Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Yahia Farés de Médéa
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique



Projet de fin d'étude

Présenté en vue de l'obtention du

Diplôme de Master en Mathématiques

Option : **Recherche Opérationnelle**

Par **ZOUBIRI DOUNYA et GACEM MAROUA**

Sujet

Contribution à la détermination du nombre chromatique localisateur dans les graphes

Soutenue publiquement, le 02/07/2023, devant le jury composé de :

Nourdine IKHLEF-ESHOUF	Professeur, à U.Y.F-Médéa	Président
Redha SAKRI	MCB, à E.N.S.H Blida	Promoteur
Rachid LEMDANI	MCB, à U.Y.F-Médéa	Co-promoteur
Abdelkader SAHRAOUI	MAA, à U.Y.F-Médéa	Examinateur

Résumé

Soit une k-coloration propre c des sommets d'un graphe connexe $G = (V, E)$ et $\Pi = (V_1, V_2, \ldots, V_k)$ est une partition ordonnée de $V(G)$ en classes de couleurs V_k. Le code couleur d'un sommet v de $V(G)$ par rapport à Π est le k-uplets $C_\Pi(v) = (d(v, V_1), d(v, V_2), \ldots, d(v, V_k))$ avec $d(v,\ V_i) = \min\{d(v, x)|x \in V_i\}$ pour $1 \leq \text{i} \leq k$. Si toute paire de sommets distincts de G ont des codes de couleurs distincts, alors la coloration c est appelée une coloration localisatrice de G. Le nombre chromatique localisateur d'un graphe G, noté $\chi_{_L}(G)$, est le plus petit entier k tel que G admet une k-coloration localisatrice. L'objectif de ce mémoire est l'étude du problème de nombre chromatique localisateur dans les graphes. Nous présentons d'abord une synthèse sur les résultats existants dans la littérature concernant la coloration localisatrice pour quelques classes de graphes, incluant des bornes. On entame par la suite l'étude de la coloration localisatrice pour la classe des graphes de Petersen généralisés $P(n, 2)$. On détermine le $\chi_{_L}(P(n, 2))$ avec n paire, on donne une conjecture pour $\chi_{_L}(P(n, 2))$ avec n impair .

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a connected graph with a proper k-coloring c of its vertices, and let $\Pi = (V_1, V_2, \ldots, V_k)$ be an ordered partition of $V(G)$ into color classes V_k. The color code of a vertex v in $V(G)$ with respect to Π is the k-tuple $C_\Pi(v) = (d(v, V_1), d(v, V_2), \ldots, d(v, V_k))$ where $d(v, V_i) = \min d(v, x) | x \in V_i$ for $1 \leq i \leq k$. If every pair of distinct vertices in G has distinct color codes, then the coloring c is called a locating coloring of G. The locating chromatic number of a graph G, denoted by $\chi_{_L}(G)$, is the smallest integer k such that G has a k-locating coloring. The objective of this thesis is to study the problem of locating chromatic number in graphs. We first provide a summary of the existing results in the literature concerning locating coloring for various classes of graphs, including bounds. We then proceed to study locating coloring for the class of generalized Petersen graphs $P(n, 2)$. We determine $\chi_{_L}(P(n, 2))$ for even n and propose a conjecture for $\chi_{_L}(P(n, 2))$ for odd n.

Remerciements

Au nom de ALLAH le Miséricordieux Louange à ALLAH , avec la grâce duquel vous faites le bien et avec qui vous atteignez vos objectifs .

Loué soit Dieu, le propriétaire des bénédictions et des bénédictions avec lesquelles ses actes sont faits. ALLAH soit loué, de nombreuses louanges bonnes et bénies sont bénies par sa miséricorde et son succès dans l'achèvement de cet humble travail. .

Nous exprimons nos sincères remerciements et notre gratitude à notre honorable professeur, "SAKRI REDHA", qui nous a d'abord supervisés sur des recherches scientifiques qui n'auraient pas atteint ce qu'elles sont sans ses conseils et sa précision. Nos remerciements vont également à l'honorable Professeur, LEMDANI RACHID, qui a également été généreux avec nous. Avec ses conseils et ses orientations, notamment dans l'aspect méthodologique des méthodes de recherche . Nous remercions également très sincèrement les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail en acceptant d'examiner nos travaux et de les enrichir de leurs propositions.Nos remerciements s'étendent également à tous nos enseignants durant les années scolaires. .
Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail. .

Dédicace

Je dédie ce travail :
A ma famille adorée

En particulier
Mes chers parents

Qui me présidez en tout et me conseillez avant que quoi que ce soit n'arrive, qui

donnez sans attente, pardonnez sans excuse et êtes à mes cotés en tout. je vous offre les plus belles expressions de remerciement et de gratitude d'un cœur débordant d'amour, d'affection, de respect et d'appréciation pour vous. **Mes chers frères** :

Mes sœurs bien-aimées :
Si vous dites merci, alors mes remerciement ne rempliront pas votre droit. Je vous

remercie d'être à mes cotés et de me soutenir.
A mes chèrs nièces et neveux :

A mes chères amies :

A tous mes collègues de la promotion 2023

Je tiens à remercier tous les professeurs et les enseignants que j'ai connu

tout au long de mon parcours académique, y compris mon professeur d'école primaire qui je lui souhaite une bonne santé.
Et enfin, je n'oublie pas de me remercier, pour tous les efforts que j'ai

faits.

ZOUBIRI DOUNYA

Dédicace

Je dédie ce travail :
A ma famille adorée

En particulier
Mes chers parents

Qui me présidez en tout et me conseillez avant que quoi que ce soit n'arrive, qui

donnez sans attente, pardonnez sans excuse et êtes à mes cotés en tout. je vous offre les plus belles expressions de remerciement et de gratitude d'un cœur débordant d'amour, d'affection, de respect et d'appréciation pour vous. **Mes chers frères** :

Mes sœurs bien-aimées :
Si vous dites merci, alors mes remerciement ne rempliront pas votre droit. Je vous

remercie d'être à mes cotés et de me soutenir.
A mes chèrs nièces et neveux :

A mes chères amies :

A tous mes collègues de la promotion 2023

Je tiens à remercier tous les professeurs et les enseignants que j'ai connu

tout au long de mon parcours académique, y compris mon professeur d'école primaire qui je lui souhaite une bonne santé.
Et enfin, je n'oublie pas de me remercier, pour tous les efforts que j'ai

faits.

GACEM MAROUA

Table des matières

Remerciements **i**

Dédicace **ii**

Dédicace **iii**

Table des figures **v**

1 Eléments fondamentaux et essentiels sur la théorie des graphes 3
1.1 Introduction . . . 3
1.2 Définitions générales . . . 3
1.2.1 Graphe simple . . . 4
1.2.2 Sous-graphes . . . 4
1.2.3 Voisins et voisins communs . . . 4
1.2.4 Chaîne . . . 5
1.2.5 Distance . . . 5
1.2.6 Diamètre, excentricité . . . 5
1.2.7 Les graphes particuliers . . . 5
1.2.8 Opérations usuelles sur les graphes . . . 8
1.3 Aperçu sur la coloration dans les Graphes . . . 10
1.3.1 Historique . . . 11
1.3.2 Coloration propre des sommets . . . 11
1.3.3 Quelques types de coloration . . . 11

2 Etat de l'art sur le nombre chromatique localisateur d'un graphe 13
2.1 Introduction . . . 13
2.2 Définitions et historique . . . 13
2.3 Quelques résultats obtenus . . . 16
2.3.1 Relations entre la coloration localisatrice et autres paramètres 16
2.3.2 Coloration localisatrice de quelques graphes particuliers . . . 17

2.3.3 Bornes sur le nombre chromatique localisateur 18
2.3.4 Graphes G d'ordre n tels que $\chi_{_L}(G) \in \{3, n-1, n\}$ 19
2.3.5 Classes de graphes et résultats 21
2.3.6 Opérations sur les graphes 24
2.4 Conclusion 30

3 Graphe de Petersen Généralisé P(n,2) 31
3.1 Introduction 31
3.2 Résultat préliminaire 32
3.3 Principaux résultats 34
3.4 Conclusions 40

Index 40

Annexe 40

Conclusion et perspectives 49

Liste des notations 50

Index 55

Table des figures

1.1 Exemples de sous-graphes de G 4
1.2 Graphe Mutli-parti 7
1.3 L'étoile et l'étoile double 7
1.4 Graphe de Kneser et Graphe d'amitié 8
1.5 La subdivision d'une étoile. 9
1.6 Exemple de carré d'un graphe 10
1.7 Exemples de produits Corona des graphes 10

2.1 Exemple d'ensemble localisateur 14
2.2 Deux colorations c et c' 15
2.3 Coloration localisatrice minimum de quelques graphes particuliers . 18
2.4 Un arbre T d'ordre n avec $\chi_L(T) = k$ 20
2.5 Graphes maximaux ayant des cycles pairs avec nombre chromatique localisateur 3 21
2.6 Graphes maximaux ayant un cycle impair avec un nombre chromatique localisateur égale à 3 22

3.1 Les graphes de Petersen généralisés 32

Introduction générale

La théorie des graphes est une branche des mathématiques discrètes qui étudie les propriétés et les structures des graphes. Un graphe est un ensemble de sommets reliés par des arêtes. Les graphes sont utilisés dans de nombreux domaines, y compris la recherche opérationnelle, pour modéliser et résoudre des problèmes complexes.

De manière générale, un graphe est un dessin géométrique défini par la donnée d'un ensemble de points appelés *sommets*, reliés entre eux par un ensemble de lignes ou de flèches, appelées *arêtes*. Les graphes peuvent être utilisés pour modéliser plusieurs situations courantes, leurs applications sont par conséquent aussi nombreuses que diverses. Nous pouvons citer à titre d'exemples : la chimie (modélisation de structures), la biologie (génome), les sciences sociales (modélisation des relations entre les populations) ou les applications industrielles (problème du voyageur de commerce).

L'un des domaines le plus étudié en théorie des graphes est celui de *la coloration des graphes*. En effet, de nombreux problèmes réels tels que les problèmes d'ordonnancements ou encore d'allocations de fréquences se traduisent comme une partition d'ensemble d'objets (sommets, arêtes, faces,...), en plusieurs classes suivant certaines contraintes. La contrainte la plus courante est celle de la *propreté*, qui consiste à affecter à deux éléments voisins des couleurs différentes. Il existe une grande variété de problèmes de colorations où il est question de rechercher des structures optimales particulières telles que le nombre minimum de couleurs d'une coloration propre des sommets d'un graphe. Le problème de coloration figure, à ce jour, parmi les paramètres fondamentaux dont l'origine remonte au problème des quatre couleurs, posé par Francis Guthrie en 1852.

Actuellement, on trouve dans la littérature plusieurs types de coloration. Elles sont définies par la coloration des éléments du graphe avec une ou plusieurs contraintes supplémentaires.

En 2002, Chartrand et al. ont introduit la coloration localisatrice. Il s'agit de trouver le plus petit nombre de couleurs, noté $\chi_L(G)$, à affecter aux sommets d'un graphe G de telle sorte que si toute paire de sommets distincts u et v de G ont des codes de couleurs distincts ($C_\Pi(u) \neq C_\Pi(v)$ avec $C_\Pi(v) =$

$(d(v,V_1), d(v,V_2), \ldots, d(v,V_k)\ )$. Ce mémoire examine le problème de recherche du nombre chromatique localisateur d'un graphe $G = (V,E)$. Nous avons opté pour l'étude de ce paramètre car nous avons été interpellée particulièrement par le fait que très peu de travaux ont été réalisés sur ce sujet. Comme la préoccupation concrète et très courante des chercheurs est d'établir des valeurs exactes pour les invariants d'un graphe, notre tentation était grande d'aller vers la détermination de la valeur exacte du nombre chromatique localisateur de quelques classes de graphes. Pour cela, Il nous a semblé naturel de traiter des graphes dont la structure est particulière et nous avons pensé aux graphes de Petersen généralisés. L'étude de la classe générale des graphes de Petersen généralisés s'est avérée difficile, c'est pourquoi nous avons préféré nous restreindre à quelques sous-classes $P(n,2)$.

Nous avons jugé utile de diviser notre travail, en trois chapitres

Nous présentons dans le chapitre 1, des rappels sur des notions de base de la théorie des graphes et quelques-unes de leurs propriétés, nécessaires et utiles à la compréhension du sujet traité dans ce manuscrit. Le lecteur pourra ainsi retrouver les notions de sous-graphe, connexité ou encore morphisme de graphes. Nous donnerons aussi dans ce chapitre un aperçu sur les différents types de coloration dans les graphes.

Le chapitre 2 regroupe les travaux et résultats obtenus par les auteurs, dans le cadre de l'étude du nombre chromatique localisateur. Nous mettons en évidence le nombre chromatique localisateur de quelque classes de graphes tels que les chaînes, les cycles, l'étoile et l'étoile double et nous présentons les principales bornes pour certaines classes de graphes, telles que les graphes de Knezer, les différentes classes d'arbres,....

Dans le chapitre 3, on traite le problème de la coloration localisatrice dans les graphes de Petersen généralisés $P(n,2)$.

Enfin, une discussion sur le travail contenu dans ce mémoire sera proposée dans la conclusion. Nous proposerons aussi divers problèmes ouverts qui ont découlé de notre étude pour des travaux futurs.

Chapitre 1

Eléments fondamentaux et essentiels sur la théorie des graphes

1.1 Introduction

Ce chapitre est destiné principalement au lecteur non familier avec les concepts de la théorie des graphes et la notion de distance dans les graphes, en particulier. Nous donnons dans cette partie les définitions de base sur les graphes qui nous seront utiles tout au long de ce mémoire et nous présentons la plupart des classes de graphes dont nous étudions. Quoique nous supposions que les notions de base de la théorie des ensembles sont connues du lecteur, les définitions plus spécifiques seront données au fur et à mesure. Pour en savoir plus, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de Berge [10] et Diestel [14].

A la fin de ce document est placée une liste des notations communes aux deux parties de ce mémoire. Ces notations sont standards et peuvent être retrouvées dans [10, 14].

1.2 Définitions générales

Un graphe G est défini par deux ensembles disjoints notés $V(G)$ et $E(G)$ (V et E s'il n'y a aucune confusion) où V est l'ensemble des sommets et E est constitué de paires (non ordonnées) d'élément de V dit ensemble des arêtes.
On notera par uv au lieu de $\{u, v\}$ une arête de E dans ce cas, les sommets u et v constituent les extrémités de l'arête uv. On appelle **arêtes multiples** des arêtes qui relient les mêmes sommets u et v.

Le nombre de sommets $|V| = n$ de G est appelé **ordre de G** et le nombre d'arêtes $|E| = m$ est appelé la **taille de G**. Un graphe est dit **non trivial** s'il est

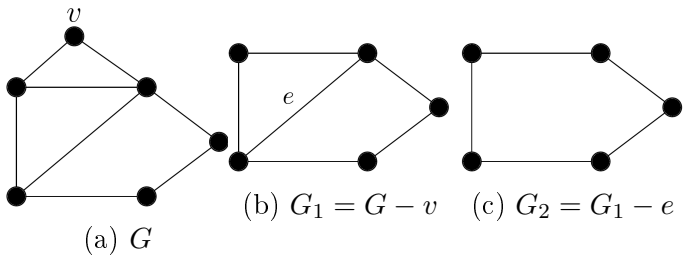
d'ordre supérieur à 1.

1.2.1 Graphe simple

une boucle est une arête reliant un sommet 'a lui-même est appelée . Un graphe est dit **simple** s'il est sans boucles et sans arêtes multiples. Sauf indication contraire, tous les graphes étudiés dans ce mémoire sont supposés non orientés et simples.

1.2.2 Sous-graphes

Un **sous-graphe partiel** de $G = (V, E)$, est un graphe $G' = (V', E')$ tel que : $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$. Le **graphe partiel** du graphe $G = (V, E)$ est un graphe $G' = (V, E')$ où $E' \subseteq E$. En d'autres termes, G' est obtenu à partir de G en supprimant les arêtes de l'ensemble $E \backslash E'$. Le sous-graphe **induit** ou **engendré** par un ensemble $V' \subseteq V$, noté $G[V']$ est le sous-graphe ayant pour ensemble de sommets V' et pour ensemble d'arêtes $E' \subseteq E$ tel que :$uv \in E'$ si et seulement si $u, v \in V'$



(a) G (b) $G_1 = G - v$ (c) $G_2 = G_1 - e$

FIGURE 1.1 – Exemples de sous-graphes de G

1.2.3 Voisins et voisins communs

On appelle **ensemble de voisins** du sommet u, noté $N_G(u)$ ($N(u)$ s'il n'y a pas confusion), l'ensemble de tous les sommets différents de u qui lui sont adjacents. Si G est simple alors $|N(u)| = d_G(u) \leq n - 1$. On appelle **ensemble de voisins communs** du sous-ensemble de sommets $S = \{u_1, u_2, ..., u_k\}$, noté $N_G(S)$ ou $N(S)$ (s'il n'y a pas confusion), l'ensemble de sommets qui sont voisins communs à tous les sommets de l'ensemble S. Autrement dit, $N(S) = N(u_1) \bigcap N(u_2) \bigcap \cdots N(u_k)$.

1.2.4 Chaîne

Une **chaîne** reliant deux sommets u et v de V, est une séquence de sommets $P_{=}v_1v_2\cdots v_k$, où $v_1 = u, v_k = v$ et $\forall\ 1 \leq i < k$ les sommets v_i, v_{i+1} sont adjacents. La **longueur d'une chaîne** est mesurée par le nombre d'arêtes reliant ses sommets.

La longueur de P est donc égale à $k-1$. Les éléments de l'ensemble $\{v_2, \cdots, v_{k-1}\}$ sont appelés sommets internes de P. On dit que P est simple si P ne passe pas deux fois par une même arête, de même si P ne contient pas deux fois le même sommet,alors on dit qu'elle est élémentaire.

1.2.5 Distance

Soit $G = (V, E)$ un graphe, **la distance** entre deux sommets u et v de G, notée $d_G(u, v)$, est la longueur d' une plus courte chaine entre les deux sommets u et v de G.

1.2.6 Diamètre, excentricité

Le **diamètre** d'un graphe $G = (V, E)$, noté $Diam(G)$, est la plus grande distance entre les sommets de G pris deux à deux. $Diam(G) = \text{Max}\{d_G(u, v), u, v \in V\}$

L'**excentricité** d'un sommet u, notée $\epsilon(u)$, est la plus grande des distances $d(u, v)$ où $v \in V(G)$

$$\epsilon(u) = \text{Max}\{d_G(u, v), v \in V\}$$

1.2.7 Les graphes particuliers

De par les propriétés particulières qui les caractérisent, les graphes peuvent être classés en plusieurs familles. En vue de faciliter une bonne compréhension du sujet et la lecture des chapitres suivants, une introduction de quelques familles de graphes connexes suit dans cette section.

1.2.7.1 Cycle

Un **cycle** est défini par une séquence de sommets $v_1v_2\cdots v_kv_1$, on note C_k un cycle à k sommets, la longueur du cycle est égale à k.

Un cycle est dit **cycle impair (cycle pair)** si k est impair (respectivement pair).

La **maille d'un graphe** notée g est la longueur du plus petit cycle induit contenu dans G. La **circonférence d'un graphe** est le cycle le plus long du graphe G.

1.2.7.2 Graphe bipartis et bipartis complets

Un graphe $G = (V, E)$ est dit **biparti** s'il existe une partition de son ensemble de sommets en deux stables disjoints V_1 et V_2 telle que chaque arête ait une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2 : $G = (V_1 \cup V_2, E)$.

Un graphe **biparti complet** est un graphe biparti maximal en terme de nombre d'arêtes.
Ainsi, le graphe biparti complet $K_{n,m}$ a pour ensemble de sommets $V_1 \cup V_2$ avec $|V_1| = n$ et $|V_2| = m$, et pour ensemble d'arêtes $\{xy|x \in V_1, y \in V_2\}$. Chaque sommet de V_1 est adjacent à tous les sommets de V_2 .

1.2.7.3 Graphes multipartis et multipartis complet

Le graphe **multiparti**, noté $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, est le graphe dont l'ensemble de sommets est partitionné en k stables disjoints : $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$ avec V_i de taille n_i et où chaque sommet de V_i est adjacent à tous les sommets de V_j avec $i, j = 1, \ldots, k$ et $i \neq j$.

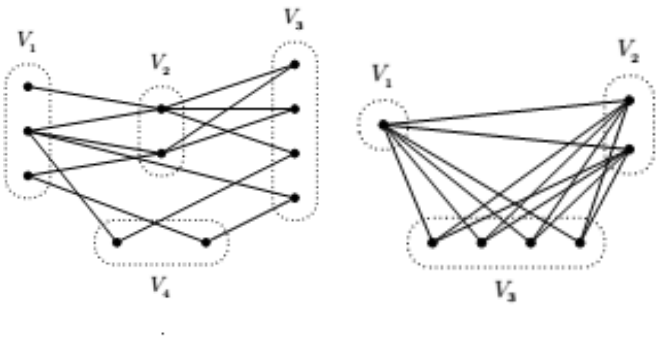
Définition. *Un graphe multiparti complet ou t-parti complet $K_{n_1,n_2,\cdots,n_t}$, $t \geq 2$, est un graphe G où l'ensemble des sommets $V(G), |V(G)| = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$, peut être partitionné en t stables N_i (c'est-à-dire $G[N_i]$ est sans arête), $i = 1, \cdots, t$ avec $|Ni| = n_i$ et pour toute paire de sommets $u \in N_i$ et $v \in N_j, 1 \leq i < j \leq t, uv \in E(G)$.*

1.2.7.4 Étoile et étoile double

Une **étoile** est un arbre à t sommets pendants reliés à l'unique sommet de degré t, et on le note par S_t ou $K_{1,t}$, pour tout entier positif $t \geq 1$.
Une **étoile double** $S_{p,q}$, $p, q \geq 1$ est un arbre obtenu en reliant le sommet support d'une étoile $K_{1,p}$, $p \geq 1$ au sommet support d'une étoile $K_{1,q}$, $q \geq 1$.

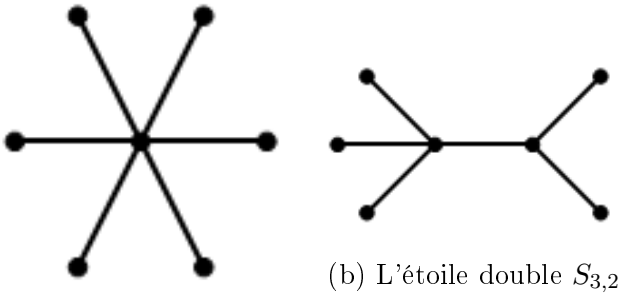
1.2.7.5 Les roues

Pour un entier $k \geq 3$.
• *La k-**roue** W_k est le graphe obtenu en joignant un sommet u à chaque sommet* d'un *cycle élémentaire C_k engendré par $w_1, w_2, \ldots, w_k$.*



(a) Graphe 4-parti (b) Graphes triparti complets.

FIGURE 1.2 – Graphe Mutli-parti



(b) L'étoile double $S_{3,2}$

(a) L'étoile S_6

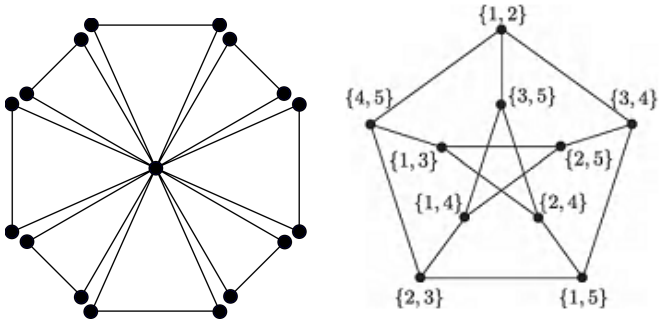
FIGURE 1.3 – L'étoile et l'étoile double

• *Le sommet u est le centre de la roue.*

1.2.7.6 Graphe de Kneser

Le **graphe de Kneser** $KG(n,k)$ est un graphe simple dont les sommets correspondent aux sous-ensembles à k éléments d'un ensemble à n éléments. Deux sommets sont reliés s'ils correspondent à des sous-ensembles disjoints. L'ordre de graphe de Knezer est donc égal $\binom{n}{k}$, le nombre de combinaison de k parmi n, et il est régulier de degré $\binom{n-k}{k}$

Le graphe de Petersen est isomorphe au graphe $KG(5,2)$, le graphe complet K_n est isomorphe au graphe $KG(n,1)$.



(a) Graphe d'amitié Fr_{17} .

(b) Graphe de Kneser $KG(5,2)$.

FIGURE 1.4 – Graphe de Kneser et Graphe d'amitié

.

1.2.7.7 Graphe de Halin

Un **graphe de Halin** $G = (V, E)$ est un graphe planaire $G = T \uplus C$ où T est un arbre et C un cycle passant par toutes les feuilles dans un ordre induit par l'une des représentations planaires de T. Les sommets et les arêtes sur le cycle C sont appelés **sommets et arêtes extérieurs**. Les autres sommets et arêtes sont appelés **sommets et arêtes intérieurs**. On impose encore que le degré des sommets intérieurs soit strictement plus grand que deux. Les graphes de Halin constituent une bonne classe de graphes candidats entre la classe des arbres et les graphes planaires. La roue W_n de $n+1$ sommets est un exemple de graphe de Halin obtenu d'une étoile S_{n+1}.

1.2.7.8 Graphe régulier

Un **graphe régulier** est un graphe où tous les sommets ont le même degré, pour un certain entier $k \geq 0 \ \forall \ u, d(u) = k$. Un tel graphe est souvent appelée graphe **k-régulier**. Lorsque $k = 3$, on dit que G est un **graphe cubique**. Le graphe de Petersen et l'échelle de Möbius sont des graphes 3-réguliers ou cubiques.

1.2.8 Opérations usuelles sur les graphes

Les opérations sur les graphes permettent de construire de nouveaux graphes à partir d'autres de tailles plus petites. Ceci permet de déduire de nouvelles propriétés à l'aide de celles se trouvant dans les graphes de petite taille. Ces opérations sont parfois divisées en deux classes : les opérations unaires (comme l'ajout ou la suppression d'une arête ou d'un sommet) et les opérations binaires (comme la

somme cartésienne, le joint). Nous définissons ci-après les opérations qui nous seraient utiles dans la suite de ce mémoire.

1.2.8.1 Graphe subdivisé

Le **graphe subdivisé** $S(G)$ d'un graphe G, est obtenu à partir de G en remplaçant chaque arête $e = v_iv_j$ de G par un nouveau sommet $v_{i,j}$ et deux arêtes $v_iv_{i,j}$ et $v_jv_{i,j}$. Autrement dit, en insérant un nouveau sommet sur chaque arête de G.
Pour un entier $k \geq 1$, le **graphe k-subdivisé** $S(G)$ d'un graphe G, est obtenu à partir de G en insérant k nouveaux sommets sur chaque arête de G.

La **subdivision barycentrique** subdivise toutes les arêtes du graphe. Ce cas particulier de subdivision donne toujours un graphe biparti.

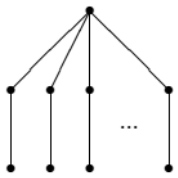


FIGURE 1.5 – La subdivision d'une étoile.

1.2.8.2 Graphe P-puissance

Définition. *Etant donné un entier p, la puissance p^{ieme} d'un graphe $G = (V, E)$, notée G^p, est le graphe dont les sommets sont l'ensemble V et où deux sommets sont adjacents dans G^p s'ils sont à distance au plus p dans G :* $E(G^p) = \{uv \in E(G) | d_G(u, v) \leq p\}$

Le graphe 2-puissance de G, noté G^2, est appelé le carré de G (Voir Figure 1.8).

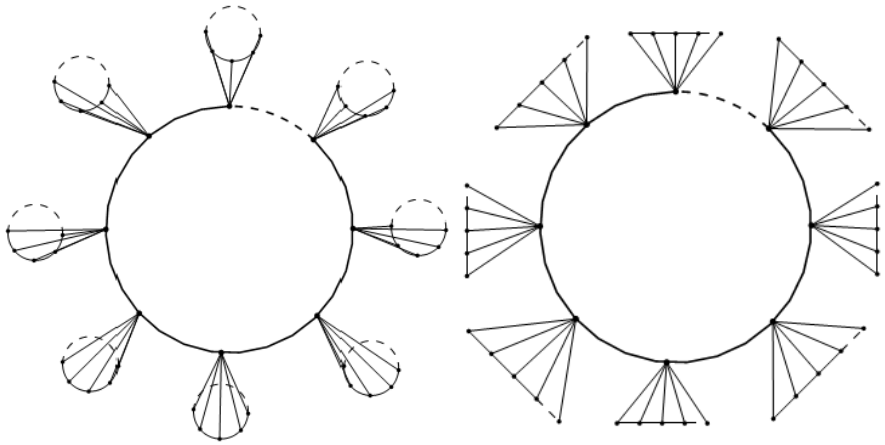
1.2.8.3 Produit corona

Le produit corona est un procédé qui consiste a construire un graphe plus large à partir des graphes plus petits. On appelle le **produit corona** des graphes G_1 et G_2 d'ordres respectivement n_1 et n_2 noté $G_1 \circ G_2$ le graphe obtenu en prenant n_1



(a) G (b) G^2

FIGURE 1.6 – Exemple de carré d'un graphe



(a) $C_{n_1} \circ C_{n_2}$ (b) $C_{n_1} \circ P_{n_2}$

FIGURE 1.7 – Exemples de produits Corona des graphes

copies du graphe G_2, puis on connecte chaque $i^{ème}$ sommet du graphe G_1 par une arête à chaque sommet du $j^{ème}$ copie de G_2 pour $1 \leq i, j \leq n_1$.

On distingue trois types de sommets dans un arbre :

- La racine.
- Les feuilles : ce sont les sommets de degré égal à 1.
- Les sommets internes : ce sont les sommets de degré supérieur à 1.

Il existe plusieurs classes de graphes tel que :

1.3 Aperçu sur la coloration dans les Graphes

On trouve dans la pratique divers problèmes qui peuvent être modélisés comme problèmes de coloration de graphes comme l'ordonnancement de tâches, l'allocation de fréquences, l'allocation de registres, la répartition de services dans les réseaux. La coloration des graphes est un moyen de résolution de problèmes pratiques.

Plusieurs types de colorations font objets de travaux d'éminentes équipes de

recherche telles que la coloration des sommets, la coloration des arêtes, la coloration des sommets et des arêtes (la coloration totale) ,...etc. Pour de plus exemples détails sur ce sujet, le lecteur peut se reporter aux livres de Chartrand et Zhang [12] et de Jensen et Toft [17].

1.3.1 Historique

Les premiers résultats de coloration de graphe concernent presque exclusivement les graphes planaires : il s'agissait alors de colorier des cartes geographique. En cherchant à mettre en couleurs une carte des comtés d'Angleterre, Francis Guthrie postula la conjecture des quatre couleurs. Dans ce mémoire on s'intéresse à la coloration des sommets.

1.3.2 Coloration propre des sommets

Définition. *La* ***coloration*** *d'un graphe consiste à attribuer des couleurs aux sommets de telle sorte que deux sommets adjacents quelconques ne reçoivent pas la même couleur.*

Une ***k-coloration*** *d'un graphe* G *est une application* c *:* $V(G) \to C$*, où* C *est un ensemble de* k *couleurs (généralement,* $C = 1, 2, \ldots, k$*), telle que pour toute arête uv de* E(G), $c(u) \neq c(v)$*. Le graphe est dit alors* ***k-coloriable*** *ou (****k-colorable****) Si c est une* k*-coloration de* G *et* i($1 \leq i \leq k$) *une couleur, alors* V_i *est une* ***classe de couleur*** *.*

Définition. *Le* ***nombre chromatique*** $\chi(G)$ *d'un graphe* G *est le plus petit entier* k *tel que* G *admet une* k*-coloration.*

Si $\chi(G) = k$, le graphe G est dit k-**chromatique**

Il est évident que toute coloration d'un graphe contenant une clique de taille k nécessite au moins k couleurs. Plus précisément :

Propriété 1. *Pour tout graphe* G, $\chi(G) \geq \omega(G)$.

où $\omega(G)$ désigne la taille maximale d'une clique dans G (clique number en anglais).

Propriété 2. *Pour tout graphe* G *de degré maximum* $\triangle(G)$, $\chi(G) \leq \triangle(G) + 1$.

1.3.3 Quelques types de coloration

L'étude de la coloration dans les graphes ne cesse d'évoluer en raison de la diversité de ses applications dans différents domaines. Dans plusieurs applications,

la coloration simple ne permet pas de présenter une illustration complète du problème. Alors, il est nécessaire de combiner la coloration avec d'autres propriétés de la théorie des graphes. Ce qui explique l'introduction des variantes de la coloration donc il existe également plusieurs types de colorations de sommets. On cite par exemple la coloration de Grundy, la a-coloration, la b-coloration, coloration distinguant et la coloration localisatrice qui fera l'objet de notre étude.

1.3.3.1 Coloration distinguante

Définition. *Une k-coloration c de sommets de G est dite k-**distinguant** si pour tout automorphisme non trivial σ de G, il existe $x \in V(G)$ tel que $c(x) \neq c(\sigma(x))$. Autrement dit, le seul automorphisme qui préserve cette coloration est l'identité.* ***Le nombre distinguant****(en anglais distinguishing number) d'un graphe G, noté $D(G)$, est le plus petit entier k tel que le graphe G admet une k-coloration distinguant.*

Définition. ***Le nombre chromatique distinguant****(en anglais distinguishing chromatic number) d'un graphe G, noté $\chi_D(G)$, est le plus petit entier k tel que le graphe G admet une k-coloration propre et distinguant.*

Observation 1. *Pour tout graphe G, $\chi_D(G) \leq max\{\ \chi_(G), D(G)\}$.*

1.3.3.2 La a-coloration

Définition. *Une **a-coloration** est une coloration propre de sommets telle que chaque paire de couleurs possède des sommets adjacents. le **nombre achromatique** d'un graphe G, noté $\psi(G)$, est le plus grand entier k tel que G admet une partition de sommets V en au plus k ensembles disjoints $V_1, V_2, \ldots, V_k$ tels que pour chaque paire d'ensembles distincts V_i et $V_j, V_i \cup V_j$ ne soit pas un ensemble stable.*

En d'autres termes Le nombre a-chromatique d'un graphe G notée $\psi(G)$ est le nombre maximum de couleurs pour lequel G possède une a-coloration.

1.3.3.3 La b-coloration

Définition. *Une **b-coloration** est une coloration propre de sommets telle que pour chaque couleur, il existe un sommet de cette couleur qui est voisin des sommets de toutes les autres couleurs. Le **nombre b-chromatique** , noté $\varphi(G)$, est le nombre maximum k pour lequel G admet une b-coloration avec k couleurs.*

Chapitre 2

Etat de l'art sur le nombre chromatique localisateur d'un graphe

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on introduit le problème de coloration localisatrice et on présente dans un premier temps quelques résultats inauguraux prouvés par différents auteurs qui ont travaillé sur la coloration localisatrice, certains résultats ayant été publiés dans des journaux indonésiens.

Depuis son introduction en 2002 [13], le nombre chromatique localisateur a fait l'objet de nombreux travaux de recherche qui ont été développés et publiés, on compte à ce jour plus de 44 articles d'après la base de données Scopus et 27 articles selon la base de donnée ZBMath.

D'une manière générale, on constate que le réseau de recherche sur cette thématique est donc de dimension internationale. Les principaux groupes de recherche se situent en Indonésie (Département de mathématiques, Université Mulawarman), Iran (Département des sciences mathématiques, Université de technologie d'Ispahan) et Japan (Département d'informatique et des sciences de l'information, Université Seikei).

2.2 Définitions et historique

On commence par donner les définitions des paramètres associés à cette coloration. Puis, on rappelle les principaux travaux ultérieurs concernant ce paramètre.

Avant de définir le problème de la coloration localisatrice, introduisons de nouvelles notations qu'on utilisera dans la suite de ce mémoire. Soit une coloration

propre d'un graphe $G = (V, E)$, l'ensemble des sommets portant une même couleur est dit **classe de couleur ou classe**. Une classe contenant k sommets est dite **k-classe**.

2.2.0.1 Ensemble localisateur

Définition. ***Un ensemble localisateur*** $W = \{w_1, w_2, \dots w_k\}$ *est un sous-ensemble de sommets du graphe tels que pour tout sommet* v *du graphe* G *les* k*-uplets* $(d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$ *soient distincts.*

Définition. *La taille du plus petit ensemble localisateur d'un graphe* G *est appelé* ***nombre localisateur*** *et notée* $loc(G)$*.*

Les *ensembles localisateurs* permettent de modéliser des situations où les capteurs sont capables de déterminer la distance qui les sépare de chaque sommet. Un sommet est alors identifié par ses distances à chaque capteur. La Figure 2.1 donne un exemple d'ensemble localisateur dans le cycle de taille 6, Les sommets noirs forment un ensemble localisateur. Pour chaque sommet de C_6, les distances aux deux sommets noirs sont indiquées

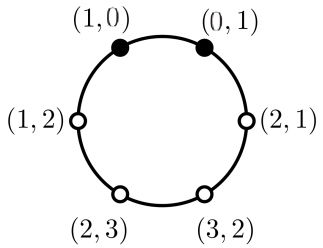


FIGURE 2.1 – Exemple d'ensemble localisateur

.

2.2.0.2 Coloration localisatrice

Définition. *Soit* $k \in N^*$*,* c *une* k*-coloration propre des sommets d'un graphe* G *et* $\Pi = (V_1, V_2, \dots, V_k)$ *est une partition ordonnée de* $V(G)$ *dans les classes de couleurs* V_k*. Le* ***code couleur*** *de* $v \in V(G)$ *par rapport à* Π *est le* k*-uplets*

$$C_\Pi(v) = (d(v, V_1), d(v, V_2), \dots, d(v, V_k))$$

avec $d(v,\ V_i) = \min\{d(v, x) | x \in V_i\}$ *pour* $1 \leq \mathrm{i} \leq k$*.*

Définition. *Si toutes les paires de sommets distincts de* G *ont des codes de couleurs distincts, alors* c *est appelée une* ***coloration localisatrice*** *(locating coloring en anglais) de* G*.*

Définition. *Le* ***nombre chromatique localisateur*** *(Locating chromatic number en anglais) d'un graphe G, noté $\chi_{_L}(G)$, est le plus petit entier k tel que G est admet une k-coloration localisatrice.*

Définition. *Pour une coloration localisatrice c d'un graphe G,* ***un sommet dominant*** *v est un sommet qui a des voisins dans toutes les classes de couleurs c-à-dire $d(v, V_i) = 1$ si v n'est pas dans la classe de couleur V_i.*

Donc la coloration localisatrice d'un graphe G est une coloration propre qui distingue tous les sommets de G en fonction de leurs distances des classes de couleurs résultantes V_i pour $1 \leq \mathrm{i} \leq k$. Par exemple, dans la Figure 2.2, la 3-coloration c de G n'est pas une coloration localisatrice car v_3 et v_4 possède le même code couleur. D'autre part, la coloration c' est une coloration localisatrice avec $\chi_{_L}(G) = 4$.)

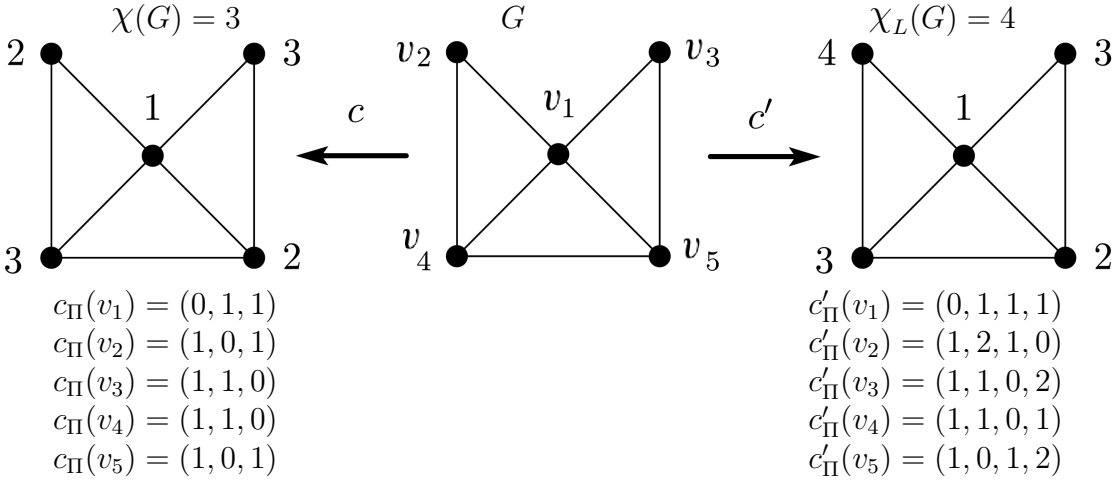


FIGURE 2.2 – Deux colorations c et c'

.

Notons que le i^{eme} composant du code de couleur de chaque sommet dans la classe de couleur V_i est zéro et ses autres composants sont non nuls. Par conséquent, une coloration propre est une coloration localisatrice si les codes couleurs des sommets de chaque classe de couleur sont différents.

Observation 1. *Pour montrer qu'une coloration propre est une coloration localisatrice, il suffit de montrer que $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$ pour les sommets non adjacents u et v avec $c(u) = c(v)$.*

Théorème 2.1. *[13] Soit c une coloration localisatrice d'un graphe connexe G. Si u et v sont deux sommets distincts de G tel que $d(u, w) = d(v, w)$ pour tout $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$, alors $c(u) \neq c(v)$. En particulier, si deux sommets u et v sont adjacents au même sommet, on a : $c(u) \neq c(v)$.*

2.3 Quelques résultats obtenus

Nous exposons dans ce qui suit les résultats les plus importants publiés au cours de la période 2002-2023.

2.3.1 Relations entre la coloration localisatrice et autres paramètres

Dans cette section, nous présentons les relations entre le nombre chromatique localisateur et d'autres paramètres de graphes tels que le nombre chromatique, le nombre localisateur, le diamètre et le nombre chromatique distinguant. Toute coloration localisatrice est une coloration propre avec des conditions supplémentaires et donc on a le théorème suivant.

Théorème 2.2. *[13]*
Pour tout graphe G, $\chi(G) \leq \chi_{_L}(G) \leq \chi(G) + loc(G)$.

Chartrand et al. [13] ont montré que le nombre chromatique localisateur est compris entre deux bornes inférieure et supérieure qui sont en fonction de l'ordre et le diamètre.

Théorème 2.3. *[13] Soit G un graphe d'ordre* $n \geq 3$ *et son diamètre* $d \geq 2$. *Alors on a :* $log_{d+1} n \leq \chi_{_L}(G) \leq n - d + 2$

Furuya[15] a montré que le nombre chromatique distinguant est une borne inférieure pour le nombre chromatique localisateur .

Théorème 2.4. *[15] Soit G un graphe connexe, alors* $\chi_D(G) \leq \chi_L(G)$.

2.3.2 Coloration localisatrice de quelques graphes particuliers

Beaucoup d'auteurs ont étudié la coloration localisatrice de quelques classes particulières de graphes. En 2002, Chartrand *et al.* [13] ont étudié quelques familles simples de graphes tels que les chaînes, les graphes multiparti complet, les cycles, l'étoile et la double étoile. Concernant les chaines P_n de longueur $n-1$, l'affectation de couleur 1 au sommet u_1 et les couleurs $2, 3$ alternativement aux sommets u_i pour $i = 2, \ldots, n$ de P_n représente une coloration localisatrice minimum.

Théorème 2.5. *[13] Pour $n \geq 3$, $\chi_{_L}(P_n) = 3$.*

Pour les cycles C_n, la valeur de $\chi_{_L}(C_n)$ dépend de la parité de n

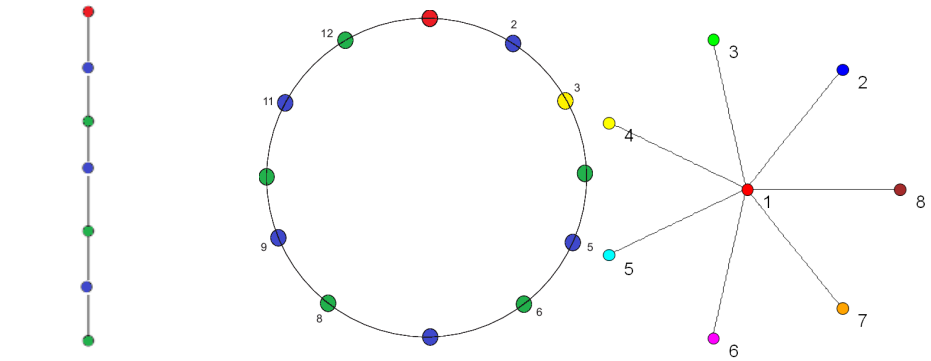
Théorème 2.6. *[13] Soit $n \geq 3$. $\chi_{_L}(C_n) = 3$ si n est impair, et $\chi_{_L}(C_n) = 4$ sinon.*

ils ont caractérisé les graphes G tel que $\chi_{_L}(G) = n$

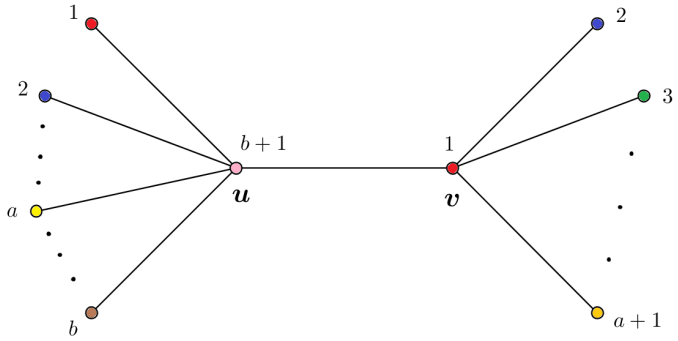
Théorème 2.7. *[13] Soit G un graphe un graphe multiparti complet d'ordre $n \geq 3$. Alors $\chi_{_L}(G) = n$.*

Théorème 2.8. *[13] Soit $n \geq 3$, alors $\chi_{_L}(S_n) = n$.*

Théorème 2.9. *[13] Pour tout deux entiers a et b tels que $1 \leq a \leq b$ et $b \geq 2$, on a $\chi_{_L}(S_{a,b}) = b + 1$.*



(a) Chaîne P_n (b) Cycle C_n (c) Etoile S_n



(d) Double étoile $S_{a,b}$

FIGURE 2.3 – Coloration localisatrice minimum de quelques graphes particuliers

Dans [7] Behtoei *et al.* ont étudié les roues et le graphe d'amitié et ils ont montré les résultats suivants :

Théorème 2.10. *[7] Pour $n \geq 3$, $m = \min\{k \in N | n \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)$, on a :*

$$\chi_L(W_n) = \begin{cases} \chi_L(C_n) + 1 & si\ 3 \leq n < 9, \\ m + 1 & si\ n \neq \frac{1}{2}(m^3 - m^2) - 1\ et\ n \geq 9, \\ m + 2 & si\ n = \frac{1}{2}(m^3 - m^2) - 1\ et\ n \geq 9. \end{cases}$$

Théorème 2.11. *[7] Pour un entier positif t, soit $n = 2t + 1$, on a :*
$\chi_L(Fr_n) = 1 + min\{k\ :t \leq \binom{n}{x}\}$

2.3.3 Bornes sur le nombre chromatique localisateur

Beaucoup de travaux ont été entrepris pour déterminer des bornes pour le nombre chromatique localisateur, ainsi que les conditions sous lesquelles elles sont atteintes. Nous commençons par donner les valeurs exactes.

Sans doute, $\chi_{_L}(K_1) = 1$ et $\chi_{_L}(K_2) = 2$. Ce sont les deux seuls graphes connexes dont le nombre chromatique localisateur est strictement inférieur à 3. Dans [13] Erwin *et al.* ont prouvé le résultat suivant :

Théorème 2.12. *[13] Pour tout graphe connexe G d'ordre $n \geq 3$, on a :* $3 \leq \chi_{_L}(G) \leq n$.

Le théorème suivant donne une borne inférieure pour le nombre chromatique localisateur en fonction du nombre de feuilles dans un graphe G.

Théorème 2.13. *[13] Si G est un graphe contenant au moins un sommet adjacent a exactement k feuilles, alors* $\chi_L(G) \geq k + 1$.

Le théorème suivant donne une borne inférieure pour le nombre chromatique localisateur en fonction du nombre des cliques de taille k dans un graphe .

Théorème 2.14. *[13] Si G est un graphe contenant deux cliques de taille k, alors* $\chi_{_L}(G) \geq k + 1$.

Le résultat suivant met l'accent sur les relations entre le diamètre, l'ordre du graphe et le nombre chromatique localisateur.

Théorème 2.15. *[13] Soit G un graphe d'ordre $n \geq 3$, de diamètre $d \geq 2$ et tel que* $\chi_{_L}(G) = k$, *alors* $n \leq kd^{k-1} - 1$.

2.3.4 Graphes G d'ordre n tels que $\chi_{_L}(G) \in \{3, n-1, n\}$

En 2003, Chartrand *et al.* [13] ont caractérisé tous les graphes d'ordre n avec le nombre chromatique localisateur égale à n.

Théorème 2.16. *[13] Soit G un graphe d'ordre $n \geq 3$, alors* $\chi_{_L}(G) = n$ *si et seulement si G est un graphe multiparti complet.*

Ils ont également prouvé dans le même article [13], qu'il existe un arbre d'ordre n, $n \geq 5$, ayant un nombre chromatique localisateur égale à$k \in \{3, 4, \ldots, n-2, n\}$.

Théorème 2.17. *[13] Soit $n \geq 5$, alors il existe un arbre d'ordre n ayant un nombre chromatique localisateur k si et seulement si $k \in \{3, 4, \ldots, n-2, n\}$.*

Dans [11], les mêmes auteurs caractérisent deux classes de graphes d'ordre n avec le nombre chromatique localisateur égale à $n - 1$.

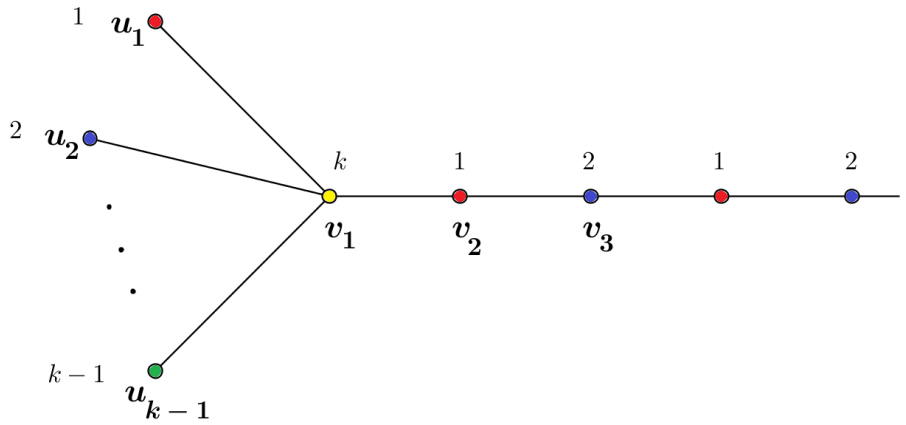


FIGURE 2.4 – Un arbre T d'ordre n avec $\chi_L(T) = k$

.

Théorème 2.18. *[11]*
Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ tel que $G \setminus v$ est un graphe multiparti complet pour un sommet v de G, alors

$$\frac{n+1}{2} \leq \chi_L(G) \leq n.$$

Théorème 2.19. *[11] Pour tout entier $n \geq 3$ et tout entier k avec $(n+1)/2 \leq k \leq n$, il existe un graphe connexe G d'ordre n et un sommet v de G tel que $G \setminus v$ est un graphe multiparti complet et $\chi_L(G) = k$.*

La recherche bibliographique a montré qu'il n'y a pas eu de nouveaux articles sur la coloration localisatrice entre 2004 et 2011.

L'année 2012 fut marquante dans l'histoire des études sur le nombre chromatique localisateur. On y voit la caractérisation des graphes avec cycles avec un nombre chromatique localisateur égal à trois par Asmiati *et al.* [3] dans un théorème des plus importants à ce jour.

Théorème 2.20. *[3] Soit F, un graphe n'ayant que des cycles pairs et C le plus grand cycle pair. Alors F a un nombre chromatique localisateur égale à3 si et seulement si F est un sous-graphe du graphe de la Figure 2.5.*

Théorème 2.21. *[3] Soit C un cycle impair, alors il y a exactement quatre types de graphes maximaux illustrés dans la figure 2.6 avec un nombre chromatique localisateur 3 contenant comme un plus petit cycle impair.*

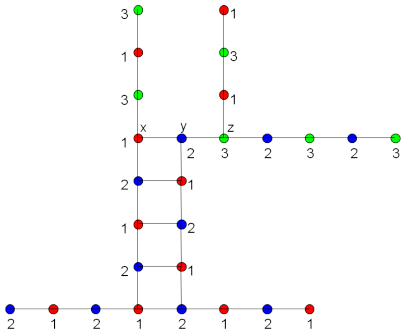


FIGURE 2.5 – Graphes maximaux ayant un cycle pair avec nombre chromatique localisateur 3 .

2.3.5 Classes de graphes et résultats

2.3.5.1 Graphe de Kneser

Rappelons brièvement que le graphe de Kneser $KG(n,k))$ est le graphe qui a pour ensemble de sommets $\binom{\{1,2,\ldots,n\}}{k}$ où deux sommets X, Y sont adjacents si et seulement si $X \cap Y = \emptyset$. En 2011, Behtoei et Omoomi [8] ont étudié le graphe de Knezer, ils ont déterminé la valeur exacte du nombre chromatique localisateur d'un graphe de Knezer $KG(n,k))$ pour $k = 2$

Théorème 2.22. *[8] Pour tout entier positif $n \geq 5$, on a* $\chi_{_L}(KG(n,2)) = n-1$.

Ils ont également trouvé une borne supérieure du nombre chromatique localisateur pour le cas général.

Théorème 2.23. *[8] Soient n, k deux entiers positifs, telque $k \geq 3$.Si $n \geq k^2$, on a alors ;* $\chi_{_L}(KG(n,k)) \leq n-1$.

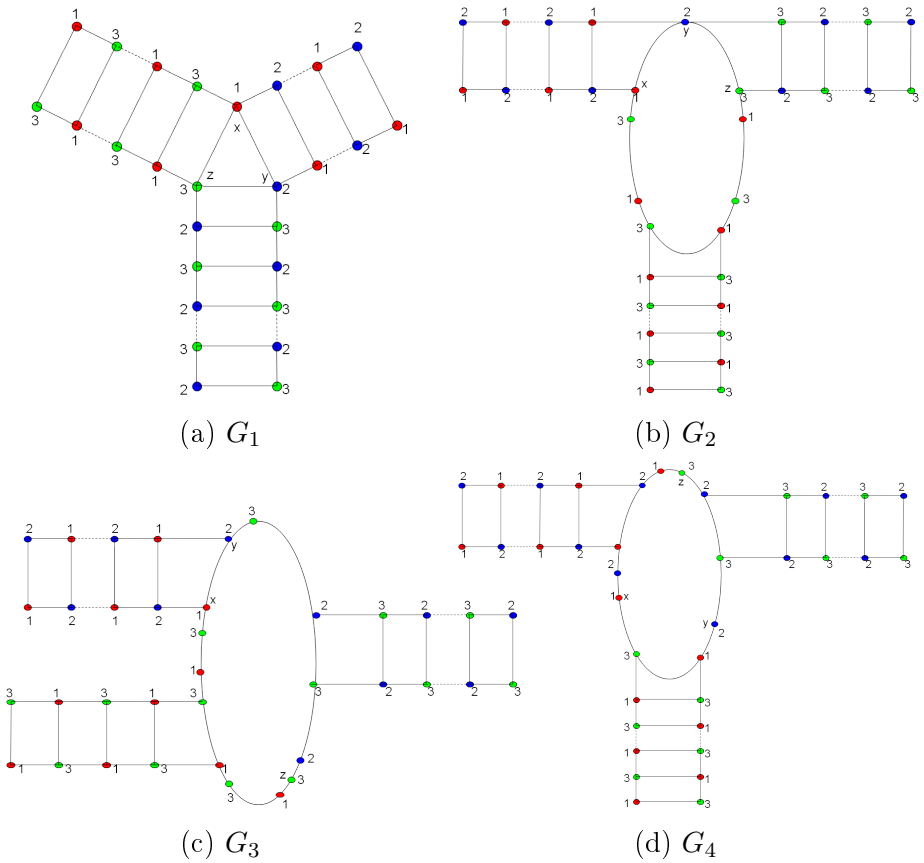
Dans le même article, ils ont obtenue des bornes pour le nombre chromatique localisateur d'un graphe $KG(n,3)$, ces bornes sont fonction du l'ordre de graphe n.

Théorème 2.24. *[8] Pour tout entier positif $n \geq 7$, on a*
$n-4 \leq \chi_{_L}(KG(n,3)) \leq n-1$

Ils ont montré que le nombre chromatique localisateur pour le cas particulier du graphe de Knezer $KG(2k+1,k)$, est borné des deux côtés et ces bornes sont en fonction de k.

Théorème 2.25. *[8] Pour tout entier positif k, $k \geq 3$, on a*

$$\left\lceil \frac{2kln2 - \frac{1}{8k} - \frac{1}{2}ln(k\pi)}{ln(k)} \right\rceil \leq \chi_{_L}(KG(2k+1,k)) \leq 2k+4$$



(a) G_1 (b) G_2

(c) G_3 (d) G_4

FIGURE 2.6 – Graphes maximaux ayant un cycle impair avec un nombre chromatique localisateur égale à 3

.

.

En plus, $\chi(KG(2k+1,k)) < \chi_L(KG(2k+1,k))$.

2.3.5.2 Graphes de Halin

Dans [21] Purwasih *et al.* ont détermine une borne supérieure et une borne inférieure du nombre chromatique localisateur pour le graphe de Halin $H = T \uplus C$ où T est une subdivision d'une étoile.

Théorème 2.26. *[21] Soit* $H_1 = S[S_n(k_1)] \uplus C$, *pour* $n \geq 4, k_1 \geq 1$, *alors,* $\chi_L(W_{n-1}) - 1 \leq \chi_L(H_1) \leq \chi_L(W_{n-1})$.

Ils ont également déterminé le nombre chromatique localisateur pour le graphe de Halin $S[S_4(k_1,k_2,k_3)] \uplus C$.

Théorème 2.27. *[21] Soit $H_2 = S[S_4(k_1, k_2, k_3)] \uplus C$, pour tout entiers positifs k_1, k_2 et k_3, alors $\chi_L(H_2) = 4$.*

Dans [20] Purwasih *et al.*, ont montré qu'il n'y a pas un graphe de Halin ayant un nombre chromatique localisateur 3.

Théorème 2.28. *[20] Soit T un arbre sans sommet de degré deux et ayant au moins 4 sommets, alors $\chi_L(T \uplus C) \geq 4$.*

Ils ont également déterminé pour un graphe de Halin $H = T \uplus C$ une borne inférieure en fonction de nombre chromatique localisateur de plus grand éventail dans H.

Théorème 2.29. *[20] Soit $H = T \uplus C$ un graphe de Halin. Si F_n le plus grand Fan dans H pour certain $n \geq 2$, alors $\chi_L(H) \geq \chi_L(F_n)$.*

Dans le même article [20], ils ont déterminé la valeur de nombre chromatique localisateur pour un graphe de Halin d'une double étoile $H = S_{a,b} \uplus C$

Théorème 2.30. *[20] Soient a, b des entiers tels que $a \geq b$ et $a + b \geq 10$, soit $H = S_{a,b} \uplus C$ un graphe Halin d'une double étoile $S_{a,b}$ et $m = \min\{k \in \mathbb{N} | a \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)\}$, alors,*

$$\chi_L(H) = \begin{cases} m+2, \text{ si } \chi_L(F_a) < \chi_L(W) \text{ et } \chi_L(F_a) = \chi_L(F_b) \ ; \\ m+1, \text{ sinon.} \end{cases}$$

Dans [24] Purwasih *et al.* caractérisent tous les graphes de Halin avec 3, 4, 5, 6 et 7 faces internes et déterminent leurs nombres chromatiques localisateurs. Ils montrent qu'il existe un graphe de Halin ayant un nombre chromatique localisateur $k \geq 4$ avec r faces internes.

Théorème 2.31. *[24] Pour tout $k \geq 4$ et $r \geq \max\{3, \frac{(k-2)^3 - (k-2)^2}{2} + 1\}$, il existe des graphes de Halin, avec r faces internes, ayant le nombre chromatique localisateur k.*

2.3.5.3 Graphe l'échelle de Möbius

Dans [26] Sakri *et al.* détermine le nombre chromatique localisateur de du graphe de l'échelle de Möbius M_n pour n pair .

Théorème 2.32. *[26] Si $n \geq 6$ et n pair, alors*

$$\chi_{_L}(M_n) = \begin{cases} 4 & n \neq 6 \\ 6 & n = 6 \end{cases}$$

2.3.6 Opérations sur les graphes

Plusieurs opérations fondamentales sur les graphes ont été étudiées dans le cadres de la coloration localisatrice.

2.3.6.1 Puissance d'un graphe

Manal Ghanem *et al.* [18] ont donné une valeur exacte du nombre chromatique localisateur des graphes puissance d'une chaîne.

Théorème 2.33. *[18] Soit P_n une chaîne de n sommets. Le nombre chromatique localisateur du graphe puissance d'une chaîne P_n^m, avec $m \geq 1$ est :*

$$\chi_{_L}(P_n^m) = \begin{cases} n, & si \quad m = n-1 \\ m+2 & si \quad m < n-1 \end{cases}$$

Pour le cas des graphes puissance de cycle, les auteurs ont donnée une valeur exacte pour ce paramètre.

Théorème 2.34. *[18] Soit C_n un cycle de n sommets. Le nombre chromatique localisateur du graphe puissance d'une chaîne C_n^m, avec $m \geq 1$ est :*

$$\chi_{_L}(C_n^m) = \begin{cases} n, & si \quad m = n-1 \\ m+2 & si \quad m < n-1 \end{cases}$$

2.3.6.2 Produit cartésien

Le produit cartésien de deux graphes est une opération qui permet d'obtenir de nouveaux graphes à partir d'anciens. Il devient alors intéressant de chercher le nombre nombre chromatique localisateur du nouveau graphe en fonction d'éléments du produit cartésien.
Behtoei *et al.*[9] ont trouvé une borne supérieure pour le coloration localisatrice du produit cartésien de deux graphes.

Proposition 1. *[9] Soient deux graphes connexs G et H, alors* $\chi_{_L}(G\square H) \leq \chi_{_L}(G)\ \chi_{_L}(H)$.

Ils se sont intéressés à la coloration localisatrice d'autres produits cartésiens de graphes tels que $K_m \square P_n$ et $K_m \square K_n$.

Théorème 2.35. *[9] Pour tous entiers $n \geq 3$ et $m \geq 2$*

$$\chi_{_L}(K_m \square P_n) = \begin{cases} m+2, si & m \leq n-2 \\ m+1 & si \quad m \geq n-1 \end{cases}$$

Théorème 2.36. *[9] Pour tous entiers $n \geq 3$ et $m \geq 2$ avec $m \leq n$ soit $m_0 = max\{k|k \in N, k(k-1)-1 \leq n\}$*

$$\chi_{_L}(K_m \square K_n) = \begin{cases} n+1, si & m \leq m_0 - 1 \\ n+2 \ si & m_0 + 1 \leq m \leq \frac{n}{2} \end{cases}$$

Dans le même article les auteurs ont proposé 4 conjectures.

Conjecture 1. *[9]* $\chi_{_L}(K_{m_0} \square K_n) = n+1$, *avec* $n \geq 3$ *et* $m_0 = \max\{k|k \in \mathbb{N}, k(k-1)-1 \leq n\}$.

Conjecture 2. *[9] Si* $\lceil \frac{n+3}{2} \rceil < m \leq n$, *alors* $\chi_{_L}(K_m \square K_n) = n+3$.

Conjecture 3. *[9] Si m et n sont suffisamment grands, alors* $\chi_{_L}(K_m \square C_n) = \chi_{_L}(K_m \square P_n)$.

Conjecture 4. *[9] Pour tous graphes connexes G et H,* $\chi_{_L}(G \square H) \leq \max\{\chi_{_L}(G), \chi_{_L}(H)\} + 3$.

2.3.6.3 Subdivision d'un graphe

Remarquons que subdiviser un graphe complet K_2 change son nombre nombre chromatique localisateur , puisque K_2 est la chaîne P_2 et $S(K_2)$ est la chaîne P_3, et d'après le théorème 2.5, $\chi_{_L}(P_3) = 3$ et $\chi_{_L}(P_2) = 2$, d'où $\chi_{_L}(K_2) \neq \chi_{_L}(S(K_2))$. Récemment Purwasih *et al.* [23] ont considéré la subdivision $S_e(G)$ d'une seule arête e dans un graphe donné G et ils ont déterminé une borne supérieure pour le nombre chromatique localisateur en fonction du nombre nombre chromatique localisateur du graphe non subdivisé. Cette borne est atteinte pour le graphe complet K_n avec ($n = 2$ *ou* $n = 3$.

Théorème 2.37. *[23] Pour tout graphe G, $e \in E(G)$ et un entier $k \geq 1$, on a* $\chi_{_L}(S(G(e;k))) \leq \chi_{_L}(G) + 1$

Dans le même article ils ont établit pour les graphes connexes avec une arête pendante, une borne inférieure pour le nombre chromatique localisateur en fonction du nombre chromatique localisateur du graphe non subdivisé. Cette borne est atteinte pour l'étoile.

Théorème 2.38. *[23] Pour tout graphe connexe simple G contenant une arête pendante e et pour tout entier $k \geq 1$,* $\chi_L(S(G(e;k)) \geq \chi_L(G) - 1$.

Ils ont montré également que subdiviser un graphe complet K_n avec $n \geq 3$ augmente son nombre chromatique localisateur d'une unité uniquement dans le cas ($n = 2$ *et* $k \geq 1$) *ou* ($n = 3$ *et* k *impair*)

Théorème 2.39. *[23] Pour tout graphe G, $e \in E(G)$, et un entier $k \geq 1$, on a*

$$\chi_{_L}\left(S(K_n(e;k))\right) = \begin{cases} n+1 \ si & (n=2 \ et \ k \geq 1) \ ou \ (n=3 \ et \ k \ impair) \\ n & sinon \end{cases}$$

Ils ont montré aussi que subdiviser une étoile $K_{1,n}$ avec $n \geq 3$ diminue son nombre chromatique localisateur d'une unité.

Théorème 2.40. *[23] Pour tout entier $n \geq 3$, soit $K_{1,n}$ un étoile d'ordre $n+1$, pour tout arrêt e de $K_{1,n}$ et un entier $n \geq 1$, $\chi_{_L}(S(K_{1,n}(e;k))) = n$.*

a)-La roue
Dans [21] Purwasih *et al.* ont borné des deux côtés le nombre chromatique localisateur de la subdivision $S(W_n(e,k))$ d'une seule arête e dans une roue [1] W_n, ces bornes sont en fonction du nombre chromatique localisateur de la roue, leur résultat est le suivant :

Théorème 2.41. *[21] Soit $H_1 = S(W_n(e,\ k))$ avec e une arête bord, $n \geq 3$, et $k \geq 1$, alors, $\chi_L(W_{n-1}) - 1 \leq \chi_L(H_1) \leq \chi_L(W_{n-1})$.*

Théorème 2.42. *[22] Soit $H_2 = S(W_n(e,\ k))$ avec e une arête du cycle, $n \geq 3$, et $k \geq 1$, alors $\chi_L(W_n) - 1 \leq \chi_L(H_2) \leq \chi_L(W_n)$.*

b)-Les Pétards La subdivision des pétards [2] $F_{n,k}$ a été considéré dans [1, 16]. On note $F^*_{n,k}$ la subdivision d'un pétards $F_{n,k}$.

Théorème 2.43. *[1]* *i.* $\chi_L(F^*_{n,4}) = 4$, *pour* $n \geq 2$.

ii. Pour $k \geq 5$, $\chi_L(F^*_{n,k}) = \begin{cases} k-1, & si 1 \leq n \leq k-1, \\ k, & sinon. \end{cases}$

Définition. $F^{s*}_{n,k}$is *un graphe obtenu à partir de subdivision du graphe $F^*_{n,k}$ autant que* s ≥ 2 *sommets pairs de chaque côté x_iy_i et y_im_i pour tout $i \in [1,\ n]$.*

Théorème 2.44. *[16] Soit $F^{s*}_{n,k}$ une subdivision d'un pétard $F_{n,k}$, alors :*

i. $\chi_{\mathrm{L}}(F^{s*}_{n,4}) = 4; \mathrm{n} \geq 2$.

ii.Pour $k \geq 5$ $\chi_{\mathrm{L}}(F^{s*}_{n,k}) = \begin{cases} k-1, 1 \leq n \leq k-1 \\ k \, sinon. \end{cases}$

1. Une roue, notée W_n, est un graphe formé d'un cycle C_{n-1} avec un sommet supplémentaire connecté à tous les sommets de ce cycle.
2. Un pétard $F_{n,k}$ est une collection de n étoiles S_k toutes reliées à un chemin par l'une de leurs arêtes

c)-Graphe de Barbell

En s'inspirant des travaux de Irawan *et al.*[16], les auteurs de [2] ont détermine le nombre chromatique localisateur d'un graphe construit en subdivisant l'arrête du graphe de Barbell de deux graphes de Petersen généralisés $P(n,1)$, noté $B^{*s}_{P_{n1}},\cdot$

Théorème 2.45. *[2] Soit $B^{*s}_{P_{(n,1)}}$, une subdivision d'un graphe de barbell de deux graphes de Petersen généralisé, $s \geq 1$. Alors le nombre chromatique localisateur de $B^{*s}_{P_{(n,1)}}$, est 4 pour n impair,$n \geq 3$ ou 5 pour n pair, $n \geq 4$.*

d)-Graphe d'amitié

Théorème 2.46. *[27] Pour tout $n \geq 3$, soit $t \geq 3$ et $l \geq 1$ deux entiers naturels. Soit G une subdivision de Fr_t sur une arête l fois. Pour chaque $n \geq 3$, soit $d_n = \begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1$ et $d_{k-1} < t \leq d_k$ pour certain k. d'où nous avons $\chi_L(G) = k+1$ si $t = d_k$ et $l = 2$, et $\chi_L(G) = k$, sinon.*

Le cas $t = 2$ a été étudié séparément dans le théorème suivant.

Théorème 2.47. *[27] Soit $l \geq 1$ un entier naturel. Si G est une subdivision de Fr_2 d'une arête l fois, alors $\chi_L(G) = 4$.*

Théorème 2.48. *[27] Pour tout $n \geq 3$, soit $e_n = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + (n-1)\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$ et $e_{k-1} < t \leq e_k$ pour certains k. On a $\chi_L(G) = k$.*

Théorème 2.49. *[27] Si $\begin{pmatrix} k-2 \\ 2 \end{pmatrix} < t \leq \begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on a $\chi_L(G) \leq k$.*

2.3.6.4 Produit corona

Dans [6], Baskoro *et al.* ont établit une borne supérieure du nombre chromatique localisateur pour le produit corona de deux graphes G et H. Cette borne est basée sur la valeur du nombre chromatique localisateur des deux graphes.

Théorème 2.50. *[6] Soitent G et H deux graphes connexes avec $diam(H) \leq 2$, alors $\chi_{_L}(G \odot H) \leq \chi_{_L}(G) + \chi_{_L}(H)$*

Dans le même article [6] Baskoro *et al.* ont déterminé le nombre chromatique localisateur de $P_n \odot K_m$, $P_n \odot \overline{K}_m$, $C_n \odot \overline{K}_m$ et $K_n \odot \overline{K}_m$.

Théorème 2.51. *[6] Pour $n \geq 1, m \geq 2$, le nombre chromatique localisateur de $P_n \odot K_m$ est*

$$\chi_{_L}(P_n \odot K_m) = \begin{cases} m+1, \ si \ n = 1, \\ m+2, \ si \ 2 \leq n \leq 2(m+2) \\ m+3, \ si \ n \geq 2(m+2)+1. \end{cases}$$

Théorème 2.52. *[6] Pour $n, m \geq 1$, le nombre chromatique localisateur de $P_n \odot \overline{K}_m$ est*

$$\chi_{_L}\left(P_n \odot \overline{K}_1\right) = \begin{cases} 2, \ si \ n = 1 \\ 3, \ si \ 2 \leq n \leq 6 \\ 4, \ si \ n \geq 7, \end{cases}$$

$$\chi_{_L}\left(P_n \odot \overline{K}_m\right) = \begin{cases} m+1, \ si \ m \geq 2 \ et \ 1 \leq n \leq m+1, \\ m+2, \ si \ m \geq 2 \ et \ n \geq m+2 \end{cases}$$

Théorème 2.53. *[6] Pour $n, m \geq 1$, le nombre chromatique localisateur de $C_n \odot \overline{K}_m$ est*

$$\chi_{_L}\left(C_n \odot \overline{K}_1\right) = \begin{cases} 3, \ si \ 3 \leq n \leq 5 \\ 4, \ si \ n \geq 6, \end{cases}$$

et

$$\chi_{_L}\left(C_n \odot \overline{K}_m\right) = \begin{cases} m+1, \ si \ m \geq 2 \ et \ 3 \leq n \leq m+1, \\ m+2, \ si \ m \geq 2 \ et \ n \geq m+2. \end{cases}$$

Théorème 2.54. *[6] Pour $n, m \geq 1$, le nombre chromatique localisateur de $K_n \odot \overline{K}_m$ est*

$$\chi_{_L}\left(K_n \odot \overline{K}_m\right) = \begin{cases} m+1, si \ n \leq m+1 \\ n, si \ n > m+1 \end{cases}$$

2.3.6.5 Joint de deux graphes

Dans [7], Behtoei *et al.* ont établit le nombre chromatique localisateur pour le joint de deux graphes G et H dont le diamètre est au plus égal à deux.

Théorème 2.55. *[7] Si G et H sont deux graphes connexes dont le diamètre est au plus égal à deux, alors* $\chi_{_L}(G \vee H) = \chi_{_L}(G) + \chi_{_L}(H)$.

Théorème 2.56. *[7] Pour $m \geq 1$ et $n \geq 2$, on a*
$\chi_{_L}(K_m \vee P_n) = m + \min\{k \mid k \in \mathbb{N}, \ n \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)\}$.

Théorème 2.57. *[7] Soit $m \geq 2$ et $n \geq 2$ soit $n_0 = \min\{k \mid k \in \mathbb{N},\ n \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)\}$. Alors,*
$\chi_{_L}(P_m \vee P_n) = m_{_0} + n_{_0}$.

Théorème 2.58. *[7] Soit $m \geq 2$ et $n \geq 3$, soit $m \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)\}$ et $n_0 = \min\{k : k \in \mathbb{N}, n \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)$ Alors,*

$$\chi_L(P_m \vee C_n) = \begin{cases} m_0 + \ \chi_L(C_n) & 3 \leq n < 9 \\ m_0 + n_0 & n \geq 9, n \neq \frac{1}{2}(n_0^3 - n_0^2) - 1 \\ m_0 + n_0 + 1 & n \geq 9, n = \frac{1}{2}(n_0^3 - n_0^2) - 1. \end{cases}$$

Théorème 2.59. *[7]*

Pour deux entiers positifs $m \geq 1$ et $n \geq 3$, soit $n_0 = \min\{k : k \in \mathbb{N}, n \leq \dfrac{1}{2}(k^3 - k^2)$ Alors,

$$\chi_L(K_m \vee C_n) = \begin{cases} m + \ \chi_L(C_n) & 3 \leq n < 9 \\ m + n_0 & n \geq 9, n \neq \frac{1}{2}(n_0^3 - n_0^2) - 1 \\ m + n_0 + 1 & n \geq 9, \ n = \frac{1}{2}(n_0^3 - n_0^2) - 1. \end{cases}$$

Théorème 2.60. *[7]*
Pour deux entiers positifs m et $n, 3 \leq m \leq n$, soit $m_0 = \min\{k : k \in \mathbb{N},\ m \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)\}$ et $n_0 = \min\{k : k \in \mathbb{N}, n \leq \dfrac{1}{2}(k^3 - k^2)$ et soit, $m_1 = \frac{1}{2}(m_0^3 - m_0^2) - 1$ et $n_1 = \dfrac{1}{2}(n_0^3 - n_0^2) - 1$. Alors,

$$\chi_L(C_m \vee C_n) = \begin{cases} \chi_L(C_m) + \ \chi_L(C_n) & n < 9 \\ \chi_L(C_m) + n_0 & m < 9 \leq n, \ n \neq n_1 \\ \chi_L(C_m) + n_0 + 1 & m < 9 \leq n, \ n = n_1 \\ m_0 + n_0 & m \geq 9, \ m \neq m_1, \ n \neq n_1 \\ m_0 + n_0 + 1 & m \geq 9, \ m = m_1, \ n \neq n_1 \\ m_0 + n_0 + 1 & m \geq 9, m \neq m_1, n = n_1 \\ m_0 + n_0 + 2 & m \geq 9, m = m_1, n = n_1. \end{cases}$$

2.3.6.6 Graphe de Barbell

Dans [5] Asmiati *et al.* ont étudie le nombre chromatique localisateur pour le graphe de barbell[3] de deux graphe complet et deux graphe de Petersen généralisée $P(n, 1)$.

Théorème 2.61. *[5] Soit $B_{n,n}$ un graphe de Barbell pour $n \geq 3$, le nombre chromatique localisateur de $B_{n,n}$ est $\chi_L(B_{n,n}) = n + 1$.*

3. Le graphe de barbell est construit en connectant deux graphes arbitraires G et H par une arrête

Théorème 2.62. *[5] Soit $n, m \geq 3$, et $m \neq n$, le nombre chromatique localisateur $B_{m,n}$ est* $\chi_L(B_{m,n}) = \max\{m, n\}$.

On note $B_{P(n,1)}$ le graphe barbel de deux copies du graphe de Petersen généralisé $P(n, 1)$.

Théorème 2.63. *[5] Soit $B_{P(n,1)}$, $n \geq 3$. le nombre chromatique localisateur $B_{P(n,1)}$ est*

$$\chi_L(B_{P(n,1)}) = \begin{cases} 4, for\ impair\ n \\ 5, for\ pair\ n \end{cases}$$

2.4 Conclusion

Dans ce deuxième chapitre, nous avons défini le paramètre du nombre chromatique localisateur et rappelé quelques résultats connus dans la littérature pour ce paramètre. Nous avons notamment réalisé une mise au point bibliographique qui nous a permis de situer le thème de notre recherche et de circonscrire les objectifs de notre travail.

Chapitre 3

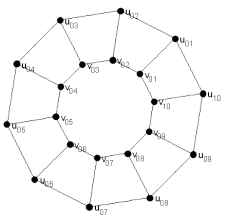
Graphe de Petersen Généralisé P(n,2)

3.1 Introduction

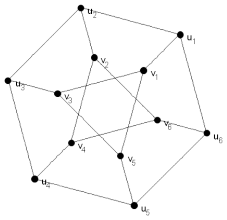
Les graphes de Petersen généralisés ont été introduits en 1950 par H.Coxeter et ont reçu son nom en 1969 par Mark Watkins [19]. Ils constituent une famille formés en reliant les sommets d'un polygone régulier aux sommets correspondants d'un polygone en étoile.
Le graphe de Petersen généralisé $P(n,k)$, avec n,k deux entiers tels que $n \geq 3$ et $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ est le graphe avec $V(P(n,k)) = \{u_i, 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_i, 0 \leq i \leq n-1\}$. $E(P(n,k)) = \{u_iu_{i+1}, 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_iv_{i+k}, 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_iv_i, 0 \leq i \leq n-1\}$, les indices des sommets étant considérés modulo n. Les sommets u_i et v_i, pour i $\in \{1, 2, ..., n\}$ sont appelés sommets extérieurs et intérieurs, respectivement. Le graphe de Petersen généralisé $P(n,k)$ est constitué d'un cycle extérieur induit par les sommets extérieurs et $PGCD(n,k)$ cycles intérieurs chacun de longueur $\frac{n}{PGCD(n,k)}$ induit par les sommets intérieurs et un ensemble d'arêtes reliant les sommets de u_i, v_i.

Parmi les graphes de Petersen généralisés les plus étudiés figurent : le n-prisme $P(n,1)$, le graphe de Dürer $P(6,2)$, le graphe de Möbius-Kantor $P(8,3)$, le dodécaèdre $P(10,2)$, le graphe de Desargues $P(10,3)$ et le graphe de Nauru $P(12,5)$. Cette famille de graphes possède un certain nombre de propriétés intéressantes. Par exemple :

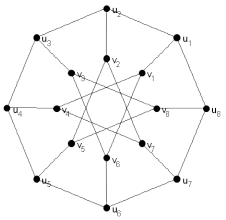
- $P(n,k)$ est biparti si et seulement si n est pair et k est impair.
- Chaque graphe de Petersen généralisé est un graphe de distance unitaire.



(a) 10-prism



(b) Dürer



(c) Möbius-Kantor

FIGURE 3.1 – Les graphes de Petersen généralisés

- $P(n,k)$ et $P(n,n-k)$ sont isomorphes, pour $n \neq 2k$,
- $P(n,k)$ est cubique.
- Si $1 \leq r < n$ et $1 \leq s < n$ sont des entiers tels que $rs \equiv \pm 1 \ (mod\ n)$, Alors $P(n,r)$ et $P(n,s)$ sont isomorphes.
- Pour $n = 2k$, $P(n,k)$ est un multigraphe.
- Étant réguliers, selon le théorème de Brooks, leur nombre chromatique ne peut être supérieur à leur degré. Les graphes de Petersen généralisés sont cubiques, leur nombre chromatique peut donc être 2 ou 3. Plus exactement :

$$\chi(P(n,k)) = \begin{cases} 2 \ si\ n\ est\ pair\ et\ k\ est\ impair \\ 3 \ sinon \end{cases}$$

3.2 Résultat préliminaire

Les résultats suivants sur l'isomorphisme des graphes de Petersen généralisés ont été prouvé par Watkins [19].

Théorème 3.1. *[19] $G(n,k)$ et $G(n,n-k)$ sont isomorphes.*

Théorème 3.2. *[19] Soit $n \geq 5$ et k,l sont premiers entre eux pour n, et $2 \leq k,l \leq n-2$. Si $P(n,k)$ est isomorphe à $P(n,l)$ si et seulement si $l \equiv \pm k \ mod\ n$ ou $kl \equiv \pm 1 \ mod\ n$.*

Récemment, Asmiati *et al.*[4] se sont intéressés à la coloration localisatrice des graphes de petersen généralisées $P(n,k)$.

Théorème 3.3. *[4]* $\chi_{_L}\big(P(4,2)\big) = 4$.

Théorème 3.4. *[4]* $\chi_{_L}\big(P(5,2)\big) = 5$.

Ils ont déterminé le nombre chromatique localisateur de $P(n,1)$.

Théorème 3.5. *[4] Le nombre chromatique localisateur de graphe de Petersen généralisé est* 4 *pour* $n \geq 3$ *et* n *impair et* 5 *pour* $n \geq 4$ *et* n *pair.*

Asmiati *et al.*[4] ont proposé aussi la conjecture suivante :

Conjecture 1. *[4] Le nombre chromatique localisateur de graphe de Petersen généralisé* $P(n,k)$ *est quatre si et seulement (*$n \geq 3$ *et* n *impair et* $k = 1$*) ou (pour* $n = 4$ *et* $k = 2$*)).*

Dans [25]Sakri R. et Abbas M. ont donnée une réponse négative à cette conjecture et ont montreé que le nombre chromatique localisateur d'un graphe de Petersen généralisé $P(n,k)$ est 4 pour $1 \leq n \leq 12$. Ils ont généralise le Théorème 3.3. et ils on montrée que les deux Théorèmes 3.5 et 3.4 sont faux.

Théorème 3.6. *[?] Si* $k \geq 2$*, alors* $\chi_{_L}(P(2k,k)) \geq 4$.

Théorème 3.7. *[?] Le nombre chromatique localisateur de graphe de Petersen généralisé* $P(2k,k)$ *est 4 pour* $k \geq 4$.

Théorème 3.8. *[25] Si* $n \geq 3$*, alors* $\chi_{_L}\big(P(n,1)\big) \geq 4$.

Théorème 3.9. *[25] Le nombre chromatique localisateur du graphe de Petersen généralisé*$P(n,1)$ *est 4 pour* $n \neq 4$ *et* n *pair.*

On va prouver d'abord que le graphe $P(n,k)$ ne peut pas avoir une coloration localisatrice avec 3 couleurs.

Théorème 3.10. *Si* $n \geq 3$ *et* $1 \leq k \leq n-1$*, alors* $\chi_{_L}(P(n,k)) \geq 4$.

Théorème 3.11. *[25] Si* $3 \leq n \leq 12$*, alors* $\chi_{_L}\big(P(n,2)\big) = 4$.

Ils ont reformuler la conjecture d'Asmiati de façon suivante :

Conjecture 2. *[25] Le nombre chromatique localisateur du graphe de Petersen généralisé* $P(n,k)$ *est 4 si et seulement Si* $(n \neq 4$ *and* $k = 1))$ *ou* $(n = 2k$ *and* $k \geq 2)$ *ou* $((3 \leq n \leq 12$ *and* $2 \leq k \leq n-2$ *and* $(n,k) \notin \{(12,5),(12,7)\})$

3.3 Principaux résultats

Le graphe de Petersen généralisé $P(n,2)$ est constitué d'un cycle extérieur induit par les sommets extérieurs et 2 cycles intérieurs chacun de longueur $\frac{n}{2}$ si n pair induit par les sommets intérieurs et un ensemble d'arêtes reliant les sommets de u_i, v_i.

Les deux lemmes suivants seront utiles pour démontrer notre théorème principal.

Lemme 3.12. *Si $n \geq 16$ et $n \equiv 0$ [4], alors* $\chi_{_L}\big(P(n,2)\big) \leq 5$

Démonstration. Soit v_i un sommet du cycle interne u_i un sommet du cycle externe de graphe $P(n,2)$. Construisons une coloration c de $P(n,2)$ de la façon suivante : Puisque le graphe $P(n,2)$ n'est pas biparti, on définit une 3-coloration tels que :

$$c(u_i) = \begin{cases} 2 \text{ si } i \text{ impair} \\ 1 \text{ si } i \text{ pair} \end{cases} \qquad c(v_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i \equiv 1[4] \\ 2 \text{ si } i \equiv 2[4] \\ 3 \text{ sinon} \end{cases}$$

Nous recolorons le sommet v_1 avec la couleur 4 et le sommet v_2, avec la couleur 5. Nous considérons sept cas selon la distance d de chaque sommet de $P(n,2)$ à la classe de couleur V_4.

Cas 1. $d = 0$
Il n'y a qu'un sommets v_1, coloré avec la couleur 4.

Cas 2. $d = 1$

Les sommets à distance 1 de la classe V_4 sont les voisins de sommet de v_1, $N(V_4) = N(v_1) = \{v_3, v_{n-1}, u_1\}$.
Les distances de ces sommets de V_5 sont :
$d(v_3, V_5) = d(v_3, v_2) = 3$.
$d(v_{n-1}, V_5) = d(v_{n-1}, v_2) = 4$.
$d(u_1, V_5) = d(u_1, v_2) = 2$.
On obtient que $c_\pi(v_1), c_\pi(v_{n-1}), c_\pi(u_1)$, sont deux à deux distincts.

Cas 3. $d = 2$
On a 6 sommets $v_5, v_{n-3}, u_2, u_3, u_{n-1}, u_{n,4}$ à distance d=2 de la classe V_4. Les distances de ces sommets de V_5 sont :
$d(v_5, V_5) = d(v_5, v_2) = 4$;
$d(v_{n-3}, V_5) = d(v_{n-3}, v_2) = 5$

$d(u_2, V_5) = d(u_2, v_2) = 1$
$d(u_3, V_5) = d(u_3, v_2) = 2;$
$d(u_{n-1}, V_5) = d(u_{n-1}, v_2) = 3;$
$d(u_n, V_5) = d(u_n, v_2) = 2;$

.

Les deux sommets u_3, u_n ont des couleurs distinctes, car 3 et n ont des parités opposées , donc $c_\pi(u_3) \neq c_\pi(u_n)$
On obtient que $c_\pi(v_5), c_\pi(v_{n-3}), c_\pi(u_2), c_\pi(u_3), c_\pi(u_{n-1})$ et $c_\pi(u_n)$ sont deux à deux distincts.

Cas 4. $d \in [3, \frac{n}{4} - 1]$
Pour i fixe, il y a huit sommets $v_{2i+1}, v_{2i-4}, v_{n-2i+1}, v_{n-2i+6}, u_{2i-1}, u_{2i-2}, u_{n-2i+3}, u_{n-2i+4}$ sont à même distance $d = i$. Les distances de ces sommets de V_4 sont :
$d(v_{2i+1}, V_5) = d(v_{2i+1}, v_2) = i + 2.$
$d(v_{2i-4}, V_5) = d(v_{2i-4}, v_2) = i - 3.$
$d(v_{n-2i+1}, V_5) = d(v_{n-2i+1}, v_2) = i + 3.$
$d(v_{n-2i+6}, V_5) = d(v_{n-2i+6}, v_2) = i - 2.$
$d(u_{2i-1}, V_5) = d(u_{2i-1}, v_2) = i.$
$d(u_{2i-2}, V_5) = d(u_{2i-2}, v_2) = i - 1.$
$d(u_{n-2i+3}, V_5) = d(u_{n-2i+3}, v_2) = i + 1.$
$d(u_{n-2i+4}, V_5) = d(u_{n-2i+4}, v_2) = i.$
Les deux sommets u_{2i-1}, u_{n-2i+4} ont des couleurs distinctes, car $2i-1$ et $n-2i+4$ ont des parités opposées ($(2i-1) + (n-2i+4) = n+3$ est impair), donc $c_\pi(u_{2i-1}) \neq c_\pi(u_{n-2i+4})$.

Les sommets $v_{2i+1}, v_{2i-4}, v_{n-2i+1}, v_{n-2i+6}, u_{2i-1}, u_{2i-2}, u_{n-2i+3}$ sont à des distances différentes de V_5, donc $c_\pi(v_{2i+1}), c_\pi(v_{2i-4}), c_\pi(v_{n-2i+1}), c_\pi(v_{n-2i+6}), c_\pi(u_{2i-1}), c_\pi(u_{2i-2})$ et$c_\pi(u_{n-}$ deux à deux distinctes.

Cas 5. $d = \frac{n+8}{4}$
il y a deux sommets $v_{\frac{n}{2},4}, v_{\frac{n}{2}+2,4}$ a distance $\frac{n+8}{4}$ de la classe V_4. Les distances de ces sommets de V_5 sont :
$d(v_{\frac{n}{2}}, V_5) = d(v_{\frac{n}{2}}, v_2) = \frac{n}{4} - 1.$
$d(v_{\frac{n}{2}+2}, V_5) = d(v_{\frac{n}{2}+2}, v_2) = \frac{n}{4}.$
On obtient que $c_\pi(v_{\frac{n}{2}}), c_\pi(v_{\frac{n}{2}+2})$, sont deux à deux distincts.

Cas 6. $d = \frac{n+4}{4}$
il y a cinq sommets $v_{\frac{n}{2}-2}, v_{\frac{n}{2}+4}, u_{\frac{n}{2}}, u_{\frac{n}{2}+1}, u_{\frac{n}{2}+2}$ a distance $\frac{n+4}{4}$ de la classe V_4. Les

distances de ces sommets de V_5 sont :

$d(v_{\frac{n}{2}-2}, V_5) = d(v_{\frac{n}{2}-2}, v_2) = \frac{n}{4} - 2.$
$d(v_{\frac{n}{2}+4}, V_5) = d(v_{\frac{n}{2}+4}, v_2) = \frac{n}{4} - 1.$
$d(u_{\frac{n}{2}}, V_5) = d(u_{\frac{n}{2}}, v_2) = \frac{n}{4}.$
$d(u_{\frac{n}{2}+1}, V_5) = d(u_{\frac{n}{2}+1}, v_2) = \frac{n}{4} + 1.$
$d(u_{\frac{n}{2}+2}, V_5) = d(u_{\frac{n}{2}+2}, v_2) = \frac{n}{4} + 1.$

Les deux sommets $u_{\frac{n}{2}+1}, u_{\frac{n}{2}+2}$ ont des couleurs distinctes, car ils sont adjacent , donc $c_\pi(u_{\frac{n}{2}+1}) \neq c_\pi(u_{\frac{n}{2}+2})$

On obtient que $c_\pi(v_{\frac{n}{2}-2}), c_\pi(v_{\frac{n}{2}+4}), c_\pi(u_{\frac{n}{2}}), c_\pi(u_{\frac{n}{2}+1}), c_\pi(u_{\frac{n}{2}+2})$, sont deux à deux distincts.

Cas 7. $d = \frac{n}{4}$

il y a sept sommets $v_{\frac{n}{2}-4}, v_{\frac{n}{2}+1}, v_{\frac{n}{2}+6}, u_{\frac{n}{2}-2}, u_{\frac{n}{2}-1}, u_{\frac{n}{2}+3}, u_{\frac{n}{2}+4}$ a distance $\frac{n}{4}$ de la classe V_4. Les distances de ces sommets de V_5 sont :

$d(v_{\frac{n}{2}-4}, V_5) = d(v_{\frac{n}{2}-4}, v_2) = \frac{n}{4} - 3.$
$d(v_{\frac{n}{2}+1}, V_5) = d(v_{\frac{n}{2}+1}, v_2) = \frac{n}{4} + 2.$
$d(v_{\frac{n}{2}+6}, V_5) = d(v_{\frac{n}{2}+6}, v_2) = \frac{n}{4} - 2.$
$d(u_{\frac{n}{2}-2}, V_5) = d(u_{\frac{n}{2}-2}, v_2) = \frac{n}{4} - 1.$
$d(u_{\frac{n}{2}-1}, V_5) = d(u_{\frac{n}{2}-1}, v_2) = \frac{n}{4}.$
$d(u_{\frac{n}{2}+3}, V_5) = d(u_{\frac{n}{2}+3}, v_2) = \frac{n}{4} + 1.$
$d(u_{\frac{n}{2}+4}, V_5) = d(u_{\frac{n}{2}+4}, v_2) = \frac{n}{4}.$

Les deux sommets $u_{\frac{n}{2}-1}$ et $u_{\frac{n}{2}+4}$ ont des couleurs distinctes, car $\frac{n}{2} - 1$ et $\frac{n}{2} + 4$ ont des parités opposées , donc $c_\pi(u_{\frac{n}{2}-1}) \neq c_\pi(u_{\frac{n}{2}+4})$

On obtient que $c_\pi(v_{\frac{n}{2}-4}), c_\pi(v_{\frac{n}{2}+1}), c_\pi(v_{\frac{n}{2}+6}), c_\pi(u_{\frac{n}{2}-2}), c_\pi(u_{\frac{n}{2}-1}), c_\pi(u_{\frac{n}{2}+3})$ et $c_\pi(u_{\frac{n}{2}+4})$, sont deux à deux distincts.

De tous les cas précédents, nous pouvons conclure que c est une 5-coloration localisatrice, donc on a $\chi_{_L}(P(n,2)) \leq 5$ lorsque $n \equiv 0[4]$ et $n \geq 16$. Le lemme est donc prouvé. □

Lemme 3.13. *Si $n \geq 14$ et $n \equiv 2[4]$, alors $\chi_{_L}\big(P(n,2)\big) \leq 5$*

Démonstration. Soit v_i un sommet du cycle interne u_i un sommet du cycle externe de graphe $P(n,2)$. Construisons une coloration c de $P(n,2)$ de la façon suivante : Puisque le graphe $P(n,2)$ n'est pas biparti, on définit une 3-coloration tels que :

$$c(u_i) = \begin{cases} 2 \ si \ i \ impair \\ 1 \ si \ i \ pair \end{cases} \qquad c(v_i) = \begin{cases} 1 \ si \ i \ \equiv 1[4] \\ 2 \ si \ i \ \equiv 2[4] \\ 3 \ sinon \end{cases}$$

Nous recolorons le sommet v_1 avec la couleur 4 et le sommet v_2, avec la couleur 5. Nous considérons quatre cas selon la distance d de chaque sommet de $P(n,2)$ à la classe de couleur V_4.

Cas 1. $d = 0$
Il n'y a qu'un sommets v_1, coloré avec la couleur 4.

Cas 2. $d = 1$

Les sommets à distance 1 de la classe V_4 sont les voisins de sommet de v_1, $N(V_4) = N(v_1) = \{v_3, v_{n-1}, u_1\}$.
Les distances de ces sommets de V_5 sont :

$d(v_3, V_5) = d(v_3, v_2) = 3.$
$d(v_{n-1}, V_5) = d(v_{n-1}, v_2) = 4.$
$d(u_1, V_5) = d(u_1, v_2) = 2.$

On obtient que $c_\pi(v_1), c_\pi(v_{n-1}), c_\pi(u_1)$, sont deux à deux distincts.

Cas 3. $d = 2$
On a 6 sommets $v_5, v_{n-3}, u_2), u_3, u_{n-1}, u_n$ à distance d=2 de la classe V_4. Les distances de ces sommets de V_5 sont :

$d(v_5, V_5) = d(v_5, v_2) = 4;$
$d(v_{n-3}, V_5) = d(v_{n-3}, v_2) = 5$
$d(u_2, V_5) = d(u_2, v_2) = 1$
$d(u_3, V_5) = d(u_3, v_2) = 2;$
$d(u_{n-1}, V_5) = d(u_{n-1}, v_2) = 3;$
$d(u_n, V_5) = d(u_n, v_2) = 2;$

.

Les deux sommets u_3, u_n ont des couleurs distinctes, car 3 et n ont des parités opposées , donc $c_\pi(u_3) \neq c_\pi(u_n)$
On obtient que $c_\pi(v_5), c_\pi(v_{n-3}), c_\pi(u_2), c_\pi(u_3), c_\pi(u_{n-1})$ et $c_\pi(u_n)$ sont deux à deux distincts.

Cas 4. $d \in [3, \frac{n-2}{4}]$
Pour i fixe, il y a huit sommets $v_{2i+1}, v_{2i-4}, v_{n-2i+1}, v_{n-2i+6}, u_{2i-1}, u_{2i-2}, u_{n-2i+3}, u_{n-2i+4}$

sont à même distance $d = i$. Les distances de ces sommets de V_4 sont :

$d(v_{2i+1}, V_5) = d(v_{2i+1}, v_2) = i + 2$.
$d(v_{2i-4}, V_5) = d(v_{2i-4}, v_2) = i - 3$.
$d(v_{n-2i+1}, V_5) = d(v_{n-2i+1}, v_2) = i + 3$.
$d(v_{n-2i+6}, V_5) = d(v_{n-2i+6}, v_2) = i - 2$.
$d(u_{2i-1}, V_5) = d(u_{2i-1}, v_2) = i$.
$d(u_{2i-2}, V_5) = d(u_{2i-2}, v_2) = i - 1$.
$d(u_{n-2i+3}, V_5) = d(u_{n-2i+3}, v_2) = i + 1$.
$d(u_{n-2i+4}, V_5) = d(u_{n-2i+4}, v_2) = i$.

Les deux sommets u_{2i-1}, u_{n-2i+4} ont des couleurs distinctes, car $2i-1$ et $n-2i+4$ ont des parités opposées ($(2i-1)+(n-2i+4) = n+3$ est impair), donc $c_\pi(u_{2i-1}) \neq c_\pi(u_{n-2i+4})$.

Les sommets $v_{2i+1}, v_{2i-4}, v_{n-2i+1}, v_{n-2i+6}, u_{2i-1}, u_{2i-2}, u_{n-2i+3}$ sont à des distances différentes de V_5, donc $c_\pi(v_{2i+1}), c_\pi(v_{2i-4}), c_\pi(v_{n-2i+1}), c_\pi(v_{n-2i+6}), c_\pi(u_{2i-1}), c_\pi(u_{2i-2})$ et$c_\pi(u_{n-}$ deux à deux distinctes.

Cas 5. $d = \frac{n+10}{4}$

il y a un sommet $v_{\frac{n}{2}+1}$ a distance $\frac{n+10}{4}$ de la classe V_4. Sa distance de V_5 est :

$d(v_{\frac{n}{2}+1}, V_5) = d(v_{\frac{n}{2}+1}, v_2) = \frac{n+2}{4}$.

Cas 6. $d = \frac{n+6}{4}$

il y a trois sommets $v_{\frac{n}{2}+3}, v_{\frac{n}{2}-1}, u_{\frac{n}{2}+1}$ a distance $\frac{n+6}{4}$ de la classe V_4. Les distances de ces sommets de V_5 sont :

$d(v_{\frac{n}{2}+3}, V_5) = d(v_{\frac{n}{2}+3}, v_2) = \frac{n-2}{4}$.
$d(v_{\frac{n}{2}-1}, V_5) = d(v_{\frac{n}{2}-1}, v_2) = \frac{n-6}{4}$.
$d(u_{\frac{n}{2}+1}, V_5) = d(u_{\frac{n}{2}+1}, v_2) = \frac{n+2}{4}$.

On obtient que $c_\pi(v_{\frac{n}{2}+3}), c_\pi(v_{\frac{n}{2}-1}), c_\pi(u_{\frac{n}{2}+1})$, sont deux à deux distincts.

Cas 7. $d = \frac{n+2}{4}$

il y a six sommets $v_{\frac{n}{2}+5}, v_{\frac{n}{2}-3}, u_{\frac{n}{2}-1}, u_{\frac{n}{2}}, u_{\frac{n}{2}+2}, u_{\frac{n}{2}+3}$ a distance $\frac{n+2}{4}$ de la classe V_4. Les distances de ces sommets de V_5 sont :

$d(v_{\frac{n}{2}+5}, V_5) = d(v_{\frac{n}{2}+5}, v_2) = \frac{n-6}{4}$.
$d(v_{\frac{n}{2}-3}, V_5) = d(v_{\frac{n}{2}-3}, v_2) = \frac{n-10}{4}$.
$d(u_{\frac{n}{2}-1}, V_5) = d(u_{\frac{n}{2}-1}, v_2) = \frac{n-2}{4}$.
$d(u_{\frac{n}{2}}, V_5) = d(u_{\frac{n}{2}}, v_2) = \frac{n+2}{4}$.
$d(u_{\frac{n}{2}+2}, V_5) = d(u_{\frac{n}{2}+2}, v_2) = \frac{n+6}{4}$.
$d(u_{\frac{n}{2}+3}, V_5) = d(u_{\frac{n}{2}+3}, v_2) = \frac{n+2}{4}$.

On obtient que $c_\pi(v_{\frac{n}{2}+5}), c_\pi(v_{\frac{n}{2}-3}), c_\pi(u_{\frac{n}{2}-1}), c_\pi(u_{\frac{n}{2}}), c_\pi(u_{\frac{n}{2}+2}),$ *et* $c_\pi(u_{\frac{n}{2}+3})$, *sont deux à deux distincts.*

De tous les cas précédents, nous pouvons conclure que c est une 5-coloration localisatrice , donc on a $\chi_{_L}(P(n,2)) \leq 5$ lorsque $n \equiv 2$ [4] et $n \geq 14$. Le lemme est donc prouvé. □

En combinant le lemme 3.12 et le lemme 3.13, on peut formuler le théorème suivant :

Théorème 3.14. *Le nombre chromatique localisateur de graphe de Petersen généralisé* $P(n,2) \leq 5$ *pour* $k \geq 14$ *et n pair.*

Démonstration. Pour n on distingue deux cas selon . En effet,
Si $n \equiv 0$ [4] , par le lemme 3.12, on a $\chi_{_L}(P(n,2)) \leq 5$.
Si $n \equiv 2$[4] , par le lemme 3.13, on a $\chi_{_L}(P(n,2)) \leq 5$. donc, $\chi_{_L}(P(n,2)) \leq 5$ pour $n \geq 14$ et n pair. □

En utilisant un programme Matlab, on a généré une coloration localisatrice avec 5 couleurs pour les graphes de Petersen généralisés $GP(n,2)$ pour n impair $n \leq 47$, et les résultats obtenus nous encouragent à reformuler la conjecture suivante.

Conjecture 3. *Si n est impair* $\chi_{_L}(P(n,2)) \leq 5$

Dans le cas des graphes de Petersen généralisés avec $P(n,1)$ et $P(n,2)$, il a été démontré que le nombre chromatique localisateur est borné , c'est-à-dire qu'il existe une constante C=5 telle que le nombre chromatique localisateur de $P(n,1)$ et $P(n,2)$ est toujours inférieur ou égal à C.

Cependant, la question plus générale se pose : existe-t-il une borne supérieure commune pour le nombre chromatique localisateur de tous les graphes de Petersen généralisés P(n,k), indépendamment de la valeur de k ? En d'autres termes, est-il possible de trouver une constante C telle que le nombre chromatique localisateur de P(n,k) soit borné pour tout k supérieur à 2 ?

La réponse à cette question reste ouverte et nécessite des recherches supplémentaires. La résolution de ce problème permettrait de mieux comprendre les propriétés de coloration localisatrice des graphes de Petersen généralisés et pourrait potentiellement conduire à de nouvelles découvertes et avancées en théorie des graphes

3.4 Conclusions

Dans ce chapitre on a étudier le coloration localisatrice dans la classe des graphes de Petersen généralisés $P(n, 2)$. On a déterminé une borne de nombre chromatique localisateur des graphes de Petersen généralisés $P(n, 2)$ pour n pair, . Dans l'annexe A, B, C on trouve des colorations localisatrices de quelques graphes de Petersen généralisés $P(n, 2)$ avec leurs codes couleurs pour $n \leq 48$.

Annexe

Annexe A : Coloration localisatrice avec 4 couleurs de $P(n,2)$ pour $n \leq 12$

	$P(5,2)$		$P(6,2)$		$P(7,2)$		$P(8,2)$	
i	v_i	u_i	v_i	u_i	v_i	u_i	v_i	u_i
1	(1,2,0,1)	(0,1,1,2)	(0,2,1,1)	(1,1,1,0)	(0,1,1,2)	(1,0,1,1)	(0,2,1,2)	(1,1,0,1)
2	(1,1,0,1)	(1,0,1,2)	(2,0,1,1)	(1,1,0,1)	(2,0,1,1)	(1,1,0,2)	(0,2,2,1)	(1,2,1,0)
3	(1,2,1,0)	(0,1,2,1)	(1,3,0,1)	(0,2,1,2)	(1,2,0,2)	(0,2,1,2)	(1,1,0,2)	(0,1,1,1)
4	(2,1,1,0)	(1,0,1,1)	(2,1,1,0)	(1,2,0,1)	(2,1,1,0)	(1,2,0,1)	(1,1,3,0)	(1,0,2,1)
5	(0,2,1,1)	(1,1,0,2)	(1,2,1,0)	(0,1,1,1)	(0,2,1,1)	(1,2,1,0)	(1,0,1,3)	(0,1,2,2)
6			(2,1,0,1)	(1,0,1,1)	(1,0,2,1)	(0,1,2,1)	(0,1,3,1)	(1,0,2,2)
7					(1,1,0,1)	(1,1,1,0)	(1,1,0,3)	(0,1,1,2)
8							(1,1,2,0)	(1,0,1,1)

	$P(9,2)$		$P(10,2)$		$P(11,2)$		$P(12,2)$	
i	v_i	u_i	v_i	u_i	v_i	u_i	v_i	u_i
1	(0,1,1,2)	(1,2,0,1)	(0,1,1,1)	(1,1,2,0)	(0,1,1,2)	(1,2,0,1)	(0,1,2,2)	(1,0,1,1)
2	(0,2,1,1)	(1,2,1,0)	(0,1,2,1)	(1,0,2,1)	(0,2,1,1)	(1,2,1,0)	(0,1,1,2)	(1,1,0,2)
3	(1,0,2,2)	(0,1,2,1)	(1,0,1,2)	(0,1,1,2)	(1,0,2,2)	(0,1,2,1)	(1,0,1,3)	(0,1,1,3)
4	(1,1,0,1)	(1,1,1,0)	(1,0,1,1)	(1,1,0,2)	(1,1,0,1)	(1,1,1,0)	(1,0,1,2)	(1,1,0,3)
5	(0,1,2,2)	(1,0,2,1)	(2,1,0,2)	(2,0,1,2)	(0,1,3,1)	(1,0,2,1)	(2,1,0,2)	(2,0,1,2)
6	(2,0,1,1)	(2,1,1,0)	(1,1,1,0)	(2,1,0,1)	(2,0,1,1)	(2,1,2,0)	(0,1,1,1)	(1,1,0,1)
7	(1,0,1,1)	(2,1,0,1)	(2,0,1,1)	(2,1,1,0)	(1,1,2,0)	(2,0,2,1)	(3,0,1,1)	(2,1,1,0)
8	(1,1,0,2)	(1,0,1,2)	(0,2,1,1)	(1,2,0,1)	(2,1,0,1)	(2,1,1,0)	(1,2,1,0)	(2,1,0,1)
9	(1,1,2,0)	(0,1,1,1)	(1,1,0,1)	(1,2,1,0)	(0,1,1,1)	(1,0,1,1)	(2,1,2,0)	(2,0,1,1)
10			(1,2,2,0)	(0,2,2,1)	(1,0,1,2)	(1,1,0,2)	(0,2,1,1)	(1,1,2,0)
11					(1,2,0,2)	(0,2,1,2)	(1,0,3,1)	(0,1,2,1)
12							(1,2,0,1)	(1,1,1,0)

Annexe B : Coloration localisatrice avec 5 couleurs de $P(n,2)$,$n \leq 42$ et n Pair

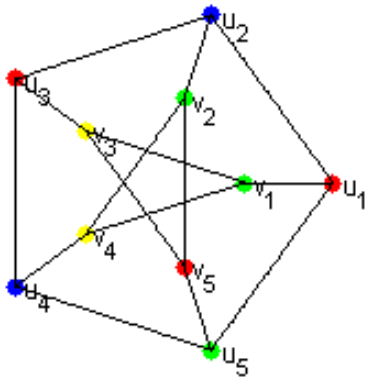
	$P(14,2)$		$P(16,2)$		$P(18,2)$	
i	v_i	u_i	v_i	u_i	v_i	u_i
1	(1,1,1,0,3)	(1,0,2,1,2)	(2,1,1,0,3)	(1,0,2,1,3)	(1,1,1,0,3)	(1,0,2,1,2)
2	(1,1,1,3,0)	(0,1,2,2,1)	(1,2,1,3,0)	(0,1,2,2,0)	(1,1,1,3,0)	(0,1,2,2,1)
3	(1,1,0,1,3)	(1,0,1,2,2)	(1,1,0,1,3)	(1,0,1,2,3)	(1,1,0,1,3)	(1,0,1,2,2)
4	(1,1,0,4,1)	(0,1,1,3,2)	(1,1,0,4,1)	(0,1,1,3,1)	(1,1,0,4,1)	(0,1,1,3,2)
5	(0,1,1,2,4)	(1,0,2,3,3)	(0,1,1,2,4)	(1,0,2,3,4)	(0,1,1,2,4)	(1,0,2,3,3)
6	(1,0,1,5,2)	(0,1,2,4,3)	(1,0,1,5,2)	(0,1,2,4,2)	(1,0,1,5,2)	(0,1,2,4,3)
7	(1,1,0,3,5)	(1,0,1,4,4)	(1,1,0,3,5)	(1,0,1,4,5)	(1,1,0,3,5)	(1,0,1,4,4)
8	(1,1,0,6,3)	(0,1,1,5,4)	(1,1,0,6,3)	(0,1,1,5,3)	(1,1,0,6,3)	(0,1,1,5,4)
9	(0,1,1,3,6)	(1,0,2,4,5)	(0,1,1,4,6)	(1,0,2,5,6)	(0,1,1,4,6)	(1,0,2,5,5)
10	(1,0,1,5,3)	(0,1,2,4,4)	(1,0,1,6,4)	(0,1,2,5,4)	(1,0,1,7,4)	(0,1,2,6,5)
11	(1,1,0,2,5)	(1,0,1,3,4)	(1,1,0,3,6)	(1,0,1,4,6)	(1,1,0,4,7)	(1,0,1,5,6)
12	(1,1,0,4,2)	(0,1,1,3,3)	(1,1,0,5,3)	(0,1,1,4,3)	(1,1,0,6,4)	(0,1,1,5,5)
13	(0,1,1,1,4)	(1,0,2,2,3)	(0,1,1,2,5)	(1,0,2,3,5)	(0,1,1,3,6)	(1,0,2,4,5)
14	(1,0,1,3,1)	(0,1,2,2,2)	(1,0,1,4,2)	(0,1,2,3,2)	(1,0,1,5,3)	(0,1,2,4,4)
15			(1,1,0,1,4)	(1,0,1,2,4)	(1,1,0,2,5)	(1,0,1,3,4)
16			(1,1,0,3,1)	(0,1,1,2,1)	(1,1,0,4,2)	(0,1,1,3,3)
17					(0,1,1,1,4)	(1,0,2,2,3)
18					(1,0,1,3,1)	(0,1,2,2,2)

	$P(20,2)$		$P(22,2)$		$P(24,2)$	
i	v_i	u_i	v_i	u_i	v_i	u_i
1	(2,1,1,0,3)	(1,0,2,1,2)	(1,1,1,0,3)	(1,0,2,1,3)	(2,1,1,0,3)	(1,0,2,1,2)
2	(1,2,1,3,0)	(0,1,2,2,1)	(1,1,1,3,0)	(0,1,2,2,0)	(1,2,1,3,0)	(0,1,2,2,1)
3	(1,1,0,1,3)	(1,0,1,2,2)	(1,1,0,1,3)	(1,0,1,2,3)	(1,1,0,1,3)	(1,0,1,2,2)
4	(1,1,0,4,1)	(0,1,1,3,2)	(1,1,0,4,1)	(0,1,1,3,1)	(1,1,0,4,1)	(0,1,1,3,2)
5	(0,1,1,2,4)	(1,0,2,3,3)	(0,1,1,2,4)	(1,0,2,3,4)	(0,1,1,2,4)	(1,0,2,3,3)
6	(1,0,1,5,2)	(0,1,2,4,3)	(1,0,1,5,2)	(0,1,2,4,2)	(1,0,1,5,2)	(0,1,2,4,3)
7	(1,1,0,3,5)	(1,0,1,4,4)	(1,1,0,3,5)	(1,0,1,4,5)	(1,1,0,3,5)	(1,0,1,4,4)
8	(1,1,0,6,3)	(0,1,1,5,4)	(1,1,0,6,3)	(0,1,1,5,3)	(1,1,0,6,3)	(0,1,1,5,4)
9	(0,1,1,4,6)	(1,0,2,5,5)	(0,1,1,4,6)	(1,0,2,5,6)	(0,1,1,4,6)	(1,0,2,5,5)
10	(1,0,1,7,4)	(0,1,2,6,5)	(1,0,1,7,4)	(0,1,2,6,4)	(1,0,1,7,4)	(0,1,2,6,5)
11	(1,1,0,5,7)	(1,0,1,6,6)	(1,1,0,5,7)	(1,0,1,6,7)	(1,1,0,5,7)	(1,0,1,6,6)
12	(1,1,0,7,5)	(0,1,1,6,6)	(1,1,0,8,5)	(0,1,1,7,5)	(1,1,0,8,5)	(0,1,1,7,6)
13	(0,1,1,4,7)	(1,0,2,5,6)	(0,1,1,5,8)	(1,0,2,6,8)	(0,1,1,6,8)	(1,0,2,7,7)
14	(1,0,1,6,4)	(0,1,2,5,5)	(1,0,1,7,5)	(0,1,2,6,5)	(1,0,1,8,6)	(0,1,2,7,7)
15	(1,1,0,3,6)	(1,0,1,4,5)	(1,1,0,4,7)	(1,0,1,5,7)	(1,1,0,5,8)	(1,0,1,6,7)
16	(1,1,0,5,3)	(0,1,1,4,4)	(1,1,0,6,4)	(0,1,1,5,4)	(1,1,0,7,5)	(0,1,1,6,6)
17	(0,1,1,2,5)	(1,0,2,3,4)	(0,1,1,3,6)	(1,0,2,4,6)	(0,1,1,4,7)	(1,0,2,5,6)
18	(1,0,1,4,2)	(0,1,2,3,3)	(1,0,1,5,3)	(0,1,2,4,3)	(1,0,1,6,4)	(0,1,2,5,5)
19	(1,1,0,1,4)	(1,0,1,2,3)	(1,1,0,2,5)	(1,0,1,3,5)	(1,1,0,3,6)	(1,0,1,4,5)
20	(1,1,0,3,1)	(0,1,1,2,2)	(1,1,0,4,2)	(0,1,1,3,2)	(1,1,0,5,3)	(0,1,1,4,4)
21			(0,1,1,1,4)	(1,0,2,2,4)	(0,1,1,2,5)	(1,0,2,3,4)
22			(1,0,1,3,1)	(0,1,2,2,1)	(1,0,1,4,2)	(0,1,2,3,3)
23					(1,1,0,1,4)	(1,0,1,2,3)
24					(1,1,0,3,1)	(0,1,1,2,2)

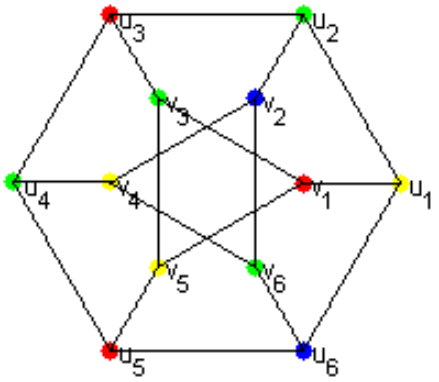
	$P(26,2)$		$P(28,2)$		$P(30,2)$	
i	v_i	u_i	v_i	u_i	v_i	u_i
1	(1,1,1,0,3)	(1,0,2,1,2)	(2,1,1,0,3)	(1,0,2,1,3)	(1,1,1,0,3)	(1,0,2,1,2)
2	(1,1,1,3,0)	(0,1,2,2,1)	(1,2,1,3,0)	(0,1,2,2,0)	(1,1,1,3,0)	(0,1,2,2,1)
3	(1,1,0,1,3)	(1,0,1,2,2)	(1,1,0,1,3)	(1,0,1,2,3)	(1,1,0,1,3)	(1,0,1,2,2)
4	(1,1,0,4,1)	(0,1,1,3,2)	(1,1,0,4,1)	(0,1,1,3,1)	(1,1,0,4,1)	(0,1,1,3,2)
5	(0,1,1,2,4)	(1,0,2,3,3)	(0,1,1,2,4)	(1,0,2,3,4)	(0,1,1,2,4)	(1,0,2,3,3)
6	(1,0,1,5,2)	(0,1,2,4,3)	(1,0,1,5,2)	(0,1,2,4,2)	(1,0,1,5,2)	(0,1,2,4,3)
7	(1,1,0,3,5)	(1,0,1,4,4)	(1,1,0,3,5)	(1,0,1,4,5)	(1,1,0,3,5)	(1,0,1,4,4)
8	(1,1,0,6,3)	(0,1,1,5,4)	(1,1,0,6,3)	(0,1,1,5,3)	(1,1,0,6,3)	(0,1,1,5,4)
9	(0,1,1,4,6)	(1,0,2,5,5)	(0,1,1,4,6)	(1,0,2,5,6)	(0,1,1,4,6)	(1,0,2,5,5)
10	(1,0,1,7,4)	(0,1,2,6,5)	(1,0,1,7,4)	(0,1,2,6,4)	(1,0,1,7,4)	(0,1,2,6,5)
11	(1,1,0,5,7)	(1,0,1,6,6)	(1,1,0,5,7)	(1,0,1,6,7)	(1,1,0,5,7)	(1,0,1,6,6)
12	(1,1,0,8,5)	(0,1,1,7,6)	(1,1,0,8,5)	(0,1,1,7,5)	(1,1,0,8,5)	(0,1,1,7,6)
13	(0,1,1,6,8)	(1,0,2,7,7)	(0,1,1,6,8)	(1,0,2,7,8)	(0,1,1,6,8)	(1,0,2,7,7)
14	(1,0,1,9,6)	(0,1,2,8,7)	(1,0,1,9,6)	(0,1,2,8,6)	(1,0,1,9,6)	(0,1,2,8,7)
15	(1,1,0,6,9)	(1,0,1,7,8)	(1,1,0,7,9)	(1,0,1,8,9)	(1,1,0,7,9)	(1,0,1,8,8)
16	(1,1,0,8,6)	(0,1,1,7,7)	(1,1,0,9,7)	(0,1,1,8,7)	(1,1,0,10,7)	(0,1,1,9,8)
17	(0,1,1,5,8)	(1,0,2,6,7)	(0,1,1,6,9)	(1,0,2,7,9)	(0,1,1,7,10)	(1,0,2,8,9)
18	(1,0,1,7,5)	(0,1,2,6,6)	(1,0,1,8,6)	(0,1,2,7,6)	(1,0,1,9,7)	(0,1,2,8,8)
19	(1,1,0,4,7)	(1,0,1,5,6)	(1,1,0,5,8)	(1,0,1,6,8)	(1,1,0,6,9)	(1,0,1,7,8)
20	(1,1,0,6,4)	(0,1,1,5,5)	(1,1,0,7,5)	(0,1,1,6,5)	(1,1,0,8,6)	(0,1,1,7,7)
21	(0,1,1,3,6)	(1,0,2,4,5)	(0,1,1,4,7)	(1,0,2,5,7)	(0,1,1,5,8)	(1,0,2,6,7)
22	(1,0,1,5,3)	(0,1,2,4,4)	(1,0,1,6,4)	(0,1,2,5,4)	(1,0,1,7,5)	(0,1,2,6,6)
23	(1,1,0,2,5)	(1,0,1,3,4)	(1,1,0,3,6)	(1,0,1,4,6)	(1,1,0,4,7)	(1,0,1,5,6)
24	(1,1,0,4,2)	(0,1,1,3,3)	(1,1,0,5,3)	(0,1,1,4,3)	(1,1,0,6,4)	(0,1,1,5,5)
25	(0,1,1,1,4)	(1,0,2,2,3)	(0,1,1,2,5)	(1,0,2,3,5)	(0,1,1,3,6)	(1,0,2,4,5)
26	(1,0,1,3,1)	(0,1,2,2,2)	(1,0,1,4,2)	(0,1,2,3,2)	(1,0,1,5,3)	(0,1,2,4,4)
27			(1,1,0,1,4)	(1,0,1,2,4)	(1,1,0,2,5)	(1,0,1,3,4)
28			(1,1,0,3,1)	(0,1,1,2,1)	(1,1,0,4,2)	(0,1,1,3,3)
29					(0,1,1,1,4)	(1,0,2,2,3)
30					(1,0,1,3,1)	(0,1,2,2,2)

	$P(38,2)$		$P(40,2)$		$P(42,2)$	
i	v_i	u_i	v_i	u_i	v_i	u_i
1	(1,1,1,0,3)	(1,0,2,1,2)	(2,1,1,0,3)	(1,0,2,1,3)	(1,1,1,0,3)	(1,0,2,1,2)
2	(1,1,1,3,0)	(0,1,2,2,1)	(1,2,1,3,0)	(0,1,2,2,0)	(1,1,1,3,0)	(0,1,2,2,1)
3	(1,1,0,1,3)	(1,0,1,2,2)	(1,1,0,1,3)	(1,0,1,2,3)	(1,1,0,1,3)	(1,0,1,2,2)
4	(1,1,0,4,1)	(0,1,1,3,2)	(1,1,0,4,1)	(0,1,1,3,1)	(1,1,0,4,1)	(0,1,1,3,2)
5	(0,1,1,2,4)	(1,0,2,3,3)	(0,1,1,2,4)	(1,0,2,3,4)	(0,1,1,2,4)	(1,0,2,3,3)
6	(1,0,1,5,2)	(0,1,2,4,3)	(1,0,1,5,2)	(0,1,2,4,2)	(1,0,1,5,2)	(0,1,2,4,3)
7	(1,1,0,3,5)	(1,0,1,4,4)	(1,1,0,3,5)	(1,0,1,4,5)	(1,1,0,3,5)	(1,0,1,4,4)
8	(1,1,0,6,3)	(0,1,1,5,4)	(1,1,0,6,3)	(0,1,1,5,3)	(1,1,0,6,3)	(0,1,1,5,4)
9	(0,1,1,4,6)	(1,0,2,5,5)	(0,1,1,4,6)	(1,0,2,5,6)	(0,1,1,4,6)	(1,0,2,5,5)
10	(1,0,1,7,4)	(0,1,2,6,5)	(1,0,1,7,4)	(0,1,2,6,4)	(1,0,1,7,4)	(0,1,2,6,5)
11	(1,1,0,5,7)	(1,0,1,6,6)	(1,1,0,5,7)	(1,0,1,6,7)	(1,1,0,5,7)	(1,0,1,6,6)
12	(1,1,0,8,5)	(0,1,1,7,6)	(1,1,0,8,5)	(0,1,1,7,5)	(1,1,0,8,5)	(0,1,1,7,6)
13	(0,1,1,6,8)	(1,0,2,7,7)	(0,1,1,6,8)	(1,0,2,7,8)	(0,1,1,6,8)	(1,0,2,7,7)
14	(1,0,1,9,6)	(0,1,2,8,7)	(1,0,1,9,6)	(0,1,2,8,6)	(1,0,1,9,6)	(0,1,2,8,7)
15	(1,1,0,7,9)	(1,0,1,8,8)	(1,1,0,7,9)	(1,0,1,8,9)	(1,1,0,7,9)	(1,0,1,8,8)
16	(1,1,0,10,7)	(0,1,1,9,8)	(1,1,0,10,7)	(0,1,1,9,7)	(1,1,0,10,7)	(0,1,1,9,8)
17	(0,1,1,8,10)	(1,0,2,9,9)	(0,1,1,8,10)	(1,0,2,9,10)	(0,1,1,8,10)	(1,0,2,9,9)
18	(1,0,1,11,8)	(0,1,2,10,9)	(1,0,1,11,8)	(0,1,2,10,8)	(1,0,1,11,8)	(0,1,2,10,9)
19	(1,1,0,9,11)	(1,0,1,10,10)	(1,1,0,9,11)	(1,0,1,10,11)	(1,1,0,9,11)	(1,0,1,10,10)
20	(1,1,0,12,9)	(0,1,1,11,10)	(1,1,0,12,9)	(0,1,1,11,9)	(1,1,0,12,9)	(0,1,1,11,10)
21	(0,1,1,9,12)	(1,0,2,10,11)	(0,1,1,10,12)	(1,0,2,11,12)	(0,1,1,10,12)	(1,0,2,11,11)
22	(1,0,1,11,9)	(0,1,2,10,10)	(1,0,1,12,10)	(0,1,2,11,10)	(1,0,1,13,10)	(0,1,2,12,11)
23	(1,1,0,8,11)	(1,0,1,9,10)	(1,1,0,9,12)	(1,0,1,10,12)	(1,1,0,10,13)	(1,0,1,11,12)
24	(1,1,0,10,8)	(0,1,1,9,9)	(1,1,0,11,9)	(0,1,1,10,9)	(1,1,0,12,10)	(0,1,1,11,11)
25	(0,1,1,7,10)	(1,0,2,8,9)	(0,1,1,8,11)	(1,0,2,9,11)	(0,1,1,9,12)	(1,0,2,10,11)
26	(1,0,1,9,7)	(0,1,2,8,8)	(1,0,1,10,8)	(0,1,2,9,8)	(1,0,1,11,9)	(0,1,2,10,10)
27	(1,1,0,6,9)	(1,0,1,7,8)	(1,1,0,7,10)	(1,0,1,8,10)	(1,1,0,8,11)	(1,0,1,9,10)
28	(1,1,0,8,6)	(0,1,1,7,7)	(1,1,0,9,7)	(0,1,1,8,7)	(1,1,0,10,8)	(0,1,1,9,9)
29	(0,1,1,5,8)	(1,0,2,6,7)	(0,1,1,6,9)	(1,0,2,7,9)	(0,1,1,7,10)	(1,0,2,8,9)
30	(1,0,1,7,5)	(0,1,2,6,6)	(1,0,1,8,6)	(0,1,2,7,6)	(1,0,1,9,7)	(0,1,2,8,8)
31	(1,1,0,4,7)	(1,0,1,5,6)	(1,1,0,5,8)	(1,0,1,6,8)	(1,1,0,6,9)	(1,0,1,7,8)
32	(1,1,0,6,4)	(0,1,1,5,5)	(1,1,0,7,5)	(0,1,1,6,5)	(1,1,0,8,6)	(0,1,1,7,7)
33	(0,1,1,3,6)	(1,0,2,4,5)	(0,1,1,4,7)	(1,0,2,5,7)	(0,1,1,5,8)	(1,0,2,6,7)
34	(1,0,1,5,3)	(0,1,2,4,4)	(1,0,1,6,4)	(0,1,2,5,4)	(1,0,1,7,5)	(0,1,2,6,6)
35	(1,1,0,2,5)	(1,0,1,3,4)	(1,1,0,3,6)	(1,0,1,4,6)	(1,1,0,4,7)	(1,0,1,5,6)
36	(1,1,0,4,2)	(0,1,1,3,3)	(1,1,0,5,3)	(0,1,1,4,3)	(1,1,0,6,4)	(0,1,1,5,5)
37	(0,1,1,1,4)	(1,0,2,2,3)	(0,1,1,2,5)	(1,0,2,3,5)	(0,1,1,3,6)	(1,0,2,4,5)
38	(1,0,1,3,1)	(0,1,2,2,2)	(1,0,1,4,2)	(0,1,2,3,2)	(1,0,1,5,3)	(0,1,2,4,4)
39			(1,1,0,1,4)	(1,0,1,2,4)	(1,1,0,2,5)	(1,0,1,3,4)
40			(1,1,0,3,1)	(0,1,1,2,1)	(1,1,0,4,2)	(0,1,1,3,3)
41					(0,1,1,1,4)	(1,0,2,2,3)
42					(1,0,1,3,1)	(0,1,2,2,2)

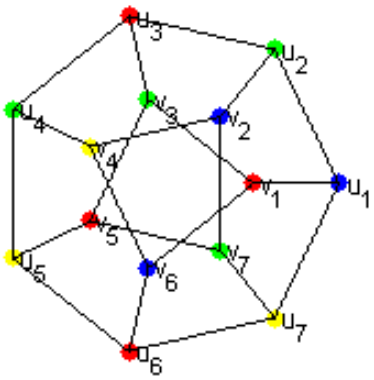
Annexe C : Coloration localisatrice avec 4 couleurs de $P(n,2)$,$n \leq 12$



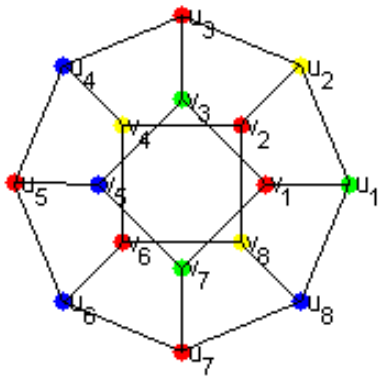
$P(5,2)$



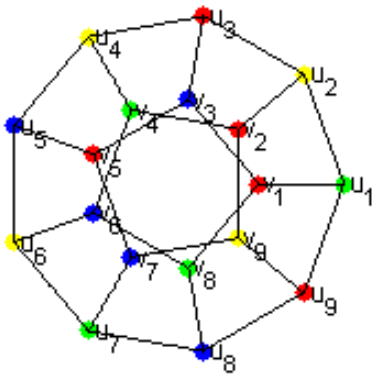
$P(6,2)$



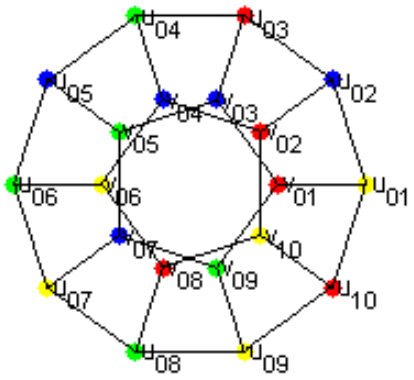
$P(7,2)$



$P(8,2)$



$P(9,2)$



$P(10,2)$





Conclusion et perspectives

Conclusion

Après avoir rappelé les définitions et notations de base nécessaires à la lecture de ce mémoire, nous avons également effectué une revue de littérature portant sur quelques classes de graphes. Dans ce mémoire, notre intérêt s'est porté en particulier sur la coloration locale des graphes. Nous avons d'abord présenté les résultats existants et récents concernant la coloration locale dans les graphes. Ensuite, nous avons déterminé une borne supérieure pour le nombre chromatique localisateur du graphe de Petersen généralisé $P(n, 2)$. Nous sommes pleinement conscients de la difficulté qu'il y a à étudier d'autres graphes et nous soulignons l'importance de rechercher des solutions algorithmiques. Il est important de noter ici que la complexité algorithmique du problème de décision associé au nombre chromatique local n'était pas encore connue au moment où nous avons entrepris cette étude. Dans l'ensemble, notre travail de recherche a permis d'approfondir notre compréhension de la coloration localisatrice dans les graphes, en particulier dans le cas du graphe de Petersen généralisé $P(n, 2)$. Cependant, il reste encore beaucoup à explorer dans ce domaine, notamment en étudiant d'autres classes de graphes et en développant des approches algorithmiques pour résoudre le problème de décision associé au nombre chromatique local.

Perspectives et problèmes ouverts

Il serait intéressant de continuer à travailler sur le sujet. Regarder d'autres classes de graphes qui n'ont pas été traitées dans la littérature. Notamment, caractériser les graphes où le nombre chromatique localisateur est égale à 4. Dans un premier temps nous pourrions nous restreindre aux classes de graphes pour lesquelles une borne supérieure est déjà connue pour le nombre chromatique localisateur. La question que l'on pourrait en-

core se poser est la suivante : “ Est il possible de généraliser le résultat obtenu pour les graphes de Petersen généralisés $P(n,k)$ avec $n > 12$?” Ou mieux encore : “ existe-t-il une 4-coloration localisatrice pour les graphes de Petersen généralisés $P(n,k)$?

Comme autres perspectives à notre travail, nous proposons notamment :

- Déterminer des valeurs exactes et des bornes de nombre chromatique localisateur pour d'autres classes de graphes (Graphe de Petersen $P(n,k)$ pour $k \in \{3,4,\dots\}$.).
- Étudier la complexité de la recherche du nombre chromatique de localisateur de quelques classes de graphes.

Nous espérons que cette étude contribuera à stimuler de nouvelles recherches et à ouvrir la voie à de nouvelles avancées dans le domaine de la coloration localisatrice des graphes.

Liste des notations

G est un graphe.
P_n chaîne élémentaire d'ordre n
C_n cycle élémentaire d'ordre n
$\triangle(G)$ degré maximum de G
$\delta(G)$ degré minimum de G
$d(v)$ degré de v dans G
$D(G)$ diamètre de G
$\epsilon(u)$ Excentricité d'un sommet u
$E(G)$ ensemble des arêtes de G
$V(G)$ ensemble des sommets de G
$N_G(v)$ ensemble des voisins de v dans G
$\overline{G}$ graphe complémentaire de G
K_n graphe complet d'ordre n
$K_{n,m}$ graphe complet biparti d'ordre $n+m$
$L(G)$ graphe représentatif des arêtes de G
$G \vee H$ joint des graphes G et H
$l(C)$ longueur du cycle C
$g(G)$ maille de G
$\omega(G)$ nombre de composantes connexes de G
$\chi(G)$ nombre chromatique de G
n ordre du graphe G
$G - H$ sous-graphe induit par $V(G) - V(H)$
$H \subset G$ H sous-graphe propre de G
$H \subseteq H$ H sous-graphe de G
m taille du graphe G
n ordre du graphe G
$G \square H$ Produit cartésien de deux graphes
$S(G)$ Subdivision d'un graphe G
$KG(n,k)$ Graphe de Kneser
$G = T \uplus C$ Graphe de Halin de l'arbre T
G^p, la puissance p^{ieme} d'un graphe

$G_1 \odot G_2$ Produit corona des graphes G_1 et G_2
$D(G)$ Nombre distinguant
$\chi_D(G)$ Nombre chromatique distinguant
$loc(G)$ Nombre localisateur
$PGCD$ Plus grand commun diviseurs

Bibliographie

[1] Asmiati. the locating-chromatic number for certain of Trees. *Bulletin of Mathematics*, 08(02) :125–131, 2016.

[2] Asmiati, I Ketut Sadha Gunce Yana, and Lyra Yulianti. On the Locating Chromatic Number of Subdivision of Barbell Graphs Containing Generalized Petersen Graph. *IJCSNS International Journal of Computer Science and Network Security*, 19(7) :45–50, 2019.

[3] Asmiati Asmiati and Edy Tri Baskoro. Characterizing All Graphs Containing Cycles With Locating-Chromatic Number 3. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1450, pages 351–357, 2012.

[4] Asmiati Asmiati, Wamiliana, Devriyadi, and Lyra Yulianti. On some Petersen graphs having locating chromatic number four or five. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, 102(4) :769–778, aug 2017.

[5] Asmiati Asmiati, I Ketut Sadha Gunce Yana1, and Lyra Yulianti. On the locating chromatic number of certain barbell graphs. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, pages 2–5, 2018.

[6] Edy Tri Baskoro and Ira A Urwasih. The Locating-Chromatic number For Corona Product Of Graphs. *Southeast Asian Journal of Sciences*, 1(1) :126–136, 2012.

[7] Ali Behtoei and Mahdi Anbarloe. The Locating Chromatic Number of the Join of Graphs. *Bull. Iranian Math. Soc.*, 40(6) :1491–1504, 2014.

[8] Ali Behtoei and Behnaz Omoomi. On the locating chromatic number of Kneser graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 159(18) :2214–2221, 2011.

[9] Ali Behtoei and Behnaz Omoomi. On the Locating Chromatic Number of Cartesian Product of Graphs. *Ars Combinatoria*, pages 2–5, 2012.

[10] Claud Berge. *Graphes et hypergraphes.* Dunod, 1970.

[11] Gary Chartrand, David ; Erwin, Michael a. Henning, Peter J Slater, and Ping Zhang. Graphs of order n with locating-chromatic number n-1. *Discrete Mathematics*, 269(1-3) :65–79, jul 2003.

[12] Gary Chartrand and Ping Zhang. *Chromatic Graph Theory*. Chapman and Hall/CRC, sep 2008.

[13] Erwin David, A.Henning Michael, J.Slater Peter, Ping Zhang, and Chartrand Gary. The Locating-Chromatic Number Of A Graph. *Bull. Inst. Combin. Appl.*, 36 :89–101, 2002.

[14] Reinhard Diestel. *Graph Theory*, volume 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2017.

[15] Michitaka Furuya and Naoki Matsumoto. Upper Bounds On The Locating Chromatic Number Of Trees. *Discrete Applied Mathematics*, 257 :338–341, mar 2019.

[16] Agus Irawan and Asmiati Asmiati. The locating-chromatic number of subdivision firecracker graphs. *International Mathematical Forum*, 13(10) :485–492, 2018.

[17] Tommy R. Jensen and Bjarne Toft. *Graph Coloring Problems*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA, dec 1994.

[18] Hasan Al-Ezeh Manal Ghanem and Ala'a Dabbour. Locating Chromatic Number of Powers of Paths and Cycles. *symmetry*, 11(3) :389, 2019.

[19] Watkins Mark E. A theorem on tait colorings with an application to the generalized Petersen graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 6(2) :152–164, 1969.

[20] Ira Apni Purwasih, Hilda Assiyatun, and Djoko Suprijanto. The locating-chromatic number for Halin graphs. *Communications in Combinatorics and Optimization*, 2(1) :1–9, 2017.

[21] Ira Apni Purwasih and Edy Tri Baskoro. The locating-chromatic number of certain Halin graphs. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1450, pages 342–345, 2012.

[22] Ira Apni Purwasih, Edy Tri Baskoro, Hilda Assiyatun, and W Djohan. The locating-chromatic number for a subdivision of a wheel on one cycle edge. *AKCE Int. J. Graphs Comb.*, 1(3) :327–336, 2013.

[23] Ira Apni Purwasih, Edy Tri Baskoro, Hilda Assiyatun, and Djoko Suprijanto. The Bounds on the Locating-Chromatic Number for a Subdivision of a Graph on One Edge. *Procedia Computer Science*, 74 :84–88, 2015.

[24] Ira Apni Purwasih, Edy Tri Baskoro, Hilda Assiyatun, and Djoko Suprijanto. Locating-coloring on Halin graphs with a certain number of inner faces. In *Proceedings of the 7th seams ugm international conference on mathematics and its applications 2015*, page 020014, 2016.

[25] Redha SAKRI. *Contribution a la déterminatiion du nombre chromatique localisateur dans les graphes.* PhD thesis, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene Bab Ezzour, 2022.

[26] Redha Sakri and Moncef Abbas. On locating chromatic number of Möbius ladder graphs. *Proyecciones (Antofagasta)*, 40(3) :659–669, apr 2021.

[27] Brilly Maxel Salindeho, Hilda Assiyatun, and Edy Tri Baskoro. On The Locating-Chromatic Numbers of Subdivisions of Friendship Graph. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, 26(2) :175–184, 2020.

Index

a-coloration, 12

b-coloration, 12

Chaîne, 4
Chaînes, 17
Circonférence d'un graphe, 5
Classe de couleur, 11
Coloration, 11
Coloration k-distinguant, 11
Coloration localisatrice, 14
Cycle, 5, 17
Cycle impair, 5
Cycle pair, 5

Diamètre, 5
Double étoile, 17

Engendré, 4
Ensemble de voisins, 4
Ensemble de voisins communs, 4
Ensembles localisateurs, 14
Excentricité, 5

Graphe k-subdivisé, 8
Graphe biparti, 5
Graphe biparti complet, 6
Graphe cubique, 8
Graphe de Barbell, 29
Graphe de Halin, 7, 22
Graphe de Kneser, 7, 21
Graphe induit, 4
Graphe l'échelle de Möbius, 23
Graphe multiparti , 6
Graphe non trivial, 3
Graphe partiel, 4
Graphe régulier, 8
Graphe simple, 4
Graphe subdivisé, 8

Joint, 28

k-chromatique, 11
k-coloration, 11
k-régulier, 8

Longueur d'une chaîne, 5

Maille d'un graphe, 5

Nombre a-chromatique, 12
Nombre b-chromatique, 12
Nombre chromatique, 11
Nombre chromatique distinguant, 12, 16
Nombre distinguant, 11
Nombre localisateur, 14

Ordre, 3

Produit cartésien, 24
Produit corona, 9, 27
Puissance de Graphes , 24

Roue, 7, 18

Sous-graphe, 4
Subdivision, 25
Subdivision barycentrique, 9

Taille, 3

Étoile, 6
Étoile double, 6