum_{l=1}^{k} \alpha_l e_l$ et on a alors

$$0 = (\lambda_{k+1}I - T)e_{k+1} = \sum_{l=1}^{k} \alpha_l(\lambda_{k+1} - \lambda_l)e_l,$$

et donc $\lambda_l = 0$ pour tout $1 \leq l \leq k$.
la suite (E_n) est donc strictement croissante, et on a $(\lambda_n I - T)E_n \subset E_{n-1}$.
En vertu du lemme 7.3 il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \in E_n$ et $\|x_n\| = 1$ et $d(x_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$.
Soit alors $2 \leq m < n$, on a donc

$$E_{m-1} \subset E_m \subset E_{n-1} \subset E_n.$$

On écrit alors

$$\|\lambda_n^{-1}Tx_n - \lambda_m^{-1}Tx_m\| = \|\lambda_n^{-1}(\lambda_n x_n - Tx_n) - \lambda_m^{-1}(\lambda_m x_m - Tx_m) + x_n - x_m\| \geq d(x_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Et comme la suite (Tx_n) admet une sous-suite convergente, alors $\lambda_n \to \lambda \neq 0$.
Les éléments de $\sigma(T) \setminus \{0\}$ sont donc tous isolés et donc l'ensemble $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} :| \lambda |\geq \frac{1}{n}\}$ est soit vide soit fini (comme $\sigma(T)$ est compact, s'il avait une infinité de points distincts il aurait un point d'accumulation).
Enfin si $\sigma(T) \setminus \{0\}$ contient une infinité de points distincts, il forment une suite qui tend vers 0. D'où le résultat. □

Théorème 7.9

(de Riesz-Schauder :)
Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie et soit T un opérateur compact dans H. Alors
1) $\sigma(T)$ est fini ou dénombrable, 0 lui appartient et est son seul point d'accumulation possible.
2) Si $\lambda \in \sigma(T)$ distinct de 0, λ est une valeur propre de multiplicité finie, $Im(\lambda I - T)$ est fermée de codimension finie ou égale à multiplicité de λ.

Remarque 7.11.

Le point 0 peut être ou ne peut être une valeur propre, et peut être une valeur propre de multiplicité finie ou infinie.

Démonstration.

Montrons d'abord qu'une suite de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, ...$ ne peut pas converger vers un nombre non nul λ_0.
Supposons que ce soit le cas. On choisit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un vecteur normé $x_n \in \ker(T - \lambda_n I)$, et on note E_n le sous-espace vectoriel engendré par $x_1, x_2, ..., x_n,$ pour $n \geq 2$.
On choisit y_n normé dans $E_n \cap E_{n-1}^{\perp}$.
Comme la suite $(\lambda_n^{-1} y_n)$ est bornée, alors il existe une sous suite (y_{n_k}) telle que $\left(\frac{1}{\lambda_n} T y_{n_k}\right)$ admet une limite.
D'autre part, pour $m < n$, on a :

$$\frac{1}{\lambda_n}Ty_n - \frac{1}{\lambda_m}Ty_m = y_n + \frac{1}{\lambda_n}(T - \lambda_n I)y_n - \frac{1}{\lambda_m}Ty_m \text{ avec } Ty_m \in E_m,\ (T - \lambda_n I)y_n \in E_{n-1}.$$

Donc,

$$y_n \perp \frac{1}{\lambda_n}(T - \lambda_n I)y_n - \frac{1}{\lambda_m}Ty_m,$$

et

$$\|\frac{1}{\lambda_n}Ty_n - \frac{1}{\lambda_m}Ty_m\| \geq \|y_n\| = 1.$$

Ce qui contredit le fait que $\left(\frac{1}{\lambda_{n_k}}Ty_{n_k}\right)$ admet une limite.
On en déduit de là que $\sigma(T)$ est fini ou dénombrable. En effet :
$\sigma(T)$ est la réunion de ses intersections avec les complémentaires des disques ouverts de centre 0 et de rayon $\frac{1}{n}$.
Or une telle intersection est compacte et discrète, donc finie.

□

7.4 Diagonalisation d'un opérateur compact auto-adjoint sur un espace de Hilbert

On se place dans le cas où $E = H$ est un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$. Alors grâce au théorème de représentation de Riesz on peut identifier H' et H et donc T^* est un élément de $L(H)$.

Définition 7.14.

Soit H un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $(.,.)$.
On dit qu'un opérateur $T \in L(H)$ est auto-adjoint si $T = T^*$, c'est à dire si

$$(Tx, y) = (x, Ty),\ \forall x, y \in H.$$

Proposition 7.19

Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(.,.)$ et $T \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint.
On pose

$$m = \inf_{\|x\|=1}(Tx, x) \text{ et } M = \sup_{\|x\|=1}(Tx, x).$$

Alors

$$\{m, M\} \subset \sigma(T) \subset [m, M].$$

Démonstration.

Nous allons étudier que M et les propriétés correspondantes sur m s'obtiennent en remplaçant T par $-T$.
Montrons que $[m, M]^c \subset \sigma(T)^c$.
Soit $\lambda > M$ et montrons que $\lambda \in \sigma(T)^c = \rho(T)$.
On sait que $(Tx, x) \leq M\|x\|^2,\ \forall x \in H$. Et donc

$$\forall x \in H, (\lambda x - Tx, x) \geq (\lambda - M)\|x\|^2.$$

En vertu du théorème de Lax-Milgram on conclut que $\lambda I - T$ est bijectif. En effet,
la forme bilinéaire

$$a(x, y) = (\lambda x - Tx, y),$$

est continue et coercive, donc,

$$\forall z \in H : (\lambda x - Tx, y) = (z, y).$$

On montre maintenant que $M \in \sigma(T)$.
Supposons que $M \notin \sigma(T)$.
la forme bilinéaire définie par :

$$a(x, y) = (Mx - Tx, y),$$

est symétrique et l'on a :

$$a(x, x) \geq 0, \ \forall x \in H.$$

On peut donc appliquer l'inégalité de Cauchy Schwarz, il vient que :

$$\mid a(x, y) \mid^2 \leq a(x, x)a(y, y), \ \forall x, y \in H.$$

Donc en l'appliquant à $y = Mx - Tx$ et en utilisant la continuité de la forme a, on obtient qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|Mx - Tx\|^2 \leq C(Mx - Tx, x), \ \forall x \in H.$$

Soit maintenant (x_n) une suite telle que $\|x_n\| = 1$ et $Tx_n, x_n) \to M$.
Alors,

$$\|Mx - Tx\| \to 0.$$

Si $M \in \sigma(T)$ alors,

$$x_n = (MI - T)^{-1}(Mx_n - Tx_n) \to 0.$$

Donc contradiction.
D'où $M \in \sigma(T)$. □

Corollaire 7.3.
Soit H un espace de Hilbert réel et $T \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint.
Si $\sigma(T) = \{0\}$, alors $T = 0$.

Démonstration.
D'après la proposition 7.19, on sait que

$$(Tx, x) = 0, \ \forall x \in H.$$

On écrit :

$$2(Tx, y) = (T(x + y), x + y) - (Tx, x) - (Ty, y),$$

On obtient le résultat cherché. □

Proposition 7.20

Soit H un espace de Hilbert complexe et soit $T \in L(H)$ un opérateur compact et auto-adjoint. Alors $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

Démonstration.

Soit $\lambda \neq 0$ un élément de $\sigma(T)$. Alors λ est une valeur propre de T et ainsi il existe $x \in H$ tel que $x \neq 0$ et $Tx = \lambda x$.
Donc $\lambda(x, x) = (Tx, x) = (x, T^*x) = (x, Tx) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x, x)$. Comme $x \neq 0$, alors il vient que $\lambda = \overline{\lambda}$, c'est á dire que $\lambda \in \mathbb{R}$. □

On a le théorème suivant qui nous permet de diagonaliser les opérateurs auto-adjoints compacts.

Théorème 7.10

Soit H un espace de Hilbert réel séparable et soit $T \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact non nul. Alors H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T.

Démonstration.

On désigne par $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ la suite des valeurs propres distinctes de T telles que

$$\lambda_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On désigne par $\lambda_0 = 0$.
On pose :

$$E_n = \ker(T - \lambda_n I), \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } E_0 = \ker(T).$$

On sait que $\dim(E_n) < +\infty$ si $n \geq 1$ et que $E_0 = \emptyset$ (éventuellement), mais peut être $\dim(E_0) = +\infty$.
- Montrons que $(E_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de H.
On commence par montrer que les E_n sont orthogonaux deux-à-deux.
Soit $n \neq m$ et $(x, y) \in E_n \times E_m$. Alors

$$Tx = \lambda_n x \text{ et } Ty = \lambda_m y,$$

Par conséquent, on obtient :

$$(Tx, y) = \lambda_n(x, y) = (x, Ty) = \lambda_m(x, y).$$

Ce qui est équivalent à dire que

$$(\lambda_n - \lambda_m)(x, y) = 0,\ \forall n \neq m$$

Donc $(x, y) = 0$.
Maintenant on désigne par X l'espace vectoriel engendré par la famille $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Montrons que $\overline{X} = H$.
Pour cela on utilise le résultat : $\overline{X} = H \iff X^\perp = \{0\}$.
Comme $\forall (x, y) \in X^\perp \times X : (Tx, y) = (x, Ty) = 0$, on a alors $T(X) \subset X$ et donc $T(X^\perp) \subset X^\perp$.
Soit $T_0 = T\mid_{X^\perp}$, (la restriction de T sur $X^\perp$).
On a $T_0 = \mathrm{T}_0^*$, T_0 est compact et $\sigma(\mathrm{T}_0) = \{0\}$, puisque $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est constitué de valeurs propres de T_0 qui sont aussi des valeurs propres de T (un vecteur propre associé serait alors à la fois dans X et dans $X^\perp$).
En vertu du corollaire 7.3, on a donc $T_0 = 0$.
On en déduit que

$$X^\perp \subset \ker(T) \subset X \text{ et } X^\perp = \{0\}.$$

Donc X est dense dans H.
On construit une base hilbertienne en choisissant une base hilbertienne dans chaque E_n(de dimension finie pour $n \geq 1$ et grâce à la séparabilité de H pour E_0).
La preuve est achevée. □

7.5 Exercices

Exercice 7.1.

I) On considère l'opérateur $T : C([0,1]) \to C([0,1])$. En utilisant le théorème d'Ascoli, montrer dans quel cas l'opérateur T est-il compact ?
1) $Tf(t) = \int_0^t f(s)ds$.
2) $Tf(t) = tf(t)$.
3) $Tf(t) = \int_0^1 e^{ts} f(s)ds$.
4) $Tf(t) = f(0) + tf(1)$.
5) $Tf(t) = f(t^2)$.
II) On considère l'espace $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{0 \le x \le 1} |f(x)|$.
On définit l'opérateur $T : E \to \mathbb{R}$ par :

$$Tf(x) = \int_0^x tf(t)\, dt.$$

- Montrer par deux méthodes que T est compact.
III) On considère l'espace $E = L^2(\mathbb{R})$ muni de la norme

$$\|f\| = \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On définit l'opérateur $T : E \to \mathbb{R}$ par :

$$Tf(x) = \int_{-\infty}^x \frac{f(t)}{\sqrt{t^2+1}}\, dt.$$

- Montrer que T est compact.

Exercice 7.2.

Soit l'espace $E = C([a,b], \mathbb{R})$ muni de la norme de convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{a \le x \le b} |f(x)|$, et soit $K \in C([a,b]^2, \mathbb{R})$.
- Montrer que l'opérateur intégral $T_K : E \to E$ défini par :

$$\forall f \in E : T_K(f)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy, \quad \forall x \in [a,b]$$

est compact.

Exercice 7.3.

Soit l'espace $E = L^2([a,b])$ muni de la norme $\|f\| = \Big(\int_a^b |f(t)|^2 dt \Big)^{\frac{1}{2}}$.
Soit $K \in C([a,b]^2, \mathbb{R})$, et soit l'opérateur $T_K : E \to E$ défini par :

$$\forall f \in E : T_K(f)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy, \quad \forall x \in [a,b].$$

Montrer que T est un opérateur compact.

Exercice 7.4.

Soient E un espace vectoriel normé et F un espace de Banach.
On considère la suite d'opérateurs de rang fini $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E dans F.
Supposons que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers T.
- Montrer que T est un opérateur compact.

Exercice 7.5.

Soit l'opérateur $T : l^2 \to l^2$ défini par :

$$Tx = (Tx)_n = \frac{x_n}{2^n}, \text{ où } x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...) \in l^2.$$

- Montrer que T est compact.

Exercice 7.6.

Soit l'opérateur $A : l^p \to l^p$ où $1 \leq p \leq +\infty$ défini par :

$$Ax = (Tx)_n = \frac{x_n}{n}, \text{ avec } x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...) \in l^p.$$

- Montrer que A est compact.

Exercice 7.7.

Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lambda_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
On définit l'opérateur $T : l^2 \to l^2$ par :

$$Tx = (Tx)_n = \lambda_n x_n.$$

- Montrer que T est compact.

Exercice 7.8.

On considère l'espace de Hilbert $l^2 = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : x_n \in \mathbb{C} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\right\}$
muni du produit scalaire $(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{y}_n$ et de la norme induite $\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
Soit (e_n) une suite orthonormée dans l^2.
1) Montrer que la suite (e_n) converge faiblement vers 0.
2) Montrer que si un opérateur $T : l^2 \to l^2$ est compact, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \|T(e_n)\| = 0.$$

Exercice 7.9.

Soit l'opérateur $T_n : l^2 \to l^2$, défini par :

$$T_n x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n, 0, 0, 0, ...) \text{ où } x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...) \in l^2.$$

1) Montrer que $T_n \in L(l^2)$.
2) Montrer que T_n est compact.
3) On considère maintenant l'opérateur $T : l^2 \to l^2$ défini par :

$$Tx = (Tx)_n = \frac{x_n}{n} \text{ où } x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...) \in l^2.$$

- Montrer que $T \in L(l^2)$.
- Calculer $\lim_{n\to+\infty} \|T_n - T\|$ puis en déduire que T est compact.

Exercice 7.10.

Soit l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : x_n \in \mathbb{R} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\},$$

muni du produit scalaire usuel $(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$ et la norme induite $\|x\| = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$.
Soit l'opérateur $T_n : \mathcal{H} \to \mathcal{H},\ n \in \mathbb{N}^*$ défini par :

$$T_n x = \Big(x_1, \frac{x_2}{\alpha}, \frac{x_3}{\alpha^2}, ..., \frac{x_n}{\alpha^{n-1}}, 0, 0, 0, ...\Big) \text{ où } x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in \mathcal{H} \text{ et } \alpha > 1.$$

1. Montrer que $T_n \in L(\mathcal{H})$ et que T_n est de rang fini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit l'opérateur $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ défini par :

$$Tx = \Big(x_1, \frac{x_2}{\alpha}, \frac{x_3}{\alpha^2}, ..., \frac{x_n}{\alpha^{n-1}}, ...\Big).$$

- Calculer $\lim_{n\to+\infty} \|T_n - T\|$ et en déduire que T est compact.

Exercice 7.11.

Soit l'espace $E = C([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme de convergence uniforme,

$$\|f\|_\infty = \sup_{a\le x\le b} |f(x)|.$$

On considère l'opérateur de Volterra A défini sur l'espace E par :

$$Af(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1) Montrer que $A \in L(E)$.
2) En utilisant le théorème d'Ascoli, montrer que A est compact.

3) Montrer que l'ensemble des valeurs propres de A, $V_p(A) = \emptyset$.
4) Montrer que $r(A) = 0$, (où $r(A)$ est le rayon spectral de A).

Remarque 7.12.
Si $r(A) = 0$ on dit que A est quasi nilpotent.

Exercice 7.12.

Soit (λ_n) une suite de $\mathbb{C}$ et soit T l'opérateur de $l^p, (p \in [1, +\infty])$ défini par :

$$\forall x \in l^p, \forall n \in \mathbb{N} : Tx = (Tx)_n = (\lambda_n x_n).$$

1. Montrer que : $\Big(T \text{ est compact}\Big) \Longleftrightarrow \Big(\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0\Big)$.
2. On suppose que $p = 2$.
- Montrer que :

$$\Big(T \text{ est un opérateur de Hilbert-Schmidt}\Big) \Longleftrightarrow \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda_n|^2 < +\infty\Big).$$

3. Soit l'opérateur A , tel que

$$Ax = (0, \lambda_0 x_0, \lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_n x_n, ...).$$

*(A s'appelle le "**shift**" **à droite** de T dans $l^p, (p \in [1, +\infty])$).*
- L'opérateur A est-il compact ?
4. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$.
- Déterminer $V_p(AT)$ et $\sigma(AT)$.

Exercice 7.13.

Soit E, F deux espaces de Banach et E est réflexif.
On considère un opérateur $A \in L(E, F)$ tel que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ faiblement convergente on a $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ est une suite convergente.
- Montrer que A est compact.

Exercice 7.14.

Soit H un espace de Hilbert et $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée dans H et soit E un espace de Banach.

On considère un opérateur $A \in (H, E)$, tel que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \|Ae_n\|^2$ soit convergente.

- Montrer que $A \in \mathcal{K}(H, E)$.

Exercice 7.15.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs telle que $A_n \in \mathcal{K}(E, F), \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $\lim_{n\to+\infty} A_n = A$.
- L'opérateur A *est- il compact ?*

Exercice 7.16.

Soit H *un espace de Hilbert et soit* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une base orthonormée dans* H.
On considère une suite réelle $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$.
Pour $x \in H$, *on pose* $Ax = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n$.
- Montrer que A *est défini sur* H *tout entier.*
- Montrer que $A(H) \subset H$. *- Montrer que* A *est compact.*

Exercice 7.17.

Soit l'opérateur $T : L^2(]0,1[) \to L^2(]0,1[)$ *défini par :*

$$\forall f \in L^2(]0,1[), \forall x \in]0,1[: (Tf)(x) = xf(x).$$

- Montrer que T *n'est pas compact.*
Indication : *(on peut utiliser la suite de fonctions* $f_n(x) = \sqrt{2}\sin n\pi x$*).*

Exercice 7.18.

Soit H *un espace de Hilbert tel que* $\dim(H) = +\infty$.
Montrer que la boule unité fermée $\overline{B}_H(0,1)$ *de* H *n'est pas compacte.*

Exercice 7.19.

Soit l'espace,

$$l^2(\mathbb{C}) = \Big\{ x = (x_n), x_n \in \mathbb{C} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} |\, x_n \,|^2 < +\infty \Big\}.$$

On considère l'opérateur $A : l^2(\mathbb{C}) \to l^2(\mathbb{C})$ *défini par :*

$$Tx = (Tx)_n = (\lambda_n x_n)_n,$$

où $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de* $\mathbb{C}$ *qui vérifie* $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n \neq 0$.
- Montrer que l'opérateur T *n'est pas compact.*
- En déduire que l'opérateur d'identité $I : l^2(\mathbb{C}) \to l^2(\mathbb{C})$ *n'est pas compact).*

Exercice 7.20.

Soit H *un espace de Hilbert et soient* A, T *deux opérateurs compacts de* $L(H)$.
On suppose $\alpha \in \mathbb{C}$.
- Montrer que l'opérateur $A + \alpha T$ *est compact.*

Exercice 7.21.

Soit H un espace de Hilbert et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base orthonormale dans H.
Soit l'opérateur T défini par :

$$T\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_n e_n\Big) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} x_n e_{n-1}.$$

- Montrer que T est compact.

Exercice 7.22.

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $E = F = C\big([a,b]\big) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ \text{continue}\}$ muni de la norme

$$\| f \| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Soit l'opérateur $T : E \to E$ défini par :

$$\forall f \in E, \forall x \in [a,b] : T(f)(x) = \int_a^b K(x,y) f(y) dy \ \text{ où } K \in C\big([a,b]\times[a,b]\big).$$

1. Montrer que l'opérateur $T \in L(E)$.
2. Montrer que l'opérateur $T \in \mathcal{K}(E)$.
3. Existe-il un opérateur $S \in L(E)$ tel que $S \circ T = Id$?.
- En déduire que si T est inversible ou non.

Exercice 7.23.

On considère l'espace de Hilbert $H = L^2\big([0, \frac{\pi}{2}]\big)$ et soit T l'opérateur de H dans H défini par :

$$\forall f \in H, \forall t \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big] : (Tf)(t) = \cos t \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x \, dx.$$

1) Montrer que $T \in L(H)$ et que $\|T\| \leq \frac{\pi}{2}$.
2) Déterminer l'adjoint T^* de T.
3) Montrer que T et T^* sont compacts.
4) On pose $A = T + T^*$.
- Montrer que l'opérateur A est auto-adjoint et compact.

Exercice 7.24.

Soit $H = l^2 = \Big\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}; x_n \in \mathbb{R}; \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\Big\}$.
Soit (λ_n) une suite réelle bornée et on définit l'opérateur $A : H \to H$ par :

$$Ax = (A(x))_n = (\lambda x)_n = \lambda_n x_n.$$

1. Montrer que $A \in L(H)$.
2.On considère l'opérateur $A_N : H \to H$ défini par :

$$A_N(x) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_N x_N, 0, 0, ...).$$

a) Montrer que $A_N \in L(H)$ et que A_N est compact.
b) Montrer que si $\lambda_n \to 0$, alors A est un opérateur compact.

Exercice 7.25.

Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in L(E, F)$.
- Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.
a) Pour toute suite bornée $(x_n) \subset E$, il existe une sous-suite convergente de (Tx_n) .
b) Pour tout ensemble borné $M \subset E$, l'ensemble $T(M)$ est relativement compact.

Remarque 7.13.
Dans ce cas on dit que l'opérateur T est compact. (Propriété caractéristique des opérateurs compacts.)

Exercice 7.26.

Soit E un espace de Banach et soient $T, A \in L(E)$
1) Montrer que si les opérateurs T, A sont compacts, alors l'opérateur $T + A$ est compact.
2) Montrer que si T est compact, alors les opérateurs TA et AT sont compacts.

Exercice 7.27.

Soit H un espace de Hilbert séparable, et soit $T \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint compact.
1) Soit $E \subset H$ un sous-espace stable par T.
- Montrer que $E^{\perp}$ est aussi stable par T.
2) Soit $F \subset H$ tel que F est stable par T et $F \neq \{0\}$.
- Montrer que F contient un vecteur propre de T.
3) Soit M le sous-espace vectoriel de H engendré par les vecteur propres de T.
- Déduire de 1) et 2) que $\overline{M} = H$.
4) Montrer que les sous-espaces propres de T sont orthogonaux deux à deux.
5) Montrer que T est diagonalisable par rapport à une base orthonormée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Alain Guichardet, Intégration Analyse Hilbertienne, Ellipses Marketing (1998).

[2] Daniel Li, Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés, Ellipses.

[3] Gilles Christol, Anne Cot, Charles-Michel Marle, Topologie, Ellipse/ edition marketing S.A Paris (1997).

[4] Francis Hirsch, Gilles Lacombe, S. Levy, Elements of Functional Analysis, Springer (1999),Graduate Texts in Mathematics v. 192

[5] Gilles Lacombe, Pascal Massat, Analyse fonctionnelle Exercices corrigés, Dunod, Paris (1999).

[6] Haim Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations (2010), Springer-Verlag (New York).

[7] Harkrishan Lal Vasudeva, Elements of Hilbert Spaces and Operator Theory, Springer(2017).

[8] Kosaku Yosida, Functional analysis, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg new York-(1974).

[9] Kreyszig, Introductory functional analysis with applications, Wiley (1978).

[10] Leif Mejlbro, Exercices corrigés Hilbert spaces and operators on Hilbert spaces, Ventus publishing ApS (2009).

[11] Lokenath Debnath, Piotr Mikusinski,Introduction to Hilbert spaces with applications, Academic Press(1990).

[12] Milan Miklavcic, Applied Functional Analysis and Partial Differential Equations, World Scientific ((1998).

[13] N. Boccara, Analyse fonctionnelle une introduction pour physiciens, Edition Marketing, (1984).

[14] Pierre Lévy-Bruhl , Introduction à la théorie spectrale- cours et exercices corrigés, Dunod, Paris (2003).

[15] S. Kesavan, Functional Analysis, Hindustan book agency (India)- (2009).

[16] V. Trénoguine,Cours d' Analyse fonctionnelle, Edition Mir Moscou-(1985).

[17] V. Trénoguine, B. Pissarevski, T. Soboléva - Problèmes et exercices d'analyse fonctionnelle, Edition Mir Moscou- (1987).