**Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**Université Dr.Yahia Farès de Médéa**

**Faculté des Sciences -Département de Mathématiques & Informatique**



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention

du

Diplôme de Master en Mathématiques
Option : Recherche Opérationnelle

Par

**LEBANI Ahlem et YAHI Nacira**

**Thème**

# Domination romaine double indépendante dans les graphes

*Composition du Jury:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Mr. | N. IKHLEF ESCHOUF | Maître de conférence | UYF Médéa | Président |
| Mr. | L. OULDRABAH | Maître de conférence | UYF Médéa | Examinateur |
| Mr. | M. BENATALLAH | Maître de conférence | UZA Djèlfa | Promoteur |

Date de soutenance: *09/2020*

# *Résumé*

Pour un graphe $G = (V, E)$, une fonction domination romaine double*(FDRD)* sur G est une fonction $f : V \to \{0, 1, 2, 3\}$ ayant la propriété que si $f(v) = 0$, alors le sommet $v$ doit avoir au moins deux voisins assignés 2 ou un voisin $w$ avec $f(w) = 3$, et si $f(v) = 1$, alors le sommet $v$ a au moins un voisin w avec $f(w) \geq 2$. Un *FDRD* $f$ est appelé une fonction domination romaine double indépendante *(FDRDI)* si l'ensemble des sommets à poids positif est indépendant. Le poids d'un *FDRDI* est la somme $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$. Le nombre de domination romaine double indépendante $i_{dR}(G)$ est le poids minimum d'un *FDRDI* sur $G$.

Dans ce mémoire, nous présentons en premier lieu la Caractérisation des cycles et des Chaînes tels que $i_{dR}(G) = \gamma_{dR}(G)$. Ensuite nous donnons des bornes sur $i_{dR}(G)$ en termes de $i(G)$ et $i_R(G)$. Enfin nous donnons quelque caractérisation de bornes existantes pour certaines classes de graphes.

# *Abstract*

For a graph $G = (V, E)$, a double Roman dominating function *(DRDF)* on G is a function $f : V \to \{0, 1, 2, 3\}$ having the property that if $f(v) = 0$, then vertex $v$ must have at least two neighbors assigned 2 or one neighbor $w$ with $f(w) = 3$, and if $f(v) = 1$, then vertex $v$ has at least one neighbor w with $f(w) \geq 2$. A *DRDF* $f$ is called an independent double Roman dominating function *(IDRDF)* if the set of vertices with positive weight is independent. The weight of an *IDRDF* is the sum $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$. The independent double Roman domination number $i_{dR}(G)$ is the minimum weight of an *IDRDF* on $G$.

In this memory, we first present the Characterization of cycles and Chains such that $i_{dR}(G) = \gamma_{dR}(G)$. Then we give a bound on $i_{dR}(G)$ in terms of $i(G)$ and $i_R(G)$. Finally we give some characterization of existing bounds for some classes of graphs.

# *Remerciements*

Louange a Allah le Seigneur des mondes.

Nous rendons Allah le tout puissant de nous avoir donne le courage et la volonté ainsi que la patience pour bien mener ce travail.

Nous tenons, avant tout, à remercier chaleureusement notre promoteur Monsieur **Mohammed BENATALLAH**, Maître de conférences à l'université ZIANE ACHOUR de Djélfa, pour avoir accepte d'encadrer notre mémoire. Ainsi de nous avoir orientés, aidés et conseillés.

Nous remercions également Monsieur **Noureddine IKHLEF ESCHOUF**, Maître de Conférences à l'université Dr. YAHIA FARES de Médèa, pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Nous remercions également Monsieur **Lyes OULDRABAH**, Maître de Conférences à l'université YAHIA FARES de Médèa, pour avoir accepté l'invitation.

Nous tenons également à exprimer notre gratitude à l'ensemble des enseignants du département M.I de l'université Dr. YAHIA FARES de Médèa.

Enfin, il est important pour nous de remercier les parents,d'avoir fait de leur mieux pour que nous puissions accomplir ce mémoire dans les meilleures conditions possibles et qui n'ont jamais cessé de nous encourager.

Nous remercions nos frères, sans oublier nos chers amis qui étaient toujours présents.

# Table des matières

**Résumé** **i**

**Abstract** **ii**

**Remerciements** **iii**

**Introduction** **1**

**1 NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES GRAPHES** **3**

1.1 Les graphes: . . . . . 3

1.1.1 Définitions classiques: . . . . . 3

1.1.2 Les graphes particuliers: . . . . . 7

1.2 La domination . . . . . 10

1.2.1 Quelques résultats sur la domination: . . . . . 11

**2 APERÇU SUR LES FONCTIONS DE DOMINATION** **15**

2.1 La domination romaine . . . . . 15

2.1.1 Quelques résultats sur la domination romaine . . . . . 16

2.2 La domination romaine indépendante . . . . . 19

2.2.1 Bornes sur $i_R(G)$ . . . . . 19

2.2.2 Relations avec $i(G)$ . . . . . 20

2.3 La domination romaine double. . . . . 21

2.3.1 Bornes sur $\gamma_{dR}(G)$ . . . . . 21

2.3.2 La domination romaine double et la domination . . . . . 23

2.3.3 La domination romaine double et la domination romaine . . . . . 24

**3 LA DOMINATION ROMAINE DOUBLE INDÉPENDANTE 26**

3.1 Fonction de domination romaine double indépendante . . . . . 26

3.2 Chaîne et Cycle . . . . . 27

3.3 Bornes . . . . . 32

3.4 Comparaison avec le nombre de domination indépendant . . . . . 34

3.5 Comparaison avec le nombre de domination romaine indépendant . . . . . 36

3.6 Graphes $G$ d'ordre $n$ satisfaisant $i_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$ . . . . . 37

**Conclusion 41**

# Liste des Figures

1.1.1 $G_A$ est sous-graphe de $G$ et $G_B$ est sous-graphe induit de $G$. . . . . 5
1.1.2 $H$ est un graphe partiel de $G$. . . . . 5
1.1.3 $G$ est connexe, $H$ est non connexe avec deux composantes connexe. . . . . 6
1.1.4 (a) Un graphe $G$ et (b) son complémentaire $\overline{G}$. . . . . 6
1.1.5 (1) Un graphe complet ($K_4$) et (2) un graphe discret ($\overline{K_4}$). . . . . 7
1.1.6 Un graphe 3-régulier d'ordre 6. . . . . 7
1.1.7 (2) Une chaine $P_5$ et (1) un cycle $C_8$. . . . . 8
1.1.8 Un arbre $T = (V, E)$. . . . . 8
1.1.9 Le graphe biparti complet $K_{3,4}$. . . . . 9
1.1.10(1) Une étoile $K_{1,q}$ et (2) une étoile subdivisée $K^*_{1,q}$. . . . . 9
1.1.11Double étoile $S_{r,s}$. . . . . 9
1.1.12$P_2$ joint $C_3$. . . . . 10
1.2.1 Le graphe $K_4 - e$. . . . . 10
1.2.2 Le graphe $K_{1,3}$. . . . . 11
1.2.3 Le graphe $G$. . . . . 12
1.2.4 Le graphe $G$. . . . . 13
1.2.5 Un graphe $K_5$ et son complémentaire $\overline{K_5}$. . . . . 14
1.2.6 Un graphe $P_4$ et son complémentaire $\overline{P_4}$. . . . . 14

2.1.1 Le graphe $C_4$. . . . . 16
2.1.2 Le graphe $K_4$. . . . . 16
2.1.3 L'étoile$K_{1,4}$. . . . . 17
2.1.4 Un graphe $G$. . . . . 18

2.1.5 Un graphe $G$. . . . . 18
2.1.6 Une chaine ($P_5$) et un cycle ($C_5$). . . . . 19
2.2.1 Le graphe $P_4$. . . . . 19
2.3.1 Un graphe $\overline{3K_2}$. . . . . 21
2.3.2 Le graphe $G$. . . . . 24
2.3.3 Le nombre de domination romaine double de $P_4$ est $\gamma_{dR}(P_4) = 5$. . . . . 24

3.2.1 (1) Un cycle $C_6$ et (2) une chaîne $P_4$. . . . . 28
3.2.2 Une chaîne $P_5$ tel que $i_{dR}(P_5) = \gamma_{dR}(P_5) = 6$. . . . . 29
3.2.3 Un cycle $C_5$ tel que $i_{dR}(C_5) = \gamma_{dR}(C_5) = 6$. . . . . 29
3.2.4 Le graphe $K_{m_1,m_2,m_3}$. . . . . 30
3.2.5 Le graphe $K_{m_1,m_2,m_3}$. . . . . 30
3.3.1 Un cycle $C_8$ et une chaîne $P_6$. . . . . 34
3.4.1 Un graphe $K_5$ et un cycle ($C_4$). . . . . 35

# Introduction

Les graphes sont l'un des outils les plus importants en recherche opérationnelle, ils sont utilisés pour modéliser des relations liant des éléments donnés, ils permettent ainsi de représenter une grande variété de problèmes en les ramenant à l'étude de sommets et d'arêtes ou d'arcs (réseaux de communications, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques). La théorie des graphes est une discipline mathématique et informatique qui étudie ces structures.

Généralement, les problèmes pratiques modélisables par les graphes sont de nature combinatoire où il est souvent question de recherche de structures optimales particulières, telles que clique maximum, stable maximum, coloration minimum ou dominant minimum.
Plus d'un siècle plus tard, en 1962, Ore [6] a été le premier à publier sur la domination dans les graphes et donna l'appellation actuelle du nombre de domination. La domination a connue sa véritable expansion après les travaux de Cockayne et Hedetniemi en 1977 [10]. Les deux livres de Haynes, et Hedetniemi Slater [1] [2] témoignent de la pertinence et de l'intérêt accru de ce sujet dans les dernières années.

Le coté pratique et appliqué de la domination a été souvent la cause de la naissance d'autres et nouveaux paramètres de domination. En effet beaucoup de paramètres de domination ont vu le jour lorsqu'on impose à la domination une condition supplémentaire dans le graphe considérée.

Parmi les types de domination qui existent, nous nous intéressons dans ce mémoire à la domination romaine double. L'étude de la domination romaine double a été introduite par Beeler, Haynes et Hedetniemi [15](2016).

Ce mémoire est composé de trois chapitres:

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques concepts de base de la théorie des graphes, ainsi que les définitions nécessaires utilisées tout au long de ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons les définition de la domination romaine, la domination romaine indépendante et la domination romaine double, et nous rappelons certains résultats existants (quelques propriétés, quelques bornes sur $\gamma_{dR}(G)$ pour certaines classes de graphe).

Dans le troisième chapitre, nous introduirons la fonction de la domination romaine double indépendante, et la Caractérisation des cycles et des Chaînes tels que $i_{dR}(G) = \gamma_{dR}(G)$, nous donnons quelque Comparaison avec le nombre de domination indépendant et avec le nombre de domination Roman indépendant. Enfin nous donnons la caractérisation de certaines classes de graphes $G$ avec $i_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$.
Finalement, nous clôturons ce mémoire par une conclusion.

# Chapitre 1

# NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES GRAPHES

Ce premier chapitre est consacré aux définitions des principales notions utilisées dans ce mémoire. Pour chacune d'entre elles, nous essayerons de donner une définition formelle ainsi qu'une définition intuitive.

## 1.1 Les graphes:

### 1.1.1 Définitions classiques:

On étudie des graphes $G = (V, E)$, où $V$ est un ensemble des sommets, et $E$ est un ensemble de paires des sommets appelées arêtes. L'ordre de $G$ est le nombre de ses sommets noté $n = |V|$. La taille de $G$ le nombre de ses arêtes noté $m =| E |$. Un graphe simple est un graphe sans boucles et sans arêtes multiples. Un graphe est dit trivial s'il ne possède qu'un seul sommet. On note $uv \in E$ l'arête joignant les sommets $u$ et $v \in V$. $u$ et $v$ sont appelés les extrémités de l'arête. On dit que deux sommets $u$ et $v$ sont adjacents, s'il existe une arête les reliant, c'est à dire si $uv \in E$.

**Voisinage:**

On appelle voisinage ouvert d'un sommet $u$, noté $N_G(u)$ l'ensemble des sommets adjacent à $u$ dans $G$. Le plus souvent, quand le contexte étant explicite, on notera simplement $N(u)$.

Le voisinage fermé d'un sommet $u$ désigne l'ensemble $N[u] = N(u) \cup \{u\}$. On parle aussi d'un voisinage ouvert d'un sous-ensemble $S \subseteq V$, noté $N(S)$, pour désigner l'union des voisinages ouverts des sommets de $S$. De même, le voisinage fermé $N[S]$ de $S$ est l'union des voisinages fermés des sommets de $S$, autrement dit $N[S] = N(S) \cup S$. Le voisinage privé d'un sommet $u \in S$ par rapport à $S$, noté $pn_G(u, S)$ (ou $pn(u, S)$ s'il n'y a pas de confusion) est l'ensemble des sommets dans $N(S)$ ayant uniquement $u$ pour voisin dans $S$, i.e. $pn(u, S) = N(S) - N(S \setminus \{u\})$. Si $v \in pn(u, S)$, alors on dit que $v$ est un voisin privé de $u$ par rapport à $S$.

**Degré:**

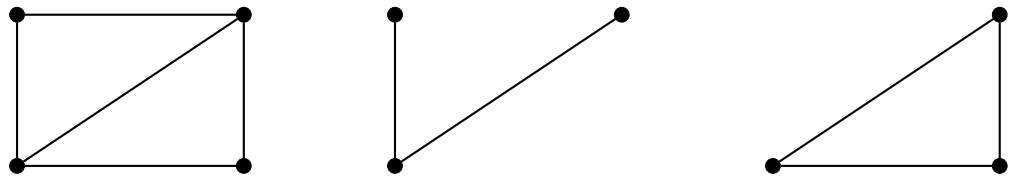
On appelle degré d'un sommet $v$ dans $G$, noté $d_G(v)$, le nombre des arêtes de $G$ incidents à $v$. Le degré minimum d'un graphe $G$, noté $\delta(G)$, est le minimum des degrés de ses sommets ($\delta(G) = \min_{v \in V} d_G(v)$). De même, le degré maximum de $G$, noté $\Delta(G)$, est le maximum des degrés de ses sommets ($\Delta(G) = \max_{v \in V} d_G(v)$).

**Sommets particuliers:**

On appelle sommet isolé un sommet de degré 0. Un sommet de degré 1 est appelé sommet pendant (ou feuille). L'unique sommet qui est adjacent à un sommet pendant est appelé sommet support.

**Sous-graphe et sous-graphes induits :**

Le graphe $H$ est dit sous-graphe d'un graphe $G$ lorsque $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. Un sous-graphe $H$ de $G$ est dit induit si $E(H)$ contient toutes les arêtes de $G$ dont les deux extrémités sont dans $V(H)$. Pour définir un sous-graphe induit de $G$ il suffit de considérer un sous-ensemble $A$ de $G$. En outre, ce sous-graphe induit sera désigné par $G[A]$ . On dira aussi que $A \subseteq V(G)$ induit le sous-graphe correspondant. (voir Figure 1.1.1 ). Soit $v$ un sommet de $V$. On notera $G - v$ le sous-graphe $G[V - \{v\}]$.



$G = (V, E)$ $G_A = (V_A, E_A)$ $G_B = (V_B, E_B)$

Figure 1.1.1 : $G_A$ est sous-graphe de $G$ et $G_B$ est sous-graphe induit de $G$.

**Graphe partiel:**

On appelle graphe partiel de $G = (V, E)$ tout graphe $H = (V, E')$ tel que $E' \subseteq E$. Un sous-graphe d'un graphe partiel de $G$ est appelé sous-graphe partiel de $G$ (voir Figure 1.1.2 ).

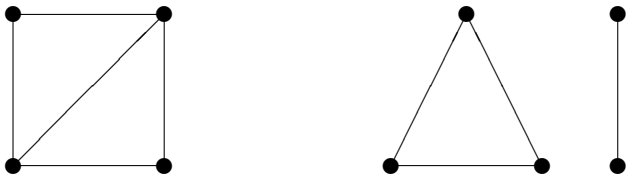


$G = (V, E)$ $H = (V, E')$

Figure 1.1.2 : $H$ est un graphe partiel de $G$.

**Connexité:**

Un graphe $G = (V, E)$ est dit connexe si pour toute paire des sommets $x$, $y$ de $V$, il existe une chaîne reliant $x$ à $y$. Dans la Figure 1.1.3 , le graphe $G$ est connexe puisque il contient une seule composante connexe et le graphe $H$ est non connexe car il contient deux composantes connexes.

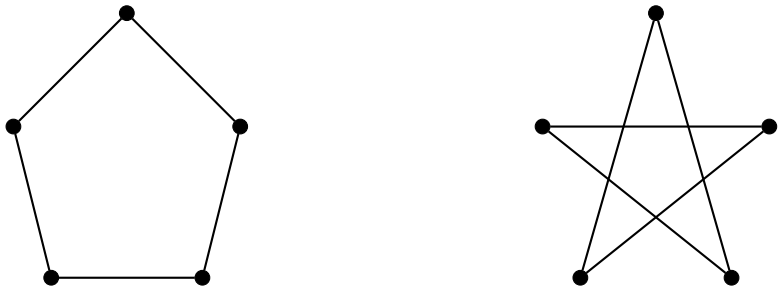


G H

Figure 1.1.3 : $G$ est connexe, $H$ est non connexe avec deux composantes connexe.

**La complémentarité**:

Soit $G$ un graphe quelconque. Le graphe complémentaire d'un graphe $G$, noté $\overline{G}$, est le graphe avec le même ensemble des sommets $V(G)$, mais les arêtes si $uv \in E(G)$ si et seulement si $uv \notin E(\overline{G})$, c'est à dire que $E(\overline{G}) = \overline{E(G)}$ (voir la Figure 1.1.4 ).



$(a)$ $(b)$

Figure 1.1.4 : (a) Un graphe $G$ et (b) son complémentaire $\overline{G}$.

**Couplage:**

On appelle couplage $S$ de $G$ un sous-ensemble d'arêtes de $E$ deux à deux non adjacentes. Un couplage maximum est un couplage de taille maximale et noté $\beta(G)$.

**Stabilité:**

Un ensemble des sommets de $G$ est stable (ou indépendant), si l'ensemble de ses sommets sont deux à deux non adjacents. Un stable maximum est un stable de cardinalité maximale, noté $\alpha(G)$.

### 1.1.2 Les graphes particuliers:

**Graphe complet:**

Un graphe complet est un graphe où chaque sommet est adjacent à tous les autres sommets. Le graphe complet d'ordre $n$ est noté $K_n$. Dans ce graphe chaque sommet est de degré $n-1$ (voir Figure 1.1.5 ).

**Graphe discret:**

On dit qu'un graphe $G = (V, E)$ est discret ou null s'il ne contient aucune arête, c'est-à-dire que $E = \phi$ et noté $\overline{K_n}$ (voir Figure 1.1.5 ).



(1) (2)

Figure 1.1.5 : (1) Un graphe complet ($K_4$) et (2) un graphe discret ($\overline{K_4}$).

**Graphes $k$-régulier:**

Un graphe $G = (V, E)$ est dit $k$-régulier si tous ses sommets sont de degré $k$, c'est-à-dire, $d_G(x) = k$ pour tout $x \in V$ (voir Figure 1.1.6 ).

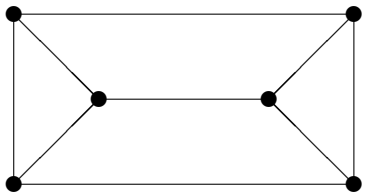


Figure 1.1.6 : Un graphe 3-régulier d'ordre 6.

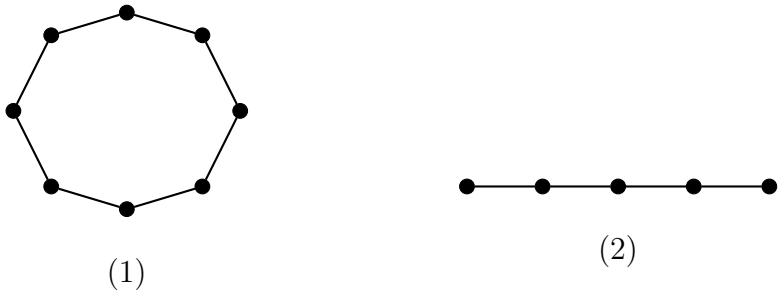
**Une chaîne:**

Une chaîne d'un graphe $G = (V, E)$ est une suite alternée des sommets et d'arêtes de la forme $(v_1, e_2, v_2, ..., e_k, v_k)$ où $k$ est un entier positif, les $v_i$ sont les sommets de $G$ et les $e_i$ sont les arêtes de $G$. L'entier $k-1$ est la longueur de la chaîne (voir Figure 1.1.7 ).

**Cycle:**

Le cycle de longueur $n$, noté $C_n$, est le seul graphe 2-régulier connexe à $n$ sommets. On peut

désigner le cycle par la suite de ses sommets $(v_1, v_2, v_3, ..., v_n)$, ses arêtes étant $v_i v_{i+1} \in E(C_n)$ pour tout $1 \leq i < n$ et l'arête $v_n v_1 \in E(C_n)$ (voir Figure 1.1.7 ).



(1) (2)

Figure 1.1.7 : (2) Une chaine $P_5$ et (1) un cycle $C_8$.

**Arbre:**

Un arbre est un graphe connexe sans cycle, il contient exactement $(n-1)$ arête et noté $T = (V, E)$. Un graphe sans cycle mais non connexe est appelé forêt. (voir Figure 1.1.8 )

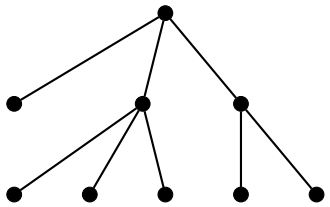


Figure 1.1.8 : Un arbre $T = (V, E)$.

**Graphe biparti:**

Un graphe biparti est un graphe $G = (V, E)$ d'ordre $n \geq 2$, dont l'ensemble des sommets est partitionné en deux stables $X$ et $Y$. Un graphe biparti complet est un graphe biparti maximal en terme de nombre d'arêtes, alors $\mid E \mid = \mid X \mid \cdot \mid Y \mid$, noté $K_{p,q}$ avec $p = \mid X \mid$ et $q = \mid Y \mid$ (voir Figure 1.1.9 ).

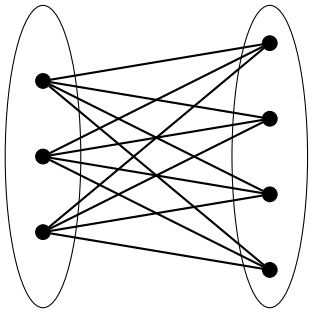
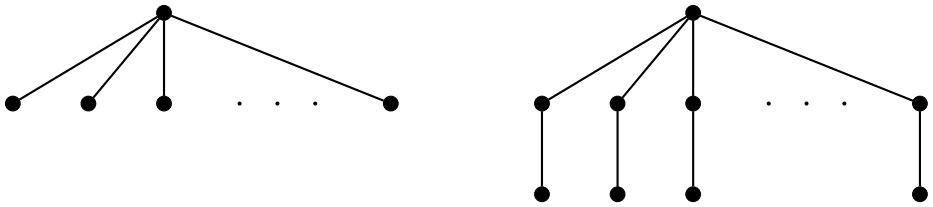


Figure 1.1.9 : Le graphe biparti complet $K_{3,4}$.

**Étoile:**

Une étoile est un cas particulier d'un graphe biparti complet dans lequel $|V_1| = 1$ et $|V_2| = q$. Elle est est notée par $K_{1,q}$. Le sommet de $V_1$ est appelé centre ou sommet central de l'étoile. Une étoile subdivisée est une étoile dont chaque arête est subdivisée une fois (voir Figure 1.1.10 ). Nous noterons $K^*_{1,q}$ l'étoile subdivisée obtenue à partir de l'étoile$K_{1,q}$.



(1) (2)

Figure 1.1.10 : (1) Une étoile $K_{1,q}$ et (2) une étoile subdivisée $K^*_{1,q}$.

**Double étoile:**

Double étoile est le graphe obtenu par deux étoiles $K_{1,r}$ et $K_{1,s}$ en ajoutant une arête reliant les deux centres, notée $S_{r,s}$. Un exemple de ce graphe est donné dans la Figure 1.1.11 .



Figure 1.1.11 : Double étoile $S_{r,s}$.

**Graphe joint:**

Le joint de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ avec $V_1 \cap V_2 = \phi$, est le graphe formé par $G_1$ et $G_2$ tel que chaque sommet de $V_1$ est adjacent à tous les sommets de $V_2$ (voir Figure 1.1.12 ).

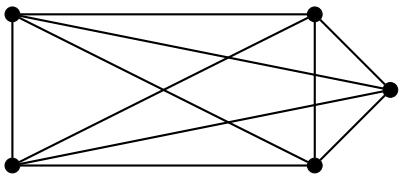


Figure 1.1.12 : $P_2$ joint $C_3$.

## 1.2 La domination

Dans cette partie, nous présentons les définitions principales liées à la domination. On pourra trouver des informations plus complétes dans les 2 livres de Haynes, Hedetniemi et Slater [1] [2].

**Définition 1.2.1** *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple et soit $D$ un sous-ensemble de $V$. On dit que $D$ est un ensemble dominant de $G$, si tout sommet de $V - D$ est adjacent à au moins un sommet de $D$. Le nombre de domination, noté par $\gamma(G)$, est le cardinal d'un ensemble dominant minimum de $G$.*

**Exemple 1.2.1** *Le nombre de domination du graphe $K_4 - e$ est $\gamma(K_4 - e) = 1$.*

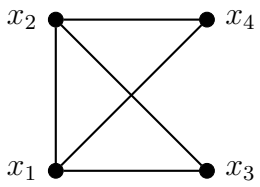



Figure 1.2.1 : Le graphe $K_4 - e$.

**Remarque 1.2.1** *Si $D$ est un ensemble dominant d'un graphe simple $G = (V, E)$, alors:*

1. Un sous-ensemble de $D$ n'est pas nécessairement un ensemble dominant de $G$, tandis que tout ensemble contenant $D$ est un ensemble dominant de $G$.

2. $D$ contient tous les sommets isolés de $G$.

3. Puisque l'ensemble des sommets d'un graphe est toujours un ensemble dominant et un dominant contient au moins un sommet, alors le nombre de domination est toujours défini et $1 \leq \gamma(G) \leq n$.

   - $\gamma(G) = 1$ si et seulement si $G$ possède un sommet $v$ de degré $n-1$ (sommet universel), dans ce cas $\{v\}$ est un ensemble dominant minimum de $G$.
   - $\gamma(G) = n$ si et seulement si $G = \overline{K_n}$, dans ce cas $V(G)$ est l'unique ensemble dominant de $G$.

### 1.2.1 Quelques résultats sur la domination:

On résume ci-dessous quelques bornes concernant le nombre de domination. Walikar Acharya et Sampathkumar [3] ont présenté deux bornes inférieur pour le nombre de domination $\gamma$.

**Théorème 1.2.1 (Walikar, Acharya et Sampathkumar [3])** *Pour tout graphe simple $G$ avec $n$ sommets et $m$ arêtes et de degré maximum $\Delta(G)$, on a:*

$$\gamma(G) \geq n - m \qquad et \qquad \gamma(G) \geq \frac{n}{\Delta(G)+1}.$$

**Exemple 1.2.2** *Le nombre de domination de $K_{1,3}$ tel que $\gamma(K_{1,3}) = n - m = \frac{n}{\Delta(K_{1,3})+1} = 1$.*

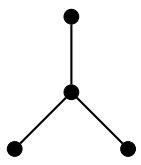


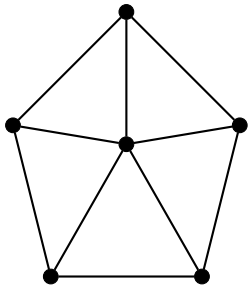
Figure 1.2.2 : Le graphe $K_{1,3}$.

Nous considérons maintenant des bornes supérieures sur $\gamma(G)$.

**Théorème 1.2.2 (Berge [4])** *Si $G$ est un graphe d'ordre $n$ et de degré maximum $\Delta(G)$, alors*

$$\gamma(G) \leq n - \Delta(G).$$

**Exemple 1.2.3** *Le nombre de domination de $G$ tel que $\gamma(G) = n - \Delta(G) = 1$.*



$G$

Figure 1.2.3 : Le graphe $G$.

Domke, Dunbar et Markus [5] ont caractérisé la classe des arbres $T$ atteignant la borne du Théorème précédent.

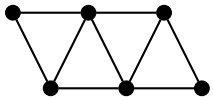
**Théorème 1.2.3 (Domke et al. [5])** *Soit $T$ un arbre d'ordre $n$ et de degré maximum $\Delta(T)$, alors $\gamma(T) = n - \Delta(T)$ si et seulement si $T$ est une araignée blessée.*

Nous considérons maintenant des bornes supérieures sur $\gamma(G)$. En 1962, Ore [6] a prouvé que le nombre domination d'un graphe sans sommet isolé est au plus la moitie de son ordre.

**Théorème 1.2.4 (Ore [6])** *Si $G$ est un graphe d'ordre $n$ sans sommets isolés, alors on a:*

$$\gamma(G) \leq \frac{n}{2}.$$

**Exemple 1.2.4** *Le nombre de domination de $G$ est $\gamma(G) = 2$.*



$G$

Figure 1.2.4 : Le graphe $G$.

Une caractérisation des graphes $G$ tels que $\gamma(G) = \frac{n}{2}$ a été donnée indépendamment par Payan et Xuang [7] et Fink, Jacobson, Kirch et Roberts [8].

**Théorème 1.2.5 (Payan, Xuang [7] et Fink et al. [8])** *Soit $G$ un graphe connexe d'ordre $n$. Alors $\gamma(G) = \frac{n}{2}$ si et seulement si $G$ est la couronne $J \circ K_1$ où $J$ est un graphe connexe, ou $G = C_4$.*

Jaeger et Payan [9] ont établi sur $\gamma(G)$ les résultats de type Nordhaus-Gaddum suivants.

**Théorème 1.2.6 (Jaeger, Payan [9])** *Si $G$ est un graphe d'ordre $n \geq 2$, alors*

$$3 \leq \gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n + 1.$$

$$2 \leq \gamma(G)\gamma(\overline{G}) \leq n.$$

Une caractérisation des graphes $G$ tels que $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = n + 1$, est donnée par Cockayne, Hedetniemi [10].

**Théorème 1.2.7 (Cockayne, Hedetniemi [10])** *Soit $G$ un graphe d'ordre $n$. Alors*

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = n + 1,$$

si et seulement si $G = K_n$ ou $\overline{G} = \overline{K_n}$.

**Exemple 1.2.5** *Le nombre de domination tel que $\gamma(K_5) + \gamma(\overline{K_5}) = n + 1 = 6$.*



$K_5$ $\qquad\qquad$ $\overline{K_5}$

Figure 1.2.5 : Un graphe $K_5$ et son complémentaire $\overline{K_5}$.

Une caractérisation des graphes $G$ tels que $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = n$ est donnée par Laskar, Peters [11].

**Théorème 1.2.8 (Laskar, Peters [11])** *Soit $G$ un graphe et $\overline{G}$ son complémentaire, si $G$ et $\overline{G}$ sont connexes, alors*

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n,$$

avec égalité si et seulement si $G = P_4$.

**Exemple 1.2.6** *Le nombre de domination tel que $\gamma(P_4) + \gamma(\overline{P_4}) = n = 4$.*



$P_4$ $\qquad\qquad$ $\overline{P_4}$

Figure 1.2.6 : Un graphe $P_4$ et son complémentaire $\overline{P_4}$.

# Chapitre 2

# APERÇU SUR LES FONCTIONS DE DOMINATION

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à trois fonctions de domination, à savoir, la fonction de domination romaine et sa version indépendante, la fonction de domination romaine double. Nous commencerons par donner la définition de chaque fonction et le contexte de son introduction. Nous présenterons par la suite les différents résultats existants dans la littérature, bornes simples et faciles à vérifier, relations existantes entre les paramètres associés à ces fonctions.

## 2.1 La domination romaine

**Définition 2.1.1** *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Une fonction de domination romaine* (FDR) *sur $G$ est une fonction $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ tel que chaque sommet $u$ avec $f(u) = 0$ est adjacent à au moins un sommet $v$ avec $f(v) = 2$. Le poids de $f$ est la valeur $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$. Le poids minimum de $f$ est appelé le nombre de domination romaine de $G$, noté $\gamma_R(G)$.*

**Exemple 2.1.1** *Le nombre de domination romaine de $C_4$ est $\gamma_R(C_4) = 3$.*

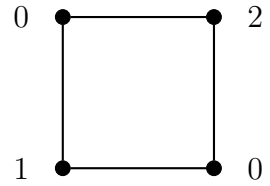



Figure 2.1.1 : Le graphe $C_4$.

### 2.1.1 Quelques résultats sur la domination romaine

Cockayne et al. [12] ont donné la chaîne de l'inégalité suivante.

**Proposition 2.1.1 (Cockayne et al. [12])** *Pour tout graphe $G$,*

$$\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G).$$

La borne supérieur est atteinte pour la clique $K_n$.

Une borne inférieure du nombre de domination romaine est donnée par Cockayne et al. [12].

**Proposition 2.1.2 (Cockayne et al. [12])** *Pour tout graphe $G$ d'ordre $n$ et de degré maximum $\Delta(G)$, on a*

$$\gamma_R(G) \geq \frac{2n}{\Delta(G)+1}.$$

**Exemple 2.1.2** *Le nombre de domination romaine de $K_4$ tel que $\gamma_R(K_4) = \frac{2n}{\Delta(G)+1} = 2$.*

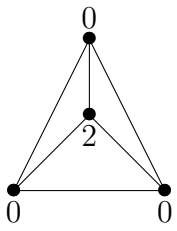



Figure 2.1.2 : Le graphe $K_4$.

**Proposition 2.1.3 (Chambers et al. [13])** *Si $G$ est un graphe d'ordre $n$ de degré maximum $\Delta(G)$, alors*

$$\gamma_R(G) + \Delta(G) \leq n + 1.$$

Cette borne est atteinte pour l'étoile $K_{1,n-1}$.

**Exemple 2.1.3** *L'étoile $K_{1,4}$ tel que, $\gamma_R(K_{1,4}) + \Delta(K_{1,4}) = n + 1 = 6$.*

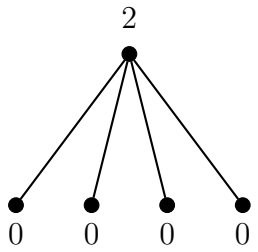



Figure 2.1.3 : L'étoile$K_{1,4}$.

**Théorème 2.1.1 (Chambers et al. [13])** *Si $G$ est un graphe connexe d'ordre $n$, alors*

$$\gamma_R(G) \leq \frac{4n}{5},$$

avec l'égalité si et seulement si $G$ est un $C_5$ ou $G$ est obtenu de $\frac{n}{5}P_5$ en identifiant chaque sommet d'un sous graphe connexe au centre d'une seule composante connexe de $\frac{n}{5}P_5$.

**Proposition 2.1.4 (Cockayne et al. [12])** *Si $G$ est un graphe d'ordre $n$ avec $\Delta(G) = n - 1$, alors*

$$\gamma_R(G) = 2.$$

**Exemple 2.1.4** *Le nombre de domination romaine de $G$ est $\gamma_R(G) = 2$.*

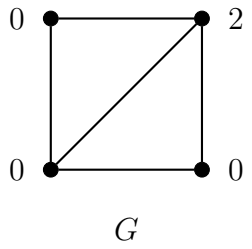



Figure 2.1.4 : Un graphe $G$.

Cockayne et al. [12] ont donné une caractérisation des graphes $G$ tels que $\gamma_R(G) = n$.

**Proposition 2.1.5 (Cockayne et al. [12])** *Si $G$ est un graphe sans sommets isolés d'ordre $n$, alors*

$$\gamma_R(G) = n,$$

si et seulement si $G = \frac{n}{2}K_2$.

**Exemple 2.1.5** *Le graphe $G$ avec $G = 4K_2$ tel que $\gamma_R(G) = n = 8$.*

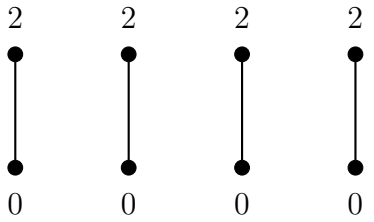



Figure 2.1.5 : Un graphe $G$.

**Proposition 2.1.6 (Cockayne et al. [12])** *Pour les chaînes $P_n$ et les cycles $C_n$, alors*

$$\gamma_R(P_n) = \gamma_R(C_n) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil.$$

**Exemple 2.1.6** *Le nombre de domination romaine de $P_5$ et $C_5$ est $\gamma_R(P_5) = \gamma_R(C_5) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil = 4$.*

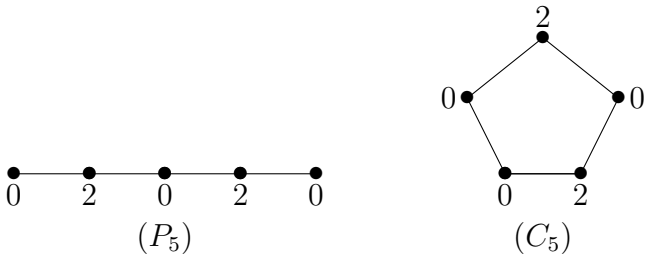



Figure 2.1.6 : Une chaine ($P_5$) et un cycle ($C_5$).

## 2.2 La domination romaine indépendante

Étant donné un graphe G = (V,E), une *FDR* $f = (V_0, V_1, V_2)$ de G est dite une fonction de domination romaine indépendante *(FDRI)* si $V_2 \cup V_1$ est un ensemble indépendant. Le nombre de domination romaine indépendant $i_R(G)$, est le poids minimum d'une *FDRI* de G. On dira que f est une $i_R(G) - fonction$ si $f$ est une *FDRI* de G et $w(f) = i_R(G)$. La domination romaine indépendante a été définie comme une perspective future pour l'étude des fonctions de domination romaine. Cependant elle reste très peu étudiée.

**Exemple 2.2.1** *Le nombre de domination romaine indépendante de* $P_4$ *est* $i_R(P_4) = 3$.

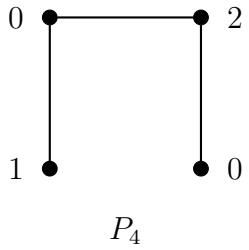



Figure 2.2.1 : Le graphe $P_4$.

### 2.2.1 Bornes sur $i_R(G)$

Par définition, tout graphe G vérifie $\gamma_R(G) \leq i_R(G)$. Adabi et al.ont remarqué dans [16] que pour tout graphe G d'ordre n, $i_R(G) \leqslant n$ avec l'égalité atteinte si, et seulement si G $\simeq mK_2 \cup \overline{K_l}$ pour $m$ et $l$ deux entiers naturels tels que $n = 2m + l$.

**Théorème 2.2.1** ***(Ebrahimi et al. [17]*** *Pour tout graphe $G$ d'ordre $n$*
*(i)* $i_R(G) \leq n - \Delta(G) + 1$.
*(ii)* $i_R(G) \leq n - \chi(G) + 2$ *avec l'égalité est atteinte si, et seulement si* $G \simeq K_n$.

**Théorème 2.2.2** ***(Ebrahimi et al.[17])*** *Pour tout arbre $T$ d'ordre $n \geq 3$,* $i_R(T) \leq \frac{4n}{5}$. *L'égalité est atteinte si, et seulement si $V(T)$ peut être partitionné en $k$ parties distinctes $X_1, ..., X_k$, tel que $G[X_i] \simeq P_5$ et le sous-graphe induit par les centres des $X_i$ est connexe.*

### 2.2.2 Relations avec $i(G)$

Il est montré dans [17] que pour tout graphe $G$, $i(G) \leq i_R(G) \leq 2i(G)$. Notons que Chellali et al [18] ont amélioré le résultat précédent en montrant que pour tout graphe connexe $G$, $i_R(G) \geq i(G) + \frac{\gamma(G)}{\Delta}$ et en caractérisant les graphes atteignant cette borne.
Les auteurs dans [17] ont posé le problème de la caractérisation des graphes $G$ tels que $i_R(G) = 2i(G)$. Dans [19], Chellali et Jafari Rad ont étudié ce problème pour la classe des arbres.
Adabi et al. [16] ont borné $i_R(G)$ en fonction de $\gamma_R(G)$, par le résultat suivant.

**Théorème 2.2.3** ***(Adabi et al.[16] )*** *Pour tout graphe $G$ de degré maximum $\Delta \geq 3$,*

$$i_R(G) \leq \gamma_R(G) + \frac{\gamma_R(G) - 2}{2}(\Delta - 3).$$

Les mêmes auteurs ont montré que la borne est atteinte pour les graphe de degré maximum au moins quatre si, et seulement si $(\gamma_R(G), i_R(G)) = (2, 2)$ ou $(\gamma_R(G), i_R(G)) = (4, 1+\Delta(G))$.
Il est clair que si $G$ est un graphe de degré maximum $\Delta = 3$, alors par le Théorème 2.2.3, on a $i_R(G) = \gamma_R(G)$. Aussi dans [20], Jafari Rad et Volkman ont montré que si $G$ est sans griffe, alors $i_R(G) = \gamma_R(G)$. Par ailleurs, le Théorème 2.2.3 a été amélioré par Jafari Rad [21].

**Théorème 2.2.4** ***(Jafari Rad [21])*** *Pour tout graphe $G$ de degré maximum $\Delta \geq 7$,*

$$i_R(G) \leq \left\lceil (\Delta - \frac{18}{5})\gamma_R(G) \right\rceil - 1.$$

## 2.3 La domination romaine double.

Nous nous sommes intéressés ici à un autre type de domination est la domination romaine double dans les graphes, et nous donnons quelques bornes sur les graphes.

**Définition 2.3.1** *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Une fonction de domination romaine double (ou juste* FDRD*) est une fonction $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ ayant la propriété que si $f(v) = 0$ pour un sommet $v$, alors $v$ à au moins deux voisins $a$ et $b$ tels que $f(a) = f(b) = 2$ ou un voisin $c$ tel que $f(c) = 3$, et si $f(v) = 1$, alors le sommet $v$ doit avoir au moins un voisin $w$ avec $f(w) \geq 2$. Le poids d'une* FDRD *$f$ est la somme $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$, et le poids minimum d'une* FDRD *sur $G$ est le nombre de domination romaine double de $G$, noté par $\gamma_{dR}(G)$.*

**Exemple 2.3.1** *Le nombre de domination romaine double de $\overline{3K_2}$ est $\gamma_{dR}(\overline{3K_2}) = 4$.*

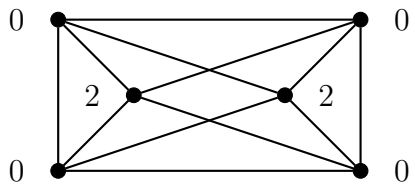



Figure 2.3.1 : Un graphe $\overline{3K_2}$.

### 2.3.1 Bornes sur $\gamma_{dR}(G)$

**Proposition 2.3.1** *[22]Pour tout graphe $G$ d'ordre $n$ et de degré maximum $\Delta(G)$, alors*

$$\gamma_{dR}(G) \leq 2\left(n - \Delta\left(G\right)\right) + 1.$$

**Preuve.** Soit $G$ un graphe d'ordre $n$ et soit $v$ un sommet de degré maximum. Alors la fonction $h = (N(v), V - N[v], \{v\})$ est une *FDRD* de $G$ de poids $2n - 2\Delta + 1$, et donc $\gamma_{dR}(G) \leq 2\left(n - \Delta\left(G\right)\right) + 1$. ■

Dans la suite, nous donnons une condition nécessaire des graphes connexes $G$ tels que $\gamma_{dR}(G)+\Delta(G) = n+1$ et une condition nécessaire des graphes connexes $G$ tels que $\gamma_{dR}(G)+\Delta(G) = n$. Pour tout sommet $v \in V$, nous écrivons $\overline{N}(v) = V(G)-N[v]$. Nous notons aussi

par $m(N(v), \overline{N}(v))$ le nombre d'arêtes ayant une extrémité dans $N(v)$ et l'autre extrémité dans $\overline{N}(v)$.

**Proposition 2.3.2** *Soit $G$ un graphe d'ordre $n$ de degré maximum $\Delta$. Si $\gamma_{dR}(G) = 2(n-\Delta)+1$, alors pour tout sommet $v$ de degré maximum on a:*

*(1) Chaque sommet de $N(v)$ est adjacent à au plus un sommet de $\overline{N}(v)$.*

*(2) $\overline{N}(v)$ est indépendant.*

*(3) $N(v)$ a au moins un sommet sans voisin dans $\overline{N}(v)$.*

**Preuve.** Soit $G$ un graphe avec $\gamma_{dR}(G) = 2(n-\Delta(G))+1$ et soit $v$ un sommet de degré maximum. Considérons une fonction *FDRD* $f$ qui attribue la valeur 3 à $v$, 0 aux voisins de $v$ et 2 aux sommets restants. Clairement, $f$ est un $\gamma_{dR}(G) - fonction$.
(1) Supposons au contraire que $v$ a un voisin $x$ ayant au moins deux voisins dans $\overline{N}(v)$. Ensuite, réaffectons $x$ à 3 au lieu de 0 et chaque sommet de $N(x) \cap \overline{N}(v)$ a 0 au lieu de 2, et ça donne une *FDRD* $g$ de poids $w(g) \leq 2(n-\Delta)$, qui contredit l'hypothèse $\gamma_{dR}(G) = 2(n-\Delta(G))+1$.
(2) Supposons au contraire qu'il y a une arête $xy$ dans $G\left[\overline{N}(v)\right]$, réaffectons $x$ à 3 au lieu de 2, et réaffecter $y$ à 0 au lieu de 2, et ça donne une *FDRD* $g$ de poids $w(g) \leq 2(n-\Delta)$, qui contredit l'hypothèse $\gamma_{dR}(G) = 2(n-\Delta(G))+1$.
(3) Enfin, si chaque sommet de $N(v)$ a un voisin dans $\overline{N}(v)$, réaffectons $v$ à 2 au lieu de 3, et ça donne une *FDRD* $g$ de poids $w(g) \leq 2(n-\Delta)$, qui contredit l'hypothèse $\gamma_{dR}(G) = 2(n-\Delta(G))+1$. ■

**Proposition 2.3.3** *Soit $G$ un graphe d'ordre $n$ et de degré maximum $\Delta(G)$. Si $\gamma_{dR}(G) = 2(n-\Delta(G))$, alors pour tout sommet $v$ de degré maximum on a:*

*(1) Chaque sommet de $N(v)$ est adjacent à au plus deux sommets dans $\overline{N}(v)$ et $N(v)$ contient au plus un sommet adjacent à deux sommets dans $\overline{N}(v)$.*

*(2) $G[\overline{N}(v)]$ contient au plus un arête.*

*(3) $\overline{N}(v) \neq \emptyset$.*

**Preuve.** Soit $G$ un graphe avec $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G))$ et soit $v$ un sommet de degré maximum. Considérons une $\gamma_{dR}(G) - fonction\ f$ avec $w(f) = 2(n - \Delta(G))$.
(1) Supposons au contraire que $v$ a un voisin $x$ ayant au moins trois voisins dans $\overline{N}(v)$. Alors assigner $v$ et $x$ à 3, chaque sommet de $(N(x) \cup N(v)) - \{x, v\}$ a 0 et les autres sommets a 2 produisent une *FDRD* $h$ de poids $w(h) \leq 2(n - \Delta(G)) - 1$, qui contredit l'hypothèse $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$. Supposons maintenant au contraire que $N(v)$ contient deux sommets $x$ et $z$ adjacents chacun à deux sommets dans $\overline{N}(v)$. Alors assigner $v$, $x$ et $z$ un 3, chaque sommet de $(N(x) \cup N(z) \cup N(v)) - \{z, x, v\}$ a 0 et les autres sommets a 2 produisent un *FDRD* avec un poids minimum à $\gamma_{dR}(G)$, une contradiction. D'où (1) suit.
(2) Supposons que $G[\overline{N}(v)]$ contient deux arêtes $xy$ et $zt$. Alors assigner $v$, $x$ et $z$ a 3, chaque sommet de $N(v) \cup \{y, t\}$ a 0 et les autres sommets a 2 produisent un *FDRD* de poids minimum à $\gamma_{dR}(G)$, une contradiction. Finalement, supposons que contient $P_3 = x - y - z$. Alors assignant $v$ et $y$ a 3, chaque sommet de $N(v) \cup \{x, z\}$ a 0 et les autres sommets a 2 produisent un *FDRD* de poids minimum à $\gamma_{dR}(G)$, une contradiction. D'où (2) suit.
(3) Supposons que $\overline{N}(v) = \emptyset$ et $v$ un sommet de degré maximum. Alors $d_G(v) = \Delta = n - 1$. Alors assignant $v$ a 3, chaque sommet de $N(v)$ a 0 produisent un *FDRD* de poids minimum à $\gamma_{dR}(G)$, une contradiction. D'où (3) suit. ■

### 2.3.2 La domination romaine double et la domination

Nous donnons d'abord les bornes inférieures et supérieures sur le nombre de domination romaine double en termes de nombre de domination.

**Proposition 2.3.4 (R.A Beeler et al.[15])** *Pour tout graphe $G$,*

$$2\gamma(G) \leq \gamma_{dR}(G) \leq 3\gamma(G).$$

**Exemple 2.3.2** *Le nombre de domination romaine double de $G$ est $\gamma_{dR}(G) = 3$ et $\gamma(G) = 1$.*

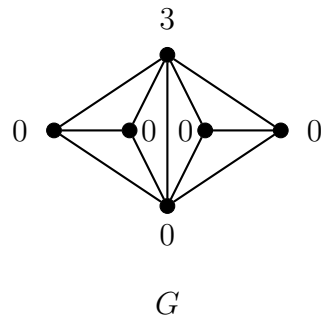



Figure 2.3.2 : Le graphe $G$.

**Proposition 2.3.5 (R.A Beeler et al.[15])** *Pour tout graphe $G$, $2\gamma(G) = \gamma_{dR}(G)$ si et seulement si $\gamma(G) = \gamma_2(G)$.*

### 2.3.3 La domination romaine double et la domination romaine

Nous commençons par montrer que pour tout graphe $G$, il existe une fonction $\gamma_{dR}$ de $G$ où aucun sommet n'est assigné un 1, c'est-à-dire que $V_1 = \emptyset$ pour certains $\gamma_{dR}$-fonction de $G$.

**Proposition 2.3.6 (R.A Beeler et al.[15])** *Dans la fonction dominante romaine double de poids $\gamma_{dR}(G)$, aucun sommet n'a besoin de recevoir la valeur* 1.

**Exemple 2.3.3** *Le graphe $P_4$ possède deux fonction de domination romaine double.*




Figure 2.3.3 : Le nombre de domination romaine double de $P_4$ est $\gamma_{dR}(P_4) = 5$.

**Corollaire 2.3.1 (R.A Beeler et al.[15])** *Pour tout graphe $G$,*

$$\gamma_{dR}(G) \leq 2\gamma_R(G)$$

avec égalité si et seulement si $G = \overline{K_n}$.

**Proposition 2.3.7 (R.A Beeler et al.[15])** *Pour chaque graphe $G$,*

$$\gamma_R(G) < \gamma_{dR}(G).$$

**Corollaire 2.3.2 (R.A Beeler et al.[15])** *Pour tout graphe connexe non trivial $G$,*

$$\gamma_R(G) < \gamma_{dR}(G) < 2\gamma_R(G).$$

**Proposition 2.3.8 (Ahangar et al. [14])** *Soit $G$ un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$. Alors:*

1. $\gamma_{dR}(G) = 3$ *si et seulement si* $\Delta(G) = n - 1$.
2. $\gamma_{dR}(G) = 4$ *si et seulement si* $G = \overline{K_2} \vee H$, *où* $H$ *est un graphe avec* $\Delta(H) \leq |V(H)| - 2$.
3. $\gamma_{dR}(G) = 5$ *si et seulement si* $\Delta(G) = n - 2$ *et* $G \neq \overline{K_2} \vee H$ *pour tout graphe* $H$ *d'ordre* $n - 2$.

*Soit $H$ la famille des graphes connexes $G$ d'ordre $n$ qui peuvent être construits de $\frac{n}{4}$ copies de $P_4$ en identifiait sous graphe connexe formé de l'ensemble des centres de $\frac{n}{4}P_4$.*

# Chapitre 3

# LA DOMINATION ROMAINE DOUBLE INDÉPENDANTE

Dans ce chapitre, nous introduisons la domination romaine double indépendante. Étant donné un graphe $G = (V, E)$, une *FDRD* $f = (V_0, V_1, V_2, V_3)$ est une fonction de domination romaine double indépendante (*FDRDI*) de $G$, si $V \setminus V0$ est un ensemble indépendant. Pour des raisons de concision on notera toute *FDRDI* $f = (V_0, V_1, V_2, V_3)$ par $f = (V_0, V_2, V_3)$ puisqu'il est clair qu'aucun *FDRDI* $f$ n'attribuera à un sommet la valeur 1 car un tel sommet devra avoir un voisin $v$ tel que $f(v) \geq 2$, ce qui viole l'indépendance de $V_1 \cup V_2 \cup V_3$. Par définitions, nous avons

$$\gamma_{dR}(G) \leq i_{dR}(G). \tag{3.0.1}$$

On commence par voir que tout graphe admet une *FDRDI*.

## 3.1 Fonction de domination romaine double indépendante

**Proposition 3.1.1** *Tout graphe $G$ possède une* FDRDI.

**Preuve.** Soit $S$ un ensemble indépendant maximal de $G$. Ensuite, chaque sommet de $V \setminus S$ a au moins un voisin dans $S$. Maintenant la fonction $f : V(G) \to \{0, 1, 2, 3\}$ qui affecte 3 aux sommets de $S$ et 0 aux autres est un *FDRDI* de $G$. ■

Par la Proposition 3.1.1, on peut définir le nombre de la domination romaine double indépendante, noté $i_{dR}(G)$, comme étant le poids minimum d'une *FDRDI* de G. On dit qu'une fonction $f$ est une $i_{dR}(G) - fonction$ si et seulement si $f$ est une *FDRDI* de $G$ et $w(f(G)) = i_{dR}(G)$.
Puisque dans tout *FDRDI* $f = (V_0, V_1, V_2, V_3)$, l'ensemble $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ est un ensemble indépendant dans $G$, donc par définition, $V_1 = \emptyset$ pour toute $i_{dR}(G) - fonction$. Cela s'avère utile pour traitant de certains résultats dans cette mémoire.

**Observation 3.1.1** *Dans tout* FDRDI $f : V(G) \to \{0, 1, 2, 3\}$, $f(v) \neq 1$ *pour tout* $v \in V(G)$.

Nous utilisons les résultats suivants dans cette mémoire.

**Proposition 3.1.2** *Pour tout graphe G, il existe une* $i_{dR}(G) - fonction$ $f = (V_0, V_1, V_2, V_3)$ *telle que* $V_1 = \emptyset$.

**Preuve.** Soit $f = (V_0, V_1, V_2, V_3)$ une $i_{dR}(G) - fonction$ telle que $|V_1|$ est aussi petit que possible. Nous affirmons que $f$ est une fonction souhaitée. Si $V \neq \emptyset$ et $v \in V_1$, alors $v$ a un voisin $u$ dans $V_2 \cup V_3$ et clairement la fonction $g : V \to \{0, 1, 2, 3\}$ définie par $g(v) = 0$, $g(u) = 3$ et $g(x) = f(x)$ pour $x \in V(G) - \{u, v\}$, est une $i_{dR}(G) - fonction$ telle que $|V_1^g| < |V_1^f|$ contredire le choix de f. D'où $V_1 = \emptyset$ comme souhaité. ■

## 3.2 Chaîne et Cycle

Le *NDRD* de $P_n$ et $C_n$ ont été donnés dans [24]. Les *NDRDI*s de $P_n$ et $C_n$ peuvent définis de la même manière que ceux donnés dans [24] comme suit.

**Proposition 3.2.1**

$$Pour\ n \geq 1,\ i_{dR}(P_n) = \begin{cases} n & si\ n \equiv 0(\text{mod}3), \\ n+1 & sinon. \end{cases}$$

$$Pour\ n \geq 3,\ i_{dR}(C_n) = \begin{cases} n & si\ n \equiv 0, 2, 3, 4(\text{mod}6), \\ n+1 & sinon. \end{cases}$$

**Preuve.** Considérez le chemin $v_1, ..., v_n$. Il est facile de voir que la fonction $f : V(G) \to \{0, 2, 3\}$ définie par $f(v_{3i+2}) = 3$ et $f(v_j) = 0$ pour les autres sommets si $n \equiv 0(\text{mod}3)$, et $f(v_{3i+2}) = f(v_n) = 3$ et $f(v_j) = 0$ pour les autres sommets si $n \equiv 1, 2(\text{ mod } 3)$ est un *FDRDI* de $P_n$ avec le poids $\gamma_{dR}(P_n)$. Puisque $\gamma_{dR}(P_n) \leq i_{dR}(P_n)$, il s'ensuit que $i_{dR}(P_n) = \gamma_{dR}(P_n)$.

Pour le cycle $C_n$, si on attribue 2 aux sommets d'indice pair et 0 aux autres quand $n$ est pair, si $n \equiv 3(\text{ mod } 6)$, alors on affecte 3 aux sommets d'indice $3i$ et 0 aux autres, si $n \equiv 1(\text{ mod } 6)$ on attribue 3 aux sommets $v_{3i}$, 2 à $v_1$ et 0 aux autres, et enfin si $n \equiv 5(\text{mod}6)$, on attribue alors 3 aux sommets $v_{3i}$ et $v_1$, et 0 aux autres. On a aussi $i_{dR}(C_n) = \gamma_{dR}(C_n)$. ■

**Exemple 3.2.1** *Le nombre de domination romaine double indépendante de* $C_6$ ($n \equiv 0(\text{ mod } 6)$) *est* $i_{dR}(C_6) = n = 6$,
*et de* $P_4$ ($n \equiv 1(\text{mod}3)$) *est* $i_{dR}(P_4) = n + 1 = 5$.

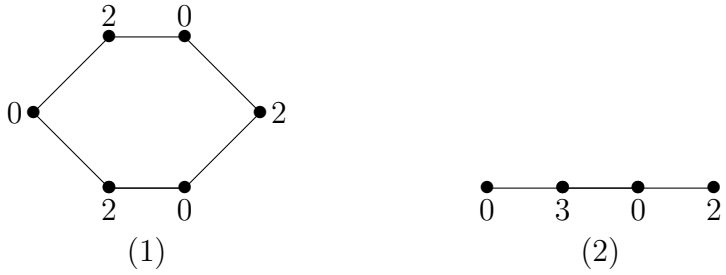



Figure 3.2.1 : (1) Un cycle $C_6$ et (2) une chaîne $P_4$.

**Corollaire 3.2.1** *Pour* $n \geq 1$, $i_{dR}(P_n) = \gamma_{dR}(P_n)$.

**Preuve.** Soit $P_n = v_1v_2...v_n$ et défini $f : V(P_n) \to \{0, 1, 2, 3\}$ par $f(v_{3i-1}) = 3$ pour $1 \leq i \leq \dfrac{n}{3}$ et $f(x) = 0$ sinon si $n \equiv 0 \pmod 3$, par $f(v_n) = 2$, $f(v_{3i-1}) = 3$ pour $1 \leq i \leq \dfrac{(n-1)}{3}$ et $f(x) = 0$ sinon si $n \equiv 1 \pmod 3$, et par $f(v_n) = 3$, $f(v_{3i-1}) = 3$ pour $1 \leq i \leq \dfrac{(n-2)}{3}$ et $f(x) = 0$ sinon si $n \equiv 2 \pmod 3$. Clairement, $f$ est un *FDRDI* de $P_n$ donnant $i_{dR}(P_n) \leq n$ si $n \equiv 0 \pmod 3$ et $i_{dR}(P_n) \leq n + 1$ si $n \equiv 1, 2 \pmod 3$. Maintenant, le résultat découle de $\gamma_{dR}(P_n) \leq i_{dR}(P_n)$. ■

**Exemple 3.2.2** *Le nombre de domination romaine double indépendante de* $P_5$ *est égal au nombre de domination romaine double de* $P_5$ ($i_{dR}(P_5) = \gamma_{dR}(P_5)$).




Figure 3.2.2 : Une chaîne $P_5$ tel que $i_{dR}(P_5) = \gamma_{dR}(P_5) = 6$.

**Corollaire 3.2.2** *Pour $n \geq 3$, $i_{dR}(C_n) = \gamma_{dR}(C_n)$.*

**Preuve.** Soit $C_n = v_1v_2...v_nv_1$ et défini $f : V(Cn) \to \{0, 1, 2, 3\}$ par $f(v_i) = 2$ si $i$ et impair et $f(x) = 0$ sinon lorsque $n \equiv 0(mod2)$, par $f(v_{3i-1}) = 3$ pour $1 \leq i \leq \dfrac{n}{3}$ et $f(x) = 0$ sinon lorsque $n \equiv 3 \pmod 6$, et par $f(v_n) = 2$, $f(vi) = 2$ pour tout $i$ impair et $f(x) = 0$ sinon lorsque $n \equiv 5, 1 \pmod 6$. Il est facile de vérifier que $f$ est un *FDRDI* de $C_n$ de poids $n$ si $n \equiv 0, 2, 3, 4 \pmod 6$ et de poids $n + 1$ si $n \equiv 1, 5 \pmod 6$. D'où $i_{dR}(C_n) \leq n$ lorsque $n \equiv 0, 2, 3, 4 \pmod 6$ et $i_{dR}(C_n) \leq n + 1$ lorsque $n \equiv 1, 5 \pmod 6$. Maintenant, le résultat découle de $\gamma_{dR}(C_n) \leq i_{dR}(C_n)$. ■

**Exemple 3.2.3** *Le nombre de domination romaine double indépendante de $C_5$ est égal au nombre de domination romaine double de $C_5$ ($i_{dR}(C_5) = \gamma_{dR}(C_5)$).*

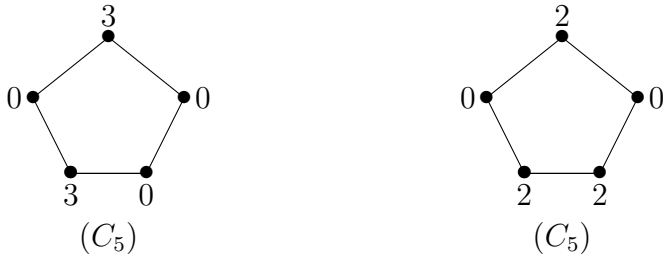



Figure 3.2.3 : Un cycle $C_5$ tel que $i_{dR}(C_5) = \gamma_{dR}(C_5) = 6$.

Dans ce qui suit, les *NDRDI*s des graphes complets et des graphes ($r \geq 2$)-partiels complets sont donnés.

**Proposition 3.2.2** *(i) Soit $G = K_{m_1,...,m_r}$ un ($r \geq 2$)-partiel complet de taille $m_1 \leq ... \leq m_r$. Alors,*

$$i_{dR}(G) = \begin{cases} 3 & si\ m_1 = 1. \\ 2m_1 & sinon. \end{cases}$$

*(ii) $i_{dR}(K_n) = 3$ pour $n \geq 2$ et $i_{dR}(K_n) = 2$ pour $n = 1$.*

**Exemple 3.2.4** *Le nombre de domination romaine double indépendante de* $K_{m_1,m_2,m_3}$ *est* $i_{dR}(K_{m_1,m_2,m_3}) = 3$ *car* $m_1 = 1$.

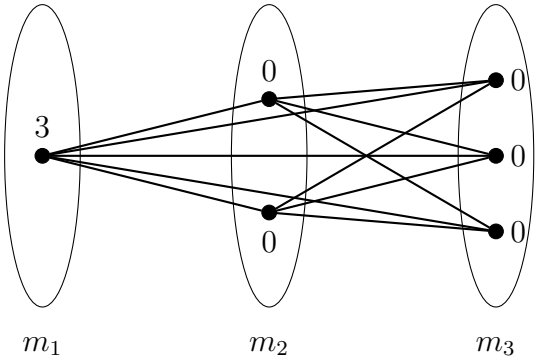



Figure 3.2.4 : Le graphe $K_{m_1,m_2,m_3}$.

*Le nombre de domination romaine double indépendante de* $K_{m_1,m_2,m_3}$ *est* $i_{dR}(K_{m_1,m_2,m_3}) = 2 \times 2 = 4$ *car* $m_1 = 2$.

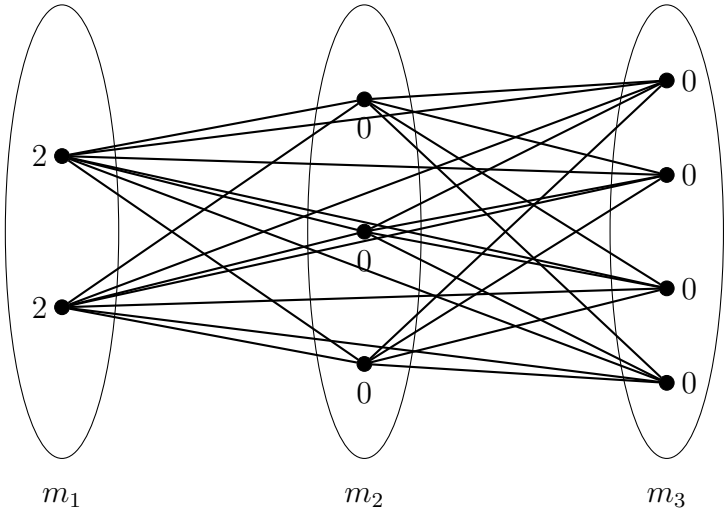



Figure 3.2.5 : Le graphe $K_{m_1,m_2,m_3}$.

**Observation 3.2.1** *Soit* $G$ *un graphe d'ordre* $n \geq 2$. *Alors*
*(i)* $i_{dR}(G) = 3$ *si et seulement si* $\Delta(G) = n - 1$.
*(ii)* $i_{dR}(G) \in \{4, 5\}$ *si et seulement si* $\Delta(G) = n - 2$.

**Preuve.** (i) Est trivial.

(ii) Soit $i_{dR}(G) = 4$. Ensuite, il existe deux sommet non adjacents $u$, $v$ assigné à la valeur 2, de sorte que tous les autres $G$ sont adjacents aux deux. Par conséquent, $\Delta(G) = n - 2$. soit $i_{dR}(G) = 5$. Ensuite, il existe deux sommets non adjacents $u$, $v$, où l'un d'eux est affecté de la valeur 3 et l'autre est affecté de la valeur 2, de sorte que chaque autre sommet de $G$ soit adjacent au sommet avec la valeur 3. Par conséquent, $\Delta(G) = n - 2$ aussi .
Inversement, soit $\Delta(G) = n - 2$. Ensuite, il existe deux sommets non adjacents $u$, $v$, de sorte que tous les autres sommets de $G$ sont adjacents à $u$, où que tous les autres sommets de $G$ sont adjacents à $v$, où les deux. Si $deg(v) = deg(u) = n - 2$, alors nous devrions attribuer la valeur 2 aux deux, et donc, $i_{dR}(G) = 4$. Si $deg(v) = n-2$ et $deg(u) \leq n-3$, où vice versa, alors nous devrions attribuer 3 au sommet de degré $n-2$ et la valeur 2 à l'autre, et donc, $i_{dR}(G) = 5$. ■

**Proposition 3.2.3** *Soit $G$ un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$. Alors $\gamma_{dR}(G) = k$ si seulement si $i_{dR}(G) = k$ pour $k \in \{3, 4, 5\}$ .*

**Preuve.**

1. Supposons que $\gamma_{dR}(G) = 3$. Il est clair que $i_{dR}(G) \geq 3$ et par proposition 2.3.8 (1), $\Delta(G) = n-1$. Supposons que $\deg(v) = n-1$. Assigner 3 à $v$ et 0 à d'autres sommets de $G$, introduit un *FDRDI* de $G$ impliquant que $i_{dR}(G) \leq 3$.
   Inversement, supposons que $i_{dR}(G) = 3$. Il est facile de voir que $\gamma_{dR}(G) = 3$.

2. Supposons que $\gamma_{dR}(G) = 4$. Par proposition 2.3.8 (2), $G = \overline{K}_2 \vee H$, où $H$ est un graphe avec $\Delta(H) \leq |V(H)| - 2$. Cela signifie qu'il existe des sommets $x, y$ et $xy \notin E(G)$ et $\deg(x) = \deg(y) = n-2$. Assigner 2 à $x, y$ et 0 à d'autres sommets de $G$ introduit un *FDRDI* de $G$ donnant $i_{dR}(G) \leq 4$ et il résulte de $\gamma_{dR}(G) \leq i_{dR}(G)$ que $i_{dR}(G) = 4$.
   Inversement, supposons que $i_{dR}(G) = 4$. Il facile de voir que $3 \leq \gamma_{dR}(G) \leq 4$, et par item ci-dessus on a $\gamma_{dR}(G) = 4$.

3. Supposons que $\gamma_{dR}(G) = 5$. Il est clair que $i_{dR}(G) \geq 5$ et par proposition 2.3.8 (3), $\Delta(G) = n-2$ et $G \neq \overline{K}_2 \vee H$ pour tout graphe $H$ d'ordre $n-2$. Cela signifie qu'il existe des sommets $x, y$ que $xy \notin E(G)$ et $\deg(x) = n-2$, $\deg(y) < n-2$. Assigner 3 à $x$, 2 à $y$, et 0 à d'autres sommets de $G$ introduit un *FDRDI* de $G$ et donc $i_{dR}(G) \leq 5$.

Inversement, supposons que $i_{dR}(G) = 5$. Il facile de voir que $3 \leq \gamma_{dR}(G) \leq 5$, si $\gamma_{dR}(G) = 3$ ou $\gamma_{dR}(G) = 4$ alors par 1,2, $i_{dR}(G) = 3$ et $i_{dR}(G) = 4$ une contradiction. Donc $\gamma_{dR}(G) = 5$.

■

## 3.3 Bornes

Dans cette section, nous présentons des bornes supérieures nettes sur le nombre de graphes à domination romaine double indépendante. Nous présentons d'abord une borne supérieure du nombre de domination romaine double indépendante d'un arbre en fonction de son ordre. Nous commençons par les lemmes suivants.

**Proposition 3.3.1** *Soit $G$ un graphe et $f = (V_0, V_1, V_2)$ une $i_R(G) - fonction$ de $G$. Alors $i_{dR}(G) \leq 2|V_1| + 3|V_2|$.*

**Preuve.** Soit $G$ un graphe et $f = (V_0, V_1, V_2)$ une $i_R(G) - fonction$ de $G$. On définit une fonction $g = (V_0', V_1', V_2', V_3')$ comme suit : $V_0' = V_0$, $V_1' = \emptyset$, $V_2' = V_1$ et $V_3' = V_2$. Notez que sous $g$, chaque sommet affecté à un 0 a un voisin attribué à 3, et aucun sommet n'est attribué à 1. Par conséquent, $g$ est une fonction domination romaine double indépendante. Ainsi, $i_{dR}(G) \leq 2|V_2'| + 3|V_3'| = 2|V_1| + 3|V_2|$, au choix. ■

**Lemme 3.3.1** *Soit $T$un arbre d'ordre au moins trois. Alors*
*(i) $T$ a une $i_{dR} - fonction$ $f = (V_0, \emptyset, V_2, V_3)$ telle que $L(T) \cap V_3 = \emptyset$.*
*(ii)Pour tout* FDRDI *$f = (V_0, \emptyset, V_2, V_3)$ de $T$, $V_2 \cap S(T) = \emptyset$.*

**Preuve.** (i) Soit $f = (V_0, \emptyset, V_2, V_3)$ une $i_{dR}(T) - fonction$ telle que $f(L(T))$ soit aussi petite que possible. Nous affirmons que $L(T) \cap V_3 = \emptyset$. Supposons, au contraire, que $L(T) \cap V_3 \neq \emptyset$. Soit $v \in L(T) \cap V_3$ et $u$ le sommet support de $v$. Si $(N(u) \setminus \{v\}) \cap (V_2 \cup V_3) \neq \emptyset$, alors la fonction $g : V(T) \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ définir par $g(v) = 2$ et $g(x) = f(x)$ pour $x \in V(T) - \{v\}$ est un $FDRDI$ de $T$ de poids inférieur à $w(f)$ qui est contradiction. Donc $(N(u) \setminus \{v\}) \cap (V_2 \cup V_3) = \emptyset$ et donc la fonction $g : V(T) \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ définie par $g(u) = 3$, $g(v) = 0$ et $g(x) = f(x)$ pour $x \in V(T) - \{u, v\}$ est une $i_{dR}(T)$-fonction telle

que $g(L(T)) < f(L(T))$ contredit le choix de $f$. Ainsi $L(T) \cap V_3 = \emptyset$ et donc $f$ est une $i_{dR}(T) - fonction$ désirée.
(ii) La preuve est claire. ■

Soit $\mathcal{F}$ la famille d'arbres $T$ qui peut être construite à partir de $k$ copies de $P_4$ en ajoutant $k-1$ arêtes incidentes pour supporter les sommets du $kP_4$ pour relier le graphe.

**Théorème 3.3.1** *Si $T$ est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors*

$$i_{dR}(T) \leq \frac{5n}{4}$$

*avec égalité si et seulement si $T \in \mathcal{F}$.*

**Proposition 3.3.2** *Pour tout graphe $G$ d'ordre $n$ de degré maximum $\Delta$,*

$$i_{dR}(G) \geq \frac{2n}{\Delta} + \frac{\Delta - 2}{\Delta} i(G)$$

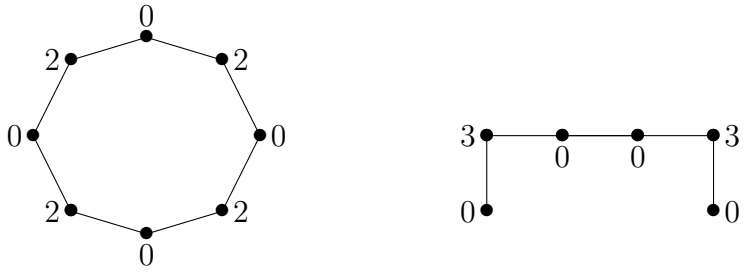
*et cette borne est tranchant.*

**Preuve.** Soit $f = (V_0, V_2, V_3)$ une $i_{dR}(G) - fonction$ de $G$. En utilisant l'observation 3.1.1 on peut supposer que $V_1 = \emptyset$. Soit $S = V_0 \cap N(V_3)$ et $T = V_0 \cap N(V2)$. Puisque chaque sommet de $V_3$ domine à la plus $\Delta$ des sommets de $S$, nous avons $|S| \leq \Delta|V_3|$. Puisque chaque sommet de $V_2$ domine au plus $\Delta$ des sommets de $T$ et chaque sommet de $T$ a au moins deux voisins dans $T$, on a $2|T| \leq |E(V_2, T)| \leq \Delta|V_2|$ donnant $|T| \leq \frac{\Delta}{2}|V_2|$. Par conséquent, $|V_0| = |S| + |T| \leq \Delta|V_3| + \frac{\Delta}{2}|V_2|$. Nous avons maintenant

$$\begin{aligned}
\Delta i_{dR}(G) &= \Delta(2|V_2| + 3|V_3|) \\
&= \Delta(|V_2| + |V_3|) + 2\Delta|V_3| + \Delta|V_2| \\
&\geq \Delta(|V_2| + |V_3|) + 2|V_0| \\
&= (\Delta - 2)(|V_2| + |V_3|) + 2n \\
&\geq (\Delta - 2)i(G) + 2n.
\end{aligned}$$

Puis que $V_2 \cup V_3$ est un ensemble dominant indépendant de $G$, il s'ensuit que $\Delta i_{dR}(G) \geq (\Delta - 2)i(G) + 2n$. La borne est tranchant pour les cycles $C_n$ où $n \equiv 0, 2, 3, 4 (\mathrm{mod} 6)$ et pour les chemins $P_n$ où $n \equiv 0 (\mathrm{mod} 3)$. ■

**Exemple 3.3.1** *Le nombre de domination romaine double indépendante de* $C_8$ *est* $i_{dR}(C_8) = \frac{2n}{\Delta} + \frac{\Delta-2}{\Delta} i(G) = 8$,
*et de* $P_6$ *est* $i_{dR}(P_6) = \frac{2n}{\Delta} + \frac{\Delta-2}{\Delta} i(G) = 6$ .




$(C_8)$ $(P_6)$

Figure 3.3.1 : Un cycle $C_8$ et une chaîne $P_6$.

## 3.4 Comparaison avec le nombre de domination indépendant

Dans cette partie nous verrons que pour tout graphe $G$, $2i(G) \leq i_{dR}(G) \leq 3i(G)$. De plus, si $G$ est un arbre alors $2i(G) + 1 \leq i_{dR}(G) \leq 3i(G)$, où une caractérisation des arbres atteignant les deux bornes est donnée.

**Proposition 3.4.1** *Pour tout graphe* $G$ *on a:*

$$2i(G) \leq i_{dR}(G) \leq 3i(G).$$

**Preuve.** Soit $D$ un $i(G)$-ensemble. Il est clair que $g = (V - D, \emptyset, D)$ est une *FDRDI* dans $G$, d'où $i_{dR}(G) \leq 3i(G)$.
Maintenant, soit $f = (V_0, V_2, V_3)$ une $i_{dR}(G) - fonction$, puisque $V_2 \cup V_3$ est un ensemble indépendant maximal dans $G$, alors $i(G) \leq |V_3| + |V_2|$. D'où
$i_{dR}(G) = 3|V_3| + 2|V_2| \geq 2(|V_3| + |V_2|) \geq 2i(G)$. ■

A noter que la borne supérieure est atteinte pour $K_n$ et la borne inférieure est atteinte pour $C_4$.

**Exemple 3.4.1** *Pour le graphe $K_5$ on a $i_{dR}(K_5) = 3i(K_5)$, et pour le graphe $C_4$ on a $i_{dR}(C_4) = 2i(C_4)$.*

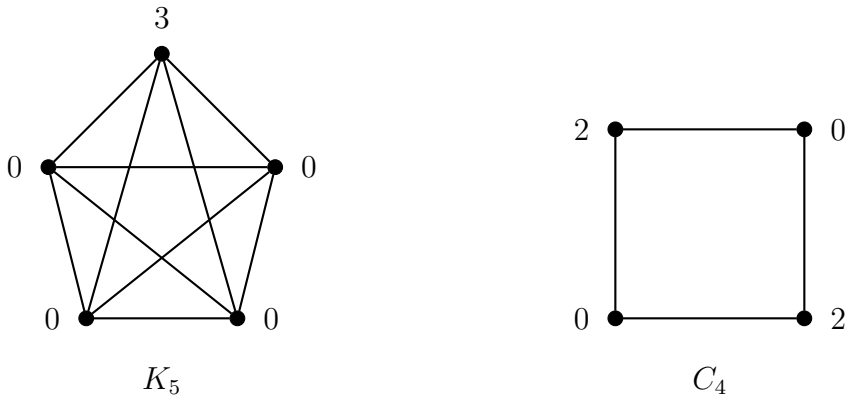



Figure 3.4.1 : Un graphe $K_5$ et un cycle ($C_4$).

**Proposition 3.4.2** *Si $G$ est un graphe tel que $i_{dR}(G) = 2i(G)$, alors pour toute $i_{dR}(G) - fonction$ $f = (V_0, V_2, V_3)$, on a $V_3 = \emptyset$.*

**Preuve.** Soient $G$ un graphe tel que $i_{dR}(G) = 2i(G)$ et $f = (V_0, V_2, V_3)$ une $i_{dR}(G) - fonction$. Alors
$2i(G) \leq 2|V_3^f| + 2|V_2^f| \leq 3|V_3^f| + 2|V_2^f| = i_{dR}(G) = 2i(G)$.
On a donc $2|V_3^f| + 2|V_2^f| = 3|V_3^f| + 2|V_2^f|$, d'où $|V_3^f| = \emptyset$. ■

Donner une condition nécessaire et suffisante pour les graphes $G$ avec $i_{dR}(G) = 3i(G)$.

**Proposition 3.4.3** *Pour tout graphe $G$, $i_{dR}(G) = 3i(G)$ si et seulement s'il existe $f$ une $i_{dR}(G) - fonction$ avec $V_2 = \emptyset$.*

**Preuve.** Supposons que $i_{dR}(G) = 3i(G)$, et soit $S$ un $i(G)$-ensemble. Alors
$f = (V(G) - S, \emptyset, S)$ est une $i_{dR}(G) - fonction$ avec $V_2 = \emptyset$.
Inversement, soit $f = (V_0, V_2, V_3)$ une $i_{dR}(G) - fonction$ telle que $V_2 = \emptyset$. Alors, $i_{dR}(G) = 3\,|V_3| \leq 3i(G)$. Il est claire que $i(G) \leq |V_3|$ puisque $V_3$ est un dominant indépendant dans $G$, d'où $i(G) = |V_3|$. Par conséquent $i_{dR}(G) = 3i(G)$. ■

Les observations suivantes découlent directement de la proposition précédente.

**Observation 3.4.1** *Si $i_{dR}(G) = 3i(G)$, alors pour toute $i_{dR}(G) - fonction$ $f = (V_0, \emptyset, V_3)$, on a $pn(v, V_3) \neq \emptyset$, pour tout sommet $v \in V_3$.*

**Observation 3.4.2** *Si $G$ est un graphe tel que $i_{dR}(G) = 3i(G)$, alors l'ensemble des sommets supports de $G$ est un ensemble indépendant.*

**Observation 3.4.3** *Si $G$ est un graphe tel que $i_{dR}(G) = 3i(G)$, alors il existe une $i_{dR}(G)$-fonction $f = (V_0, \emptyset, V_3)$ telle que tout sommet support de $G$ est dans $V_3$ et toute feuille est dans $V_0$.*

## 3.5 Comparaison avec le nombre de domination romaine indépendant

Dans le résultat suivant, nous fournissons des bornes sur $i_{dR}(G)$ en termes de nombre de domination romaine indépendante.

**Proposition 3.5.1** *([23]) Pour tout graphe $G$ d'ordre $n \geq 1$,*

$$i_R(G) + 1 \leq i_{dR}(G) \leq 2i_R(G).$$

*L'égalité dans la borne supérieure est valable si et seulement si $G = \overline{K_n}$.*

**Preuve.** D'abord nous prouvons la borne inférieure. Soit $f = (V_0, \emptyset, V_2, V_3)$ une $i_{dR}$-function de $G$. Si $V_3 \neq \emptyset$, alors chaque sommet de $V_3$ peut être réaffecté la valeur 2 et la fonction résultant sera un *FDRI* impliquant que $i_{R(G)} < i_{dR(G)}$. Suppose que $V_3 = \emptyset$. Alors $V_2 \neq \emptyset$ et tous les sommets de $V_0$ doivent avoir au moins deux voisins dans $V_2$. Dans ce cas, un sommet de $V_2$ peut être réaffecté la valeur 1 et la fonction résultante sera un *FDRI* produisant $i_{R(G)} < i_{dR(G)}$.
Ensuite ne montrons la borne supérieure. Soit $f = (V_0, V_1, V_2)$ une $i_R - fonction$ de $G$. Clairement, $g = (V_0', \emptyset, V_2', V_3')$ où $V_0' = V_0, V_2' = V_1$ et $V_3' = V_2$ est un *FDRDI* de $G$ implique que

$$i_{dR}(G) \leq 2|V_1| + 3|V_2| \leq 2(|V_1| + 2|V_2|) = 2i_R(G).$$

Clairement, $i_{dR}(\overline{K_n}) = 2n = 2i_{R(G)}$. Soit $i_{dR}(G) = 2i_R(G)$. Ensuite tout les inégalités se produisant dans la chaine à-dessus dé voit des égalité $|V_2| = 0$, $|V_0| = 0$ et $V_1 = V(G)$. Puisque $V_1$ est indépendant, on a $G = \overline{K_n}$. ■

## 3.6 Graphes $G$ d'ordre $n$ satisfaisant $i_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$

Dans cette section, nous fournissons une caractérisation de certaines classes de graphes $G$ avec $i_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$, comprenant les graphes réguliers, les graphes semi-réguliers, les graphes bipartis.

**Proposition 3.6.1** *Pour tout graphe G d'ordre n et de degré maximum $\Delta(G)$, on a*

$$i_{dR}(G) \leq 2(n - \Delta(G)) + 1.$$

**Preuve.** Soit $G$ un graphe d'ordre $n$ et soit $v$ un sommet de degré maximum. Alors la fonction $h = (N(v), V - N[v], \{v\})$ est une *FDRDI* de G de poids $2n - 2\Delta(G) + 1$, et donc $i_{dR}(G) \leq 2(n - \Delta(G)) + 1$. ■

Dans la suite, nous donnons une condition nécessaire des graphes connexes $G$ tels que $i_{dR}(G) + \Delta(G) = n + 1$ et une condition nécessaire des graphes connexes $G$ tels que $i_{dR}(G) + \Delta(G) = n + 1$. Pour tout sommet $v \in V$, nous écrivons $\overline{N}(v) = V(G) - N[v]$. Nous notons aussi par $m(N(v), \overline{N}(v))$ le nombre d'arêtes ayant une extrémité dans $N(v)$ et l'autre extrémité dans $\overline{N}(v)$.

**Proposition 3.6.2** *Soit G un graphe d'ordre n et de degré maximum $\Delta(G)$. Si $i_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$, alors pour tout sommet v de degré maximum on a:*

1. *Chaque sommet de $N(v)$ est adjacent à au plus deux sommets dans $\overline{N}(v)$.*
2. *$\overline{N}(v)$ est indépendant.*
3. *$N(v)$ a au moins un sommet sans voisin dans $\overline{N}(v)$.*

***Preuve.*** *Soit $G$ un graphe avec $i_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$ et soit $v$ un sommet de degré maximum. Considérons une* FDRDI *$f$ qui attribue la valeur 3 à $v$, 0 aux voisins de $v$ et 2 aux sommets restants. Clairement, $f$ est une $i_{dR}(G) - fonction$.*
*(1) Supposons au contraire que $v$ a un voisin $x$ ayant au moins deux voisins dans $\overline{N}(v)$. Réaffectons $x$ à 3 au lieu de 0 et chaque sommet de $N(x) \cap \overline{N}(v)$ à 0 au lieu de 2, et ça donne une* FDRD *$g$ de poids $w(g) = 2(n - \Delta(G))$, ce qui contredit l'hypothèse $\imath_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$.*
*(2) Supposons au contraire qu'il y a une arête $xy$ dans $G\left[\overline{N}(v)\right]$, réaffectons $x$ à 3 au lieu de 2, et réaffectons $y$ à 0 au lieu de 2, et ça donne une* FDRDI *$g$ de poids $w(g) \leq 2(n - \Delta(G))$, ce qui contredit l'hypothèse $i_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$.*
*(3) Enfin, si chaque sommet de $N(v)$ a un voisin dans $\overline{N}(v)$. Réaffectons $v$ à 2 au lieu de 3, et ça donne une* FDRDI *$g$ de poids $w(g) \leq 2(n - \Delta(G))$, ce qui contredit l'hypothèse $i_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$.* ■

**Proposition 3.6.3** *Soit $G$ un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$. Alors*

1. *$i_{dR}(G) = 3$ si et seulement si $\Delta(G) = n - 1$.*
2. *$i_{dR}(G) = 4$ si et seulement si $G = \overline{K_2} \vee H$, où $H$ est un graphe avec $\Delta(H) \leq |V(H)| - 2$.*
3. *$i_{dR}(G) = 5$ si et seulement si $\Delta(G) = n-2$ et $G \neq \overline{K_2} \vee H$ pour tout graphe $H$ d'ordre $n - 2$.*

*Soit $H$ la famille des graphes connexes $G$ d'ordre $n$ qui peuvent être construits de $\frac{n}{4}$ copies de $P_4$ en identifiait sous graphe connexe formé de l'ensemble des centres de $\frac{n}{4}P_4$.*

**Observation 3.6.1** *Soit $G$ un graphe d'ordre $n \geq 2$ et de degré maximum $\Delta(G)$.*

1. Si $\Delta(G) \leq 2$, alors $i_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$ si et seulement si $G = pK_1 \cup H$, où $H \in \{P_2, P_3, P_4, C_3\}$ et $p + |V(H)| = n$.
2. Si $\Delta(G) = n - 1$, alors $i_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$.
3. Si $\Delta(G) = n - 2$, alors $i_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$ si et seulement si $G \neq \overline{K_2} \vee H$ pour tout graphe $H$ d'ordre $n - 2$.

**Preuve.** Soit $G$ un graphe d'ordre $n \geq 2$ et de degré maximum $\Delta(G)$ et $i_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$.
1. Il est clair que $G = (n-2)K_1 \cup P_2$ pour $\Delta(G) = 1$, et $G = pK_1 \cup H$, avec $H \in \{P_3, P_4, C_3\}$ et $p + |V(H)| = n$, pour $\Delta(G) = 2$.
2. Si $\Delta(G) = n - 1$, alors $G$ a sommet universel $v$, et donc la fonction $f$ telle que $f(v) = 3$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \in V - \{v\}$ est une *FDRDI* de poids $w(f) = 3 \geq i_{dR}(G)$, et puisque $i_{dR}(G) \geq 3$, on a $i_{dR}(G) = 3$.
3. Si $\Delta(G) = n - 2$, alors par Proposition 3.6.3- (3), on a $i_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$ si et seulement si $G \neq \overline{K_2} \vee H$ pour tout graphe $H$ d'ordre $n - 2$. ■

**Théorème 3.6.1** *Soit $\Delta(G) \geq 1$ et $G$ un graphe $\Delta$-régulier d'ordre $n$. Alors $i_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$ si et seulement si $G = K_n$.*

**Preuve.** Soit $G$ un graphe régulier avec $i_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$. Si $\Delta(G) = 1$, alors $G = K_2$. Supposons maintenant que $\Delta(G) \geq 2$, et soit $v$ un sommet de $G$. Si $\overline{N}(v) \neq \emptyset$, alors par la condition (2) de la proposition 3.6.2, chaque sommet $x$ de $\overline{N}(v)$ est adjacent à tout sommet de $N(v)$, ceci contredit la condition (3) de la proposition 3.6.2. Donc $\overline{N}(v) = \emptyset$, et $d(v) = n - 1$, et puisque $G$ est régulier, $G = K_n$.
Inversement, soit $G$ le graphe complet $K_n$. Donc $i_{dR}(G) = 3 = 2(n - \Delta(G)) + 1$. ■

**Théorème 3.6.2** *Soit $G$ un graphe semi-régulier d'ordre $n \geq 3$ et de degré maximum $\Delta(G)$. Alors $i_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$ si et seulement si $G = (n-2)K_1 \cup K_2$, ou $K_p \vee \overline{\frac{q}{2}K_2}$, avec $p + q = n$, $p \geq 1$ et $q \geq 2$, ou $\Delta(G) = n - 2$ et $G \neq \overline{K_2} \vee H$ pour tout graphe $H$ d'ordre $n - 2$.*

**Preuve.** Soit $G$ un graphe semi-régulier d'ordre $n$ tel que $i_{dR}(G) = 2(n-\Delta(G))+1$. Notons que chaque sommet de $G$ est de degré $\Delta(G)$ ou $\Delta(G) - 1$. Si $\Delta(G) = 1$, alors clairement $G = (n-2)K_1 \cup K_2$. Supposons que $\Delta(G) \geq 2$. Soit $v$ un sommet de degré maximum. D'après la proposition 3.6.2, $m(N(v), \overline{N}(v))$ satisfait $(\Delta(G)-1)\left|\overline{N}(v)\right| \leq m(N(v), \overline{N}(v)) \leq |N(v)| - 1$. Donc $(\Delta(G) - 1)(n - \Delta(G) - 1) \leq \Delta(G) - 1$, et ainsi $\Delta(G) \geq n - 2$.
Si $\Delta(G) = n - 1$, alors $G$ possède au moins un sommet de degré $n - 1$ et au moins deux sommets de degré $n-2$, et donc $G$ est le joint d'une clique $K_p$ et d'un graphe complet moins couplage parfait $\overline{\frac{q}{2}K_2}$, avec $p + q = n$, $p \geq 1$ et $q \geq 2$.

Si $\Delta(G) = n - 2$, alors d'après l'observation 3.6.1 $G \neq \overline{K_2} \vee H$ pour tout graphe $H$ d'ordre $n - 2$.

Inversement, soit $G$ un graphe semi-régulier d'ordre $n \geq 3$ et de degré maximum $\Delta(G) \in \{1, n-1, n-2\}$ et $G \neq \overline{K_2} \vee H$ pour tout graphe $H$ d'ordre $n - 2$. Si $G = (n-2)K_1 \cup K_2$. Donc $f(K_2) = 3$ et $f(K_1) = 2$. C'est a dire $i_{dR}(G) = f(V) = f(K_2) + (n-2)f(K_1) = 3 + 2(n-2) = 2(n - \Delta(G)) + 1$. Si $K_p \vee \overline{\frac{q}{2}K_2}$, alors $i_{dR}(G) = 3 = 2(n - \Delta(G)) + 1$. Si $\Delta(G) = n - 2$ et $G \neq \overline{K_2} \vee H$ pour tout graphe $H$ d'ordre $n - 2$, alors $i_{dR}(G) = 3 + 2 = 2(n - \Delta(G)) + 1$. ■

# Conclusion

Au cours de cette mémoire, Nous avons sommes intéressés à la notion de la domination romaine double indépendante dans les graphes simples. En général, la détermination de $i_{dR}(G)$ est un problème difficile pour un graphe quelconque. Par conséquent, nous nous sommes focalisés sur :

- La caractérisation des cycles et des chaînes tels que $i_{dR}(G) = \gamma_{dR}(G)$.
- Les bornes sur $i_{dR}(G)$ pour tout graphe $G$ en termes de $i(G)$ et $i_R(G)$.
- La détermination une borne inférieure sur $i_{dR}(G)$ en fonction de $n$ et $\Delta(G)$.
- La caractérisation de bornes existantes pour certaines classes de graphes à savoir les graphes réguliers, les graphes semi-réguliers, les graphes bipartis.

En perspectives, La caractérisation de bornes existantes pour tout graphe $G$.

# Bibliographie


[1] T.W.Haynes, S.T. Hedetniemi, et P.J. Slater (eds), Fundamentals of Domination in Graphs, Marcel Dekker, Inc. New York (1998).

[2] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, et P.J. Slater (eds), Domination in Graphs : Advanced Topics, Marcel Dekker, New York (1998).

[3] H.B. Walikar and B.D. Acharya and E. Sampathkumar. Recent develepments in the theory of domination in graphs. In MRI Lecture Notes in Math., Mahta Reseearch Instit., Allahabad volume 1,1979.

[4] C. Berge, Theory of Graphs and its Applications, Methuen, London, 1962.

[5] G. S. Domkee J. E. Dumbar, L. R. Markus, Gallai-type theorems and domination parameters, Discrete, Matimatics 167/168 (1997) 237-248.

[6] O. Ore, theory of graphs, Amer. Math soc. Colloq. Publ. 38 (1962).

[7] C. Payan and N.H. Xuong, Domination-balanced graphs, J. Graph Theory, 6:23–32, 1982.

[8] J.F. Fink, M. S. Jacobson, L. F. Kinch, and J. Roberts. The bondage number of a graph. Discrete Math., 86:47–57, 1990.

[9] F. Jaeger and C. Payan. Relations du type Nordhaus-Gaddum pour le nombred'absorption d'un graphe simple. C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. A 274 (1972) 728-730.

[10] Cockayne and S.T. Hedetniemi, Towards a theory of domination in graphs, Networks 7 (1977), 247–261.

[11] R Laskar and K Peters. Vertexand edge domination parameters in graphs. Congr. Numer., 48:291–305, 1985.

[12] E. J. Cockayne, P. A. Dreyer Jr., S. M. Hedetniemi, and S. T. Hedetniemi, Roman domination in graphs, Discrete Mathematic 278 (2004) 11-22.

[13] E. W. Chamberss, B. Kinnersley, N. Prince and D. B. West, Extremal problems for Roman domination, SIAM J. Discreter. Math. 23 (2009) 1575-1586.

[14] Hossein Abdollahzadeh Ahangar, Mustapha Chellali and Seyed Mahmoud Sheikholeslami, On the Double Roman Domination in Graphs, Discrete Applied Mathematics 232, 1-7, 2017.

[15] Robert A. Beeler, Teresa W. Haynes and Stephen T. Hedetniemi, Double Roman domination, Discrete Applied Mathematics 211, 23-29, 2016.

[16] M. Adabi ,E. Ebrahimi Targhi ,N. Jafari Rad et M. Saied Moradi. Properties of independent Roman domination in graphs. Australas.J.Combin. 52(2012)11-18.

[17] E. Ebrahimi Targhi ,N. Jafari Rad, C.M. My nhardt et Y. Wu. Bounds for independent Roman domination in graphs. J.of Combin .Math.and Combinatorial Computing 80(2012)351 - 365.

[18] M.Chellali,T.W.HaynesetS.T.Hedetniemi.Lowers bounds on the Roman and independent Roman domination numbers. Appl.Anal.DiscretMath 10(2016)65-72.

[19] M.Chellali et N.Jafari Rad.Trees with independent Roman domination number twice the independent domination number. Discrete Mathematics,Algorithms and Applications 7(04)(2015)1550048.

[20] N.Jafari Rad et L.Volkman.Roman domination perfect graphs. Annalele St. Univ.Ovid.Const. 19(2011)167-174.

[21] N.Jafari Rad.Note on the independent Roman domination number of a graph. J.of Combin.Math.and Combinatorial Computing 95(2011)119-125.

[22] Nader Jafari Rad, Hadi Rahbani, Some progress on the double Roman domination in graphs, Discussiones Mathematicae Graph Theory 39 (2019) 41-53 doi:10.7151/dmgt.2069.

[23] Maimani, H. R., Momeni, M., Nazari-Moghaddam, S., Rahimi Mahid, F., Sheikholeslami, S. M. (2020). Independent double Roman domination in graphs. Bull. Iran. Math. Soc. 46(2):543-555.

[24] Ahangar, H.A., Chellali, M., Sheikholeslami, S.M.: On the double Roman domination in graphs.Discret. Appl. Math. 232, 1-7 (2017)

.