**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**
**Université Dr.Yahia Farès de Médéa**

**Faculté des Sciences**

**Département de Mathématiques et Informatique**



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention
du

Diplôme de Master en Mathématiques
Option : Recherche Opérationnelle
Par

**BEN MAHIEDINE Marwa et OUELD-ROUIS Nawel**

## Thème

# Etude de quelques paramètres dans la classe des graphes quasi-sans griffes

***Composition du Jury :***

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mr. M.Zemir | MAA | UYF médéa | Président |
| Mr. R.Lamdani | MCB | UYF médéa | Examinateur |
| Mr. A.Sahraoui | MAA | UYF médéa | Promoteur |

Date de soutenance : *23/06/2022*

# *Remerciements*

Nous remercions, en premier, $ALLAH$ qui nous a donné la force et la volenté de mener ce travail à bout .
La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui nous voudrions témoigner notre reconnaissance.
Tout d'abord, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à l'endroit de notre promoteur M.$Sahraoui\ Abdelkader$ pour la qualité de leur encadrement .Leur soutien total et inconditionnel ainsi que la confiance qu'ils ont su placer en nous tout au long de notre maîtrise sont ce qui ont mené à l'achèvement de ce mémoire .
Nous remercions également les membres du jury $M.Zemir$ et $R.Lamdani$ pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant du juger notre travail et d'avoir consacrer leur temps pour sa lecture .
Finalement, un énorme merci à tous ceux et celles qui ont contribué de près ou de loin à l'accomplissement de ce travail. Leurs conseils et leurs mots d'encouragement nous ont beaucoup soutenu et nous ont donnés la force nécessaire pour surmonter les obstacles qui se sont dressés sur notre chemin .

# Dédicace

*Je dédie ce modeste travail :*

***À mes chers parents,***

*Qui m'ont comblé d'amour et d'affection, qui m'ont toujours encouragés pour achever mes études tout en espérant voir le fruit de leurs sacrifices,*

*Que ALLAH les garde pour moi,*

*À mes chères soerus :* ***Saffaa et Chaïmaa,***

***Aïcha*** *et son mari* ***Abdelkader***

*À ma chère binôme* ***Nawel*** *et sa famille,*

*À mes chères amies :* ***Ilham, Radhia, Khadidja, Imen, Zahira, Khawla...***

*À tous mes collègues de la promotion 2022,*

*À tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.*

***Ben Mahiedine Marwa***

# Dédicace

*Je dédie ce modeste travail :*

***À mes chers parents,***

*Qui m'ont comblé d'amour et d'affection, qui m'ont toujours encouragés pour achever mes études tout en espérant voir le fruit de leurs sacrifices,*

*Que ALLAH les garde pour moi,*

*À mes chères sœurs :* ***Achwak,***

***Asma*** *et son mari* ***Sidali***

*À mon cher frère :* ***Mokhtar***

*À mes petits perles de diamant :* ***Khalil , Hanin***

*À la bonne âme de* **ma grande-mère**,
*j'espère que tu es fière de ta petite-fille, que Dieu te bénisse.*

*À toute ma familles*

*À ma chère binôme* ***Marwa*** *et sa famille,*

*À ma chère amie :* ***Khawla***

*À tous mes collègues de la promotion 2022,*

*À tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.*

***Oueld-Rouis Nawel***

# *Résumé*

Un graphe $G = (V, E)$ est dit quasi-sans griffe s'il satisfait la propriété : $d(x, y) = 2$ il éxiste $u \in N(x) \cap N(y)$ tel que $N[u] \subseteq N[x] \cup N[y]$. Cette propriété est satisfaite si en particulier $u$ ne centre pas une griffe (induit $K_{1.3}$). Notre objectif à travers ce mémoire est d'étudier quelque paramètre dans la classe des graphes quasi-sans griffes . Une coloration propre des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ consiste à affecter une couleur à chaque sommet de $V$ adjacents . Le nombre chromatique de $G$, noté $\chi(G)$, est le plut petit entier $k$ telle que $G$ admet une coloration propre avec $k$ couleurs. Une coloration de packing est une coloration propre, et donc le nombre chromatique de packing est supérieur ou égal au nombre chromatique.
Dans ce manuscrit, nous déterminons le nombre chromatique $\chi(G)$ et le nombre chromatique de packing $\chi_\rho(G)$ dans la classe des graphes quasi-sans griffes.

# *Abstract*

A graph $G = (V, E)$ is called quasi claw-free if it satisfies the property $d(x, y) = 2$ there exists $u \in N(x) \cap N(y)$ such that $N[u] \subseteq N[x] \cup N[y]$. This property is satisfied if in particular $u$ does not centre a claw (induces $K_{1.3}$). Our goal in this paper is to study the class of quasi-claw-free graphs. A proper coloring of the vertices of a graph $G = (V, E)$ consists in assigning a color to each vertex of $V$ adjacent . The number chromatic of $G$, denoted $\chi(G)$, is the smallest integer k such that $G$ admits a clean coloring with k colors. A packing coloring is a coown loration, and therefore the chromatic number of packing is higher or equal to the chromatic number. In this manuscript, we determine the chromatic number $\chi(G)$ and the number packing chromaticity $\chi_\rho(G)$ in the class of quasi-clawless graphs.

# *Résumé en arabe*

# Table des matières

**Remerciements** i

**Dédicase** ii

**Dédicase** iii

**Résumé** iv

**Abstract** v

**Résumé en arabe** vi

**Notation** x

**Introduction générale** 1

**1 Notions fondamentales de la théorie des graphes** 4

1.1 Introduction . . . . . 4

1.2 Notions de base : . . . . . 4

1.2.1 Graphe non orienté : . . . . . 4

1.2.2 Voisinage, Degrés : . . . . . 4

1.2.3 Chaîne, Cycle . . . . . 6

1.2.4 Distances, Excentricité, Rayon, Centre, Diamètre . 7

1.3 Invariants de graphe . . . . . 7

1.3.1 Stabilité, clique, ensemble dominant, couplage . . 7

1.3.2 Coloration dans les graphes . . . . . 8

1.4 Type de graphes : . . . . . 9
1.4.1 Graphe simple : . . . . . 9
1.4.2 Graphe connexe . . . . . 10
1.4.3 Arbre . . . . . 10
1.4.4 Complémentaire d'un graphe . . . . . 11
1.4.5 Graphes isomorphes . . . . . 11
1.4.6 Graphe partiel et sous-graphe d'un graphe . . . . 12
1.4.7 Graphe complet : . . . . . 13
1.4.8 Graphe biparti et graphe biparti complet : . . . . 13
1.4.9 Etoile . . . . . 14
1.4.10 Griffe . . . . . 14
1.4.11 Graphes $k$-régulier . . . . . 15
1.4.12 Roue . . . . . 16
1.5 Graphe hamiltonien . . . . . 16

**2 Graphes quasi-sans griffes** **18**
2.1 Introduction . . . . . 18
2.2 Graphe sans griffes, Graphe quasi-sans griffes . . . . . 18
2.3 Connéxité dans les graphes quasi-sans griffes . . . . . 21
2.3.1 Graphe $k-$connexe . . . . . 21
2.4 Hamiltonicité dans les graphes sans griffes . . . . . 22
2.5 Hamiltonicité dans les graphes quasi-sans griffes . . . . 22
2.5.1 Condition sur les degrés . . . . . 23
2.5.2 Conditions locales . . . . . 23

**3 Quelques paramètres dans la classe des graphes quasi-sans griffes** **25**
3.1 Introduction . . . . . 25
3.2 Arbres et graphes quasi-sans griffes . . . . . 25
3.3 Chaînes et cycles, graphes quasi-sans griffes . . . . . 26
3.4 Graphe complet et graphes quasi-sans griffes . . . . . 27

3.5 Roue et graphes quasi-sans griffes . . . . . 27
3.6 Couronne et graphes quasi-sans griffes . . . . . 28
3.7 Coloration des graphes quasi-sans griffes . . . . . 29
3.7.1 Nombre chromatique dans la classe quassi-sans griffes 30
3.8 Coloration de packing dans la classe de graphes quasi-sans griffes . . . . . 35
3.8.1 Nombre chromatique de packing . . . . . 35

**Conclusion et perspective** **37**

**Bibliographie** **39**

# Table des figures


1.1 Exemple d'un graphe $G$. . . . . 5
1.2 (1) $C_8$ et (2) $P_7$. . . . . 6
1.3 Graphe à 3-coloration . . . . . 9
1.4 $(a)$Exemple de graphe comportant des arêtes multiples et une boucle. . . . . 9
1.5 $G$ est connexe. $H$ est non connexe avec deux composantes connexe. . . . . 10
1.6 Un arbre. . . . . 10
1.7 Un graphe $G$ et son complémentaire $\overline{G}$. . . . . 11
1.8 Deux graphes isomorphes . . . . . 11
1.9 Un graphe $G$ et le sous-graphe de $G$ induit par $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 12
1.10 Un graphe partiel de $G$ . . . . . 13
1.11 (1) Un graphe complet $(K_5)$ . . . . . 13
1.12 Graphe biparti. . . . . 14
1.13 Graphe biparti complet $K_{4,5}$. . . . . 14
1.14 Une étoile $K_{1,q}$. . . . . 15
1.15 Graphe griffe ou $k_{1,3}$ . . . . . 15
1.16 Un graphe 3-régulier d'ordre 6. . . . . 15
1.17 Roue $w_9$. . . . . 16
1.18 une Chaîne hamiltonienne . . . . . 16
1.19 un cycle hamiltonien . . . . . 17
1.20 Un graphe hamiltonien . . . . . 17

2.1 Graphe sans griffes . . . . . 18
2.2 Graphe non quasi-sans griffes. . . . . 19

2.3 Graphe qausi-sans griffe . . . . . 20
2.4 Graphe 2−connexe . . . . . 21

3.1 Arbre $T = (V, E)$. . . . . 25
3.2 Chaîne $p_n$. . . . . 26
3.3 1) $C_3 \odot K_1$ et 2) $P_2 \odot K_1$. . . . . 28

# *Notations*

$G = (V, E)$ : Graphe ayant pour ensemble de sommets $V$ et d'arêtes $E$.

$V$ : Ensemble des sommets.

$E$ : Eensemble des arêtes.

$n(G)$ : Cardinale de $V$ est appelé l'ordre de $G$, $(n = |V|)$.

$m(G)$ : Cardinal de $E$ est appelé la taille de $G$, $(m = |E|)$.

$uv$ : Extrémités de $e$.

$\bar{G}$ : Complémentaire du graphe $G$.

$G[S]$ : Sous-graphe de $G$ induit par un sous-ensemble de sommets.

$G - S$ : Sous-graphe de $G$ induit par les sommets de $V \backslash S$.

$\delta(G)$ : Degré minimum.

$\Delta(G)$ : Degré maximum.

$\alpha(G)$ : Nombre de stabilité.

$\omega(G)$ : Cardinalité d'une clique maximum.

$\chi(G)$ : Nombre chromatique.

$d_G(u, v)$ : Distance entre les sommets $u$ et $v$ dans $G$.

$\gamma(G)$ : Nombre de domination.

$K_n$ : Graphe complet à $n$ sommets.

$K_{m,n}$ : Graphe biparti complet.

$P_n$ : Chaîne d'ordre $n$.

$C_n$ : Cycle d'ordre $n$.

$P_n \odot K_1$ : Couronne de chaîne $P_n$.

$C_n \odot K_1$ : Couronne de cycle $C_n$.

# *Introduction générale*

La théorie des graphes est une branche des mathématiques discrètes. Elle représente un moyen très utile et très efficace pour résoudre des problèmes discrets de la Recherche Opérationnelle (RO). Elle est donc souvent présente dans notre vie quotidienne, sans que l'on en soit toujours conscient.

Le problème appelé "problème des sept ponts de Koenigsberg" posé par Euler en 1736 [8], est l'origine de cette branche. Ce problème consiste à répondre à la question suivante : "peut-on se promener dans la ville "1" en traversant chaque pont une et une seule fois ?". Depuis, la théorie des graphes s'est développée, notamment grâce aux travaux de Berge [9], qui a grandement participé à sa diffusion.

La théorie des graphes, grâce à ses nombreuses applications dans des domaines aussi variés que l'informatique, la biologie, la physique ou la chimie, pour ne citer que ceux-là, est l'une des branches des mathématiques qui ont connu d'énormes progrès au cours des dernières décennies. Compte tenu du fait qu'elle peut être utilisée pour modéliser toute collection d'éléments mis en relation les uns avec les autres, en particulier tout problème lié à la notion de réseau,Beaucoup de probèmes se modélisent par des objets et des relations entre objets, comme le graphe routier et le graphe du web. La théorie des graphes introduit ensuite de nombreuses classes de graphes, des familles de graphes qui vérifient certaines propriétés. Les graphes permettent de modéliser de nombreux problèmes dans

le domaines des réseaux, par exemple un réseau de transport , un réseau social (chaque sommet représente une personne et une arête relie deux sommets si les personnes correspondantes se connaissent) mais également des problèmes de chimie ou de génétique. Ces nombreuses applications font de la théorie des graphes un sujet de recherche toujours prolifique, mais revenons d'abord aux ses origines.

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments.

Le problème des quatre couleurs est parmi les premières sources d'inspiration de la théorie des graphes, Ce problème consiste à répondre à la question suivante : "suffit-il de quatre couleurs pour colorer n'importe quelle carte géographique de façon telle que deux pays ayant une frontière commune aient des couleurs distinctes ?". Mathématiquement, ce problème consiste à répondre à la question suivante : " peut-on colorer les sommets d'un graphe planaire en utilisant quatre couleurs de telle sorte que toutes les arêtes aient des extrémités de couleurs différentes ?". Ce problème a été posé sous forme de conjecture par F. Guthrie en 1852. Depuis, il est considéré comme l'un des problèmes les plus célèbres en théorie des graphes. Plus d'un siècle plus tard, en 1977, il y a eu une réponse positive à ce problème proposée par Appel, Haken et Koch , mais à l'aide de l'ordinateur. 20 ans plus tard, Robertson, Sanders, Seymour et Thomas [10] ont obtenu une preuve plus simple et plus courte, mais toujours à l'aide de l'ordinateur.
Bien que ce problème ait été résolu, il attire toujours de nombreux chercheurs, qui tentent de le résoudre sans l'aide d'ordinateurs.Il existe de nombreux résultats sur plusieurs types de colorations que nous ne détaillerons pas ici. La coloration simple ou standard ou encore la plus naturelle est la coloration propre de sommets, le problème de décision lié

à ce paramètre est NP-complet. Pour cette raison, plusieurs travaux ont été menés pour borner ce paramètre en fonction d'autres paramètres de graphe (la stabilité, couplage,..) .

Parmi les paramètres de coloration existants, nous avons étudié le nombre chromatique de coloration propre et coloration de paking.

Dans ce mémoire nous nous intéressons à la coloration propre et la coloration de paking pour la classe des graphes quasi-sans griffes. Ce mémoire est développe en trois chapitres :

**Chapitre 1** : Nous rappelons les principales définitions nécessaires à la compréhension du contenu de ce mémoire. En outre, nous présentons quelques opérations sur les graphes qui nous seront utiles dans la suite et nous exposons les paramètresdes graphes insi la coloration.

**Chapitre 2** : Nous définissons la classe des graphes quasi-sans griffes et nous donons un recueil des principaux résultats existants sur la connéxité et la hamiltonicité de cette classe.

**Chapitre 3** : Dans ce chapitre, Nous commençons par des résultats sur les graphes quasi-sans griffes,et ensuite nous nous intéressons à la détermination de la valeur exacte du nombre chromatique de la classe des graphes quasi-sans griffes comme les graphes complets, les cycles $C_n$ et les chaînes $P_n$ et les roues $W_n$, nous étudions les bornes du ce paramètre sur les graphes $k-$réguliers, nous donnons le nombre chromatique de paking sur les graphes pécidents et la couronne $P_2 \odot K_1$, $C_3 \odot K_1$.

# Chapitre 1

# Notions fondamentales de la théorie des graphes

## 1.1 Introduction

Commençons par donner quelques définitions de la théorie des graphes relatives au domaine de l'étude. Ce chapitre décrit les concepts généraux de base de la description du graphe , ainsi q'aux différents types de graphes que nous utilisons dans ce mémoire .

## 1.2 Notions de base :

### 1.2.1 Graphe non orienté :

Un graphe $G$ est la donnée d'un ensemble fini $V$, appelé un ensemble de sommets et un ensemble $E$ de parties à deux éléments de $V$ appelé ensemble d'arêtes, on note $G = (V, E)$.

### 1.2.2 Voisinage, Degrés :

- On appelle voisinage ouvert d'un sommet $v$

$$N_G(v) = \{u \in V : uv \in E\}$$

- Le voisinage fermé d'un sommet $v$ désigne l'ensemble

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

- Un sous-ensemble $S \subset V$ le voisinage ouvert de $S$ est :

$$N_G(S) = \cup_{\{v \in S\}} N_G(v)$$

- Le voisinage fermé de $S$ est :

$$N_G[S] = N_G(S) \cup S$$

- On appelle degré d'un sommet $v$ dans $G$, noté $d_G(v)$, le nombre des arêtes de $G$ incidents à $v$.

- Le degré minimum d'un graphe $G$ , noté $\delta(G)$, est le minimum des degrés de ses sommets

$$\delta(G) = \min_{v \in V} d_G(v).$$

- Le degré maximum de $G$, noté $\Delta(G)$, est le maximum des degrés de ses sommets

$$\Delta(G) = \max_{v \in V} d_G(v).$$

**Exemple 1.2.1**

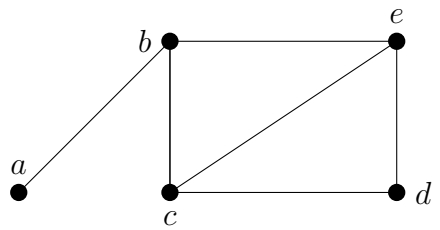



FIGURE 1.1 – Exemple d'un graphe $G$.

$d_G(b) = d_G(c) = d_G(e) = 3$, $d_G(d) = 2$, $d_G(a) = 1$
$\Delta(G) = 3$ et $\delta(G) = 1$
$N_G(e) = \{b, c, d\}$ et $N_G[e] = \{b, c, d, e\}$
soit $S = \{b, e\}$ : $N_G(S) = \{a, c, d\}$ et $N_G[e] = \{a, b, c, d, e\}$

**Propriété 1**

- *On appelle sommet isolé un sommet de degré* 0.
- *Un sommet de degré* 1 *est appelé sommet pendant (ou feuille).*
- *L'unique sommet qui est adjacent à un sommet pendant est appelé sommet support.*

### 1.2.3 Chaîne, Cycle

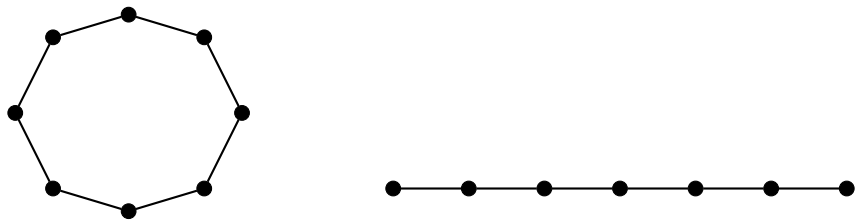
**Chaîne :**

Une Chaîne dans un graphe est une suite de sommets $x_1, x_2, ..., x_k$ tel que $i = 1, \overline{k-1}$, $x_i$ est adjacent à $x_{i+1}$ et la longueur d'une chaîne correspond au nombre d'arêtes dans la chaîne (voir figure 1.2).

**Cycle :**

Un cycle est une Chaîne dont l'extrémité initial se confond avec l'extrémité terminale (voir Figure 1.2).

**Exemple 1.2.2**



(1) (2)

FIGURE 1.2 – (1) $C_8$ et (2) $P_7$.

### 1.2.4 Distances, Excentricité, Rayon, Centre, Diamètre

Soit $u$ et $v$ deux sommets d'un graphe $G$

- La distance entre $u$ et $v$ notée $d_G(u;v)$ , est la longueur de la plus courte chaîne joignant $u$ et $v$.

- L'excentricité d'un sommet $v$ dans $G$ est :

$$exc(v) = max\{d_G(v;w) : w \in V\}$$

- Le rayon de $G$ noté $R(G)$ est la plus petit excentricité :

$$R(G) = min\{exc(v) : v \in V\}$$

- Le centre de $G$ est l'ensemble des Sommets de $G$ dont l'excentricité est égale au rayon.

- Le diamètre de $G$ noté $D(G)$, est la plus grande excentricité :

$$D(G) = max\{exc(v) : v \in V\}$$

## 1.3 Invariants de graphe

Invariant d'un graphe est une propriété préservée par isomorphisme . Le nombre de sommets et des arêtes sont deux invariants de base d'un graphe.
Nous définissons ci-de-sous quelques invariants de graphe intervenant dans la suite.

### 1.3.1 Stabilité, clique, ensemble dominant, couplage

- Un ensemble de sommets de $G$ est un stable (ou indépendant), si l'ensemble de ses sommets sont deux à deux non adjacents. Un stable

maximum est un stable de cardinalité maximale, noté $\alpha(G)$.

- Ensemble de sommets tels que pour chaques deux sommets $a$ et $b$ , $a$ est adjacent à $b$ , noté $\omega(G)$.
  La taille d'une clique est le nombre de ses sommets $n$.

- Un sous ensemble de sommets $D$ de $V$ est dit ensemble dominant si tout sommet de $V - D$ est adjacent à au moins à un sommet de $D$ , noté $\gamma(G)$.

- On appelle couplage de $G$ un sous-ensemble d'arêtes de $E$ deux à deux non adjacentes, noté $\alpha_0(G)$.
- Un couplage parfait ou couplage complet est un couplage $M$ du graphe tel que tout sommet du graphe est incident à exactement une arête de $M$.

**Exemple 1.3.1** *Dans la figure 1.1 on a*
*Stable=$\{b,d\}$ et* $\alpha(G) = 2$.
*Clique=$\{b,c,e\}$ et* $\omega(G) = 3$.
*Ensemble dominant :* $D = \{a, e\}$ *et* $\gamma(G) = 2$.
*Couplage=$\{bc,ed\}$ et* $\alpha_0(G) = 2$.

### 1.3.2 Coloration dans les graphes

**Définition 1.3.1** *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Une $k$-coloration de $G$ est une fonction $c$ de $V$ vers $\{1, 2, \ldots, k\}$, telle que pour tout couple de sommets adjacents $u$ et $v$ de $V$, $c(u) \neq c(v)$.*

**Définition 1.3.2** *Le nombre chromatique d'un graphe $G$,noté $\chi(G)$ est le plus petit nombre de couleurs nécessaires à une coloration propre des sommets de $G$.*

**Resultat 1** *1.* $1 \leq \chi(G) \leq n$ *;*

*2.* $\chi(G) = 1$ *si et seulement si* $G = \overline{k_n}$ *;*

*3.* $\chi(G) = n$ *si et seulement si* $G = k_n$ *;*

*4.* $\chi(p_4) = 2$.

**Exemple 1.3.2** $G = k_{4-e}$ *est trois-colorable , et* $\chi(G) = 3$.

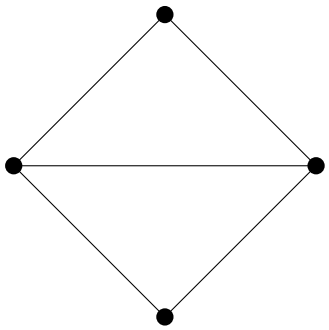


FIGURE 1.3 – Graphe à 3-coloration .

## 1.4 Type de graphes :

### 1.4.1 Graphe simple :

Un graphe est défini par un couple $G = (V, E)$.
Un graphe simple est un graphe sans boucles et sans arêtes multiples (voir la Figure 1.4).

**Exemple 1.4.1**

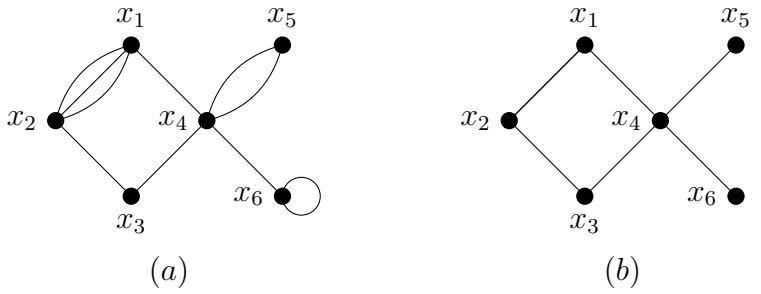



FIGURE 1.4 – $(a)$Exemple de graphe comportant des arêtes multiples et une boucle. $(b)$Exemple d'un graphe simple.

### 1.4.2 Graphe connexe

Un graphe $G = (V, E)$ est dit connexe si chaque deux sommets de $G$ sont reliée par au moins une chgaîne. Voir la figure 1.5
Le graphe $G$ est connexe puisque il contient une seule composante connexe.
Le graphe $H$ est non connexe, il contient deux composantes connexes.
**Exemple 1.4.2**

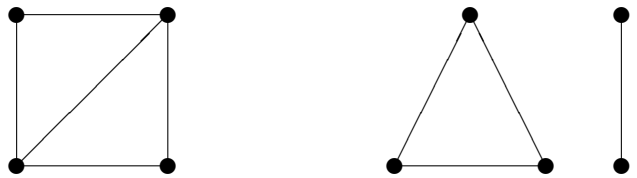



FIGURE 1.5 – $G$ est connexe.
$H$ est non connexe avec deux composantes connexe.

**Propriété 2** *Une composante connexe d'un graphe est un sous-graphe connexe de ce graphe.*

### 1.4.3 Arbre

Un arbre est un graphe connexe sans cycles. (voir la Figure 1.6)
**Exemple 1.4.3**

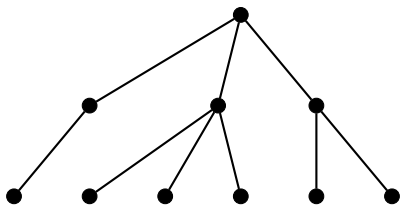


FIGURE 1.6 – Un arbre.

### 1.4.4 Complémentaire d'un graphe

Le graphe complémentaire d'un graphe $G$, noté $\overline{G}$, est un graphe ayant le même ensemble des sommets que $G$ et une arête est dans $\overline{G}$ si elle n'est pas dans $G$, c'est à dire que $E(\overline{G}) = \overline{E(G)}$ (voir la figure 1.7 ).

**Exemple 1.4.4**

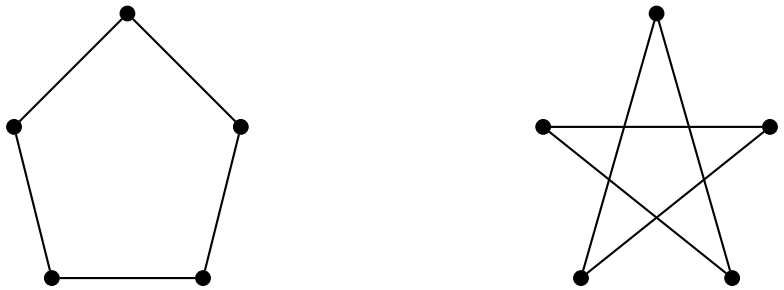



FIGURE 1.7 – Un graphe $G$ et son complémentaire $\overline{G}$.

### 1.4.5 Graphes isomorphes

Deux graphes $G$ et $H$ sont dits isomorphes , noté $G \simeq H$, s'il existe une application bijective $f$ de $V(G)$ dans $V(H)$ telle que pour toute arête $uv \in E(G)$, l'arête $f(u)f(v) \in E(H)$(voir la figure 1.12).

**Exemple 1.4.5**

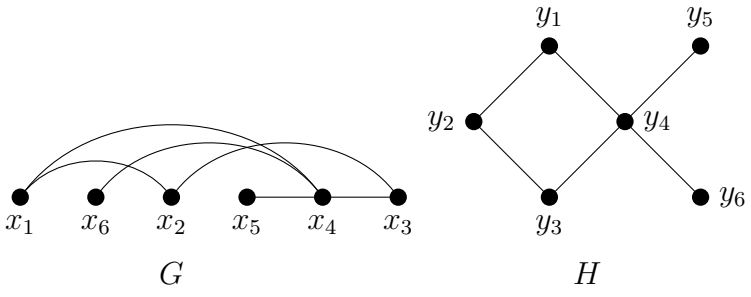



FIGURE 1.8 – Deux graphes isomorphes

### 1.4.6 Graphe partiel et sous-graphe d'un graphe

- Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. On appelle sous-graphe de $G$, un graphe $H = (U; F)$ tel que $U \subseteq V$ et $F \subseteq E$.
- Pour un sous-ensemble $A \subseteq V$, le sous-graphe induit par $A$, noté $G[A]$, est le graphe ayant $A$ pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de $E$ ayant deux extrémités dans $A$ (voir la figure 1.9).

## Exemple 1.4.6

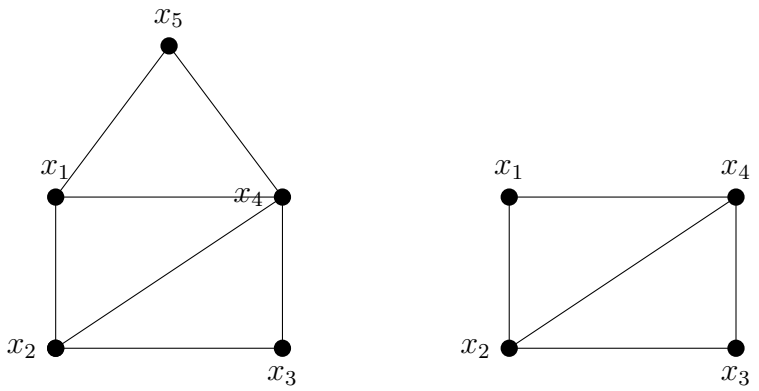



FIGURE 1.9 – Un graphe $G$ et le sous-graphe de $G$ induit par $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

- Etant donné un graphe $H$, on dit que $G$ est sans $H$ si $G$ ne contient pas un sous-graphe isomprphe à $H$.
- Un graphe partiel de $G$ est un graphe $H = (V; F)$ avec $F \subset E$. Voir la Figure 1.10

## Exemple 1.4.7

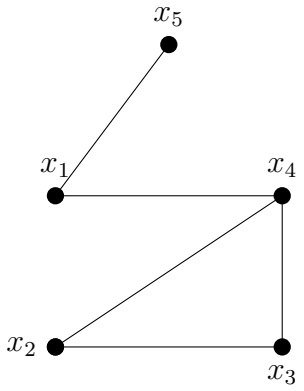
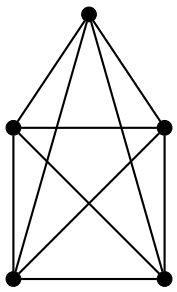



FIGURE 1.10 – Un graphe partiel de $G$

### 1.4.7 Graphe complet :

Un graphe complet est un graphe ou chaque sommet est adjacent à tous les autres sommets. Le graphe complet d'ordre $n$ est noté $K_n$. Dans ce graphe chaque sommet est de degré $n-1$ (voir Figure 1.8).

**Exemple 1.4.8**



(1)

FIGURE 1.11 – (1) Un graphe complet ($K_5$)

### 1.4.8 Graphe biparti et graphe biparti complet :

**Définition 1.4.1** *Un graphe biparti est un graphe $G = (V, E)$ d'ordre $n \geq 2$, dont l'ensemble des sommets est partitionné en deux stables $V_1$ et $V_2$.*

**Exemple 1.4.9**

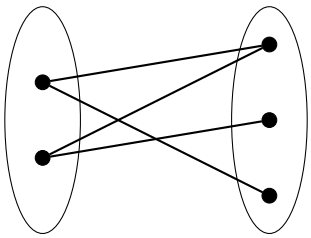


FIGURE 1.12 – Graphe biparti.

**Définition 1.4.2** *Un graphe biparti complet est un graphe biparti ou chaque sommet de $V_1$ est relié à tous les sommets de $V_2$, si $\mid V_1 \mid = p$ et $\mid V_2 \mid = q$ le graphe biparti complet est noté par $K_{p,q}$. (Voir la figure 1.13)*

**Exemple 1.4.10**

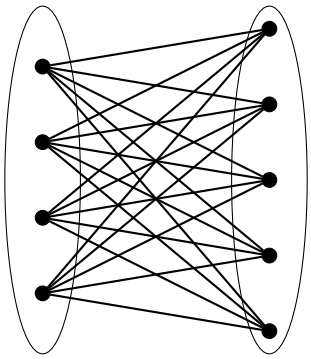


FIGURE 1.13 – Graphe biparti complet $K_{4,5}$.

### 1.4.9 Etoile

Une étoile est un cas particulier d'un graphe biparti complet dans lequel $|V_1| = 1$ et $|V_2| = q$. Elle est est notée par $K_{1,q}$. Le sommet de $V_1$ est appelé centre ou sommet central de l'étoile (voir Figure 1.14). **Exemple 1.4.11**

### 1.4.10 Griffe

**Définition 1.4.3** *La griffe est un graphe possédant 4 sommets et 3 arêtes. Une griffe est un autre nom pour le graphe biparti complet $k_{1,3}$*

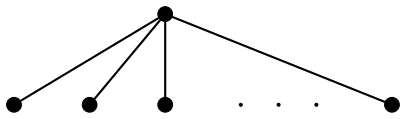


FIGURE 1.14 – Une étoile $K_{1,q}$.

*(c'est-à-dire une étoile avec trois arêtes, trois feuilles et un sommet central).*

**Exemple 1.4.12**

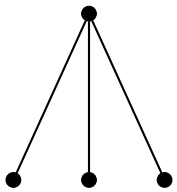


FIGURE 1.15 – Graphe griffe ou $k_{1,3}$

### 1.4.11 Graphes $k$-régulier

Un graphe $G = (V, E)$ est dit $k$-régulier si tous ses sommets sont de degré $k$, c'est-à-dire, $d_G(x) = k$ pour tout $x \in V$ (Voir Figure 1.16).

**Exemple 1.4.13**

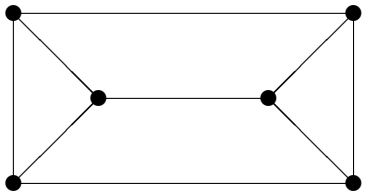


FIGURE 1.16 – Un graphe 3-régulier d'ordre 6.

### 1.4.12 Roue

le graphe roue , noté $W_n$, est un graphe d'ordre $n \geq 4$ formé en reliant un sommet, appelé cente à tous les sommets d'un cycle $C_{n-1}$.

**Remarque 1** *La notation $W_n$ provient du nom anglais wheel graph mais n'est pas universelle. Certains auteurs préfèrent $W_{n-1}$, faisant référence à la longueur du cycle.*

**Exemple 1.4.14**

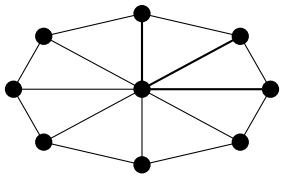


FIGURE 1.17 – Roue $w_9$.

## 1.5 Graphe hamiltonien

**Définition 1.5.1** *Une chaîne hamiltonienne est une Chaîne qui passe par tous les sommets une et une seule fois .*

**Exemple 1.5.1** *La chaîne $P_5 = \{x_1, x_2, x_5, x_3, x_4\}$ est une chaîne hamiltonienne , voir la figure 1.18*

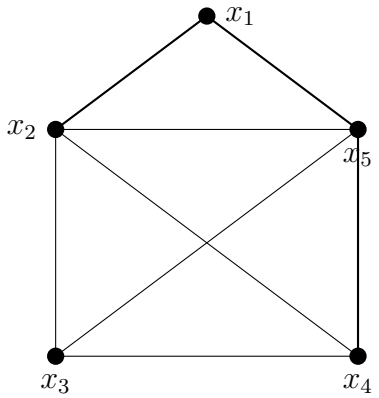



FIGURE 1.18 – une Chaîne hamiltonienne .

**Définition 1.5.2** *Un cycle hamiltonien est un cycle qui passe par tous les sommets une et une seule fois .*

**Exemple 1.5.2** *: Le cycle* $C_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1\}$ *est un cycle hamiltonien , voir la figure 1.19*

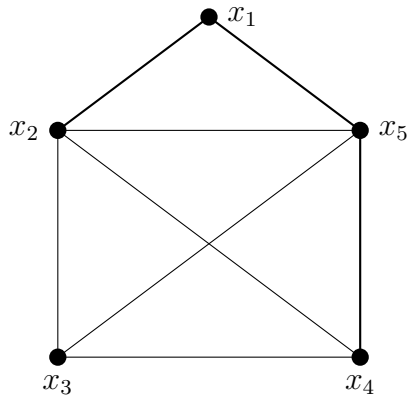



FIGURE 1.19 – un cycle hamiltonien .

**Définition 1.5.3** *Un graphe hamiltonien est un graphe qui contient au moins un cycle hamiltonien .*

**Exemple 1.5.3** *Dans la figure 1.20, le cycle* $C_6 = \{A, F, C, D, E, B, A\}$ *est un cycle hamiltonien .*

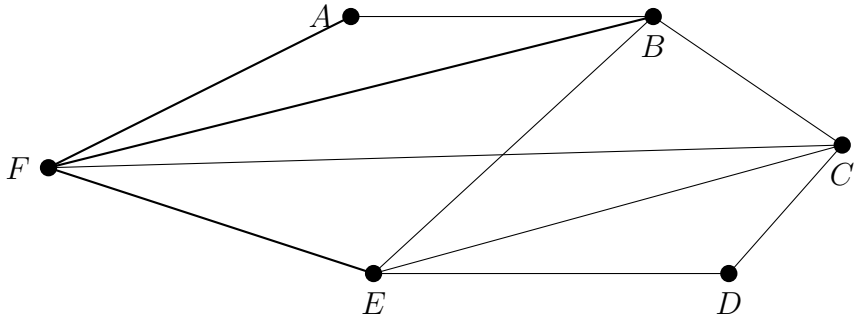



FIGURE 1.20 – Un graphe hamiltonien .

**Remarque 2** *Ce cycle hamiltonien n'est pas unique .*

**Remarque 3** *Un cycle* $C$ *d'un graphe* $G$ *est appelé un cycle hamiltonien de* $G$ *si* $C$ *contient tous les sommets de* $G$ *.*

**Définition 1.5.4** *Un graphe est dit hamiltonien-connexe si chaque deux sommets du graphe sont reliés par une Chaîne hamiltonienne .*

# Chapitre 2

# Graphes quasi-sans griffes

## 2.1 Introduction

Nous allons présenter dans ce chapitre quelques définitions et propiétés sur les graphes quasi-sans griffes.

## 2.2 Graphe sans griffes, Graphe quasi-sans griffes

**Définition 2.2.1** *Un graphe est sans griffes s'il ne contient pas le graphe biparti complet $k_{1,3}$ (connu sous le non de "graphe griffe") en tant que sous-graphe induit par les sommets.*

**Exemple 2.2.1**

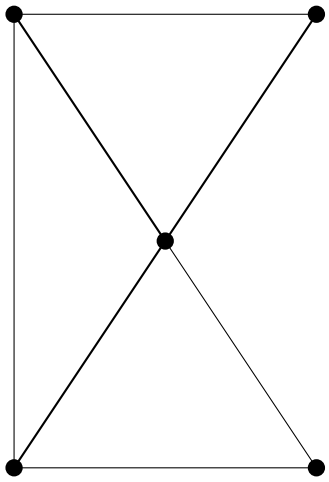


FIGURE 2.1 – Graphe sans griffes .

**Définition 2.2.2** *[4] Un graphe connexe $G$ est quasi-sans griffes si pour chaque deux sommets $x$ et $y$ avec $d(x,y) = 2$ il éxiste $u \in N(x) \cap N(y)$ tel que $N[u] \subseteq N[x] \cup N[y]$.*

**Propriété 3** *[3]*

*Soit $G = (V, E)$ un graphe, $G$ est quasi-sans griffes, si $\forall x, y \in V, d(x,y) = 2$ alors $J(x,y) \neq \varnothing$*
*avec $J(x,y) = \{u \in N(x) \cap N(y) | N[u] \subseteq N[x] \cup N[y]\}$.*

**Remarque 4** *On note par $CF$ et $QCF$ La classe des graphes sans griffes et quasi-sans griffes , respectivement.*

**Exemple 2.2.2**

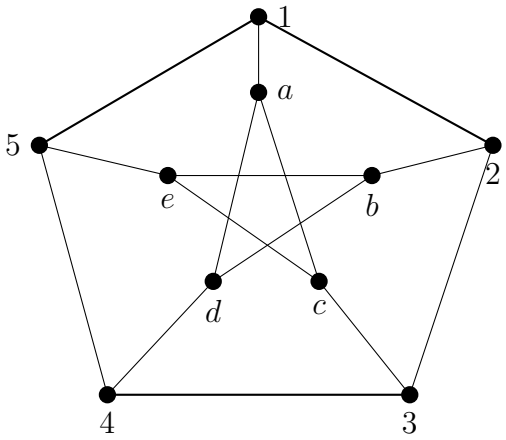



FIGURE 2.2 – Graphe non quasi-sans griffes.

**Remarque 5** *La figure 2.2 représente un graphe non quasi-sans griffes , on ajoutons quelques arêtes qui vérifent $J(x,y) \neq \varnothing$ pour obtenir le graphe de la figure 2.3.*

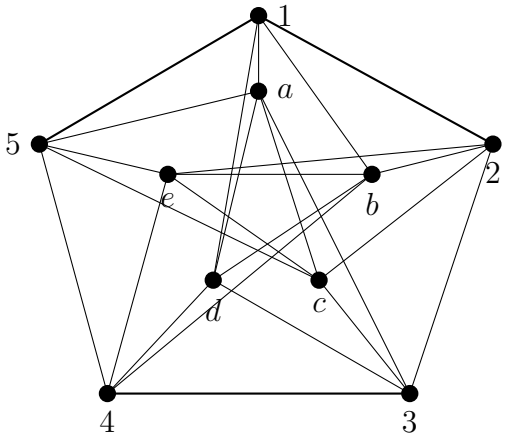



FIGURE 2.3 – Graphe qausi-sans griffe

**Application 1** *Comme ce graphe est un graphe quasi-sans griffes alors il vérife* $J(x,y) \neq \varnothing$ *pour chaque* $x$ *et* $y$ *de* $G$. *On prend le sommet* $\{1\}$,*son voisinage ouvert est :* $N(1) = \{5,d,a,b,2\}$ *et son voisinage fermé* $N[1] = \{1,5,d,a,b,2\}$ *alors les sommets qui sont à distance* 2 *avec lui :* $N_2\{1\} = \{e,4,d,c,3\}$
*avec :*
$N(e) = \{4,5,c,b,2\}$ *et* $N[e] = \{e,4,5,c,b,2\}$
$N(4) = \{5,e,d,3\}$ *et* $N[4] = \{4,5,e,d,3\}$
$N(c) = \{3,2,a,e\}$ *et* $N[c] = \{c,3,2,a,e\}$
$N(3) = \{2,a,c,d,4\}$ *et* $N[3] = \{3,2,a,c,d,4\}$
$N(d) = \{4,3,1,b,a\}$ *et* $N[d] = \{d,4,3,1,b,a\}$
*il éxiste plusieurs sommets* $u_i$ *appartient à l'intersection*
$\{\{5,b,2\} \in N(1) \cap N(e)\}$ ,$\{\{5,d\} \in N(1) \cap N(4)\}$,$\{\{a,b\} \in N(1) \cap N(d)\}$,$\{\{a,2\} \in N(1) \cap N(c)\}$,$\{\{a,d,2\} \in N(1) \cap N(3)\}$
*sachant que le voisinage fermé de* $u$ *est inclu dans l'union de le voisinage fermé de* $\{1\}$ *et le voisinage fermé de chaque sommet de* $N_2(1)$ *:* $N[5] \subseteq N[1] \cup N[e]$, $N[b] \subseteq N[1] \cup N[e]$, $N[d] \subseteq N[1] \cup N[4]$, $N[2] \subseteq N[1] \cup N[c]$, $N[a] \subseteq N[1] \cup N[3]$, $N[a] \subseteq N[1] \cup N[d]$.

**Propriété 4** *[4]*

1. *Évidement, tout graphe sans griffes est quasi-sans griffes. L'in-*

*verse n'est pas toujour vrai. Donc* $CF \subset QCF$.

2. *Reconnaître un graphe quasi-sans griffes est évidemment réalisable en temps polynomial*
3. *Un graphe quasi-sans griffes n'est pas nécessairement sans-*$K_{1,r}$ *avec* $r \geq 3$ *(voir la figure 2.3). Il existe des classes infinies de graphes dans* $QCF$ *avec de nombreux* $K_{1,r}$ *induits .*
4. *Un graphe est localement sans griffes si* $(N(x))$ *est sans-griffes pour chaque sommet* $x$ *de* $G$ *. Il existe une infinité de graphes quasi-sans griffes qui ne sont pas localement sans griffes .*

## 2.3 Connéxité dans les graphes quasi-sans griffes

Dans cette section, nous citons quelques théorèmes et lemmes relatifs à la connéxité des graphes quasi-sans griffes.

### 2.3.1 Graphe $k-$connexe

**Définition 2.3.1** *Un graphe* $G$ *connexe est dit* $k-$*sommets connexe (ou* $k-$*connexe) s'il a plus de* $k$ *sommets et reste connexe chaque fois que moins de* $k$ *sommets sont enlevés.*

**Cas particulier :** Un graphe connexe $G$ est dit $2-$connexe , si pour tout sommet $x \in V(G)$,$G - x$ est connexe .

**Exemple 2.3.3**

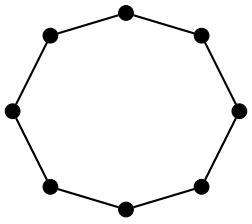


FIGURE 2.4 – Graphe $2-$connexe

Selon le lemme proposé par Ainouche les graphes connexes de la classe $QCF$ satisfont l'inégalité de $\omega(G-S)$ inferieur à le cardinal de $S$ et elle est stricte si $G$ est $2-$connexe.

**Lemme 2.3.1** *[1] Si $G$ est un graphe connexe quasi-sans griffe, alors $\omega(G-S) \leq |S|+1$ pour tout sous-ensemble $S$ de $V(G)$. De plus, l'inégalité est stricte si $G$ est $2-$connexe.*

Comme conséquence immédiat de lemme 2.3.1, nous avons le théorèmes suivants d'aprés Ainouche .

**Théorème 2.3.1** *[4] Tout graphe pair connexe quasi-sans griffes a un couplage parfait.*

## 2.4 Hamiltonicité dans les graphes sans griffes

La classe des graphes sans griffes $CF$ est une sous-classe $QCF$, selon Mingchu Li :

**Théorème 2.4.1 (Li)** *[9] Soit $G$ un graphe $2-$connexe sans griffes d'ordre $n$. Si $\delta(G) \geq \frac{n}{4}$ , alors $G$ est hamiltonien .*

**Théorème 2.4.2 (Mingchu Li)** *[9] Soit $G$ un graphe $3-$connexe sans griffes d'ordre $n$. Si $\delta(G) \geq \frac{n+5}{5}$, alors $G$ est hamiltonien.*

## 2.5 Hamiltonicité dans les graphes quasi-sans griffes

Ainouche a montré que les résultats connus sur les graphes sans griffes sont toujours valables pour les graphes quasi-sans griffes.

Les graphes $k$-connexe quasi-sans griffes sont hamiltoniens avec des conditions sur le nombre de sommet $k$ et le nombre d'indépendance et de domination $\alpha, \gamma$, cella est proposé par Ainouche

**Théorème 2.5.1** *[4] Un graphe k-connexe quasi-sans griffes,* $(k \geq 2)$ *est hamiltonien si* $\alpha(G) \leq k$.

**Corollaire 2.5.1** *Un graphe G k-connexe quasi-sans griffes à* $(k \leq 2)$ *est hamiltonien si* $\gamma(G) \leq k$.

### 2.5.1 Condition sur les degrés

Citons quelques conditions sur les degrés et la hamiltonicité des graphes $K$-connexe de la classe $QCF$. Mingchu Li a montré qu'un graphe quasi-sans griffes est un graphe hamiltonien si le degré minimum dépasse le quart de $n$ ou $\frac{n+5}{5}$ et si la somme des degrés de deux sommets superieure à $n+1$.

**Théorème 2.5.2** *[1] Soit G un graphe 2-connexe quasi-sans griffes d'ordre n. Si* $\delta(G) \geq \frac{n}{4}$, *alors G est hamiltonien .*

**Théorème 2.5.3** *[3] Soit G un graphe 3-connexe quasi-sans griffes d'ordre n. Si* $\delta(G) \geq \frac{n+5}{5}$,*alors G est hamiltonien.*

Le graphe quasi-sans griffes est un cycle ou pancyclique avec des conditions sur le voisinage ouvert de ses sommets.

**Définition 2.5.1** *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe, G est pancyclique si chaque sommet de V est sur des cycles de longueur* $(3, ..., n)$.

**Théorème 2.5.4** *[2] Soit G un graphe 2-connexe quasi-sans griffes d'ordre* $n \geq 3$. *G est un cycle ou est pancyclique si* $|N(a) \cap N(b)| \geq 3$, $d(a, b) = 2$ *et* $\{x \in N(a) \cap N(b) \mid d(x) = 2\}$

### 2.5.2 Conditions locales

Oberly et Sumner [1] ont prouvé qu'un graphe connexe, localement connexe et sans griffes sur au moins trois sommets est hamiltonien. Plus tard, Hendry a prouvé que ces conditions impliquent que $G$ est entièrement extensible par cycles. Ainouche a montré que le résultat de Hendry est également vrai pour les graphes quasi sans griffes.

**Théorème 2.5.5** *[1] Un graphe $G$ d'ordre $n \geq 3$, connexe, localement connexe quasi-sans griffes est pancyclique.*

# Chapitre 3

# Quelques paramètres dans la classe des graphes quasi-sans griffes

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à étudier des paramètres dans notre classe et des problèmes de complexitée associés. La première section résume certains résultats sur la classe des graphes quasi-sans griffes. Nous présentons dans la deuxième section la coloration et la coloration de paking des graphes quasi-sans griffes.

## 3.2 Arbres et graphes quasi-sans griffes

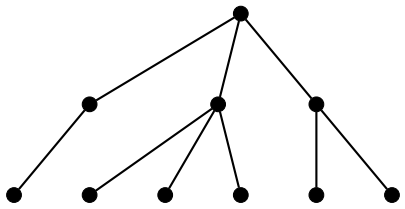


FIGURE 3.1 – Arbre $T = (V, E)$.

**Proposition 3.2.1** *Soit $T$ un arbre de degré maximum $\Delta$, si $T \in QCF$, alors $T$ est une Chaîne.*

**Preuve**

Supposons que $T$ n'est pas une Chaîne. donc $T$ possède un sommet $x$, de

degré $\Delta \geq 3$. soit $u, vetw$ des feuilles attacheés à $x$. d'après la Figure 3.1
$N[x] = \{x, u, v, w, y\}$, $N[u] = \{u, x\}$, $N[v] = \{v, x\}$ ,
comme $y \notin N[u] \cup N[v]$ alors $N[x] \nsubseteq N[u] \cup N[v]$.

**Resultat 2** *Les arbres qui ont de degré $\Delta \geq 3$ ne sont pas des graphes quasi-sans griffes.*

## 3.3 Chaînes et cycles, graphes quasi-sans griffes

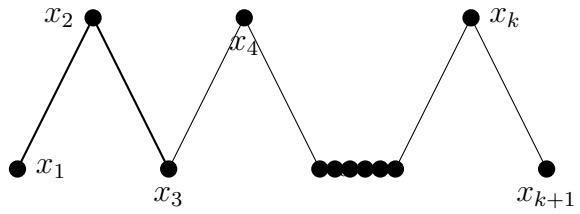



FIGURE 3.2 – Chaîne $p_n$.

**Proposition 3.3.1** *Les chaînes et les cycles sont des graphes quasi-sans griffes.*

### Preuve

— Soit $p_n = x_1, x_2, ..., x_n$ une chaîne de longeure $n - 1$. Pour tout $k \geq 1 : d(x_k, x_{k+2}) = 2$.
il est clair que $x_{k+1} \in N(x_k) \cap N(x_{k+2})$ comme

$$N[x_k] = \begin{cases} \{x_1, x_2\} & Si \quad k = 1 \\ \{x_k, x_{k-1}, x_{k+1}\} & si \quad k \neq 1 \end{cases}$$

$N[x_{k+1}] = \{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}\}$ et $N[x_{k+2}] = \{x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}\}$
alors

**Cas** 1 $k = 1 : N[x_2] \subseteq N[x_1] \cup N[x_3]$

**Cas** 1 $k \neq 1 : N[x_{k+1}] \subseteq N[x_k] \cup N[xk + 2]$.

Donc $p_n$ est un graphe quasi-sans griffes.

— De même on peut vérifier que les cycles sont des graphes quasi-sans griffes.

## 3.4 Graphe complet et graphes quasi-sans griffes

**Proposition 3.4.1** *Les graphes complets sont des graphes quasi-sans griffes.*

**Preuve**

Soit $G(V, E))$ un graphe complet, pour tout $x, y \in V$ deux sommet de $G$. $d(x, y) = 1$ c'est-à-dire la condition $d(x, y) = 2$ n'est pas verifié
alors $\exists u \in N(x) \cap N(y)$ tel que $N[u] \subseteq N[x] \cup N[y]$ est vrai
donc les graphes complets sont des quasi-sans griffes.

## 3.5 Roue et graphes quasi-sans griffes

**Proposition 3.5.1** *Soit $W_n = (V, E)$ la roue de sommet central $u$.*

1. *Si $n > 6$, alors $W_n$ n'est pas quasi-sans griffes ;*
2. *Si $n \leq 6$, alors $W_n$ est un graphe quasi-sans griffes.*

**Preuve**

1. Pour $n \geq 7$, considérons $x$ et $y$ tels que $N(x) \cap N(y) = \{u\}$. $d(x, y) = 2$ et $N[u]N[x] \cup N[y]$ de $N[u] = V$.
2. Pour $n \leq 6$ pour tout $x$ et $y$ de $V - \{u\}$, $d(x, y) \leq 3$

— Si $d(x,y)=2$, alors il éxiste $z \neq u$ tel que $N(x) \cap N(y) = \{u,z\}$ et $N[z] \subset N[x] \cup N[y]$ ;
— Si non $d(x,y)=3$, alors $N(x) \cap N(y) = \{u\}$ avec $N[u] = N[x] \cup N[y] = V$.

## 3.6 Couronne et graphes quasi-sans griffes

**Définition 3.6.1** *La couronne $G \odot K_1$ d'un graphe $G$ est le graphe obtenu à partir d'une copie de $G$ en attachant un sommet pendant à chaque sommet de $G$*

**Proposition 3.6.1** *Les couronnes $P_2 \odot K_1$, $C_3 \odot K_1$ sont des graphes quasi-sans griffes.*

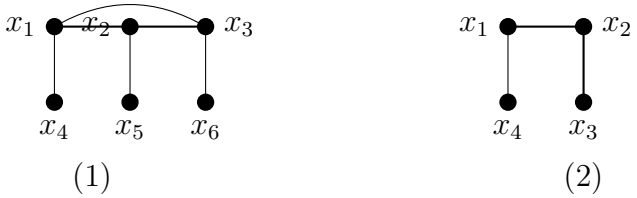



FIGURE 3.3 – 1) $C_3 \odot K_1$ et 2) $P_2 \odot K_1$.

## Preuve

1. Pour la couronne $P_n \odot K_1$ :
   (a) Soit la couronne $P_2 \odot K_1$, on attachons un sommet pendant à chaque sommet de $P_2$, on obtient une chaîne $P_4$, donc d'aprés le théorème 3.3.1 la couronne $P_2 \odot K_1$ est un graphe qausi-sans griffes.
   (b) Les couronnes $P_n \odot K_1$ $(n > 2)$ ne sont pas des quasi-sans griffes car pour chaque sommet $u_k$ : $u_k \in N(x) \cap N(y)$, $\forall d(x,y) = 2$, vérife que son voisinage fermé $N[u_k] \nsubseteq N[x] \cup N[y]$, il éxiste toujours un sommet adjacent à $u_k$ mais pas à $x$ et $y$.

2. Pour la couronne $C_n \odot K_1$ :

   (a) Soit la couronne $C_3 \odot K_1$, on a pour tout $1 \leq k \leq 6$ $x_k \in N(x_{k-1}) \cap N(x_{k+3})$ ou $x_k \in N(x_{k+1}) \cap N(x_{k+3})$ avec $N[x_k] \subseteq N[x_{k-1}] \cup N[x_{k+3}]$ et $N[x_k] \subseteq N[x_{k+1}] \cup N[x_{k+3}]$.

   (b) Les couronnes $C_n \odot K_1$ $(n > 3)$ n'appartiennent pas à la classe $QCF$, on peut les vérifiés comme les couronnes $P_2 \odot K_1$.

## 3.7 Coloration des graphes quasi-sans griffes

la coloration des graphes est largement utilisée. Malheureusement, il n'y a pas d'algorithme efficace disponible pour colorer un graphe avec un nombre minimum de couleurs car le problème est un problème $NP$-Complet connu. Il existe cependant des algorithmes approximatifs pour résoudre le problème. Commee l'algorithme de base *Greedy* pour attribuer des couleurs. Il ne garantit pas d'utiliser des couleurs minimales, mais il garantit une limite supérieure sur le nombre de couleurs. L'algorithme de base n'utilise jamais plus de $\Delta + 1$ couleurs où $\Delta$ est le degré maximum d'un sommet dans le graphe donné.

**Algorithme basique de coloration** "*gourmande*" [11] **:**

1. Colorons le premier sommet $v_1$ avec la première couleur $c_1$.

2. Faisons ce qui suit pour les sommets $V - \{v_1\}$ restants.
   Considérons le sommet actuellement sélectionné et colorez-le avec la couleur numérotée le plus bas qui n'a pas été utilisée sur les sommets précédemment colorés adjacents.
   Si toutes les couleurs précédemment utilisées apparaissent sur les sommets adjacents à $v$, attribuions-lui une nouvelle couleur.

**Application 2** *Pour la Figure* 2.3*, on donne le premier sommet* $\{5\}$ *la première couleur* $c_1$ *:* $c(5) = c_1$*.*

*Ensuite on colore le sommet $v_2 = 1$ par la deuxième couleur $c_2$, les sommets $\{2, d\}$ et les sommets $\{3, e\}$ sont colorés par $c_1, c_2$ réspéctivement.*
*Et comme les couleurs précidentes sont utilisées apparaissent sur les sommets adjacents à $v_7$ on prond une nouvelle couleur $c_3$. On termine tout les sommets et on trouve 4 couleurs.*

**Remarque 6** *Les graphes utilisés dans le reste de ce chapitre sont tous des graphes quasi-sans griffes*

### 3.7.1 Nombre chromatique dans la classe quassi-sans griffes

**Théorème 3.7.1 (Berge,1973, [6])** *Soit $G$ un graphe de degré maximum $\Delta(G)$ ona :*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

**Propriété 5** *Soit $G$ un graphe de degré maximum $\Delta(G)$ ona :*

$$max\{\omega(G), \frac{n}{\alpha(G)}\} \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

**Théorème 3.7.2 (Brooks 1941, [7])** *Soit $G$ un graphe connexe, $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ si et seulement si $G \simeq K_n$ ou $G \simeq C_n$ (impair).*

**Théorème 3.7.3** *[7] Soit $G$ un graphe, $\alpha(G) = \frac{n}{2}$ si et seulement si $G$ a un couplage parfait.*

**Théorème 3.7.4** *[4] Tout graphe pair connexe quasi-sans griffes a un couplage parfait.*

Comme les graphes pair connexe quasi-sans griffes ont un couplage parfait donc leur nombre d'indépendance $\alpha = \frac{n}{2}$

**Théorème 3.7.5** *[6] Pour tout graphe $G$ d'ordre $n$,*

$$\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$$

**Proposition 3.7.1** *Soit $G$ un graphe quasi-sans griffes :* $\chi(G) \leq \frac{n}{2} + 1$ *si et seulment si $G$ est pair connexe.*

**Preuve**

Comme les graphes pair connexe quasi-sans griffes ont un couplage parfait d'aprés le théorème "3.7.4" donc leur nombre d'indépendance $\alpha(G) = \frac{n}{2}$ et comme il éxiste une relation entre le nombre chromatique et le nombre d'indépondance d'aprés le théorème "3.7.5" . Donc $\chi(G) \leq \frac{n}{2} + 1$

**Observation :**

Dans ce qui suit, l'ensemble des sommets $V$ d'un graphe $G = (V, E)$ connexe peut-être partionné à partir d'un sommet quelconque $x_0$ en $\{V_0, V_1, ..., V_{ex(x_0)}\}$ avec $V_K = \{y \in V, d(x, y) = k\}$ pour tout $K, 0 \leq k \leq ex(x_0)$. Il est clair que $V_k \neq \emptyset$, $V_n \cap V_m = \emptyset$ pour tout $n \neq m$ et $\cup_{k=0}^{ex(x_0)} V_k = V$.

Cette dernière nous aide à définir une $k$-coloration pour un graphe quasi-sans griffes, car la $k$-coloration d'un graphe $G$ est une partion des sommets de $G$ en $k$ classes disjointes et non vides ainsi que deux sommets adjacents soient dans deux classes différentes .

**Proposition 3.7.2** *Soit $G$ un graphe quasi-sans griffes et $V = \{V_1, ..., V_{ex(x_0)}$ si les $V_i$ sont des stables alors $\chi(G) = 2$.*

**Preuve**

— Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe quasi-sans griffes, $V = \{V_0, V_1, ..., V_{ex(x_0)}$ la partition de $V$ en stable.Affectons la première couleur $c_1$ à $V_0 = \{x_0\}$ et comme $V_1 = \{y \in V_1, d(x_0, y) = 1\}$ il est un stable prend la $2^{ème}$ couleur, on peut affécter la couleur $c_1$ à $V_2$ car $V_2 = \{y \in V_2, d(x_0, y) = 2\}$ , ainsi de suite de cette manière les $V_i$ seront colorés par $c_1$ et $c_2$ alternativement. D'où $\chi(G) = 2$.

— Ce cas est pratiqué pour les chaînes, les cycles pairs, Car les ensembles sont des stables .

**Proposition 3.7.3** *si $G = (V, E)$ est $3-$régulier quasi-sans griffes, alors $\chi(G) = 3$.*

**Preuve**

Soit $G = (V, E)$ un graphe $3-$régulier pour être un graphe quasi-sans griffes il suffit que

**Cas** 1 Si $D(G) = 2$, alors $V = \{V_0, V_1, V_2\}$ avec
$V_1 = \{y \in V_1, d(x_0, y) = 1\}$ contient une arête et $V_2 = \{y \in V_2, d(x_0, y) = 2\}$ contient deux sommets adjacents si non $G$ ne serait pas 3-régulier. Affécton la couleur $c_1$ à $V_0$ et les couleurs possibles qu'on peut affécter aux sommets de $V_1$ sont $c_2$ et $c_3$. Donc les sommets de $V_2$ ne peut prendre que deux couleurs $c_1$ et $c_2$ ou $c_1$ et $c_3$. D'où $\chi(G) = 3$.

**Cas** 2 Si $D(G) = 3$, alors $V = \{V_0, V_1, V_2, V_3\}$ avec
**Sous-cas** 2.1 Si $V_1$ contient une arête et $|V_2| = 3$ et $V_2$ contient éxactement une arête avec $V_3$ un ensemble d'un seule sommet si non $G$ ne serait pas 3-régulier. Donc $V_0$ sera coloré par $c_1$, $V_1$ sera coloré par $c_2$ et $c_3$ et $V_2$ sera coloré soit par $c_1$ et $c_2$ ou bien $c_1$ et $c_3$. D'ou $V_3$ peut-être coloré par $c_3$ ou $c_2$. Alors $\chi(G) = 3$.
**Sous-cas** 2.2 les sommets de $V_1$ forme une chaîne $P_3$, $V_2$ contient éxactement deux sommets non adjacents et $V_3$ contient 2 sommets adjacents si non $G$ ne serait pas 3-régulier. $V_0$ est coloré par $c_1$, et Comme les sommets adjacents ne peuvent pas recevoir la même couleur, on a $\chi(V_1) = 2$, $V_2$ peut prendre la couleur $c_1$ et évidemment $V_3$ peut prendre les mêmes couleurs que $V_1$. D'où $\chi(G) = 3$.

**Proposition 3.7.4** *Si $G = (V, E)$ est $4-$régulier quasi-sans griffes, alors $3 \leq \chi(G) \leq 4$.*

**Preuve**

Soit $G = (V, E)$ un graphe $4-$régulier pour être un graphe quasi-sans griffes il suffit que

**Cas** 1 Si $D(G) = 2$, alors $V = \{V_0, V_1, V_2\}$ avec

**Sous-cas** 1.1 $V_1$ est un stable et $V_2$ est l'union dijoint de deux cycles $P_3$ si non $G$ ne serait pas 4-régulier. Donc $c(x_0) = c_1$ et $V_1$ prend la couleur $c_2$ et $V_2$ sera coloré par $c_1, c_3, c_4$. D'où $\chi(G) = 4$.

**Sous-cas** 1.2 Si les sommets de $V_1$ forme un cycle $C_4$, alors $V_2$ contient un seule sommet. Donnons à $V_0$ la première couleur $c_1$ et comme $G[V_1] = C_4$ ; $V_1$ prend $c_2$ et $c_3$ donc $V_2$ sera coloré par $c_1$. D'où $\chi(G) = 3$.

**Sous-cas** 1.3 Si $V_1$ et $V_2$ sont formés par une chaîne $P_4$ et un cycle $C_3$ réspictivement si non $G$ ne serait pas 4-régulier, alors $c(x_0) = c_1$ et $\forall x \in V_1; c(x) = c_2, c_3$ et $\forall x \in V_2; c(x) = c_1, c_4$. D'où $\chi(G) = 4$.

**Cas** 2 Si $D(G) = 3$, alors $\{V_0, V_1, V_2, V_3\}$ avec

**Sous-cas** 2.1 Si $G[V_1] = C_4$, alors $V_2$ contient deux sommets adjacents et $V_3$ contient un seule sommet si non $G$ ne serait pas 4-régulier quasi-sans griffes. Affféctons $c_1$ à $V_0$ et $V_1$ sera coloré par $c_2$ et $c_3$, $V_2$ sera coloré par $c_1$ et $c_4$ et forciment $V_3$ prend $c_2$. D'où $\chi(G) = 4$

**Sous-cas** 2.2 Si $G[V_1] = P_4$, alors $V_2$ a un couplage parfait et $V_3$ contient deux sommets adjacents si non $G$ ne serait pas 4-régulier quasi-sans griffes. colorons $V_0$ par $c_1$ et $V_1$ par $c_2$ et $c_3$. $V_2$ sera coloré par $c_1$ et $c_4$ et $V_3$ sera coloré par $c_1$ et $c_3$. D'où $\chi(G) = 4$.

**Cas** 3 Si $D(G) = 4$, alors $\{V_0, V_1, V_2, V_3, V_4\}$ avec

$V_1 = \{y \in V_1, d(x_0, y) = 1\}$ est un stable et chaque sommet de $V_1$ est adjacent à 3 sommets différents de $V_2 = \{y \in V_2, d(x_0, y) = 2\}$, $V_2$ a 12 sommets adjacents et les ensembles $V_3$, $V_4$ sont symétriques à $V_2$ et $V_1$. On a donné couleur $c_1$ à $V_0$ et la couleur $c_2$ à $V_1$ car ils sont adjacents, $V_2$ prend trois couleurs deux nouvelles et la troisième est la même couleur que l'ensemble $V_0$. Donc $\chi(G) = 4$

**Proposition 3.7.5** *Soit $G = (V, E)$ un graphe $5-$régulier quasi-sans griffes et de diamètre $D(G) = 2$. Si $V = \{V_0, V_1, V_2\}$ avec $G[V_1] = P_5$ et $G[V_2] = C_4$, alors $\chi(G) = 4$.*

**Preuve**
Soit $\{V_0, V_1, V_2\}$ avec $G[V_1] = P_5$ et $G[V_2] = C_4$. Si $c(x_0) = c_1$, alors $\forall x \in V_1; c(x) \in \{c_2, c_3\}$. Donc $\forall x \in V_2; c(x) \in \{c_1, c_4\}$. D'où $\chi(G) = 4$.

**Proposition 3.7.6** *Si $G = (V, E)$ est $k-$régulier et quasi-sans griffes, alors $1 \leq \chi(G) \leq k$.*

**Preuve 3.7.1** *Soit $G = (V, E)$ un graphe $k-$régulier quasi-sans griffes, d'après les proposition "3.7.3" "3.7.4" "3.7.5" le nombre chromatique de $G$ est entre $1$ et $k$. D'où $1 \leq \chi(G) \leq k$.*

**Proposition 3.7.7** *Soit $W_n$ $(n \leq 6)$ la roue de sommet central $u$. Alors*

$$\chi(W_n) = \begin{cases} 4 \ si \ n \in \{4, 6\} \\ 3 \ si \ n \in \{3, 5\} \end{cases}$$

**Preuve**
Soit $V = \{V_0, V_1\}$ avec $V_0 = u$ $G[V_1] = C_n$ $(n \leq 6)$. Si $c(u) = c_1$, alors $\forall x \in V_1; c(V_1) = \{c_2, c_3\}$ ou $c(V_1) = \{c_2, c_3, c_4\}$. D'où $\chi(W_n) = 3$ ou $\chi(W_n) = 4$.

## 3.8 Coloration de packing dans la classe de graphes quasi-sans griffes

Le terme coloration de packing a été introduit en 2007 par Brešar, Klavžar et Rall [5].

**Définition 3.8.1** *Soient $G$ un graphe et $k \in N^*$. L'application $c : V(G) \to \{1, ..., k\}$ est appelée $k-$coloration de packing de $G$ si $c(u) = c(v)$, alors $d_G(u, v) > c(u)$ pour toute paire de sommets $(u, v)$. Le plus petit entier $k$ tel que $G$ admet une $k-$coloration de packing est appelé nombre chromatique de packing et est noté par $\chi_\rho(G)$.*

Autrement dit : Une coloration de packing est une partition $P_c = \{V_1, V_2, ..., V_k\}$ de $V_(G)$ en $k_i-$packing, pour $i = 1, ...k$.

### 3.8.1 Nombre chromatique de packing

Notons que toute coloration de packing est une coloration propre, et donc le nombre chromatique de packing est supérieur ou égal au nombre chromatique, ce qui est affirmé par LAÏCHE [7] dans la proposition suivante.

**Proposition 3.8.1** *[8] Pour tout graphe $G$, on a $\chi(G) \leq \chi_\rho(G)$.*

**Proposition 3.8.2** *Pour tout $n \geq 2$*

$$\begin{cases} \chi_\rho(P_n) = 2 \ si \ 2 \leq n \leq 3 \\ \chi_\rho(P_n) = 3 \ si \ n \geq 4. \end{cases}$$

**Preuve**

Concernant les chaînes $P_n$, de longueur $n-1$, l'affectation des couleurs $\{c_1, c_2, c_3\}$ aux sommets $u_1, ..., u_n$ de $P_n$ représente une coloration de packing minimum.

**Proposition 3.8.3** *[12] Soit $n \geq 3$. Si $n$ vaut 3 ou $n$ est un multiple de 4, alors $\chi_\rho(C_n) = 3$ sinon $\chi_\rho(C_n) = 4$.*

**Proposition 3.8.4** *Soit $C_3 \odot K_1$ une couronne du cycle $C_3$. On a*

$$\chi_\rho(C_3 \odot K_1) = 4$$

**Preuve**

Les 4−colorations de packing de $C_3 \odot K_1$ . Nous prétendons que cette couronne n'admettent pas une 3-coloration de packing, car si de telles colorations existeraient alors forcément la couleur 1 doit être utilisée sur le cycle et ses deux voisins sur le cycle doivent prendre les couleurs 2 et 3, mais il ne sera pas possible de colorer le voisin pendant du sommet coloré avec 1.

**Proposition 3.8.5** *Soit $P_n \odot K_1$ une couronne de la chaîne $P_n$. On a*

$$\chi_\rho(P_n \odot K_1) = \begin{cases} 2 \ si \ n = 1 \\ 3 \ si \ n = 2 \end{cases}$$

**Preuve**

Comme $P_1 \odot K_1$ est la chaîne $P_2$, $\chi_\rho(P_1 \odot K_1) = \chi_\rho(P_2) = 2$. Puisque $P_2 \odot K_1 = P_4$, on a $\chi_\rho(P_2 \odot K_1) = 3$ par la Proposition 3.8.2.

# *Conclusion et perspective*

À travres ce mémoire, nous nous sommes intéressés principalement à l'étude de la coloration propre et la coloration de paking dans la classe des graphes quasi-sans griffes.

D'abord, nous avons vérifiés que les chaînes, les cycles, les graphes complets, les roues $w_n$ $(n \leq 6)$ et les couronnes $C_3 \odot K_1$ , $P_2 \odot K_1$ sont des graphes quasi-sans griffes, par contre les arbres ne sont pas des graphes quasi-sans griffes.

Puis, nous avons déterminé une borne supèrieure de nombre chromatique de tout graphe pair connexe quasi-sans griffes.

Ensuite, nous avons fait une étude de la $k-$coloration et la partition par distances des sommets que nous avons utilisé pour donné la valeur exacte de nombre chromatique de la partition en stable des graphe quasi-sans griffes comme les chaînes et les cycles pairs, Puis nous avons extrait le nombre chromatique des graphes $3-$régulier, $4-$régulier et $5-$régulier, aprés nous avons conclu une borne pour les graphes $k-$régulier.

Finalement, nous avons étendu la notion de la coloration de packing. Ensuite nous avons étudié la coloration de packing des couronne du cycle et couronne de la chaîne et nous avons trouvé des valeurs éxactes du nombre chromatique de packing pour les roue $W_n$ $(n \leq 6)$.

Comme autres perspectives à notre travail, nous proposons notamment :

- Trouver d'autres graphes dans la classe quas-sans griffes.
- Étudier d'autres paramètre de cette classe.
- Déterminer des valeurs éxactes et des bornes de $\chi(G)$ pour d'autres graphes dans cette classe.
- Étudier la complexité de la classe des graphes quasi-sans griffes.

# Bibliographie


[1] A. Ainouche, Hamiltonian and traceable claw-free graphs, Internal Report IM 23/89.

[2] A. Ainouche, An improvement of Fraisse's sufficient condition for harniltonian graphs, J. Graph Theory 16(6)(1992)529 − 543.

[3] A. Ainouche, H.J. Broersma, H.J. Veldman, Remarks on Hamiltonian properties of claw-free graphs, Ars Combin. V.29C (1990)110 − 121.

[4] A. Ainouche / Discrete Mathematics 179(1998)13 − 26

[5] B. Brešar, S. Klavžar and D.F. Rall, On the packing Chromatic number of Cartesian products, Hexagonal Lattice and Trees. Discrete Applied Mathematics, 155 : 2303-2311, 2007.

[6] C. Berge, Graphs and Hypergraphs, North-Holland Publishing Company,(1973).

[7] R. L. Brooks, « On colouring the nodes of a network », Proc. Cambridge Philosophical Society, Math. Phys. Sci., vol. 37, 1941, p. 194 − 197

[8] L. Euler. Solutio Problematis ad geometriam Situs Pertinentis, [Solution d'un problème lié à la géométrie de la position]. Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae, [Mémoires de l'académie impériale des sciences de Saint-Petersbourg], 8 : 128−140, 1736 (pulication en 1741). Voir aussi Opera Omnia, Series 1, 7 : 1−10.

[9] M.Li, Hamiltonian cycles in 3-connected claw-free graphs, J. Graph Theory 17 (1993) 303–313

[10] N. Robertson, D. P. Sanders, P. Seymour and R. Thomas. The four-color theorem. Journal of Combinatoriacal Theory, Series B, 70(1) : $2 - 44, 1997$.

[11] URL https ://fr.acervolima.com/coloration-graphique-ensemble-2-algorithme-gourmand.

[12] W. Goddard, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, J. M. Harris and D. F. Rall. Broadcast chromatic numbers of graphs. Ars Combinatoria $86 : 33 - 49, 2008$.