RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ YAHIA FARÈS DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

par

OULD CHERCHALI Marwa

L'EXISTENCE GLOBALE ET LA STABILISATION UNIFORME DE LA SOLUTION DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER D'ORDRE QUATRE

Soutenue publiquement le 22 juin 2022 devant le jury composé de :

Président :	Mr. MALOUM Khaled.	$M.A.A$	Université de Médéa
Examinateur :	Mr. MEKDACHE Noureddine.	$M.A.A$	Université de Médéa
Encadreur :	Dr. RAFA Said.	$M.C.B$	Université de Médéa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2021-2022


Dédicace
Ce modeste ouvrage, je le dédie
A mes très chers parents
A mes très chers sœurs et mon frère
A mon neveu Mohamed Wassim
A mes nièces Sirine et Basma
A mes très chers amis
Et à toute ma famille



Remerciements

Tout d'abord je remercie **Allah** le tout puissant, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce présent travail.

Je tiens à remercier Monsieur **RAFA Said** d'avoir accepté d'encadrer ce mémoire avec beaucoup de patience, de sérieux et de compétence. Il a su motiver chaque étape de mon travail par des remarque pertinentes.

Mes remerciements vont aussi aux membres de jury **Mr. MALOUM Khaled** et **Mr. MEKDACHE Noureddine** d'avoir accepté d'examiner, mon travail.

Mes sincères remerciements à mes parents pour touts leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études .

Je tiens à remercier mes chères sœurs et mon cher frère, chacun par son nom pour leur encouragements permanent, et leur soutien moral.

De tout cœur je remercie ma famille, qui par leur affection et bienveillance m'ont permis d'accomplir ce travail dans la sérénité.

Pour toutes les modestes connaissances qu j'ai acquis depuis le primaire jusqu'à l'université surtout **Mme. AZROU Nadia** pour ses efforts à me soutenir.

Enfin je tiens à remercier tous mes amis, surtout Nour El ouiam, Noudjoude, Wahiba et Imane pour toute leur compréhension et tout leur encouragement dans la réalisation de ce travail.

Résumé

Dans ce travail, on va étudier l'existence globale et la stabilisation frontière pour l'équation de Schrödinger de quatrième ordre dans un domaine régulier et borné Ω de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ suivant :

$$(P):\begin{cases}\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}=i\Delta^2 u(x,t) & \text{dans } \Omega\times(0,+\infty),\\ u(x,0)=u_0(x) & \text{dans } \Omega,\\ u(x,t)=\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial \nu}=0 & \text{sur } \Gamma_1\times(0,+\infty),\\ \Delta u(x,t)=0 & \text{sur } \Gamma_0\times(0,+\infty),\\ \dfrac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial \nu}=m(x)\cdot\nu(x)\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} & \text{sur } \Gamma_0\times(0,+\infty).\end{cases}$$

Nous prouvons que la solution décroît de façon exponentielle dans un espace d'énergie approprié, nous prouvons la décroissance exponentielle de l'énergie de la solution.
En utilisant les techniques des multiplicateurs et des arguments de compacité/unicité.

Mots clés : Équation de Schrödinger de quatrième ordre, contrôlabilité exacte, stabilisation uniforme, existence globale, contrôle frontière.

Abstract

In this work, we study the global existence and boundary stabilization for the fourth order Schrödinger equation in a regular and smooth bounded domain Ω of $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ as follows :

$$(P): \begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = i\Delta^2 u(x,t) & \text{in } \Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,t) = u_0(x) & \text{in } \Omega, \\ u(x,t) = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \Gamma_1 \times (0,+\infty), \\ \Delta u(x,t) = 0 & \text{on } \Gamma_0 \times (0,+\infty), \\ \dfrac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial \nu} = m(x)\cdot\nu(x)\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} & \text{on } \Gamma_0 \times (0,+\infty). \end{cases}$$

We prove that the solution decays exponentially in an appropriate energy space, we prove the exponential decay of the energy of the solution.
Both results are established by using multiplier techniques and compactness/uniqueness arguments.

Keywords : Fourth order Schrödinger, exact controlability, uniforme stabilization, boundary control.

Table des matières

Résumé **IV**

Abstract **V**

Notations **VIII**

Introduction **3**

1 Rappels et généralités **4**

1.1 Introduction 4
1.2 Généralités sur des espaces fonctionnels 4
1.3 Espace de Sobolev, résultats de densité 6
1.4 Opérateurs bornés et non bornés 10
1.5 Opérateurs dissipatifs et m-dissipatifs 13
1.6 Semi-groupe, existence et unicité de la solution 13
1.7 stabilité des semi-groupes 16

2 Existence et unicité de la solution du système (P) **18**

2.1 Position du problème 18
2.2 Existence et unicité de la solution du système (P) 19

3 Stabilité frontière de la solution du système (P) **24**

Conclusion **39**

Bibliographie **41**

Notations

$E :=$ espace de Banach.

$\mathcal{H} :=$ espace de Hilbert.

$H^1 :=$ espace de Sobolev.

$\mathbb{R} :=$ ensemble des nombres réelles.

$\mathbb{C} :=$ ensemble des nombres complexes.

$\Re e :=$ la partie réelle d'un nombre complexe.

$\mathcal{A} :=$ opérateur.

$D(\mathcal{A}) :=$ le domaine de définition de l'opérateur $\mathcal{A}$.

$\overline{D(\mathcal{A})} :=$ adhérence de l'ensemble $D(\mathcal{A})$.

$\mathcal{A}^* :=$l'adjoint de l'opérateur $\mathcal{A}$.

$L(E,F) :=$ espace des opérateurs linéaires continus de E dans F.

$\mathcal{D}(\Omega) :=$ espace des fonctions dérivables à support compact dans Ω.

$\mathcal{D}'(\Omega) :=$ l'espace des distribution sur Ω.

$D^{\alpha}v :=$ la dérivée au sens de distribution de v.

$\|.\| :=$ la norme.

$(,)_{\mathcal{H}} :=$ le produit scalaire sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

$|.| :=$ le module.

Γ_0, Γ_1 : deux parties disjointes de Γ.

$\Gamma :=$ la frontière de Ω.

$\Delta v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} :=$ Laplacien de v.

$\Delta^2 v = \Delta(\Delta v) =$ bi-laplacien de u.

$\nabla = (\frac{d}{dx_1}, .., \frac{d}{dx_n})^T :=$ le gradient dans $\mathbb{R}^n$.

$\text{div } v = Dv = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} :=$ divergence de v.

$\zeta^0 :=$ l'espace des fonctions continues.

$C(\overline{\Omega}) :=$ fonctions continues sur $\overline{\Omega}$.

$x :=$ la variable du domaine Ω, $t \in [0, +\infty] :=$variable de temps.

$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} :=$la dérivée de u par rapport t.

$m(x) = x - x_0 :=$ la masse (x_0 est un point fixé à l'extérieur de Ω).

Introduction

L'équation de Schrödinger d'ordre quatre est apparue dans plusieurs domaines comme la physique de plasma, communications optiques [4], la physique atomique, la chimie ou encore la biologie, etc....

Les problèmes d'existence et d'unicité de la solution pour sa forme non linéaire ont été étudié intensivement dans [6, 3, 5], les problèmes de contrôle pour l'équation linéaire de Schrödinger d'ordre quatre ont été récemment considérés dans [7, 17]. Dans [7] ils ont montré que la premier équation de système (P) avec le contrôle frontière L^2-Neumann est exactement contrôlable dans un temps arbitraire $T > 0$ dans $H^{-2}(\Omega)$.

Dans [17], les auteurs ont montré que la premier équation du système (P) avec un contrôle frontière de Dirichlet ou Neumann et observation associée colloquée est bien posé dans le sens de Salamon [9] et régulier dans le sens de Weiss [10].

Ils ont aussi établi un résultat de contrôlabilité exacte pour la premier équation du système (P) avec un contrôle L^2-Dirichlet.

ces résultats ainsi que celui de [7] leur permis de déduire la stabilité exponentielle de la premier équation du système (P) avec un feedback dispersif agissant sur condition aux limites de Dirichlet ou Neumann.

Notre travail dû aux B. Aksas et S.E. Rebiai sous le titre "Uniform stabilization of the fourth order Schrödinger equation " reçu en 10 juin 2016 [1], étudie l'équation de Schrödinger d'ordre quatre suivant :

$$(P): \begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = i\Delta^2 u(x,t) & \text{dans } \Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega, \\ u(x,t) = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0,+\infty), \\ \Delta u(x,t) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0,+\infty), \\ \dfrac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial \nu} = m(x)\cdot\nu(x)\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} & \text{sur } \Gamma_0 \times (0,+\infty). \end{cases}$$

où :

- $(x,t) \in \Omega \times (0,+\infty)$.
- $u : \Omega \times (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ est la fonction d'état.
- $u(x,0) = u_0(x)$ est la condition initiale.
- $\dfrac{\partial \Delta u}{\partial \nu}$: La dérivée normale extérieure de Δu.

et Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ suffisamment régulière et $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ une partition de Γ, c'est à dire

$$\begin{cases} \overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \varnothing, \\ \Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma = \partial\Omega, \end{cases}$$

avec Γ_0 et Γ_1 définies par :

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma,\ m(x)\cdot\nu(x) > 0\}, \tag{1}$$

$$\Gamma_1 = \{x \in \Gamma,\ m(x)\cdot\nu(x)\ \leqslant 0\}, \tag{2}$$

et ν est le vecteur normal extérieur à Γ et $m(x) = x - x_0,$ et x_0 est un point fixé à l'extérieur de Ω comme dans la figure 1 ci-dessous :

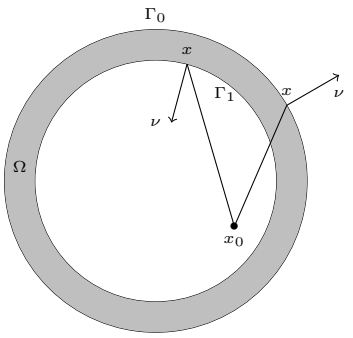


Figure 1

$$\overrightarrow{(x-x_0)} \cdot \overrightarrow{\nu} = \|\overrightarrow{x-x_0}\| \times \|\overrightarrow{\nu}\| \cos(\overrightarrow{x-x_0}, \overrightarrow{\nu})$$

1^{re} cas :

$$\begin{aligned} x \in \Gamma_0 &\Longrightarrow (\overrightarrow{x-x_0}, \overrightarrow{\nu}) > 90 \\ &\Longrightarrow \cos(\overrightarrow{x-x_0}, \overrightarrow{\nu}) < 0 \\ &\Longrightarrow (\overrightarrow{x-x_0}, \overrightarrow{\nu}) < 0. \end{aligned}$$

2^{me} cas :

$$\begin{aligned} x \in \Gamma_1 &\Longrightarrow (\overrightarrow{x-x_0}, \overrightarrow{\nu}) < 90 \\ &\Longrightarrow \cos(\overrightarrow{x-x_0}, \overrightarrow{\nu}) > 0 \\ &\Longrightarrow (\overrightarrow{x-x_0}, \overrightarrow{\nu}) > 0. \end{aligned}$$

Plan de mémoire

Notre mémoire est divisée en 3 chapitres :

— **Le premier chapitre** est consacré aux généralités et rappels de quelques théorèmes et résultats qui sont nécessaires pour le travail.

— **Le deuxième chapitre** est consacré à l'étude de l'existence globale de la solution du système (P).

— **Le troisième chapitre** est consacré à l'étude de la stabilité frontière uniforme du système (P).

Chapitre 1

Rappels et généralités

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail. Le chapitre est composé de six sections, la première section nous rappelons quelques définitions et résultats sur les espaces fonctionnels, la deuxième section donne quelques définitions et résultats fondamentaux concernant les espaces de Sobolev, la troisième section nous rappelons quelques définitions et théorèmes connu sur les opérateurs bornés et non bornés, la quatrième section on cite aussi quelques théorèmes et définitions utiles sur les opérateurs dissipatifs, la cinquième section on cite quelques notations sur les semi-groupes et le théorème d'existence et unicité de la solution et on termine ce chapitre par stabilité des semi-groupes on défini les degrés de la stabilité .

1.2 Généralités sur des espaces fonctionnels

Espace de Hilbert

Définition 1.2.1

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit $f : E \times E \to \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que f est un produit scalaire si :

- *pour tous (u, v) de E $f(u, v) = f(v, u)$.*
- *pour tous (u, v, w) de E et $\lambda \in \mathbb{C}$ $f(\lambda u + v, w) = \lambda f(u, w) + f(v, w)$.*
- *pour tous u de E, $f(u, u) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $u = 0$.*

Définition 1.2.2

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et soit $f : E \times E \to \mathbb{C}$ une fonction.

On dit que f un produit scalaire si :

- *pour tous (u, v) de E $f(u, v) = \overline{f(v, u)}$.*
- *pour tous (u, v, w) de E et $\lambda \in \mathbb{C}$ $f(\lambda u + v, w) = \lambda f(u, w) + f(v, w)$.*
- *pour tous u de E, $f(u, u) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $u = 0$.*

Définition 1.2.3 (Espace de Hilbert)

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel $\mathcal{H}$ muni d'un produit scalaire (u, v) et qui est complet pour la norme $\|u\| = (u, v)^{\frac{1}{2}}$.

1.2.1 Espace L^p

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 1.2.4

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$

► Si $1 \leq p < +\infty$

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \ \ mesurable \ \ et \ \|f\|_{L^p} < \infty\},$$

avec

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|.\|_{L^p}$ est un espace de Banach.

► Si $p = 2$

$$L^2(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \ \ mesurable \ \ et \ \|f\|_{L^2} < \infty\},$$

avec

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x) g(x) dx.$$

L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert complexe muni du produit scalaire

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x) \overline{g(x)} dx.$$

► *Si* $p = +\infty$

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \ \ mesurable \ \ et \ \ \exists C > 0 \, telle \ \ que \, |f(x)| \leq C \ \ p.p \ \ sur \ \ \Omega\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C \geqslant 0; |f(x)| \leq C \ \ p.p \, sur \, \Omega\}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ *muni de la norme* $\|.\|_{L^\infty}$ *est un espace de Banach.*

Notation

Soient $p, p' \in [1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. On désigne par p' l'exposant conjugué de p.

Théorème 1.2.1 (Inégalitie de Hölder)

Soient $f \in L^p$ *et* $g \in L^{p'}$. *Alors,* $fg \in L^1$ *et*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Théorème 1.2.2 (Inégalitie de Cauchy-shwartz)

Pour $p = p' = 2$ *si* $f \in L^2$ *et* $g \in L^2$. *Alors,* $fg \in L^1$ *et*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

1.3 Espace de Sobolev, résultats de densité

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.3.1

L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ *est défini par :*

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : D^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| = 1\},$$

c'est-à-dire que pour tout multi-indice α *il existe une fonction* $g_\alpha \in L^2(\Omega)$ *telle que*

$$\int_\Omega v(x) \ D^\alpha \varphi(x) dx = -\int_\Omega g_\alpha(x) \varphi(x) dx,$$

pour tout $\varphi \in D(\Omega)$. *On écrit donc,* $D^\alpha v = g_\alpha$ *au sens de distribution.*

On munit l'espace $H^1(\Omega)$ *du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \left(u(x)v(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \right) dx,$$

et de la norme associée

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left[\int_\Omega \left(v(x)^2 + \sum_{i=1}^n (\frac{\partial v}{\partial x_i}(x))^2 dx \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \left(\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On rappelle que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n),\ D^\alpha v = \dfrac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$, avec $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 ... \alpha_n$.

On peut étendre la définition (1.3.1) de l'espace $L^2(\Omega)$ à l'espace $L^p(\Omega)$, pour $1 \leq p \leq +\infty$.

Définition 1.3.2

Soit $1 \leq p \leq +\infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ v \in L^p(\Omega) : D^\alpha v \in L^p(\Omega), |\alpha| = 1 \right\},$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme suivante :

$$\begin{cases} \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left[\displaystyle\int_\Omega \left(|v|^p + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p \right) dx \right]^{\frac{1}{p}} = \left(\|v\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} si\ 1 \leq p \leq +\infty, \\ \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \max \left\{ \|v\|_{L^\infty}, \|\dfrac{\partial v}{\partial x_1}\|_{L^\infty}, ..., \|\dfrac{\partial v}{\partial x_1}\|_{L^\infty} \right\} si\ p = +\infty, \end{cases}$$

lorsque $p = 2,\ W^{1,2} = H^1(\Omega)$.

Définition 1.3.3

Pour $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq P \leq +\infty$. L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ v \in L^p(\Omega) \ :\ D^\alpha v \in L^p(\Omega),\ \forall\ \alpha \in \mathbb{N}\ avec\ |\alpha| \leq m \}.$$

L'espace $W^{1,P}(\Omega)$ est muni de la norme suivant :

$$\begin{cases} \|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left[\displaystyle\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha v|^p dx \right]^{\frac{1}{P}} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{2}},\ \ si\ 1 \leq P \leq +\infty \\ \|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \displaystyle\max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^\infty},\ \ si\ \ p = +\infty. \end{cases}$$

Lorsque p = 2, $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega) \ :\ D^\alpha v \in L^2(\Omega),\ \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m \}$, est munit du produit scalaire

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) \overline{D^\alpha v(x)} dx, \tag{1.1}$$

et la norme associée

$$\|v\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ peut aussi être muni de la norme équivalente

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{L^p(\Omega)}.$$

Théorème 1.3.1 (théorème 5.1.2 [11])

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout nombre réel p avec $1 \leq p \leq +\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach. Lorsque $p = 2$, $W^{m,p}(\Omega) = H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Proposition 1

(i) *Si $m \geq m'$ $(m, m' \in \mathbb{N})$, alors $H^m(\Omega)$ est contenu, avec une injection, dans $H^{m'}(\Omega)$.*

(ii) *$H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire (1.1) est un espace de Hilbert.*

Preuve (Voir [18] proposition 1 p. 93) ∎

Définition 1.3.4

Par définition :

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \text{la fermeture de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } H^1(\Omega). \\ H_0^1(\Omega) &= \text{sous-espace de } H^1(\Omega) \text{ des fonction nulles sur } \partial\Omega. \\ W_0^{1,p}(\Omega) &= \text{la fermeture de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } W^{1,p}(\Omega). \\ W_0^{m,p}(\Omega) &= \text{la fermeture de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } W^{m,p}(\Omega). \end{aligned}$$

Puisque (par définition) $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, on peut donc identifier le dual $H^{-1}(\Omega)$ de $H_0^1(\Omega)$ à un espace de distribution sur Ω.

$$\begin{cases} H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))' \\ H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset D'(\Omega). \end{cases}$$

Définition 1.3.5

Pour $m \in \mathbb{N}$, on désigne par $H_0^m(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.

De manière évidente, $H_0^m(\Omega)$ est un espace fermé de $H^m(\Omega)$, mais en général $H_0^m(\Omega) \neq H^m(\Omega)$. Signalons deux cas où on a bien l'égalité :

(i) *Si $m = 0$, alors $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ et donc $H_0^0(\Omega) \neq H^0(\Omega)$.*

(ii) *Si $\Omega = \mathbb{R}$, alors on peut montrer que $H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$.*

Théorème 1.3.2 (Inégalité de Poincaré) *(théorème 5.3.1 [11])]*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p \leq +\infty$. Il existe une constante $C(p, n, \Omega) > 0$ telle que :

$$\left(\int_\Omega |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C(p, n, \Omega) \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \ \forall v \in W_0^{1,P}(\Omega). \tag{1.2}$$

Théorème 1.3.3 (Inégalité de Poincaré) *(théorème 1.4.6 [20])*

Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $u \in H_0^1(\Omega)$. Alors il existe une constante positive $C > 0$ telle que :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.3}$$

Théorème 1.3.4 (théorème 1.4.7 [20])

Soit Ω ouvert borné de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ et $u \in H_0^1(\Omega)$. Il y a une constante positive $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + |\int_{\Omega)} u(x)dx|\right). \tag{1.4}$$

Définition 1.3.6

Soient E et F deux espaces de Banach tels que $F \subset E$. On dit que F s'injecte de manière continue dans E (en notation) $F \hookrightarrow E$ si et seulement si l'opérateur identité

$$F \longrightarrow E \tag{1.5}$$

$$Id : \quad y \longmapsto y \tag{1.6}$$

est continu. De même, on dit que F s'injecte de manière compacte dans E (en notation $F \hookrightarrow_c E$) si et seulement si l'opérateur identité de F dans E est compact.

Théorème 1.3.5 (injection de Sobolev)

Si Ω un ouvert borné à bord lipschitzien, alors on a les deux injections suivantes :

(i) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),\ \forall m \in \mathbb{N}^*, 1 \leq P < +\infty$ *telle que,* $m - \dfrac{n}{2} \leq -\dfrac{n}{p}$

(ii) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}),\ \forall m \in \mathbb{N}^*,$ *telle que,* $m - \dfrac{n}{2} \geq 0$

Pour la théorème 1.3.5, voir [19] [14] [15].

Théorème 1.3.6 (théorème de trace) *(théorème 1.4.3 p. 10 [20])*

Soit $\nu = (\nu_1, \nu_2..., \nu_n)$ la normale unitaire extérieure sur $\partial\Omega$ et

$$\gamma_j u = \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} \mid_{\partial\Omega},\ \forall u \in C^m(\overline{\Omega}),\ j = 0, ...m-1$$

Alors l'opérateur de trace, $\gamma = \{\gamma_0, ...\gamma_{m-1}\}$, peut être prolongé uniquement à un opérateur de $W^{m,p}(\Omega)$ vers $\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$:

$$\gamma = u \in W^{m,p}(\Omega) \longmapsto \gamma u = \{\gamma_0 u, ...\gamma_{m-1} u\} \in \prod_{j=0}^{m-1} W^{(m-j-\frac{1}{p},p)}(\partial\Omega).$$

de plus, l'opérateur est un application surjective.

Notons que les espaces $W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ sont des espaces à dérivées d'ordre fractionnaire.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ de classe C^1. Alors, pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$, on a $u_{|_{\partial\Omega}} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$.

Nous avons maintenant les résultats suivants.

Théorème 1.3.7

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ de classe C^1. Alors, pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$, l'estimation suivante a lieu

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)},$$

avec C une constante positive indépendante de u.

Théorème 1.3.8 (formule de Green) *[16]*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ de classe C^1.

1. *Si $u \in C^1(\overline{\Omega}),\ v \in C^1(\overline{\Omega})$ et $\Delta v \in C^1(\overline{\Omega})$, alors*

$$\int_\Omega u(x)\Delta v(x)dx = -\int_\Omega \Delta u(x)\cdot\Delta v(x)\ dx + \int_{d\Gamma} u(x)\frac{\partial v}{\partial v}(x)\ d\Gamma.$$

2. *Si $u, v \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ et $\Delta u,\ \Delta v \in C(\Omega),$ alors*

$$\int_\Omega \left[u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)\right]\ dx = \int_{\partial\Omega}\left(u(x)\frac{\partial v}{\partial v}(x) - v(x)\frac{\partial u}{\partial v}(x)\right)d\Gamma.$$

3. *Si $u, v \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ et $\Delta u,\ \Delta v \in C(\Omega),$ alors*

$$\int_\Omega (\Delta u)(\Delta v)\ dx = \int_\Omega (\Delta^2 u)v dx - \int_\Gamma \frac{\partial(\Delta u)}{\partial\nu}v\ d\Gamma + \int_\Gamma (\Delta u)\frac{\partial v}{\partial\nu}\ d\Gamma. \tag{1.7}$$

1.4 Opérateurs bornés et non bornés

On commence dans cette section par donner quelques résultats qui sont connus sur les opérateurs bornés et non bornés. On n'essaye pas de donner tout, mais de donner les définitions et les théorèmes de base dans la plupart on les présente sans démonstrations que l'on voit nécessaires dans notre travail.

Soient $(E, \|u\|_E)$ et $(F, \|u\|_F)$ deux espaces de Banach sur $\mathbb{C}$ et $\mathcal{H}$ désigne toujours un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $(,)_H$ et la norme correspondante $\|u\|_H$.

Définition 1.4.1

Un opérateur linéaire $\mathcal{A} : E \to F$ est dit borné s'il existe $C \geq 0$ telle que

$$\|\mathcal{A}(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \ \forall x \in E$$

L'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés de E dans E est noté par $L(E)$.

Définition 1.4.2

Un opérateur non borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est un couple $(D(\mathcal{A}), \mathcal{A})$ où $D(\mathcal{A})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{A}$ est un opérateur linéaire défini de $D(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{H}$, on dit que $\mathcal{A}$ est un opérateur non borné de domaine $D(\mathcal{A})$.Dans la suite, on suppose que $D(\mathcal{A})$ est dense dans $\mathcal{H}$.

Définition 1.4.3

Un opérateur linéaire non borné de E dans F est un couple $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$, avec $D(\mathcal{A}) \in E$ est un sous-espace de Banach de E (dit le domaine de $\mathcal{A}$) et la transformation linéaire

$$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \in E \to F$$

dans le cas où $E = F$, alors on dit que $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ est un opérateur linéaire non bornée sur E.

Définition 1.4.4

Soit $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \in E \to F$ un opérateur linéaire non borné.

— *L'image de $\mathcal{A}$ est définie par*

$$Im(\mathcal{A}) = \{ \mathcal{A}(u) : u \in D(\mathcal{A})\} \subset F.$$

— *Le noyau de $\mathcal{A}$ est définie par*

$$ker(\mathcal{A}) = \{u \in E : \mathcal{A}(u) = 0\} \subset E.$$

— *Le graphe de $\mathcal{A}$ est définie par*

$$G(\mathcal{A}) = \{ (u, \mathcal{A}(u)) : u \in D(\mathcal{A})\} \subset E \times F.$$

Définition 1.4.5

Un opérateur $\mathcal{A} : (\mathcal{A}, D(\mathcal{A})) \subset E \longrightarrow F$ est dit fermé si $G(\mathcal{A})$ est fermé dans $E \times F$. Un opérateur

linéaire non borné fermé est caractérisé par :

$\mathcal{A}$ est fermé si et seulement si

$$\begin{pmatrix} \text{Pour toute suite } (u_n) \text{ telle que } (u_n) \subset D(\mathcal{A}), \\ u_n \longrightarrow u \text{ dans } E \\ \text{et } \mathcal{A}(u)_n \longrightarrow y \text{ dans } F \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} u \in D(\mathcal{A}) \\ et \\ \mathcal{A}u = y \end{pmatrix}$$

1.4.1 Opérateurs adjoints et auto-adjoints

Définition 1.4.6 *(Opérateur adjoint)*

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux espaces de Hilbert et $\mathcal{A} \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$. L 'unique application linéaire $\mathcal{A}^* \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ telle que pour tous $u \in \mathcal{H}$ et $v \in \mathcal{H}'$ on ait :

$$(\mathcal{A}u, v)_{\mathcal{H}'} = (u, \mathcal{A}^* v)_{\mathcal{H}}$$

est appelé l'adjoint de $\mathcal{A}$.

Théorème 1.4.1

Soit $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in L(\mathcal{H})$. $\mathcal{A}^*$, $\mathcal{B}^*$ leurs adjoints (respectivement), alors on a les propriétés suivantes :

1. $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$.
2. $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$.
3. $(\alpha\mathcal{A})^* = \overline{\alpha}\mathcal{A}^* \ \forall \ \alpha \in \mathbb{C}$.
4. $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$.
5. $\|\mathcal{A}\|^* = \|\mathcal{A}\|$.

Définition 1.4.7 *(Opérateur auto-adjoint)*

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux espaces de Hilbert.

1. *Un opérateur $\mathcal{A} \in L(\mathcal{H}')$ est appelé hermitien ou auto-adjoint si :*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*.$$

   Il est dit anti-adjoint si $\mathcal{A} = -\mathcal{A}^*$.

2. *Un opérateur $\mathcal{B} \in L(\mathcal{H})$ est appelé normal si :*

$$\mathcal{B}\mathcal{B}^* = \mathcal{B}^*\mathcal{B}.$$

1.5 Opérateurs dissipatifs et m-dissipatifs

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel ou complexe muni d'un produit scalaire $(,)$ et de la norme induite $\|.\|$.
Soit $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ un opérateur linéaire non borné défini sur $D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$.

Définition 1.5.1

Soit $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{H}$ un opérateur linéaire.

1. *En cas où $\mathcal{H}$ est de Hilbert sur $\mathbb{C}$, on dit que $\mathcal{A}$ est dissipatif si*

$$\Re e(\mathcal{A}x, x) \leq 0 \ , \qquad \forall\ x \in D(A).$$

2. *En cas où $\mathcal{H}$ est de Hilbert sur $\mathbb{R}$, on dit que $\mathcal{A}$ est dissipatif si*

$$(\mathcal{A}x, x) \leq 0 \ , \qquad \forall\ x \in D(A).$$

Définition 1.5.2

Soit $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire sur un espace de Banach E, est dit m-dissipatif si $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif c'est à dire

$$Im(\lambda I - \mathcal{A}) = E, \qquad \forall\ \lambda > 0.$$

Théorème 1.5.1

Soit $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ un opérateur linéaire non borné sur un espace de Banach E. Si $\mathcal{A}$ est dissipatif avec $Im(I - \mathcal{A}) = E$ et E est réflexif, alors $\overline{D(\mathcal{A})} = E$.

1.6 Semi-groupe, existence et unicité de la solution

1.6.1 Concepts sur les semi-groupes

Dans cette section, on va introduire quelques notions de base concernant les semi-groupes. On commence par des définitions et théorèmes de base.

Définition 1.6.1

On appelle C_0-semi-groupe (ou semi-groupe fortement continu) d'opérateur linéaire borné sur E une famille $(S(t))_{t\geq 0}$ vérifiant les propriétés suivantes

1. $S(0) = I; \quad (I =$ *opérateur d'identité*$)$.

2. $S(t+s) = s(t)s(s), \ \ \forall\, t, s \geq 0$;
3. $(S(t))_{t\geq 0}$ *est fortement continue sur* $[0, +\infty[$ *ce qui est équivalent à* $\lim\limits_{t\to 0^+} \|S(t)u-u\|_E = 0$, *pour tout* $u \in E$.

Définition 1.6.2

Le générateur infinitésimal d'un C_0*-semi-groupe* $(S(t))_{t\geq 0}$ *, l'opérateur* $\mathcal{A}$ *défini sur l'ensemble*

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ u \in E : \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \text{existe} \right\}$$

par

$$\mathcal{A}x = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t}, \ \ \forall u \in D(\mathcal{A}).$$

Parfois on note également $S(t) = e^{t\mathcal{A}}$.

Théorème 1.6.1

Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi-groupe, Alors*

1. *Il existe* $n > 0$ *et* $M \geqslant 1$ *tels que*

$$\|S(t)\| \leq M, \ \ pour\ tout\ t \in [0, n].$$

2. *Il existe* $\omega > 0$ *et* $M \geqslant 1$ *tels que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \ \ pour\ tout\ t \geqslant 0.$$

Dans ce cas on dit que $(S(t))_{t\geq 0}$ *est un* C_0*-semi-groupe de type* (M, ω).
Le semi-groupe correspondant est uniformément borné. De plus, si $M = 1$ *alors* $(S(t))_{t\geqslant 0}$ *est dit* C_0*-semi-groupe de contraction. (c'est à dire* $\|S(t)\|_{L(x)} \leqslant 1$) .

Définition 1.6.3

Un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ *fortement continu sur* E *est un semi-groupe de contraction si*

$$\|S(t)\| \leq 1, \ pour\ tout\ t \geqslant 0.$$

Théorème 1.6.2 *(Hille-Yosida)*

Un opérateur linéaire (non borné) $\mathcal{A}$ *est le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe de contraction* $(S(t))_{t\geq 0}$ *sur un espace de Hilbert* $\mathcal{H}$ *si et seulement si*
(i) $\mathcal{A}$ *est fermé est* $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$.
(ii) *l'ensemble résolvant* $\rho(\mathcal{A})$ *contient* $\mathbb{R}^+$ *et pour tout* $\lambda > 0$

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Théorème 1.6.3 (Lumer-Phillips)

Soit $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ un opérateur linéaire et à domaine dense dans V ie : $\overline{D(\mathcal{A})} = V$.

***(i)** Si $\mathcal{A}$ est dissipatif et $\lambda_0 > 0$ telle que le rang $R(\lambda_0 I - \mathcal{A})$ alors $\mathcal{A}$ est un générateur infinitésimal d'un C^0-semi groupe de contraction sur V.*

***(ii)** Si $\mathcal{A}$ est un générateur infinitésimal d'un C^0-semi groupe de contraction sur V, alors $R(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = x$ pour tout $\lambda_0 > 0$ et $\mathcal{A}$ est dissipatif. De plus $\Re e(\mathcal{A}u, x^*) \leqslant 0$ pour tout $x \in D(\mathcal{A})$ et $x^* \in u(x)$.*

***Preuve** (voir théorème 3.4 P. 15 [2])* ∎

Corollaire 1

Soit $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ un opérateur linéaire fermé et à domaine dense dans V. Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$ sont dissipatifs, alors $\mathcal{A}$ est un générateur infinitésimal d'un C^0-semi-groupe de contraction.

Preuve

Voir (corollaire 1.3.2 p. 15[2]).

∎

La majorité des équations d'évolution peuvent être réduites sous la forme d'un problème de Cauchy abstrait suivants

$$\begin{cases} U' = \mathcal{A}U, \quad t > 0 \\ U(0) = U_{0,} \end{cases} \tag{1.8}$$

où $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Théorème 1.6.4 ***(Hille-yosida)***

Soit $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ un opérateur linéaire non borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$). Supposons que $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $(S(t))_{t\geq 0}$, alors

1. *Pour $U_0 \in, \mathcal{H}$, le problème (1.8) admet une solution faible unique*

$$U(t) = S(t)U_0 \in C^0\Big(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{A})\Big) \cap C^1\Big(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}\Big).$$

2. *Pour $U_0 \in, D(\mathcal{A})$, le problème (1.8) admet une solution forte unique*

$$U(t) \in C^0\Big(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}\Big).$$

1.7 stabilité des semi-groupes

Définition 1.7.1 (Convergence faible et convergence faible étoile $*$)

Soit E un espace de Banach de dual E'.

On dit qu'une suite $(v_n)_n \in E$ converge faible vert $v \in E$ si

$$\forall f \in E', \quad f(v_n) = \langle f, v_n \rangle_{E',E} \longrightarrow \langle f, v \rangle_{E',E} = f(v).$$

Une suite $(f_n)_n \in E'$ converge faible $*$ vers $f \in E'$ si

$$\forall u \in E, \quad f_n(v) = \langle f_n, v \rangle_{E',E} \overset{*}{\rightharpoonup} \langle f, v \rangle_{E',E} = f(v).$$

Définition 1.7.2

La stabilité consiste à garantir la décroissance du solution de l'énergie $E(t)$ vers zéro de façon plus ou moins rapide, par un mécanisme de dissipation.

Définition 1.7.3

On a trois degrés de la stabilité

1. ***La stabilité forte** : Si $\lim_{t\to+\infty} E(t) = 0$.*
2. ***La stabilité uniforme** : Si $\forall\ t \geqslant 0,\ E(t) \leqslant Cf(t)$ où C est une constante par rapport à t, qui dépend de la norme des donnés initiales et f une fonction décroissante $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait*

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$$

3. ***La stabilité faible** : Lorsque*

$$u(x,t) \rightharpoonup 0 \text{ et } u'(x,t) \rightharpoonup 0 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty.$$

Dans certains espaces de Hilbert.

Définition 1.7.4

Soit $\omega(\mathcal{A}) = sup\{\Re e(\lambda), \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}$ la borne spectrale de $\mathcal{A}$.

On dit que le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ est stable si

$$\lim_{t\to+\infty} S(t)x = 0, \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Si $\omega(\mathcal{A}) < 0$, alors $(S(t))_{t\geq 0}$ est dit exponentielle stable.

Définition 1.7.5

Supposons que $\mathcal{A}$ est le générateur d'un C_0-semi-groupe $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ alors $\mathcal{A}$ est

(i) fortement stable si

$$\lim_{t\to+\infty}\|S(t)x\|_E = 0, \quad \forall x \in E,$$

(ii) uniformément stable si

$$\lim_{t\to+\infty}\|S(t)x\|_{L(E)} = 0,$$

(iii) faiblement stable si

$$\textit{pour tout} \quad x \in E \ \ et \ \ y \in E', (S(t)x, y) \to 0, \ \ \textit{lorsque} \ \ t \to +\infty,$$

(iv) asymptotiquement stable si

$$\textit{pour tout} \quad x \in E \ \ et \ \ y \in E', \|S(t)x\| \to 0, \ \ \textit{lorsque} \ \ t \to +\infty,$$

(v) exponentiellement stable s'ils existe deux constantes $M \geq 1$ et $\omega > 0$ telles que

$$\|S(t)x\|_E \leq Me^{-\omega t}\|x\|_E, \quad \textit{pour tout} \quad t \geq 0, x \in E,$$

(vi) polynomialement stable s'ils existe deux constantes positives C et α telles que

$$\|S(t)x\|_E \leq Ct^{-\alpha}\|x\|_E, \quad \forall t > 0, x \in E.$$

Définition 1.7.6

Un semi-groupe $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ sur $\mathcal{H}$ est dit uniformément exponentiellement asymptotiquement stable si et seulement s'il existent deux nombres positifs $M \geq 1$ et ω tels que,

$$\|S(t)\|_E \leq Me^{-\omega t}, \quad \textit{pour tout} \quad t \geq 0.$$

Chapitre 2

Existence et unicité de la solution du système (P)

2.1 Position du problème

Dans ce chapitre, on va établir l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de Schrödinger d'ordre quatre suivant :

$$(P):\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = i\Delta^2 u(x,t) & \text{dans } \Omega\times(0,+\infty),\\ u(x,0)=u_0(x) & \text{dans } \Omega,\\ u(x,t)=\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial \nu}=0 & \text{sur } \Gamma_1\times(0,+\infty),\\ \Delta u(x,t)=0 & \text{sur } \Gamma_0\times(0,+\infty),\\ \dfrac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial \nu}=m(x)\cdot\nu(x)\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} & \text{sur } \Gamma_0\times(0,+\infty). \end{cases}$$

en utilisant la théorie des semi-groupes.

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution, on réécrit le problème (P) sous la forme abstraite d'un problème de Cauchy du premier ordre dans V comme suit :

$$\begin{cases} U'(t)=\mathcal{A}U(t), \quad t>0\\ U(0)=U_{0,} \end{cases}$$

où

$$V=\{u\in H^2(\Omega): u=\frac{\partial u}{\partial \nu}=0 \ \ dans\ \Gamma_1\}$$

avec V est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire :

$$(u,v)_V=\int_\Omega \Delta u(x)\Delta\overline{v(x)}dx$$

et de la norme induite :

$$\|u\|_V = \left(\int_\Omega |\Delta u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\|.\|_V$ est équivalente à la norme de $H^2(\Omega)$.

2.2 Existence et unicité de la solution du système (P)

Théorème 2.2.1 ***(l'existence et unicité de la solution)***

Pour toute donnée initiale $u_0 \in V$, le système (P) admet une solution unique.

$$u \in C([0,+\infty);V) \cap C^1([0,+\infty);V').$$

Ici, V' est le dual de V. De plus, si $u_0 \in H^6(\Omega) \cap V$, et

$$\begin{aligned} &\Delta u_0(x) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ &\frac{\partial \Delta u_0(x)}{\partial \nu} = i\, m(x)\cdot\nu(x)\Delta^2 u_0(x) \quad \text{sur } \Gamma_0, \end{aligned}$$

alors, $u \in C^1([0,+\infty);V) \cap C([0,+\infty);H^5(\Omega)\cap V)$ et satisfait :

$$\begin{aligned} &\Delta u(x,t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \times (0,+\infty), \\ &\frac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial \nu} = i\, m(x)\cdot\nu(x)\Delta^2 u(x,t) \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \times (0,+\infty). \end{aligned}$$

2.2.1 Le problème équivalent

Le système (P) est équivalent au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} U'(t) = \mathcal{A}U(t), \quad t > 0 \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\mathcal{A}$ est un opérateur linéaire non borné défini par :

$$\begin{cases} D(\mathcal{A}) = \left\{ u \in V,\ \Delta^2 u \in V,\ \Delta u = 0 \ \text{ sur } \Gamma_0,\ \text{et } \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = im(x)\cdot\nu(x)\Delta^2 u \ \text{ sur } \Gamma_0 \right\}, \\ \mathcal{A}u = i\Delta^2 u. \end{cases} \tag{2.2}$$

Pour montrer le théorème (2.2.1), nous utilisons la théorie des semi-groupes en particulier le théorème de Lumer-Phillips (1.6.3), corollaire (1) c'est à dire on montre que les opérateurs fermés non bornés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$ sont dissipatifs, et donc $\mathcal{A}$ engendre un C_0-semi-groupe de contraction et d'après le théorème de Hille Yosida (1.6.4) on a l'existence et l'unicité de la solution.

Proposition 2

L' opérateur $\mathcal{A}$ défini dans (2.2) est fermé non borné et à domaine dense, c'est à dire $\overline{D(\mathcal{A})} = V$.

Lemme 2.2.1

L'opérateur $\mathcal{A}$ défini par :

$$\begin{cases} D(\mathcal{A}) = \{u \in V,\ \Delta^2 u \in V,\ \Delta u = 0 \ \text{ sur } \Gamma_0,\ \text{et } \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = im(x)\cdot\nu(x)\Delta^2 u \ \text{ sur } \Gamma_0\}, \\ \mathcal{A}u = i\Delta^2 u. \end{cases} \tag{2.3}$$

est anti-adjoint, c'est à dire que $\mathcal{A} = -\mathcal{A}^*$. telle que $\mathcal{A}^*$ défini par :

$$\begin{cases} D(\mathcal{A}^*) = \{u \in V,\ \Delta^2 u \in V,\ \Delta u = 0 \ \text{ sur } \Gamma_0,\ \text{ et } \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -im(x)\cdot\nu(x)\Delta^2 u \ \text{ sur } \Gamma_0\}, \\ \mathcal{A}^* u = -i\Delta^2 u. \end{cases} \tag{2.4}$$

Preuve

Soit $u \in D(\mathcal{A})$.

On a par définition :

$$(\mathcal{A}u, v)_V = (u, \mathcal{A}^* v)_V$$

D'autre par, on a :

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}u, v) &= \int_\Gamma (\Delta \mathcal{A}u(x,t))(\Delta\overline{v(x,t)})dx = \int_\Omega i(\Delta^2 u(x,t))(\Delta\overline{v(x,t)})dx \\ &= i\int_\Omega (\Delta^2 u(x,t))(\Delta\overline{v(x,t)})dx \qquad . \end{aligned}$$

Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_\Omega (\Delta^2 u(x,t))(\Delta\overline{v(x,t)})dx$ on intègre par partie en utilisant la formule de Green (1.7), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\Delta^2 u(x,t))(\Delta\overline{v(x,t)})dx &= \int_\Omega (\Delta u(x,t))\Delta(\Delta\overline{v(x,t)})dx + \int_\Gamma \frac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial \nu}\Delta\overline{v(x,t)}d\Gamma \\ &- \int_\Gamma (\Delta u(x,t))\frac{\partial \Delta\overline{v(x,t)}}{\partial \nu}d\Gamma. \end{aligned}$$

En tenant compte les condition aux limites du système (P), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\Delta^2 u(x,t))(\Delta\overline{v(x,t)})dx &= \int_\Omega (\Delta u(x,t))\Delta(\Delta\overline{v(x,t)})dx + \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial \nu}\Delta\overline{v(x,t)}d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma_0} (\Delta u(x,t))\frac{\partial \Delta\overline{v(x,t)}}{\partial \nu}d\Gamma. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_\Omega (\Delta^2 u(x,t))(\Delta\overline{v(x,t)})dx = \int_\Omega (\Delta u(x,t))(\Delta^2\overline{v(x,t)})dx.$$

D'où

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}u, v)_V =& i\int_\Omega (\Delta u(x,t))(\Delta^2\overline{v(x,t)})dx = \int_\Omega (\Delta u(x,t))(i\Delta^2\overline{v(x,t)})dx\\ =& \int_\Omega (\Delta u(x,t))(\Delta^2(\overline{-iv(x,t)}))dx\\ =& \int_\Omega (\Delta u(x,t))\Delta(\overline{\Delta(-iv)})dx\\ =&(u, \Delta^2(-iv))_V\\ =&(u, \mathcal{A}^* v)_V.\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A}^* = -i\Delta^2 u = -\mathcal{A}v$.

Ce qui montre que $\mathcal{A}$ *est anti-adjoint.* ■

Lemme 2.2.2

Les opérateurs $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{A}^*$ *sont dissipatifs.*

Preuve

1) Montrons que $\mathcal{A}$ *est dissipatif, c'est à dire on montre que*

$$\Re e(\mathcal{A}u, u) \leqslant 0, \quad \forall u \in D(\mathcal{A})$$

.

Soit $u \in D(\mathcal{A})$. *On a :*

$$(\mathcal{A}u, u)_V = \int_\Omega \Delta\mathcal{A}u(x,t)\ \overline{\Delta u(x,t)}\ dx.$$

On a :

$$(u, \mathcal{A}u)_V = (\overline{\mathcal{A}u, u})_V$$

Donc

$$\Re e(u, \mathcal{A}u)_V = \Re e(\overline{\mathcal{A}u, u})_V = \Re e(\mathcal{A}u, u)_V.$$

Calculons donc $(u, \mathcal{A}u)_V$.

On a

$$(u, \mathcal{A}u)_V = \int_\Omega \Delta u(x,t)\ \Delta(\overline{\mathcal{A}u(x,t)})\ dx.$$

Appliquons la formule de Green (1.7), on trouve :

$$\begin{aligned}(u, \mathcal{A}u)_V =& \int_\Omega (\Delta^2 u(x,t))(\overline{\mathcal{A}u(x,t)})dx - \int_\Gamma \frac{\partial\Delta u(x,t)}{\partial\nu}\ (\overline{\mathcal{A}u(x,t)})\ d\Gamma + \int_\Gamma \Delta u(x,t)\ \frac{\partial(\overline{\mathcal{A}u(x,t)})}{\partial\nu}\ d\Gamma\\ =& \int_\Omega (\Delta^2 u(x,t))\ (\overline{\mathcal{A}u(x,t)})dx - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial\Delta u(x,t)}{\partial\nu}\ (\overline{\mathcal{A}u(x,t)})\ d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial(\Delta u(x,t))}{\partial\nu}(\overline{\mathcal{A}u(x,t)})d\Gamma\\ &+ \int_{\Gamma_0} \Delta u(x,t)\ \frac{\partial(\overline{\mathcal{A}u(x,t)})}{\partial\nu}\ d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \Delta u(x,t)\ \frac{\partial(\overline{\mathcal{A}u(x,t)})}{\partial\nu}\ d\Gamma.\end{aligned}$$

Utilisons l'expression de $D(\mathcal{A})$ (2.3) et les conditions aux limites du système (P), on obtient :

$$\begin{aligned}(u,\mathcal{A}u)_V &= \int_\Omega (\Delta^2 u(x,t))(\overline{\mathcal{A}u(x,t)})dx - \int_{\Gamma_0} i\, m(x)\cdot\nu(x)\Delta^2 u(x,t)(\overline{\mathcal{A}u(x,t)})d\Gamma\\ &= \int_\Omega (\Delta^2 u(x,t))(\overline{i\Delta^2 u(x,t)})dx - \int_{\Gamma_0} i\, m(x)\cdot\nu(x)\Delta^2 u(x,t)(\overline{i\Delta^2 u(x,t)})d\Gamma\\ &= -i\int_\Omega (\Delta^2 u(x,t))(\overline{\Delta^2 u(x,t)})dx - \int_{\Gamma_0} i\, m(x)\cdot\nu(x)\Delta^2 u(x,t)(-i)(\overline{\Delta^2 u(x,t)})d\Gamma\\ &= -i\int_\Omega |\Delta^2 u(x,t))|^2 dx - \int_{\Gamma_0} m(x)\cdot\nu(x)|\Delta^2 u(x,t)|^2 d\Gamma.\end{aligned}$$

D'où

$$\Re e(u,\mathcal{A}u)_V = -\int_{\Gamma_0} m(x)\cdot\nu(x)|\Delta^2 u(x,t)|^2 d\Gamma \leqslant 0.$$

Et comme $(u,\mathcal{A}u)_V = (\overline{\mathcal{A}u,u})_V$ Donc

$$\Re e(u,\mathcal{A}u)_V = \Re e(\overline{\mathcal{A}u,u})_V = \Re e(\mathcal{A}u,u)_V.$$

Alors $\Re e(\mathcal{A}u,u)_V \leqslant 0$.

Par conséquent $\mathcal{A}$ est dissipatif.

2) Montrons que $\mathcal{A}^*$ est dissipatif.

Soit $u \in D(\mathcal{A}^*)$ On a :

$$(u,\mathcal{A}^*u)_V = \int_\Omega \Delta u(x,t)\Delta(\overline{\mathcal{A}^*u(x,t)})\, dx.$$

Utilisons la formule de Green (1.7), on obtient :

$$\begin{aligned}(u,\mathcal{A}^*u)_V &= \int_\Omega (\Delta^2 u(x,t))(\overline{\mathcal{A}^*u(x,t)})dx - \int_\Gamma \frac{\partial\Delta u(x,t)}{\partial\nu}(\overline{\mathcal{A}^*u(x,t)})\, d\Gamma + \int_\Gamma \Delta u(x,t)\,\frac{\partial(\overline{\mathcal{A}^*u(x,t)})}{\partial\nu}\, d\Gamma\\ &= \int_\Omega (\Delta^2 u(x,t))\,(\overline{\mathcal{A}^*u(x,t)})dx - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial\Delta u(x,t)}{\partial\nu}(\overline{\mathcal{A}^*u(x,t)})\, d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial(\Delta u(x,t))}{\partial\nu}(\overline{\mathcal{A}^*u(x,t)})d\Gamma\\ &+ \int_{\Gamma_0} \Delta u(x,t)\,\frac{\partial(\overline{\mathcal{A}^*u(x,t)})}{\partial\nu}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \Delta u(x,t)\,\frac{\partial(\overline{\mathcal{A}^*u(x,t)})}{\partial\nu}\, d\Gamma.\end{aligned}$$

Utilisons l'expression de $D(\mathcal{A}^*)$ (2.4) et les conditions aux limites du système (P), on obtient :

$$\begin{aligned}(u,\mathcal{A}^*u)_V &= \int_\Omega (\Delta^2 u(x,t))(\overline{\mathcal{A}^*u(x,t)})dx - \int_{\Gamma_0} -i\, m(x)\cdot\nu(x)\Delta^2 u(x,t)(\overline{\mathcal{A}^*u(x,t)})d\Gamma\\ &= \int_\Omega (\Delta^2 u(x,t))(\overline{-i\Delta^2 u(x,t)})dx - \int_{\Gamma_0} -i\, m(x)\cdot\nu(x)\Delta^2 u(x,t)(\overline{-i\Delta^2 u(x,t)})d\Gamma\\ &= i\int_\Omega (\Delta^2 u(x,t))(\overline{\Delta^2 u(x,t)})dx + \int_{\Gamma_0} i\, m(x)\cdot\nu(x)\Delta^2 u(x,t)(\overline{-i\Delta^2 u(x,t)})d\Gamma\\ &= i\int_\Omega |\Delta^2 u(x,t)|^2 dx + \int_{\Gamma_0} i\, m(x)\cdot\nu(x)\Delta^2 u(x,t)(i)(\overline{\Delta^2 u(x,t)})d\Gamma\\ &= i\int_\Omega |\Delta^2 u(x,t)|^2 dx - \int_{\Gamma_0} m(x)\cdot\nu(x)|\Delta^2 u(x,t)|^2 d\Gamma.\end{aligned}$$

Donc

$$\Re e(u, \mathcal{A}^* u)_V = -\int_{\Gamma_0} m(x) \cdot \nu(x) |\Delta^2 u(x,t)|^2 d\Gamma \leqslant 0.$$

Car : $m(x) \cdot \nu(x) > 0$ *sur* Γ_0

et : $|\Delta^2 u(x,t)|^2 > 0$.

Et comme $(u, \mathcal{A}^* u)_V = (\overline{\mathcal{A}^* u, u})_V$

et donc

$$\Re e(u, \mathcal{A}^* u)_V = \Re e(\overline{\mathcal{A}^* u, u})_V = \Re e(\mathcal{A}^* u, u)_V.$$

Alors $\Re e(\mathcal{A}^* u, u)_V \leqslant 0$.

D'où $\mathcal{A}^*$ *est dissipatif.*

■

D'après le lemme (2.2.2), $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$ sont dissipatifs, alors d'après le corollaire (1), $\mathcal{A}$ est la générateur infinitésimale d'un C_0-semi-groupe de contraction.
Et par conséquent d'après le théorème de Hille-Yosida (1.6.4) le problème (2.1) admet une solution unique telle que

$$u \in C([0, +\infty); V) \cap C^1([0, +\infty); V'),$$

et

$$\begin{aligned} &\Delta u_0(x) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ &\frac{\partial \Delta u_0(x)}{\partial \nu} = i m(x) \cdot \nu(x) \Delta^2 u_0(x) \quad \text{sur } \Gamma_0, \end{aligned}$$

alors, $u \in C^1([0, +\infty); V) \cap C([0, +\infty); H^5(\Omega) \cap V)$ et satisfait :

$$\begin{aligned} &\Delta u(x,t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \times (0, +\infty), \\ &\frac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial \nu} = i\, m(x) \cdot \nu(x) \Delta^2 u(x,t) \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \times (0, +\infty). \end{aligned}$$

Chapitre 3

Stabilité frontière de la solution du système (P)

Introduction

Le problème de stabilisation auquel on s'intéresse revient à déterminer le comportement asymptotique de l'énergie, à étudier sa limite, si cette limite tend vers 0 de manière exponentielle ou pas et à donner le taux de décroissance de l'énergie, c'est à dire que

$$E(t) \leqslant Me^{-\delta t}E(0), \quad \forall t > 0.$$

$\delta =$ le taux de décroissance de l'énergie $E(t)$.
La décroissance de l'énergie vers 0 de manière exponentielle est la plus rapide.

Dans ce chapitre on va établir la stabilité frontière uniforme plus précisément la stabilité exponentielle du système (P) par des contrôles frontières de type Neumann, on montre que l'énergie associée à la solution (P) décroit exponentiellement dans un espace d'énergie approprié.
Le résultat est établi en utilisant la technique des multiplicateurs et un argument de compacité / unicité.

L'énergie $E(t)$

Tout d'abord, on détermine l'énergie $E(t)$ associé à la solution du système (P).

Lemme 3.0.3

L'énergie associée à la solution du système (P) est donnée par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\Delta u(x,t)|^2 dx. \tag{3.1}$$

Preuve

Pour u solution du système (P) on a :

$$\begin{aligned} E(t) =& \frac{1}{2}\|u\|_V^2 \\ =& \frac{1}{2}(u,u)_V \\ =& \frac{1}{2}\int_{\Omega} (\Delta u(x,t))(\Delta \overline{u(x,t)}) dx \\ =& \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\Delta u(x,t)|^2 dx. \end{aligned}$$

■

Maintenant en va établir la stabilité exponentielle du système (P) par la dissipation frontière donnée au sens de Neumann.

Dans le théorème suivant, on indique un résultat de stabilité pour le système (P).

Théorème 3.0.1

Il existe des constantes positives C et δ telles que pour tout $u_0 \in V$ l'énergie (3.1) de la solution (P) où Γ_0 et Γ_1 sont définies dans (1) satisfait l'inégalité suivante :

$$E(t) \leqslant Me^{-\delta t}E(0), \qquad \forall t \geqslant 0. \tag{3.2}$$

Pour démontrer le théorème (3.0.1), on utilise le lemme suivant :

Lemme 3.0.4 (lemme 1.3.1 [15] P. 25)

Soit $(S(t))_{t\geqslant 0}$ un semi-groupe de contraction dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et pour tout $u \in \mathcal{H}$, $E(t) = \frac{1}{2}\|S(t)\|_{\mathcal{H}}^2$ l'énergie de $S(t)u$ en temps t. (Il est clair que $E(t)$ est une fonction non croissante de $(0,+\infty)$ vers $(0,+\infty)$. Alors :

$$E(t) \leqslant Me^{-\delta t}E(0), \qquad \forall t \geqslant 0 \tag{3.3}$$

avec $M > 0$ et $\delta > 0$ sont indépendants de u si et seulement si il existe un temps $T > 0$ indépendant de u et un constante $C > 0$ (dépend de T) et indépendant de u telles que :

$$E(t) \leqslant \frac{E(0)}{C+1}. \tag{3.4}$$

Preuve

la condition suffisante de (3.4) :

L'estimation (3.4) implique que

$$E(t) \leqslant \gamma E(0)$$

où $\gamma = \dfrac{1}{C+1} < 1$.

Appliquons cette argument sur $[(m-1)T, mT]$ pour $m \in \mathbb{N}^*$ (qui est valide car le système associé du semi-groupe est invariant par translation en temps), on trouve :

$$E(mT) \leqslant \gamma E((m-1)T) \leqslant ..... \leqslant \gamma^m E(0).$$

De plus, on a

$$E(mT) \leqslant e^{-\alpha mT} E(0), \qquad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

avec $\alpha = \dfrac{1}{T}\ln\dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{1}{T}\ln(1+C) > 0$ qui est dépend de T.

Pour $t \geqslant 0$ arbitraire, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(m-1)T \leqslant t \leqslant mT$ et pour la propriété de non croissance de l'énergie $E(t)$, on conclut que

$$E(t) \leqslant E((m-1)T) \leqslant e^{-\alpha(m-1)T} E(0) \leqslant \frac{1}{\gamma} e^{-\alpha t} E(0).$$

Donc l'énergie $E(t)$ décroit exponentiellement avec un taux de décroissance $\alpha = \dfrac{1}{T}\ln(1+C)$.

la condition nécessaire de(3.4) :

L'estimation (3.3) implique pour tout $T > 0$:

$$E(0) - E(T) \geqslant E(0)(1 - Me^{-\delta T}) \text{ et}$$

$$E(T) \leqslant Me^{-\delta T} E(0)$$

on choisit $T > 0$ assez grand tel que $1 - Me^{-\delta T} > 0$ et on prend $C = \dfrac{1 - Me^{-\delta T}}{Me^{-\delta T}}$.

D'où on obtient l'estimation (3.4)

■

Preuve (théorème (3.0.1))

Nous prouvons le théorème (3.0.1) pour les solutions régulières. Le cas général suit par un argument de densité. Nous procédons en plusieurs étapes.

Étape 1 :

Lemme 3.0.5

On a :

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_{\Gamma_1} m(x)\cdot\nu(x)\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 d\Gamma \tag{3.5}$$

et $\forall\ T \geqslant 0$:

$$E(T) - E(0) = -\int_0^T\int_{\Gamma_0} m(x)\cdot\nu(x)\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 d\Gamma\ dt. \tag{3.6}$$

Preuve

1) Montrons que : $\frac{d}{dt}E(t) = -\int_{\Gamma_1} m(x)\cdot\nu(x)\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 d\Gamma.$

On a :

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u\|_V^2 = \frac{1}{2}\|\Delta u\|^2$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) =& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u\|^2\\ =& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\Delta u, \Delta\overline{u})_V\\ =& \frac{1}{2}\left[(\Delta\frac{\partial u}{\partial t}, \Delta\overline{u}) + (\Delta u, \Delta\frac{\partial\overline{u})}{\partial t})\right].\end{aligned}$$

Et comme : $(\Delta\frac{\partial u}{\partial t}, \Delta u) = \overline{(\Delta u, \Delta\frac{\partial\overline{u})}{\partial t})}$, *alors*

$$\begin{aligned}\frac{dE(t)}{dt} =& \frac{1}{2}\left[2\Re e(\Delta u, \Delta\frac{\partial\overline{u})}{\partial t})\right]\\ =& \Re e(\Delta u, \Delta\frac{\partial\overline{u})}{\partial t})\\ =& \Re e\int_\Omega(\Delta u(x,t))(\Delta\frac{\partial\overline{u(x,t))}}{\partial t})dx.\end{aligned}$$

Calculons $\int_\Omega(\Delta u(x,t))(\Delta\frac{\partial\overline{u(x,t)}}{\partial t})dx$.

Appliquons la formule de Green (1.7) :

$$\int_\Omega(\Delta u(x,t))(\Delta\frac{\partial\overline{u(x,t))}}{\partial t})dx = \int_\Omega\Delta^2u(x,t)\frac{\partial\overline{u(x,t))}}{\partial t}dx - \int_\Gamma\frac{\partial(\Delta u(x,t))}{\partial\nu}\frac{\partial\overline{u(x,t))}}{\partial t}d\Gamma + \int_\Gamma(\Delta u(x,t))\frac{\partial\overline{u_t(x,t)}}{\partial\nu}d\Gamma.$$

Utilisons les conditions aux limites de (P) *et la première équation de* (P)*, on obtient :*

$$\begin{aligned}\int_\Omega(\Delta u(x,t))(\Delta\frac{\partial\overline{u(x,t))}}{\partial t})dx =& \int_\Omega\Delta^2u(x,t)(i\Delta^2\overline{u(x,t)})dx - \int_{\Gamma_0} m(x)\cdot\nu(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\frac{\partial\overline{u(x,t))}}{\partial t}d\Gamma\\ =& i\int_\Omega|\Delta^2u(x,t)|^2dx - \int_{\Gamma_0} m(x)\cdot\nu(x)\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 d\Gamma.\end{aligned}$$

D'où : $\frac{dE(t)}{dt} = \Re e\Big[i\int_\Omega |\Delta^2 u(x,t)|^2 dx - \int_{\Gamma_0} m(x)\cdot\nu(x)\Big|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|^2 d\Gamma.$

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\int_{\Gamma_0} m(x)\cdot\nu(x)\Big|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|^2 d\Gamma. \tag{3.7}$$

Ce qui signifie que l'énergie du système (P) est une fonction décroissante sur l'espace V.

2) Montrons que : $E(T) - E(0) = -\int_0^T \int_{\Gamma_0} m(x)\cdot\nu(x)\Big|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|^2 d\Gamma\, dt$

On intègre (3.7) sur l'intervalle $[0,T]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \frac{dE(t)}{dt} &= -\int_0^T \int_{\Gamma_0} m(x)\cdot\nu(x)\Big|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|^2 d\Gamma dt \\
\Longrightarrow \Big[E(t)\Big]_0^T &= -\int_0^T \int_{\Gamma_0} m(x)\cdot\nu(x)\Big|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|^2 d\Gamma dt \\
\Longrightarrow E(t) - E(0) &= -\int_0^T \int_{\Gamma_0} m(x)\cdot\nu(x)\Big|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|^2 d\Gamma dt.
\end{aligned}$$

■

Étape 2

Proposition 3

Soit $h(.,.) \in C^2(\overline{\Omega}\times[0,T];\mathbb{R}^n)$ un champ de vecteur. Alors pour chaque solution faible ou forte u de système (P), c'est à dire pour chaque $u_0 \in \mathcal{H}_0^2(\Omega)$ et pour chaque $u \in (L^1(0,T)H_0^2(\Omega))$, on a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
4\int_0^T\int_\Omega |\Delta u(x,t)|^2 dxdt \leqslant\ & Im\int_\Omega \Big[u(x,t)m(x)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}dx\Big]_0^T - 2\Re e\int_0^T\int_{\Gamma_0}\frac{\partial\Delta u(x,t)}{\partial\nu}m(x)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}d\Gamma dt - \\
& n\Re e\int_0^T\int_{\Gamma_0} u(x,t)\frac{\partial\Delta\overline{u(x,t)}}{\partial\nu}d\Gamma dt - Im\int_0^T\int_{\Gamma_0} u(x,t)\frac{\partial\overline{u(x,t)}}{\partial t}m(x)\cdot\nu(x)d\Gamma dt + \\
& \int_0^T\int_{\Gamma_1}|\Delta u(x,t)|^2 m(x)\cdot\nu(x)d\Gamma dt.
\end{aligned}$$

Preuve

Utilisons la technique des multiplicateurs et l'argument d'unicité /compacité :

On multiplie les deux membres de la première équation du système (P) par $h(x,t)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}$ et on intègre sur $\Omega\times(0,T)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega\Big(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - i\Delta^2 u(x,t)\Big)h(x,t)\cdot\nabla\overline{u(x,t)} = 0 \\
&\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}h(x,t)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}\,dxdt = \int_0^T\int_\Omega i\Delta^2 u(x,t)h(x,t)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}\,dxdt.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Pour la première intégrale du membre gauche de (3.8), nous avons d' après intégration par parties en t.

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}h(x,t)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}\;dxdt = \int_\Omega\Big[u(x,t)h(x,t)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}dx\Big]_0^T -\\ \int_0^T\int_\Omega u(x,t)\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}\cdot\nabla\overline{u(x,t)}dxdt - \int_0^T\int_\Omega u(x,t)h(x,t)\cdot\nabla(\frac{\overline{\partial u(x,t)}}{\partial t})\;dxdt.\end{aligned} \tag{3.9}$$

En appliquant de nouveau le formule de Green dans (3.9), nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}h(x,t)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}\;dxdt = \int_\Omega\Big[u(x,t)h(x,t)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}dx\Big]_0^T -\\ \int_0^T\int_\Omega u(x,t)\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}\cdot\nabla\overline{u(x,t)}dxdt - \int_0^T\int_\Gamma u(x,t)\frac{\overline{\partial u(x,t)}}{\partial t}h(x,t)\cdot\nu(x)\;d\Gamma dt -\\ i\int_0^T\int_\Omega \Delta^2\overline{u(x,t)}h(x,t)\cdot\nabla u(x,t)\;dxdt - i\int_0^T\int_\Omega\Delta^2\overline{u(x,t)}u(x,t)\mathrm{div}h(x,t)dxdt.\end{aligned} \tag{3.10}$$

En injecte (3.10) dans (3.8), on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega\Big[u(x,t)h(x,t)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}dx\Big]_0^T - \int_0^T\int_\Omega u(x,t)\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}\cdot\nabla\overline{u(x,t)}dxdt -\\ \int_0^T\int_\Gamma u(x,t)\frac{\overline{\partial u(x,t)}}{\partial t}h(x,t)\cdot\nu(x)\;dxdt - i\int_0^T\int_\Omega\Delta^2\overline{u(x,t)}h(x,t)\cdot\nabla u(x,t)\;dxdt -\\ i\int_0^T\int_\Omega\nabla^2\overline{u(x,t)}h(x,t)\mathrm{div}h(x,t)dxdt - i\int_0^T\int_\Omega\Delta^2u(x,t)h(x,t)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}\;dxdt = 0.\end{aligned} \tag{3.11}$$

En multipliant par $(-i)$, on obtient

$$\begin{aligned}-i\int_\Omega\Big[u(x,t)h(x,t)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}dx\Big]_0^T + i\int_0^T\int_\Omega u(x,t)\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}\cdot\nabla\overline{u(x,t)}dxdt +\\ i\int_0^T\int_\Gamma u(x,t)\frac{\overline{\partial u(x,t)}}{\partial t}h(x,t)\cdot\nu(x)\;dxdt - \int_0^T\int_\Omega\Delta^2\overline{u(x,t)}h(x,t)\cdot\nabla u(x,t)\;dxdt +\\ \int_0^T\int_\Omega\Delta^2\overline{u(x,t)}h(x,t)\mathrm{div}h(x,t)dxdt - \int_0^T\int_\Omega\Delta^2u(x,t)h(x,t)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}\;dxdt = 0.\end{aligned} \tag{3.12}$$

D'où

$$\begin{aligned}2\Re e\int_0^T\int_\Omega\Delta^2u(x,t)h(x,t)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}\;dxdt = Im\int_\Omega\Big[u(x,t)h(x,t)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}\;dx\Big]_0^T -\\ Im\int_0^T\int_\Omega u(x,t)\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}\cdot\nabla\overline{u(x,t)}\;dxdt - Im\int_0^T\int_\Gamma u(x,t)\frac{\overline{\partial u(x,t)}}{\partial t}h(x,t)\cdot\nu(x)dxdt -\\ \Re e\int_0^T\int_\Omega\Delta^2\overline{u(x,t)}h(x,t)\mathrm{div}h(x,t)dxdt.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Nous calculons l'intégrale du membre droit de (3.8).

D'après le formule de Green, on obtient

$$\int_0^T\int_\Omega \Delta^2 u(x,t)h(x,t)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}dxdt=\int_0^T\int_\Gamma\frac{\partial\Delta u(x,t)}{\partial\nu}h(x,t)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}d\Gamma dt-$$
$$\sum_{k,j}\int_0^T\int_\Omega\frac{\partial\Delta u(x,t)}{\partial x_k}\frac{\partial h_j(x,t)}{\partial x_k}\frac{\partial\overline{u(x,t)}}{\partial x_j}dxdt-\sum_{k,j}\int_0^T\int_\Omega\frac{\partial\Delta u(x,t)}{\partial x_k}h_j(x,t)\frac{\partial^2\overline{u(x,t)}}{\partial x_k\partial x_j}dxdt=$$
$$\int_0^T\int_\Gamma\frac{\partial\Delta u(x,t)}{\partial\nu}h(x,t)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}d\Gamma dt-\sum_{k,j}\int_0^T\int_\Gamma\Delta u(x,t)\frac{\partial h_j(x,t)}{\partial x_k}\frac{\partial\overline{u(x,t)}}{\partial x_j}\nu_k(x)d\Gamma dt+ \tag{3.14}$$
$$\sum_{k,j}\int_0^T\int_\Omega\Delta u(x,t)\frac{\partial^2 h_j(x,t)}{\partial x_k^2}\frac{\partial\overline{u(x,t)}}{\partial x_j}dxdt+2\sum_{k,j}\int_0^T\int_\Omega\Delta u(x,t)\frac{\partial h_j(x,t)}{\partial x_k}\frac{\partial^2\overline{u(x,t)}}{\partial x_k x_j}dxdt-$$
$$\sum_{k,j}\int_0^T\int_\Omega\Delta u(x,t)h_j(x,t)\frac{\partial^2\overline{u(x,t)}}{\partial x_k x_j}\nu_k(x)d\Gamma dt+\sum_{k,j}\int_0^T\int_\Omega\Delta u(x,t)h_j(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta\overline{u(x,t)}dxdt.$$

En injecte (3.14) dans (3.13), nous obtenons

$$2\Re e\int_0^T\int_\Gamma\frac{\partial\Delta u(x,t)}{\partial\nu}h(x,t)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}d\Gamma dt-2\Re e\sum_{k,j}\int_0^T\int_\Omega\Delta u(x,t)\frac{\partial h_j(x,t)}{\partial x_k}\frac{\partial\overline{u(x,t)}}{\partial x_j}\nu_k(x)d\Gamma dt+$$
$$2\Re e\sum_{k,j}\int_0^T\int_\Omega\Delta u(x,t)\frac{\partial^2 h_j(x,t)}{\partial x_k^2}\frac{\partial\overline{u(x,t)}}{\partial x_j}dxdt+4\Re e\sum_{k,j}\int_0^T\int_\Omega\Delta u(x,t)\frac{\partial h_j(x,t)}{\partial x_k}\frac{\partial^2\overline{u(x,t)}}{\partial x_k x_j}dxdt-$$
$$2\Re e\sum_{k,j}\int_0^T\int_\Omega\Delta u(x,t)h_j(x,t)\frac{\partial^2\overline{u(x,t)}}{\partial x_k x_j}\nu_k(x)d\Gamma dt+2\Re e\sum_{k,j}\int_0^T\int_\Omega\Delta u(x,t)h_j(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta\overline{u(x,t)}dxdt=$$
$$Im\int_\Omega\left[u(x,t)h(x,t)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}\,dx\right]_0^T-Im\int_0^T\int_\Omega u(x,t)\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}\cdot\nabla\overline{u(x,t)}\,dxdt-$$
$$Im\int_0^T\int_\Gamma u(x,t)\frac{\overline{\partial u(x,t)}}{\partial t}h(x,t)\cdot\nu(x)d\Gamma dt-\Re e\int_0^T\int_\Omega\Delta^2\overline{u(x,t)}h(x,t)\mathrm{div}h(x,t)dxdt. \tag{3.15}$$

Si $h(x,t)=m(x)$, alors

$$\mathrm{div}m(x)=n,$$

et

$$\frac{\partial m_j(x)}{\partial x_k}=\begin{cases}1 & \text{si } k=j,\\ 0 & \text{si } k\neq j\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 m_j(x,t)}{\partial x_K^2}=0\ \ \forall j,k$$

et (3.15) est équivalente à

$$2\Re e\int_0^T\int_\Gamma \frac{\partial\Delta u(x,t)}{\partial\nu}m(x)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}d\Gamma dt-2\Re e\sum_{k,j}\int_0^T\int_\Omega \Delta u(x,t)\frac{\partial h_j(x,t)}{\partial x_k}\frac{\partial\overline{u(x,t)}}{\partial x_j}\nu_k(x)d\Gamma dt+$$
$$2\Re e\sum_{k,j}\int_0^T\int_\Omega \Delta u(x,t)\frac{\partial^2 m_j(x,t)}{\partial x_k^2}\frac{\partial\overline{u(x,t)}}{\partial x_j}dxdt+4\Re e\sum_{k,j}\int_0^T\int_\Omega \Delta u(x,t)\frac{\partial m_j(x,t)}{\partial x_k}\frac{\partial^2\overline{u(x,t)}}{\partial x_k x_j}dxdt-$$
$$2\Re e\sum_{k,j}\int_0^T\int_\Omega \Delta u(x,t)m_j(x,t)\frac{\partial^2\overline{u(x,t)}}{\partial x_k x_j}\nu_k(x)d\Gamma dt+2\Re e\sum_{k,j}\int_0^T\int_\Omega \Delta u(x,t)m_j(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta\overline{u(x,t)}dxdt= \quad (3.16$$
$$Im\int_\Omega\left[u(x,t)m(x,t)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}\;dx\right]_0^T-Im\int_0^T\int_\Omega u(x,t)\frac{\partial m(x)}{\partial t}\cdot\nabla\overline{u(x,t)}\;dxdt-$$
$$Im\int_0^T\int_\Gamma u(x,t)\frac{\overline{\partial u(x,t)}}{\partial t}m(x)\cdot\nu(x)dxdt-\Re e\int_0^T\int_\Omega\Delta^2\overline{u(x,t)}m(x)\mathrm{div}m(x)dxdt.$$

alors (3.16) est équivalente

$$\begin{aligned}
&2\Re e\int_0^T\int_\Gamma \frac{\partial\Delta u(x,t)}{\partial\nu}m(x)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}d\Gamma dt-2\Re e\int_0^T\int_\Omega\Delta u(x,t)\frac{\partial\overline{u(x,t)}}{\partial\nu}d\Gamma dt+\\
&4\int_0^T\int_\Omega|\Delta u(x,t)|^2dxdt-2\Re e\sum_{k,j}\int_0^T\int_\Gamma\Delta u(x,t)m_j(x)\frac{\partial^2\overline{u(x,t)}}{\partial x_k\partial x_j}\nu(x)d\Gamma dt+\\
&2\Re e\sum_k\int_0^T\int_\Omega\Delta u(x,t)m_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta\overline{u(x,t)}dxdt=Im\int_\Omega\left[u(x,t)m(x,t)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}\;dx\right]_0^T-\\
&Im\int_0^T\int_\Omega u(x,t)\frac{\partial\overline{u(x,t)}}{\partial\nu}m(x)\cdot\nu(x)d\Gamma dt-n\;\Re e\int_0^T\int_\Omega u(x,t)\Delta^2\overline{u(x,t)}dxdt.
\end{aligned}\tag{3.17}$$

Mais d'après le formule de Green, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_\Omega u(x,t)\Delta^2\overline{u(x,t)}dxdt=&\int_0^T\int_\Gamma u(x,t)\frac{\partial\Delta\overline{u(x,t)}}{\partial\nu}d\Gamma dt-\int_0^T\int_\Gamma\frac{\partial u(x,t)}{\partial\nu}\Delta\overline{u(x,t)}d\Gamma dt+\\
&\int_0^T\int_\Omega|\Delta u(x,t)|^2dxdt.
\end{aligned}\tag{3.18}$$

et

$$\begin{aligned}
2\Re e\sum_{k,j}\int_0^T\int_\Omega\Delta u(x,t)m_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta\overline{u(x,t)}dxdt=&\int_0^T\int_\Gamma|\Delta u(x,t)|^2m(x)\cdot\nu(x)d\Gamma dt-\\
&n\int_0^T\int_\Omega|\Delta u(x,t)|^2dxdt.
\end{aligned}$$

Par conséquent, (3.17) peut s'écrire comme suit :

$$2\Re e\int_0^T\int_\Gamma \frac{\partial\Delta u(x,t)}{\partial\nu}h(x,t)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}d\Gamma dt-2\Re e\int_0^T\int_\Omega \Delta u(x,t)\frac{\partial\overline{u(x,t}}{\partial\nu}d\Gamma dt+$$
$$4\int_0^T\int_\Omega|\Delta u(x,t)|^2dxdt-2\Re e\sum_{k,j}\int_0^T\int_\Gamma \Delta u(x,t)m_j(x)\frac{\partial^2\overline{u(x,t)}}{\partial x_k\partial x_j}\nu(x)d\Gamma dt+$$
$$\int_0^T\int_\Gamma|\Delta u(x,t)|^2m(x)\nu(x)d\Gamma dt+n\Re e\int_0^T\int_\Omega|\Delta u(x,t)|^2dxdt=Im\int_\Omega\left[u(x,t)m(x)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}dx\right]_0^T-$$
$$Im\int_0^T\int_\Gamma u(x,t)\frac{\partial\overline{u(x,t)}}{\partial\nu}m(x)\cdot\nu(x)d\Gamma dt-n\Re e\int_0^T\int_\Omega u(x,t)\frac{\partial\Delta\overline{u(x,t)}}{\partial\nu}d\Gamma dt+$$
$$n\Re e\int_0^T\int_\Gamma\frac{\partial u(x,t)}{\partial\nu}\Delta\overline{u(x,t)}d\Gamma dt+n\Re e\int_0^T\int_\Omega|\Delta u(x,t)|^2dxdt.$$

donc

$$\begin{aligned}
&2\Re e\int_0^T\int_\Gamma \frac{\partial\Delta u(x,t)}{\partial\nu}m(x,t)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}d\Gamma dt-2\Re e\int_0^T\int_\Omega \Delta u(x,t)\frac{\partial\overline{u(x,t)}}{\partial\nu}d\Gamma dt+\\
&4\int_0^T\int_\Omega|\Delta u(x,t)|^2dxdt-2\Re e\sum_{k,j}\int_0^T\int_\Gamma \Delta u(x,t)m_j(x)\frac{\partial^2\overline{u(x,t)}}{\partial x_k\partial x_j}\nu(x)d\Gamma dt+\\
&\int_0^T\int_\Gamma|\Delta u(x,t)|^2m(x)\cdot\nu(x)d\Gamma dt=Im\int_\Omega\left[u(x,t)m(x)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}dx\right]_0^T-\\
&Im\int_0^T\int_\Gamma u(x,t)\frac{\partial\overline{u(x,t)}}{\partial\nu}m(x)\cdot\nu(x)d\Gamma dt-n\Re e\int_0^T\int_\Omega u(x,t)\frac{\partial\Delta\overline{u(x,t)}}{\partial\nu}d\Gamma dt+\\
&n\Re e\int_0^T\int_\Omega\frac{\partial u(x,t)}{\partial\nu}\Delta\overline{u(x,t)}d\Gamma dt.
\end{aligned}\tag{3.19}$$

De plus, puisque $u(x,t)=\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial\nu}=0$ sur $\Gamma_1\times(0,T)$, alors

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k}=0,\quad k=1\qquad sur\ \Gamma_1\times(0,T),$$

et

$$\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x_j\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial\nu}(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k})\nu_j(x),\qquad j,k=1,...,n,\quad sur\ \Gamma_1\times(0,T)\tag{3.20}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\sum_{k,j}m_j(x)\frac{\partial^2\overline{u(x,t)}}{\partial x_j\partial x_k}\nu_k(x)=&\sum_{k,j}m_j(x)\frac{\partial}{\partial\nu}(\frac{\partial\overline{u(x,t)}}{\partial x_k})\nu_j(x)\nu_k(x)\\
=&m(x)\cdot\nu(x)\sum_k\frac{\partial}{\partial\nu}(\frac{\partial\overline{u(x,t)}}{\partial x_k})\nu_k(x)(\text{de (3.20)})\\
=&m(x)\cdot\nu(x)\sum_k m_j(x)\frac{\partial^2\overline{u(x,t)}}{\partial x_k^2}\\
=&m(x)\cdot\nu(x)\Delta\overline{u(x,t)},\qquad \text{sur }\Gamma_1\times(0,T).
\end{aligned}\tag{3.21}$$

On injecte la troisième et la quatrième l'équation du système (P) et (3.21) dans (3.19), on obtient

$$\begin{aligned} &4\int_0^T\int_\Omega |\Delta u(x,t)|^2 dxdt = Im\int_\Omega \left[u(x,t)m(x)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}dx\right]_0^T - \\ &2\Re e\int_0^T\int_{\Gamma_0}\frac{\partial\Delta u(x,t)}{\partial\nu}m(x)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}d\Gamma dt - n\Re e\int_0^T\int_{\Gamma_0}u(x,t)\frac{\partial\Delta\overline{u(x,t)}}{\partial\nu}d\Gamma dt - \\ &Im\int_0^T\int_{\Gamma_0}u(x,t)\frac{\partial\overline{u(x,t)}}{\partial t}m(x)\cdot\nu(x)d\Gamma dt + \int_0^T\int_{\Gamma_1}|\Delta u(x,t)|^2 m(x)\cdot\nu(x)d\Gamma dt. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Puisque $m(x)-\nu(x)\leqslant 0$ sur Γ, alors nous avons de

$$\begin{aligned} &4\int_0^T\int_\Omega |\Delta u(x,t)|^2 dxdt \leqslant Im\int_\Omega \left[u(x,t)m(x)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}dx\right]_0^T - \\ &2\Re e\int_0^T\int_{\Gamma_0}\frac{\partial\Delta u(x,t)}{\partial\nu}m(x)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}d\Gamma dt - n\Re e\int_0^T\int_{\Gamma_0}u(x,t)\frac{\partial\Delta\overline{u(x,t)}}{\partial\nu}d\Gamma dt - \\ &Im\int_0^T\int_{\Gamma_0}u(x,t)\frac{\partial\overline{u(x,t)}}{\partial t}m(x)\cdot\nu(x)d\Gamma dt. \end{aligned} \tag{3.23}$$

■

Étape 3

Nous estimons chaque terme du membre droit de (3.23) séparément.

On pose :

$$\begin{aligned} I_1 &= Im\int_\Omega \left[u(x,t)m(x)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}dx\right]_0^T. \\ I_2 &= 2\Re e\int_0^T\int_{\Gamma_0}\frac{\partial\Delta u(x,t)}{\partial\nu}m(x)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}d\Gamma dt. \\ I_3 &= n\Re e\int_0^T\int_{\Gamma_0}u(x,t)\frac{\partial\Delta\overline{u(x,t)}}{\partial\nu}d\Gamma dt. \\ I_4 &= Im\int_0^T\int_{\Gamma_0}u(x,t)\frac{\partial\overline{u(x,t)}}{\partial t}m(x)\cdot\nu(x)d\Gamma dt. \end{aligned}$$

On estimons I_1 : Utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned} \left|Im\int_\Omega \left[u(x,t)m(x)\cdot\nabla\overline{u(x,t)}dx\right]_0^T\right| &= \int_\Omega |u(x,T)m(x)\cdot\nabla\overline{u(x,T)}|dx + |u(x,0)m(x)\cdot\nabla\overline{u(x,0)}|dx \\ &\leqslant C\int_\Omega (|u(x,T)||\nabla\overline{u(x,T)}| + |u(x,0)||\nabla\overline{u(x,0)}|)dx. \end{aligned} \tag{3.24}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, donc en vertu de (3.24) on obtient

$$I_1 \leqslant C\int_\Omega (|\nabla u(x,0)|^2 + |\nabla u(x,T)|^2). \tag{3.25}$$

Où C une constante positive.

On estimons I_2 : En utilisant la condition limite de système (P) et le théorème de la trace, nous obtenons

$$\left|2\Re e\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu}m(x)\nabla\overline{u(x,t)}d\Gamma dt\right| = \left|2\Re e\int_0^T\int_{\Gamma_0} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}m(x)\cdot\nu(x)\nabla\overline{u(x,t)}d\Gamma dt\right|$$
$$\leqslant C\int_0^T\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 m(x)\cdot\nu(x)d\Gamma dt + \int_0^T\int_{\Gamma_0}|\nabla u(x,t)|^2 dxdt.$$

Où ϵ est une constante positive à fixer ultérieurement et μ_1 est une constante, telle que

$$\int_{\Gamma_0}|\nabla\xi(x)|^2 d\Gamma \leqslant \mu_1\int_\Omega|\Delta\xi(x)|^2dx \qquad\qquad \forall\xi\in V$$

donc

$$I_2 \leqslant \frac{C}{\epsilon}\int_0^T\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 m(x)\cdot\nu(x)d\Gamma dt + \epsilon\mu_1\int_0^T\int_\Omega|\Delta u(x,t)|^2dxdt. \tag{3.26}$$

On estimons I_3 : En utilisant la théorème de la trace et l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\left|n\Re e\int_0^T\int_{\Gamma_0}u(x,t)\frac{\partial\Delta\overline{u(x,t)}}{\partial\nu}d\Gamma dt\right| \leqslant \frac{Cn^2}{2\epsilon}\int_0^T\int_{\Gamma_0}m(x)\cdot\nu(x)\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 d\Gamma dt +$$
$$\frac{\epsilon}{2}\mu_2\int_0^T\int_\Omega|\Delta u(x,t)|^2dxdt.$$

Où μ_2 vérifie :

$$\int_{\Gamma_0}|\xi(x)|^2d\Gamma \leqslant \mu_2\int_\Omega|\Delta\xi(x)|^2dxd\Gamma \qquad\qquad \forall\xi\in V$$

D' où :

$$I_3 \leqslant \frac{Cn^2}{2\epsilon}\int_0^T\int_{\Gamma_0}m(x)\cdot\nu(x)\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 d\Gamma dt + \frac{\epsilon}{2}\mu_2\int_0^T\int_\Omega|\Delta u(x,t)|^2dxdt. \tag{3.27}$$

On estimons I_4 : Appliquant de nouveau la théorème de la trace et l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$I_4 \leqslant \frac{C}{2\epsilon}\int_0^T\int_{\Gamma_0}m(x)\cdot\nu(x)\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 d\Gamma dt + \frac{\epsilon}{2}\mu_2\int_0^T\int_\Omega|\Delta u(x,t)|^2dxdt. \tag{3.28}$$

Étape 4

On injecte (I_1)–(I_4) dans (3.23), on obtient

$$\begin{aligned}4\int_0^T\int_\Omega |\Delta u(x,t)|^2 dxdt \leqslant & C\int_\Omega (|\nabla u(x,0)|^2+|\nabla u(x,T)|^2)dx- \\ & \frac{C}{\epsilon}\int_0^T\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 m(x)\cdot\nu(x)d\Gamma dt-\epsilon\mu_1\int_0^T\int_\Omega|\Delta u(x,t)|^2dxdt- \\ & \frac{Cn^2}{2\epsilon}\int_0^T\int_{\Gamma_0} m(x)\cdot\nu(x)\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 d\Gamma dt-\frac{\epsilon}{2}\mu_2\int_0^T\int_\Omega|\Delta u(x,t)|^2dxdt- \\ & \frac{C}{2\epsilon}\int_0^T\int_{\Gamma_0} m(x)\cdot\nu(x)\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 d\Gamma dt-\frac{\epsilon}{2}\mu_2\int_0^T\int_\Omega|\Delta u(x,t)|^2dxdt. \\ & \leqslant C\int_\Omega(|\nabla u(x,0)|^2+|\nabla u(x,T)|^2)dx+C\int_0^T\int_{\Gamma_0} m(x)\cdot\nu(x)\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 d\Gamma dt+ \\ & \epsilon(\mu_1+\mu_2)\int_0^T\int_\Omega|\Delta u(x,t)|^2dxdt.\end{aligned}$$

En choisissant ϵ suffisamment petit pour que $4-\epsilon(\mu_1+\mu_2)>0$ et en invoquant le fait que la fonction d'énergie $E(t)$ est non croissante, on obtient

$$4\epsilon(\mu_1+\mu_2)\int_0^T\int_\Omega|\Delta u(x,t)|^2dxdt\leqslant C\int_0^T\int_{\Gamma_0} m(x)\cdot\nu(x)\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 d\Gamma dt+C\int_\Omega(|\nabla u(x,0)|^2+|\nabla u(x,T)|^2)dx.$$

Donc

$$TE(T)\leqslant C\int_0^T\int_{\Gamma_0} m(x)\cdot\nu(x)\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 d\Gamma\ dt+C\|u\|^2_{C(0,T;H^1_{\Gamma_1}(\Omega))} \tag{3.30}$$

où

$$H^1_{\Gamma_1}(\Omega)=\{f\in H^1(\Omega);\, f=0\ sur\ \Gamma_1\}.$$

Étape 5

Proposition 4

Il existe une constante $C>0$, telle que :

$$\|u\|^2_{C(0,T;H^1_{\Gamma_1}(\Omega))}\leqslant C\int_0^T\int_{\Gamma_0} m(x)\cdot\nu(x)\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 d\Gamma dt. \tag{3.31}$$

Preuve

Nous raisonnons par l'absurde.

Supposant que :

$$\|u\|^2_{C(0,T;H^1_{\Gamma_1}(\Omega))}> C\int_0^T\int_{\Gamma_0} m(x)\cdot\nu(x)\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 d\Gamma dt. \tag{3.32}$$

Alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de solutions du système (P) avec

$$u_n(x,0) = u_n^0(x), \qquad x \in \Omega,$$

telle que

$$\|u\|^2_{C(0,T;H^1_{\Gamma_1}(\Omega))} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.33}$$

et

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} m(x)\cdot\nu(x)\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 d\Gamma dt \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty \tag{3.34}$$

Comme toute solution de système (P) satisfait (3.30), on déduit de (3.33) et (3.34) que la suite $(u_n^0)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans V. Il existe donc une sous-suite encore notée $(u_n^0)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$u_n^0 \longrightarrow \tilde{u}^0 \quad \text{faiblement dans } V.$$

Soit $\tilde{u}$ la solution du système (P) correspondante à la condition initiale $\tilde{u}^0$. Alors

$$u_n \longrightarrow \tilde{u} \quad \text{étoile faiblement dans } L^\infty(0,T;V),$$

c'est à dire $(u_n) \overset{*}{\rightharpoonup} \tilde{u}$ dans $L^\infty(0,T;V)$.

La suite (u_n) est uniformément bornée dans $L^\infty(0,T;V)$. Ce fait et avec la compacité de l'application $V \longrightarrow H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$ implique qu'il existe une sous-suite encore notée (u_n) telle que

$$u_n \longrightarrow \tilde{u} \quad \text{fortement dans } L^\infty(0,T;V).$$

Alors en vertu de (3.33), on a

$$\|\tilde{u}\|^2_{C(0,T;H^1_{\Gamma_1}(\Omega))} = 1. \tag{3.35}$$

De plus d'après (3.34), on a

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} m(x)\cdot\nu(x)\left|\frac{\partial u(\tilde{x},t)}{\partial t}\right|^2 d\Gamma dt = 0.$$

Donc

$$\frac{\partial \tilde{u}(x,t)}{\partial t} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \times (0;T).$$

On pose $v(x,t) = \dfrac{\partial u(\tilde{x},t)}{\partial t}$, alors v est une solution du système :

$$(S): \begin{cases} \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} = i\Delta^2 v(x,t), & \text{dans } \Omega\times(0,T) \\ v(x,0) = v_0(x) & \text{dans } \Omega \\ v(x,t) = \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial \nu} = 0, & \text{sur } \Gamma_1\times(0,T) \\ \Delta v(x,t) = 0, & \text{sur } \Gamma_0\times(0,T) \\ \dfrac{\partial \Delta v(x,t)}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_0\times(0,T). \end{cases}$$

Remarquons que le problème (S) ne diffère du problème (P) que par la dernière condition aux limites, alors on peut exprimer l'identité (3.22) en fonction de v.

$$\begin{aligned} &4\int_0^T\int_\Omega |\Delta v(x,t)|^2 dxdt = Im\int_\Gamma \left[v(x,t)m(x)\cdot\nabla\overline{v(x,t)}dx\right]_0^T - \\ &2\Re e\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial\Delta v(x,t)}{\partial\nu}m(x)\cdot\nabla\overline{v(x,t)}d\Gamma dt - n\Re e\int_0^T\int_\Omega v(x,t)\frac{\partial\Delta\overline{v(x,t)}}{\partial\nu}d\Gamma dt - \\ &Im\int_0^T\int_\Omega v(x,t)\frac{\partial\overline{v(x,t)}}{\partial t}m(x)\cdot\nu(x)d\Gamma dt + \int_0^T\int_\Omega |\Delta v(x,t)|^2 m(x)\cdot\nu(x)d\Gamma dt. \end{aligned} \tag{3.36}$$

L'insertion de la condition aux limites $\dfrac{\partial\Delta v(x,t)}{\partial\nu} = 0$ sur $\Gamma_0\times(0,T)$. Nous donne

$$\begin{aligned} &4\int_0^T\int_\Omega |\Delta v(x,t)|^2 dxdt = Im\int_\Gamma \left[v(x,t)m(x)\cdot\nabla\overline{v(x,t)}dx\right]_0^T - \\ &Im\int_0^T\int_\Omega v(x,t)\frac{\partial\overline{v(x,t)}}{\partial t}m(x)\cdot\nu(x)d\Gamma dt + \int_0^T\int_\Omega |\Delta v(x,t)|^2 m(x)\cdot\nu(x)d\Gamma dt. \end{aligned} \tag{3.37}$$

et comme

$$\int_\Omega |\Delta v(x,t)|^2 dx = \int_\Omega |\Delta v(x,0)|^2 dx,$$

alors on déduit de (3.37) que

$$(4T-C)\int_\Omega \left|\Delta v(x,0)\right|^2 dx \leqslant C\int_0^T\int_\Omega \left\{|v(x,t)|^2 + \left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right|^2\right\}d\Gamma dt.$$

Cette estimation ainsi que le fait que

$$v(x,t) = \frac{\partial\tilde{u}(x,t)}{\partial t} = 0 \text{ sur } \Gamma_0\times(0;T),$$

implique pour T est assez grande que

$$v(x,t) = 0 \text{ dans } \Gamma_0\times(0;T).$$

Donc $\tilde{u}$ ne dépend que de x, c'est-à-dire

$$\tilde{u}(x,t) = \tilde{u}(x),$$

et par conséquent il satisfait

$$\begin{cases} i\Delta^2\tilde{u}(x) = 0 & \text{dans } \Gamma_0\times(0;T), \\ \tilde{u}(x) = \dfrac{\partial\tilde{u}(x)}{\partial\nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ \Delta\tilde{u}(x) = \dfrac{\partial\Delta\tilde{u}(x)}{\partial\nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \end{cases}$$

et donc $\tilde{u}(x) = 0$ dans Ω ce qui contredit (3.33).

La preuve de (3.31) est achevée.

■

Étape 6

En vertu de (3.30) et (3.31), on obtient l'estimation d'observabilité

$$E(T) \leqslant C \int_0^T \int_{\Gamma_0} m(x) \cdot \nu(x) \left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|^2 d\Gamma dt. \tag{3.38}$$

(3.38) avec (3.6) donné

$$E(0) - E(T) \geqslant CE(T).$$

Donc

$$E(T) \leqslant \frac{1}{1+C} E(0).$$

Ce qui implique l'estimation de stabilité souhaitée (3.2) puisque $0 < \dfrac{1}{1+C} < 1$

■

Donc d'après le lemme (3.0.4) on a :

$$\left[E(t) \leqslant Me^{-\delta t} E(0) \right] \Longleftrightarrow E(T) \leqslant \frac{1}{C+1} E(0).$$

Et par conséquent $E(t)$ décroit exponentiellement vers 0.

D'où la stabilité frontière exponentielle du système (P).

Conclusion

Dans cette thèse nous avons étudié une équation de Schrödinger d'ordre quatre, avec des conditions aux limites et un condition aux limites de dissipation $\frac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial \nu} = m(x) \cdot \nu(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu}$ sur $\Gamma_0 \times (0, +\infty)$ (dissipation frontière), telle qu'on a montré que le système (P) associé à cette équation est bien posé, c'est à dire ce système admet une solution unique faible et forte via la théorie des semi-groupes et on particulier le théorème de Lumer-phillips ce qui nous a permet d'étudier la stabilité frontière (stabilité exponentielle sur la frontière du domaine), et pour cet effet on a utilisé la technique des multiplicateurs, qui est un outil puissant pour faire les calculs .
Donc pour la stabilité exponentielle sur Γ on a montré en utilisant une condition de dissipation appropriée que la solution décroit exponentiellement dans un espace d'énergie approprié.

Bibliographie

[1] A. Belkacem, S.E. Rebiai, Uniform stabilization of the fourth order Schrödinger equation. University of Batna 2, Batna 05078, Algeria (2016)

[2] A. Pazy, . Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations (Vol. 44). Springer-Verlag, New York.(1983)

[3] B. Pausader, Global well-posedness for energy critical fourth-order Schrödinger equations in the radial case. Dynamics of Partial Differential Equations, 4(3),(2007) 197-225.

[4] B. Ilan, G. Fibich, G. Papanicolaou, Self-focusing with fourth-order dispersion. SIAM Journal on Applied Mathematics, 62(4), (2002). 1437-1462.

[5] B. Pausader, The cubic fourth order Schrödinger equation J. Funct. Anal. 256(2009) 2473-2517.

[6] C. Hao, L. Hsiao, B. Wang, Wellposedness for the fourth order nonlinear Schrödinger equations. Journal of mathematical analysis and applications, (2006). 320(1), 246-265.

[7] C. Zheng, Z. C. Zhou, Exact controllability for the fourth order Schrödinger equation. Chinese Annals of Mathematics, Series B, 33(3),(2012). 395-404.

[8] C. Zheng, Inverse problems for the fourth order Schrödinger equation on a finite domain. arXiv preprint (2015) :1312.4901.

[9] D.A. Salamon, Infinite-dimensional linear systems with unbounded control and observation : a functional analytic approach. Transactions of the American Mathematical Society, (1987). 300(2), 383-431.

[10] G. Weiss, Regular linear systems with feedback. Mathematics of Control, Signals and Systems,(1994). 7(1), 23-57.

[11] G. Buttazzo, G. Michaille, Analysis in Sobolev and BV Spaces Applications to PDEs and Optimization.

[12] J. Bergh, J. L ofstr om, Interpolation Spaces. An Introduction,"Springer, Berlin. (1976).

[13] J. L. Lions, E. Magenes, E. Magenes, Problemes aux limites non homogenes et applications.(1968).

[14] J.L. Lions et E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et Applications, Tome 1,Dunod 196.

[15] K. Ammari, S. Nicaise, Stabilization of Elastic Systems by Collocated Feedback, Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London. Vol. 2124. Springer, 2014.

[16] Luo ZH, Guo BZ, Morgul O. Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag London : Ltd. London, 1999.

[17] R. Wen, S. Chai, B. Z. Guo, Well-posedness and exact controllability of fourth order Schrodinger equation with boundary control and collocated observation. SIAM Journal on Control and Optimization, (2014). 52(1), 365-396.GTYU

[18] R. Dautray, Jacques-Louis Lions, Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Tehnology, Volume 2 Functional and variational methods, Springer.2000.

[19] R.A. Adams, Sobolev spaces, Academic Press, New-York, 1975.

[20] Z. Lu, S. Zheng, Semigroups associated with dissipative systems„ Direct all inquiries to CRC press LLC, 2000 Corporate Blvd., N.W., Boca Raton, Florida 33431.

[21] Z.Hua Luo, BaoZhu Guo and O. Morgul, Stability and Stabilization of Systems with Applications 629.836, Springer Verlag London 1999.