Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DU MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Recheche Opérationelle

par

BELKHIRI Safia & SOUSSI Aida

Contribution à l'étude de la coloration de Grundy partielle

Soutenu devant le jury composé de :

N. IKHLEF ESCHOUF , MCA, UYFM, Médéa ..... Président

A. BENDALI-BRAHAM, MCB, UYFM, Médéa..... Promotrice

R. LEMDANI ....., MAA, UYFM, Médéa ..... Examinateur

A. BOUCHOU ....., MCA, UYFM, Médéa ..... Examinateur

2019-2020

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié la coloration de Grundy partielle et le nombre de Grundy partiel dans quelques graphes particuliers.

Une coloration propre de sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est une fonction qui attribue une couleur à chaque sommet telle que deux sommets adjacents ne sont pas colorées par la même couleur. Le nombre minimum de couleurs dans une coloration propre des sommets du graphe G est appelé nombre chromatique, noté $\chi(G)$.

Une coloration de Grundy partielle est une coloration propre telle que chaque classe de couleur i contient au moins un sommet de Grundy. Un sommet de Grundy coloré par une couleur i doit être adjacent à au moins un sommet de couleur j, pour tout $j < i$. Le nombre de Grundy partiel de G, noté $\partial\Gamma(G)$ est le plus grand entier k tel que G admet une coloration de Grundy partielle avec k couleurs.

Notre travail consiste à déterminer le nombre de Grundy partiel de quelques graphes tels que le graphe milieu et le graphe total d'une chaîne, d'un cycle et d'une étoile. En outre, nous donnons quelques propriétés des graphes dits *arête* $\partial\Gamma$-*critiques*.

Abstract

In this report, we have studied the partial Grundy coloring and the partial Grundy number in some particular graphs.

A proper vertex coloring of a graph $G = (V, E)$ is a function that assigns at each vertex such that two adjacent vertices are not colored by the same color. The minimum number of a proper coloring of the vertices of graph G is called the chromatic number $\chi(G)$.

The partial Grundy coloring is a proper coloring of the vertices such that every color class contains at least one Grundy vertex. A Grundy vertex is a vertex colored by a color i, must be adjacent to at least one vertex of color j, for all $j < i$. The partial Grundy number of G, denoted $\partial\Gamma(G)$, is the largest integer k such that G admits a partial Grundy coloring with k colors.

Our work consists firstly in determine the exact value of the partial Grundy number of some graphs as the middle graph and the total grah of a path, a cycle and a star. Moreover, we give some properties of graphs called *edge* $\partial\Gamma$*-critical*.

ملخص

في هذه المذكرة, درسنا تلوين غراندي الجزئي ورقم غراندي الجزئي في بعض البيانات الخاصة.

التلوين الأجود لرؤوس بيان $G=(V,E)$ هو توزيع الألوان على الرؤوس بحيث كل رأسين متجاورين يكونان ملونين على وجه مختلف. الحد الأدنى لعدد الألوان لتلوين أجود لرؤوس بيان G يرمز له ب $\chi(G)$.

إن تلوين غراندي الجزئي لبيان G هو تلوين أجود بحيث كل فئة لون i تحتوي على رأس غراندي واحد على الأقل. نسمي رأس غراندي كل رأس ذو لون i مجاور لرأس واحد على الاقل من لون j (من أجل كل $j<i$).

رقم غراندي الجزئي لبيان G المسمى $d\Gamma(G)$, هو أكبر عدد من الألوان اللازمة k في تلوين غراندي الجزئي.

تتمثل دراستنا أولا في تقديم بعض النتائج الموجودة على عدد غراندي الجزئي, ثانيا تحديد عدد غراندي الجزئي لبيانات الوسط و الكلي لكل من السلاسل, الدورات والنجوم . أخيرا نعطي بعض الخصائص للبيانات المسماة حافة $d\Gamma$ -الحرجة.

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier **Allah** tout puissant d'avoir guidé nos pas vers les portes du savoir tout en illuminant notre chemins, et nous avoir donné suffisamment de courage et de persévérance pour mener notre travail à terme.

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à :

Notre promotrice **Amel BENDALI-BRAHAM**, pour ces conseils précieux, son aide, sa gentillesse, sa disponibilité à tous les instants ainsi que sa patience qui ont été d'un grand support moral afin de mener à terminer ce travail.

Au membre de jury pour avoir accepté de prendre part au jury de soutenance.

Aux enseignants du Département de Mathématique et plus particulièrement les enseignants de spécialité Recherche Opérationnel.

Un merci spécial à nos familles pour leurs soutien inconditionnel depuis toujours. À nos très chers parents qui ont toujours veillé à notre bien être et qui ont fait de nous ce qu'on est aujourd'hui.

Sans oublier nos frères et sœur "*Hadjer, Ismail, Aymen, Ayoub, Aissa*", qui nous apporté du soutien au moment où nous avions besoin d'aide.

Et enfin, merci à tous ceux et toutes celles qui ont, de prés ou de loin, contribué à la réalisation de ce modeste travail.

Table des matières

Introduction **11**

1 Généralités **12**

1.1 Définitions et notations basiques sur la théorie des graphes 12

1.1.1 Graphe 12

1.1.2 Voisinages 13

1.1.3 Degré d'un sommet 14

1.1.4 Minimalité et maximalité d'un ensemble 14

1.1.5 Chaînes et cycles 15

1.1.6 Distances, excentricité, diamètres, rayons et centres 16

1.1.7 Sous-graphes et graphes partiels 16

1.1.8 Graphes particuliers 17

1.1.9 Invariants d'un graphe 24

1.2 Quelques opérations sur les graphes 25

1.3 Complexité algorithmique 26

1.3.1 Problème de décision 27

1.3.2 Classes de complexité 27

1.4 Coloration des sommets d'un graphe 29

1.4.1 Coloration minimale et nombre chromatique 29

1.4.2 a-coloration et nombre a-chromatique 31

1.4.3 b-coloration et nombre b-chromatique 31

1.4.4 Coloration de Grundy et Grundy partielle 32

2 Quelques résultats existants sur la coloration de Grundy partielle 35

2.1 Théorème d'interpolation 35

2.2 Quelques bornes du nombre de Grundy partiel 35

3 Nouveaux résultats sur la coloration de Grundy partielle 39

3.1 Nombre de Grundy partiel de quelque graphes particuliers 39

3.1.1 Graphe milieu et graphe total 39

3.1.2 Nombre de Grundy partiel du graphe milieu et du graphe total d'une chaîne 40

3.1.3 Nombre de Grundy partiel du graphe milieu et du graphe total d'un cycle 44

3.1.4 Nombre de Grundy partiel du graphe milieu et du graphe total d'une étoile 47

3.2 Propositions sur le joint de deux graphes 49

3.3 Graphes arête $\partial\Gamma$-critiques 50

3.3.1 Graphes arête $\partial\Gamma$-critiques 51

Conclusion et perspectives 54

Table des figures

1.1 Un graphe G=(V,E). 13

1.2 Une chaîne P_5 et un cycle C_5. 15

1.3 Un graphe G. 16

1.4 Exemple d'un graphe G avec un graphe partiel et un sous graphe de G. . 17

1.5 Exemple d'un graphe connexe G et graphe non connexe G'. 17

1.6 Exemples des graphes complets. 18

1.7 Un graphe 3-réguliers (cubique). 18

1.8 Le graphe de Petersen 19

1.9 Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$. 19

1.10 Exemple d'un graphe biparti et un graphe biparti complet. 20

1.11 Un graphe scindé. 21

1.12 Un graphe G et son auto-complémentaire $\overline{G}$. 21

1.13 Exemple d'un arbre et une forêt. 22

1.14 Une étoile $K_{1,n}$. 22

1.15 Un graphe G et son adjoint $L(G)$. 23

1.16 Un graphe G et son graphe central $C(G)$. 23

1.17 Un graphe cordal. 24

1.18 Un graphe planaire. 24

1.19 Exemple d'une coloration minimale avec $\chi(G) = 3$. 30

1.20 Exemple d'une coloration a-chromatique optimale avec $\psi(G) = 4$. 31

1.21 Exemple d'une coloration b-chromatique optimale avec $b(G) = 4$(les b-sommets en noir). 32

1.22 Exemple d'une coloration de Grundy optimale avec $\Gamma(G) = 4$. 33

1.23 Exemple d'une coloration de Grundy partielle optimale avec $\partial\Gamma(G) = 4$. 33

3.1 Le graphe milieu d'une chaîne d'ordre 5 (P_5). 40

3.2 Le graphe total d'une chaîne d'ordre 5 (P_5). 40

3.3 Une coloration de Grundy partielle optimale de $M(P_2)$. 41

3.4 Une coloration de Grundy partielle optimale de $M(P_3)$. 42

3.5 Une coloration de Grundy partielle optimale de $M(P_4)$. 42

3.6 Une coloration de Grundy partielle optimale de $M(P_n)$, $n \geq 5$. 43

3.7 Une coloration de Grundy partielle optimale de $T(P_2)$. 43

3.8 Une coloration de Grundy partielle optimale de $T(P_3)$. 44

3.9 Une coloration de Grundy partielle optimale de $T(P_n)$,$n \geq 4$. 44

3.10 Une coloration de Grundy partielle optimale de $M(C_3)$. 45

3.11 Une coloration de Grundy partielle optimale de $M(C_n)$,$n \geq 4$. 46

3.12 Une coloration de Grundy partielle optimale de $T(C_3)$. 47

3.13 Une coloration de Grundy partielle optimale de $T(C_n)$, $n = 4$. 47

3.14 Une coloration de Grundy partielle optimale du graphe de $M(K_{1,n})$. . . . 48

3.15 Une coloration de Grundy partielle optimale du graphe de $T(K_{1,n})$. . . . 49

Introduction

La théorie des graphes est une branche des mathématiques. Elle représente un moyen très utile et efficace pour modéliser et résoudre beaucoup de problèmes pratiques dans plusieurs domaines. Par exemple, les problématiques de réseaux : électriques, informatiques, télécommunications et de transport.
L'histoire de la théorie des graphes débute avec les travaux du mathématicien suisse Leonhard Euler en 1736 [26], quand il a résolu le problème des ponts de *Königsberg* énoncé comme suit : « peut-on traverser les 7 ponts de la ville *Königsberg*, en passant chaque pont une et une seul fois et de revenir au pont de départ ? ». *Euler* a résolu ce problème en le modélisant à l'aide d'un graphe. Il a proposé de représenter les rives de cette ville par un ensemble de points appelé *(sommets)* reliés entre eux par des trais appelé *(arêtes)* lorsque deux rives ont un pont en commun. Trouver une solution à ce problème revient à chercher une chaîne qui passe par toutes les arêtes une et une seule fois.

Les problèmes de la coloration dans les graphes sont au cœur de la théorie des graphes. Elle est depuis plusieurs décennies, un domaine très actif de cette dernière, du fait de ses nombreuses applications. En 1852, un jeune anglais Francis Guthrie consiste à répondre à la question suivante : « est-il possible de colorer toute carte de géographie avec quatre couleurs en respectant la condition que deux pays voisins ne soient pas recouverts par la même couleur ? ». Ce n'est qu'en 1976, que deux chercheurs K. Appel et W. Haken [**?**, **?**] ont proposé une solution à cette question à l'aide de l'ordinateur. Plus tard, Robertson, Sanders, Seymour et Thomas [18] ont obtenu une preuve plus simple et plus courte, mais toujours à l'aide de l'ordinateur. Bien que ce problème ait été résolu, il attire toujours de nombreux chercheurs, qui tentent de le résoudre mathématiquement sans l'aide d'ordinateurs. En effet, un grand nombre de problème peuvent se traduire comme une partition

d'un ensemble d'objets selon certaines contraintes. Un graphe peut être coloré de différentes manières, elles sont définies par la coloration des éléments du graphe (sommets, arêtes,...) avec une ou plusieurs variantes. Pour plus d'information, nous pouvons citer l'ouvrage de Jensen et Tofel [17], « **Graph coloring problems** », qui rassemble la plupart des résultats sur plusieurs types de colorations de graphes ainsi que de nombreuses questions ouverte.

Supposons par exemple que nous avons k conteneurs de produits chimiques à repartir dans des entrepôts. Certains produits chimiques ne peuvent être stockés dans le même bâtiment en raison du risque d'explosion en cas de mélange. Nous voulons ainsi connaître le nombre minimum d'entrepôt dont nous avons besoin pour stocker ces conteneurs de façon à minimiser le coût de stockage. Les graphes constituent alors un outil qui permet de modéliser ce genre de problèmes en se ramenant à l'étude de coloration. Nous construisons tout d'abord un graphe non orienté où chaque sommet représente un conteneur de produits chimiques, et nous relions deux sommets si les deux conteneurs correspondants contiennent des produits chimiques qui ne peuvent être stockés dans un même entrepôt. Nous colorions alors les sommets de ce graphe de telle que deux sommets reliés par une arête ont des couleurs différentes. Ainsi, chaque couleur correspond à un entrepôt. Il s'agit dans ce cas de coloration propre d'un sommet du graphe. Par conséquent, les conteneurs dont les sommets sont de la même couleur seront stockés dans la même entrepôt. Enfin, en déterminant le nombre minimum de couleurs dont nous avons besoin pour colorier ce graphe, nous connaîtrons le nombre minimum d'entrepôt dont nous avons besoin pour stocker les k conteneurs.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la coloration du Grundy partielle. Voici un résumé des différents chapitres qui composent ce travail.

Chapitre 01 : Notions de base

Dans ce chapitre, nous rappelons toutes les définitions de la théorie des graphes nécessaires à une bonne compréhension de la suite de ce mémoire. Nous donnons également un bref aperçu de la théorie de la complexité des algorithmes.

Chapitre 02 : Ce chapitre traite le problème de la coloration de Grundy partielle où

nous donnons quelques résultats existants sur le nombre de Grundy partielle d'un graphe.
Chapitre 03 : Dans ce chapitre, nous déterminons la valeur exacte du nombre de Grundy partielle de quelques graphes tels que le graphe milieu et le graphe total d'une chaîne , d'un cycle et d'une étoile, ainsi le joint de deux graphes. Ensuite, nous donnons quelques propriétés des graphes dits *arête* $\partial\Gamma$-*critiques*. Nous terminons ce mémoire en donnant une conclusion générale sur le travail accompli.

Chapitre 1

Généralités

Dans la première partie de ce chapitre, nous faisons un rappel de quelques définitions de base de la théorie des graphes utilisées tout au long de ce document. Ainsi, nous présentons quelques opérations sur les graphes qui nous seront utiles dans la suite. Ensuite, nous donnons quelques types de coloration des graphes et leurs paramètres associés, comme la coloration classique, a-coloration, b-coloration, coloration de Grundy et coloration de Grundy partielle, qui fait le but de ce mémoire. Enfin nous faisons une brève présentation sur l'efficacité des algorithmes et de la complexité des problèmes.

Pour plus de détails sur la terminologie utilisée dans ce mémoire, nous invitons le lecteur à se référer aux ouvrages [16, 9].

1.1 Définitions et notations basiques sur la théorie des graphes

1.1.1 Graphe

- Un graphe G est un couple (V, E) composé d'un ensemble fini et non vide de points V dits **sommets**, et d'un ensemble E de lignes reliant certains de ces sommets.
- Le cardinal de V, appelé **ordre** de G, est noté n. Le cardinal de E appelé **taille** de G, noté m. Les sommets sont notés de manière usuelle par des lettres minuscules :

$u, v, x, y, a, b...$ etc. Les arêtes sont notées $uv, xy, ab...$ etc.

- Si u et v sont deux sommets reliés par une arêtes e, alors u et v sont dits **adjacents** ou **voisins**, et e est dite **incidente** à u et v, de plus u et v sont appelés **les extrémités** de e, on écrit donc $e = uv$ ou $e = vu$.
- Une arête reliant le même sommet est dite **boucle**. Un ensemble d'arêtes est dits **multiples** s'ils ont les mêmes extrémités.
- Un graphe **simple** est un graphe sans boucles et sans arêtes multiples.

Exemple 1.1.1 *Le graphe $G = (V, E)$ donné sur la Figure (1.1) est un graphe simple, ayant d'ensemble de sommets $V(G) = \{u, v, x, y, a\}$ et d'ensemble d'arêtes $E(G) = \{uv, vx, xy, ya, au, va\}$. Le graphe $G = (V, E)$ est d'ordre $|V| = 5$ et de taille $|E| = 6$.*

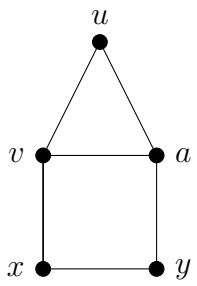


FIGURE 1.1 – Un graphe G=(V,E).

Notons que tous les graphes considérés dans ce mémoire sont non-orientés, finis, simples et sans sommets isolés.

1.1.2 Voisinages

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

- **Le voisinage ouvert** d'un sommet $v \in V$, noté $N_G(v)$, est l'ensemble de tous les sommets adjacents à v. Et défini par l'ensemble suivant $N_G(v) = \{u \in V : uv \in E\}$.
- **Le voisinage fermé** d'un sommet $v \in V$, noté $N_G[v]$, est défini comme suit

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

.

- **Le voisinage privé** d'un sommet v par rapport à un ensemble S est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont pas d'autres voisins dans S. Cet ensemble est noté $pn[v, S]$ et défini par $pn[v, S] = \{u : N_G[v] \cap S = \{v\}\}$.

1.1.3 Degré d'un sommet

soit $G = (V, E)$ un graphe.

- Le **degré** d'un sommet v d'un graphe G, noté $degG(v)$ ou $d_G(v)$ est le nombre de voisins de ce sommet.
- Un sommet de degré 0 est dit **isolé**.
- Un sommet de degré 1 est dit sommet **pendant** ou **feuille**. L'ensemble des sommets pendants de G est noté par $L(G)$.
- Un sommet adjacent à au moins à un sommet pendant est appelé sommet **support**. L'ensemble des sommets supports de G est noté $S(G)$.
- Un sommet v est dit **universel** lorsque $d_G(v) = n - 1$.
- **Le degré maximum** d'un graphe G, est le maximum des degrés de ses sommets, noté $\Delta(G)$.
- **Le degré minimum** d'un graphe G, est le minimum des degrés de ses sommets, noté $\delta(G)$.

Exemple 1.1.2 *Dans le graphe G de la Figure (1.1) on a :*

- *Les degrés des sommets u, v, x, y et a sont : $d_G(x) = 2$, $d_G(y) = 3$, $d_G(u) = 2$, $d_G(v) = 2$ et $d_G(a) = 3$.*
- *Le degré maximum de G est $\Delta(G) = 3$.*
- *Le degré minimum de G est $\delta(G) = 2$.*

1.1.4 Minimalité et maximalité d'un ensemble

Soit $G = (V, E)$ un graphe et P une propriété

- Un sous-ensemble A de V est dit **minimal** (resp. **maximal**) par rapport à une propriété P s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq A$ (resp. $A \subseteq B$) tel que $G[B]$ vérifie P.
- Un sous-ensemble A de V est dit **minimum** ou de **taille minimale** (resp. **maximum** ou de **taille maximale**) par rapport à une propriété P s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq V$ tel que $G[B]$ vérifie P et $\mid A \mid \geqslant \mid B \mid$ (*resp.* $\mid A \mid \leqslant \mid B \mid$).

1.1.5 Chaînes et cycles

soit $G = (V, E)$ un graphe.

- Une **chaîne** P de G est une séquence finie de sommets $v_1, v_2, ..., v_k$, où pour tout $i \in 1, ..., k-1$, $v_i v_{i+1}$ est une arête de G. Les sommets v_1 et v_k sont les extrémités de la chaîne P, et les sommets $v_2, v_3, ..., v_{k-1}$ sont les sommets **intérieurs** de P.
- Une Chaîne passant une et une seule fois par chacune de ses arêtes est dite **simple**.
- Une Chaîne passant une et une seule fois par chacun de ses sommets est dite **élémentaire**.
- Une chaîne **minimale** induite par n sommets est notée par P_n.
- Une arête reliant deux sommets non successifs dans une Chaîne est dite **une corde**.
- **Un cycle** est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues.

Exemple 1.1.3 *la Figure (1.2) représente une chaîne P_5 et un cycle C_5.*

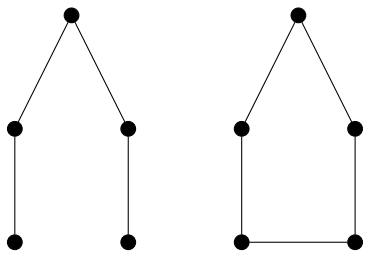


FIGURE 1.2 – Une chaîne P_5 et un cycle C_5.

1.1.6 Distances, excentricité, diamètres, rayons et centres

Soit $G = (V, E)$ un graphe et u, v deux sommets de V.

- **La distance** entre u et v, notée $d(u, v)$ est la longueur de la plus courte chaîne joignant u et v.
- **L'excentricité** de v, noté $exc(v)$, est définie par $exc(v) = max\{d(v, w) : w \in V\}$.
- **Le diamètre** de G est $diam(G) = max\{exc(v) : v \in V\}$.
- **Le rayon** de G est $rad(G) = min\{exc(v) : v \in V\}$.
- Un sommet de G ayant une excentricité minimale est appelé **centre**.

Exemple 1.1.4 *Pour le graphe G de la Figure (1.3),* $d_G(b, e) = 3$, $exc(c) = 2$, $diam(G) = 3$, $r(G) = 2$ *et* a, c, d *sont des centres.*

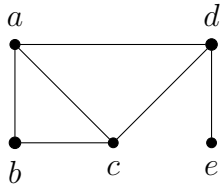


FIGURE 1.3 – Un graphe G.

1.1.7 Sous-graphes et graphes partiels

— Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un graphe partiel de G est un graphe $H = (V, B)$ tel que B est un sous-ensemble de E ($B \subseteq E$). Pour un sous-ensemble $S \subseteq V$, le sous-graphe induit par S noté par $G[S]$ est le graphe $G' = (S, E(S))$ ayant S pour ensemble de sommets et dont l'ensemble des arêtes $E(S)$ est formé de toutes les arêtes de G ayant leurs deux extrémités dans S.

Exemple 1.1.5 *la Figure (1.4) représente un graphe partiel et un sous-graphe d'un graphe G.*

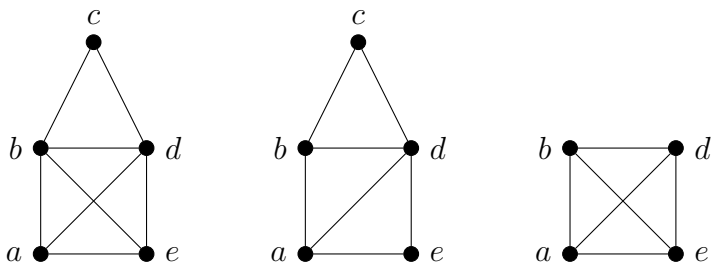


FIGURE 1.4 – Exemple d'un graphe G avec un graphe partiel et un sous graphe de G.

1.1.8 Graphes particuliers

Graphe connexe

Un graphe $G = (V, E)$ est dit **connexe** si pour toute paire de sommets u, v de V, il existe une chaîne reliant u à v. Si le graphe G est non connexe, une composante connexe est un sous-graphe maximal connexe.

- Un sommet $v \in V$ est un **sommet d'articulation** si sa suppression de V augmente le nombre de composantes connexes de G.
- Une arête $e \in E$ est un **isthme** si sa suppression de E augmente le nombre de composantes connexes de G.

Exemple 1.1.6 *Dans la Figure (1.5) Le graphe connexe G admet l'arête cd comme isthme,car $G - cd$ est non connexe, et les sommets c, d sont des sommets d'articulations car $G - c$ ou $G - d$ est non connexe.*

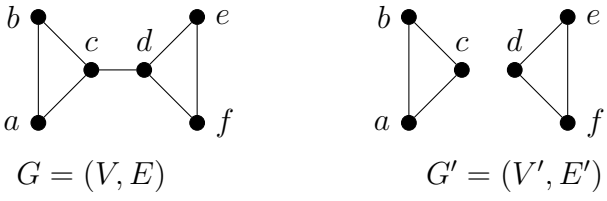
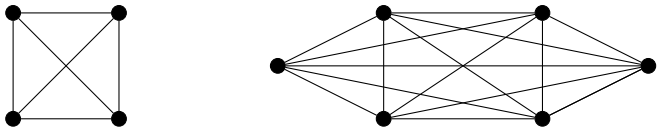


FIGURE 1.5 – Exemple d'un graphe connexe G et graphe non connexe G'.

Graphe complet

Un graphe simple est dit **complet** si tous les sommets sont adjacents, c'est-à-dire s'il existe toujours une (et une seule) arête entre deux sommets disjoints. Il existe un seul graphe complet à n sommets. On le note en général K_n.
Un sous-ensemble de sommets dans un graphe G tel que deux sommets quelconques sont reliés par une arête est appelé **une clique**. L'ordre maximal d'une clique dans un graphe G est appelé **le nombre de clique** de G, et noté par $\omega(G)$.



K_4 K_6

FIGURE 1.6 – Exemples des graphes complets.

Graphe régulier

Un graphe **régulier** est un graphe dont tous les sommets ont le même degré. Si le degré est d, alors on dit que le graphe est *d-régulier*. Un graphe 3-régulier est aussi appelé *cubique*.

Notons que les cycles sont des graphes 2-réguliers, les couplages sont des graphes 1-réguliers, les stables sont des graphes 0-réguliers et les cliques sont des graphes $(n-1)$-réguliers.

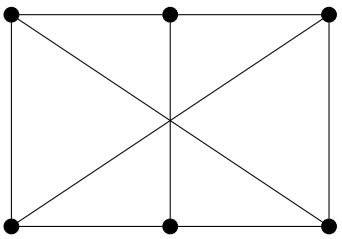


FIGURE 1.7 – Un graphe 3-réguliers (cubique).

Le graphe de **Petersen** est un graphe 3-régulier de 10 sommets et 15 arêtes.

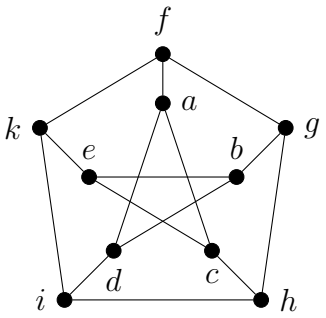


FIGURE 1.8 – Le graphe de Petersen

Graphe complémentaire

Le graphe complémentaire d'un graphe simple $G = (V, E)$, noté $\overline{G} = (V, \overline{E})$, est le graphe défini par $V(\overline{G}) = V(G)$ et $\overline{E} = E(\overline{G}) = \{uv : u \in V(G), v \in V(G)$ et $uv \notin E(G)\}$.



$G = (V, E)$ $\qquad$ $\overline{G} = (V, \overline{E})$

FIGURE 1.9 – Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$.

Graphe biparti

Un graphe $G = (V, E)$ est dit **biparti** si l'ensemble de ses sommets V peut être partitionné en deux sous-ensembles disjoints V_1 et V_2 de sorte que deux sommets de V_i ne soient jamais adjacents pour tout $i \in \{1, 2\}$.

Remarque 1.1.1 *Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycles de longueur impaire.*

Remarque 1.1.2 *Si tous les sommets de V_1 sont adjacents à tous les sommets de V_2, alors G est dit **biparti complet**, noté $K_{m,n}$ avec $m =\mid V_1\mid$ et $n =\mid V_2\mid$.*

Remarque 1.1.3 *S'il existe une partition de V en k sous ensembles $V_1, V_2..., V_k$, alors G est dit **k-parti**, telle que chacun des V_i soit un stable.*

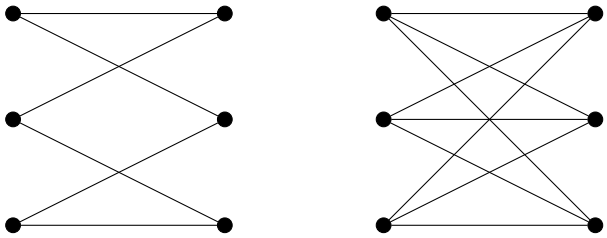


FIGURE 1.10 – Exemple d'un graphe biparti et un graphe biparti complet.

Graphe scindé

Un graphe $G = (V, E)$ est dit **scindé**, si l'ensemble des sommets V admet une partition en deux sous-ensembles S et T, où S est un stable et T est une clique.

Exemple 1.1.7 *le graphe G de la Figure 1.11 est un graphe scindé, tel que les sommets a, b, c, d et e forment un graphe complet K_5 et les sommets f, g, h et i forment un ensemble indépendant (stable).*

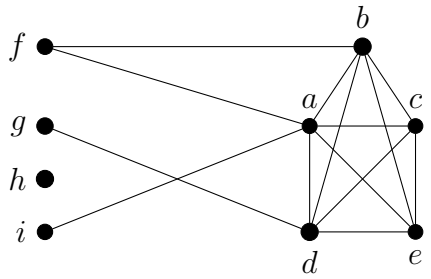


FIGURE 1.11 – Un graphe scindé.

Graphe auto-complémentaire

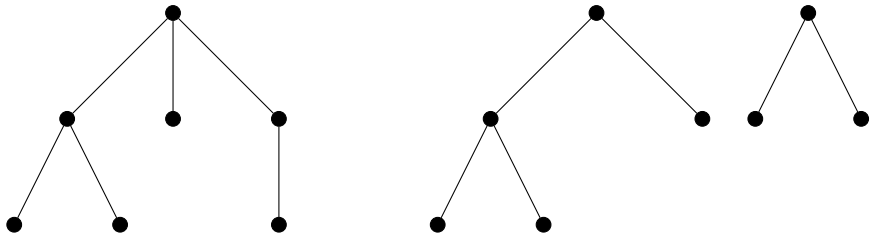
Un graphe **auto-complémentaire** est un graphe isomorphe à son complémentaire. Les graphes auto-complémentaires non triviaux, les plus simples sont le P_4 et le C_5.



FIGURE 1.12 – Un graphe G et son auto-complémentaire $\overline{G}$.

Arbre et forêt

- On appelle **arbre** à n sommets, et on note par T un graphe connexe et sans cycles. Un arbre comporte exactement $(n-1)$ arêtes. Un arbre est dit trivial (resp. non trivial) s'il contient un seul sommet (resp. au moins deux sommets). On appelle **feuille** d'un arbre, un sommet de degré 1 (sommet pendant).
- Un graphe sans cycle qui n'est pas connexe est appelé **forêt** (toutes les composantes connexes sont des arbres).



Un arbre Une forêt

FIGURE 1.13 – Exemple d'un arbre et une forêt.

Étoile, galaxie et griffe

- Un cas particulier d'un graphe biparti complet dans lequel $|V_1| = 1$ et $|V_2| = n$ est appelé **une étoile**, et noté $K_{1,n}$. Le sommet de V_1 est appelé centre ou sommet central de l'étoile.

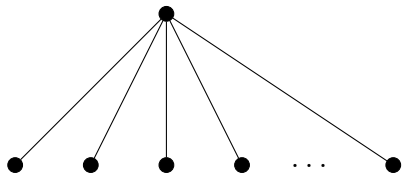


FIGURE 1.14 – Une étoile $K_{1,n}$.

Une double étoile $S_{n,r}$ est le graphe formé par les deux étoiles $K_{1,n}$ et $K_{1,r}$ avec une arête reliant les deux centres.

- **Une galaxie** est un graphe dont toutes les composantes connexes sont des étoiles.
- **Une griffe** d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble de sommets de G qui engendre une étoile $K_{1,3}$. Un graphe est dit sans griffe s'il ne contient pas $K_{1,3}$ comme sous-graphe induit.

Couronne d'un graphe et graphe adjoint

- On appelle **couronne d'un graphe** G, notée $Cr(G)$ ou $G \circ K_1$ le graphe obtenu en attachant à chaque sommets de G un sommet pendant, et donc il est évident que l'ordre de $Cr(G)$ est égal à $2|V(G)|$.

- Soit $G = (V, E)$ un graphe. **Le graphe adjoint** de G (ou graphe de ligne) est le graphe obtenu en associant un sommet à chaque arête de G et en reliant deux sommets par une arête si les arêtes de G correspondant à ces deux sommets sont adjacentes.

Exemple 1.1.8 *La figure (1.15) représente un graphe G et son adjoint $L(G)$.*

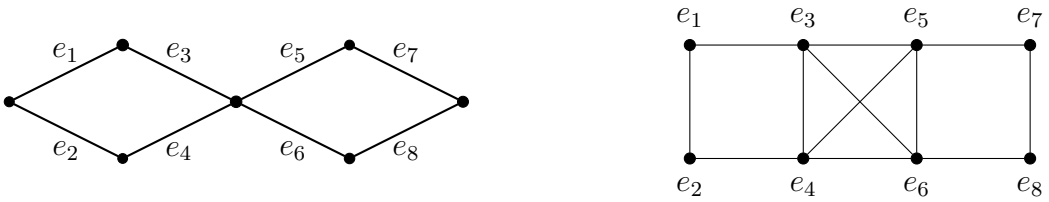


FIGURE 1.15 – Un graphe G et son adjoint $L(G)$.

Graphe central et la maille

- **Le graphe central** d'un graphe G, noté $C(G)$ (ou (G^c)) est obtenu en subdivisant chaque arête de G exactement une fois et en joignant tous les sommets non adjacent de G.

Exemple 1.1.9 *La Figure 1.16 représente un graphe G et son graphe central $C(G)$.*

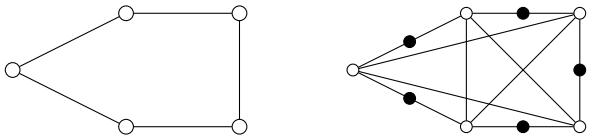


FIGURE 1.16 – Un graphe G et son graphe central $C(G)$.

- **La maille** d'un graphe G, notée $g(G)$, est la longueur d'un plus petit cycle contenu dans G.
- La *maille* de graphe de *Petersen* est 5.(voir la Figure 1.8).

Graphe cordal

un graphe **cordal** est un graphe dans lequel chacun de ses cycles d'ordre quatre ou plus possède une corde, c'est-à-dire une arête relie deux sommets non adjacents du cycle.

De manière équivalente, chaque cycle induit dans le graphe doit avoir exactement trois sommets.

Exemple 1.1.10 *Dans le graphe de la Figure (1.17), on a un cycle d'ordre 5 (a b c d e a) avec deux cordes (ad) et (ac).*

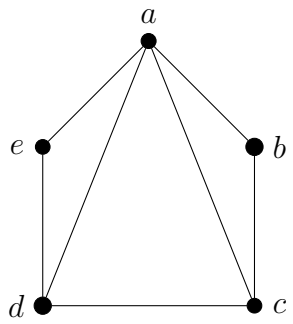


FIGURE 1.17 – Un graphe cordal.

Graphe planaire

Un graphe $G = (V, E)$ est dit **planaire** s'il peut être dessiné dans le plan de sorte que ses arêtes ne se croisent pas.

Exemple 1.1.11 *Dans le graphe de la Figure (1.23), il n'existe pas d'intersection entre deux arêtes donc il est planaire.*

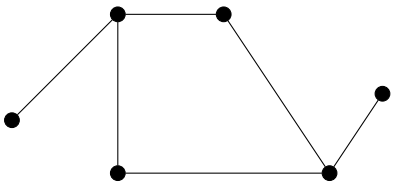


FIGURE 1.18 – Un graphe planaire.

1.1.9 Invariants d'un graphe

Soit $G = (V, E)$ un graphe.
Les graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont dit **isomorphes** et on écrit $G \cong G'$ s'il

existe une application bijective $f : V \longrightarrow V'$ telle que pour toute paire de sommets $a, b \in V$, on a $ab \in E$ si et seulement si $f(a)f(b) \in E'$.
Si deux graphes sont isomorphes, alors ils partagent toutes les propriétés qui sont appelées invariants (des deux graphes). En d'autres termes, un invariant d'un graphe est une propriété préservée par isomorphisme comme le nombre de ses sommets, le nombre de ses arêtes.

Un stable de G (ou indépendant) est un sous-ensemble de sommets de G deux à deux non adjacents. Un stable maximum de G est un stable de cardinalité maximale. Le nombre de sommets d'un stable maximum dans G est appelé **nombre de stabilité** (ou nombre d'indépendance) et noté par $\alpha(G)$.

Un couplage M dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes. Un sommet x de G est dit **saturé** par M, s'il existe une arête de M incidente à x. Un couplage est dit parfait, s'il sature tous les sommets de G. **Un couplage maximum** est un couplage de taille maximale. On note par $\beta(G)$ la taille du couplage maximum dans G.

1.2 Quelques opérations sur les graphes

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

- Soient $v \in V$ et $S \subseteq V$. Le graphe $G \setminus \{v\}$ est le graphe obtenu à partir de G en supprimant le sommet v et toutes les arêtes incidentes à v. Le graphe $G \setminus S$ est un **sous-graphe engendré par** $V \setminus S$.
- soit uv une arête de G. Le graphe $G \setminus \{uv\}$ est le graphe obtenu à partir de G en supprimant l'arête uv (les extrémités de uv ne sont pas supprimées).
- **La subdivision** d'une arête uv d'un graphe $G = (V, E)$ à supprimer l'arête uv et rajouter un sommet w et deux arêtes uw et wv. Le graphe obtenu à partir de la subdivision de uv est noté par $S(G)$ où $V(S(G)) = V(G) \cup w$ et $E(S(G)) = E(G) \cup \{uw, wv\}$.

- **La contraction** d'une arête uv d'un graphe $G = (V, E)$ consiste à supprimer l'arête uv et à fusionner les extrémités de l'arête uv. Le sommet résultant est adjacents à tous les voisins de u et de v. Le graphe obtenu à partir de la contraction de uv est noté par G_{uv}
- **L'union** de deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ notée $G + G'$ est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V \cup V'$ et ensemble d'arêtes $E \cup E'$. On note par kG l'union de $k \geq 1$ copies de G.
- **Le joint** de deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ noté $G \vee G'$ est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V \cup V'$ et ensemble d'arêtes $(E \cup E') = \{uv : u \in V \text{ et } v \in V'\}$. Autrement dit, $G \vee G'$ est le graphe obtenu à partir de $G + G'$ en ajoutant toutes les arêtes entre tous les sommets de G et G'.
- **Le produit cartésien** de deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$, noté $G \square G'$, est le graphe ayant pour ensemble de sommets $\{uv : u \in V \text{ et } v \in V'\}$. Deux sommets (u, v) et (u', v') sont adjacents si $u = u'$ et $vv' \in E'$ ou $v = v'$ et $uu' \in E'$.
- **Une grille** est le produit cartésien de deux chaîne, noté $G_{m,n}$.
- **Le produit direct** de deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$, noté $G \times G'$, est le graphe ayant pour ensemble de sommets $\{uv : u \in V \text{ et } v \in V'\}$. Deux sommets (u, v) et (u', v') sont adjacents si $u'v' \in E'$ et $uv \in E$.
- **Le produit total** de deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$, noté $G \boxtimes G'$, est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(G')$ et dont deux sommets $(u, v) \neq (u'v')$ sont reliés par une arête si et seulement si $u = u'$ ou $uu' \in E(G)$ et $v = v'$ ou $vv' \in E(G)$. Ceci veut dire que $E(G \boxtimes G') = E(G \square G') \cup E(G \times G')$.

1.3 Complexité algorithmique

La théorie de la complexité s'intéresse à l'étude formelle de la difficulté des problèmes en informatique et plus précisément à leur résolution de façon éfficace, en tenant compte le temps de calcul et les données stoquées en mémoire.

1.3.1 Problème de décision

Chaque problème informatique peut se réduire à un problème de décision, c'est-à-dire un problème formulé comme une question dont la réponse est Oui ou Non. Un problème qui n'est pas formulé de cette manière peut être très simplement transformé en un problème de décision équivalent. Le problème du voyageur de commerce qui cherche dans un graphe à trouver la taille du cycle le plus court passant une fois par chaque sommet, peut s'énoncer en un problème de décision ainsi : Existe-t-il un cycle passant une et une seule fois par chaque sommet tel que la somme des coûts des arcs utilisés soit inférieure à k, avec $k \in N$. Ce problème est équivalent au problème du voyageur de commerce au sens où si l'on sait résoudre efficacement l'un, on sait aussi résoudre efficacement l'autre.

1.3.2 Classes de complexité

La théorie de la complexité repose sur la définition de classes de complexité qui permettent de classer les problèmes en fonction de la complexité des algorithmes qui existent pour les résoudre.

Classe P

Un problème p est dit Polynomial (ie.$p \in P$), s'il peut être résolu par un algorithme déterministe en un temps polynomial.

Prenons par exemple le problème de la connexité dans un graphe. étant donné un graphe à n sommets, il s'agit de savoir si toutes les paires de sommets sont reliées par un chaine. Pour le résoudre, on dispose de l'algorithme de parcours en profondeur qui va construire un arbre couvrant du graphe à partir d'un sommet. Si cet arbre contient tous les sommets du graphe, alors le graphe est connexe. Le temps nécessaire pour construire cet arbre est au plus n^2, donc le problème est bien dans la classe P.

Les problèmes dans P correspondent en fait à tous les problèmes facilement solubles.

Classe NP

Un problème p est NP, s'il est résoluble par un algorithme Non déterministe en un temps polynomial par rapport à la taille de l'instance.

De façon équivalente, c'est la classe des problèmes qui admettent un algorithme dans P qui, étant donné une solution du problème NP, est capable de répondre oui ou non. Intuitivement, les problèmes dans NP sont tous les problèmes qui peuvent être résolus en énumérant l'ensemble des solutions possibles et en les testant avec un algorithme polynomial.

Par exemple, la recherche de cycle hamiltonien dans un graphe peut se faire avec deux algorithmes :

— Le premier génère l'ensemble des cycles (ce qui est exponentiel,

— Le second teste les solutions (en temps polynomial).

On constate, immédiatement, que$P \subset NP$.

Problème NP-Complet

Un problème est NP-difficile si ce problème est au moins aussi dur que tous les problèmes dans NP. Formellement, on définit une notion de réduction :Soient p et p' deux problèmes. Une réduction de p' à p est un algorithme transformant toute instance de p' en une instance de p. Ainsi si l'on a un algorithme pour résoudre p, on sait aussi résoudre p'. p est donc au moins aussi difficile à résoudre que p'. Les problèmes les plus étudiés sont les problèmes NP-complets, parce qu'on ne sait pas les résoudre efficacement à cause de leur indéterminisme. Il est clair que $P \subset NP$, puisqu'un algorithme déterministe est un algorithme non déterministe particulier.

p est alors NP-difficile si pour tout problème p' de NP, p' se réduit à p. Quand on parle de problèmes NP-difficiles on s'autorise uniquement des réductions dans P, c'est-à-dire que l'algorithme qui calcule le passage d'une instance de p' à une instance de p est polynomial.

Classe NP-complet

Le problème étant dans NP et NP-difficile, il est NP-complet ; en d'autres termes, les problèmes NP-complets sont les plus difficiles de la classe NP.

1.4 Coloration des sommets d'un graphe

Dans cette section, nous définissons la notion de le coloration des sommets d'un graphe qui fait un thème central de ce manuscrit. Ce concept est apparu pour la première fois en 1852, quand un étudiant anglais "Francis Guthrie" s'est demandé s'il est toujours possible de colorer n'importe quelle carte géographique avec seulement quatre couleurs de telle sorte que les pays frontaliers aient des couleurs distinctes. C'est qu'en 1976 que deux chercheurs K. Appel et W. Haken [12, 13] ont pu répondre affirmativement à cette question.

Définition 1.4.1 *Une coloration propre de sommets d'un graphe $G = (V, E)$ consiste à affecter une couleur à chaque sommet de V de telle manière que deux sommets adjacents ne reçoivent pas la même couleur. Une classe de couleur est un sous-ensemble stable de sommets de V qui sont de même couleur. Si le graphe est coloré avec k couleurs, on dit qu'il est k-coloriable.*

Un graphe est dit k-coloriable, sil admet une coloration propre avec k couleurs.

1.4.1 Coloration minimale et nombre chromatique

Une *coloration minimale* est une coloration propre en utilisant un nombre minimum de couleurs. Dans le domaine de la coloration, de nombreux paramètres ont été définis ; parmi les paramètres fondamentaux nous trouvons le nombre chromatique.

Définition 1.4.2 *Le nombre chromatique d'un graphe G, noté $\chi(G)$, est le plus petit entier k tel que G soit k-coloriable.*

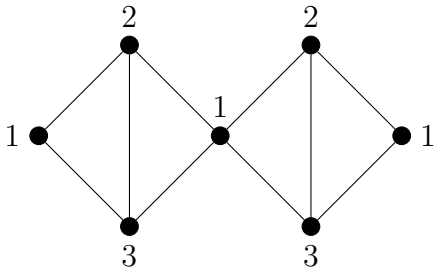


FIGURE 1.19 – Exemple d'une coloration minimale avec $\chi(G) = 3$.

Le calcul du nombre chromatique est NP-complet dans le cas général [15]. De ce fait, beaucoup de travaux ont été consacrés à la recherche des bornes du nombre chromatique en fonction d'autres paramètres de graphe. Un des vieux résultats établi sur le nombre chromatique est celui R. Brooks [3].

Théorème 1.4.1 *[3] Pour tout graphe G de degré maximum $\Delta(G)$,*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Avec égalité si et seulement si on est dans l'un des deux cas suivants :

1. *soit $\Delta(G) \neq 2$ et G admet $K_{\Delta(G)+1}$ comme composante connexe ;*
2. *soit $\Delta(G) = 2$, et G admet un cycle d'ordre impair comme composante connexe.*

Il est bien connu aussi que, tout graphe G admet une coloration avec au moins $\omega(G)$ couleurs, et donc $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Le résultat suivant a été établi par C. Berge [16].

Théorème 1.4.2 *[16] Soit G un graphe d'ordre n. Alors,*

$$\chi(G)\alpha(G) \geq n \quad et \quad \chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1.$$

Gaddum et Nordhaus [4] ont prouvé le résultat suivant.

Théorème 1.4.3 *[4] Soit G un graphe d'ordre n et $\overline{G}$ son complémentaire. Alors*

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1.$$

De nombreux paramètres de coloration propre sont dérivés du nombre chromatique. La plupart de ces paramètres minimisent le nombre de couleurs. D'autres paramètres cherchent à maximiser le nombre de couleurs, on cite entre autres le nombre *a-chromatique* noté $\psi(G)$, le nombre *b-chromatique*, noté $b(G)$, le nombre de *Grundy* noté $\Gamma(G)$ et le nombre de *Grundy partiel* noté $\partial\Gamma(G)$ qui fera l'objet de notre étude dans ce mémoire.

1.4.2 a-coloration et nombre a-chromatique

Une façon de minimiser le nombre de couleurs d'un graphe consiste, à partir d'une coloration propre donnée, de réduire le nombre de classes de couleurs en fusionnant des classes de couleurs différentes. Cette technique de coloration est impossible s'il existe une arête entre toute paire de stables, d'où l'introduction de la a-coloration et du nombre a-chromatique par Harary, Hedetniemi et Prins, en 1967 [5].

Définition 1.4.3 *Une a-coloration d'un graphe G (également dite coloration complète) est une coloration propre de sommets de G, telle que pour toute paire de couleurs différentes i et j, le sous-graphe engendré par les deux classes de couleur i et j, contient au moins une arête. Le nombre a-chromatique, noté $\psi(G)$, est le nombre maximum de classes de couleur dans une a-coloration.*

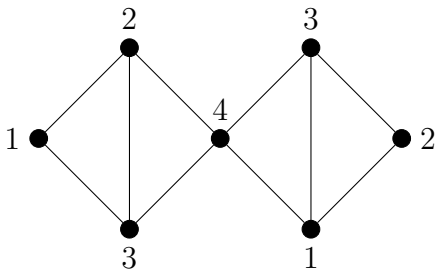


FIGURE 1.20 – Exemple d'une coloration a-chromatique optimale avec $\psi(G) = 4$.

1.4.3 b-coloration et nombre b-chromatique

La notion de la a-coloration a inspiré *Irving et Manlove* [20, 19] à introduire un autre procédé de coloration en 1999, en effet une autre manière de réduire le nombre de couleurs

dans un graphe est d'essayer à partir d'une coloration propre donnée du graphe de réduire le nombre de classes de couleurs en transférant les sommets d'une même classe de couleur dans les autres classes de couleurs. D'où la définition de la coloration dominante ou la b-coloration.

Définition 1.4.4 *Une b-coloration, ou bien une coloration dominante est une coloration propre telle que, chaque classe possède un sommet ayant un voisin dans chaque classe de couleur autre que la sienne. Le nombre b-chromatique est le nombre maximum de classes de couleurs dans une b-coloration.*

Définition 1.4.5 *Étant donné une b-coloration optimale c, un sommet x est dit b-sommet pour c, s'il possède toutes les couleurs dans son voisinage.*

Proposition 1.4.1 *Toute $\chi(G)$-coloration satisfait la définition de la b-coloration, et cette dernière vérifie la définition de la a-coloration, alors le résultat suivant est immédiat.*

$$\chi(G) \leq b(G) \leq \psi(G).$$

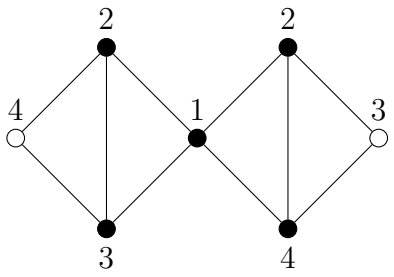


FIGURE 1.21 – Exemple d'une coloration b-chromatique optimale avec $b(G) = 4$(les b-sommets en noir).

1.4.4 Coloration de Grundy et Grundy partielle

Un article publié en 1939 [1] de *Patrick Michael Grundy* (1917,1959) traitant de jeux combinatoires contenait des idées qui ont conduit à la notion de coloration de Grundy dans les graphes. Cette coloration a été définie et introduite par *Christen* et *Selkow* [14] en 1979, dans le cadre de la théorie des jeux. Cette coloration cherche à maximiser le nombre de couleurs nécessaires pour colorer les sommets d'un graphe sous certaines conditions.

Définition 1.4.6 *[25] Une k-coloration de "Grundy" est une k-coloration propre vérifiant la propriété suivante : chaque sommet v, coloré par une couleur i avec* $(1 \leq i \leq k)$*, doit être adjacent à au moins* $i-1$ *sommets colorés par chacune des couleurs j telles que* $(1 \leq j \leq i-1)$*, un tel sommet est dit sommet de Grundy . Le nombre de Grundy* $\Gamma(G)$ *d'un graphe G est le nombre maximum de couleurs nécessaires pour avoir une coloration de Grundy de G.*

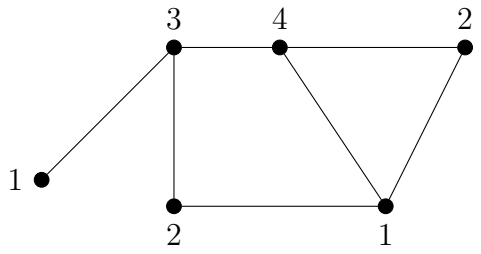


FIGURE 1.22 – Exemple d'une coloration de Grundy optimale avec $\Gamma(G) = 4$.

Récemment (en 2003), P. Erdös et al. ont introduit une nouvelle coloration dérivée de la coloration de Grundy appelées colorations *Grundy partielles* [21], et ils ont étudié le paramètre lié à cette dernière.

Définition 1.4.7 *[21] Une coloration de "Grundy partielle" est une coloration propre vérifiant la propriété suivante : chaque classe de couleur i contient au moins un sommet de Grundy. Le nombre de Grundy partielle* $\partial\Gamma(G)$ *d'un graphe G est le nombre maximum de couleurs nécessaires pour avoir une coloration de Grundy partielle de G.*

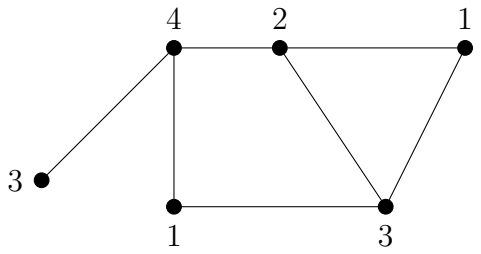


FIGURE 1.23 – Exemple d'une coloration de Grundy partielle optimale avec $\partial\Gamma(G) = 4$.

Observation 1.4.1 *[28, 21]*

Si G admet une coloration de Grundy partielle avec k couleurs alors $\partial\Gamma(G) \geq k$.

La définition d'un b-sommet implique qu'il est un sommet Grundy, et par suite toute b-coloration d'un graphe G est une coloration de Grundy partielle de G, et donc

$$\partial\Gamma(G) \geq b(G),\ \forall G.$$

Chapitre 2

Quelques résultats existants sur la coloration de Grundy partielle

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats obtenu sur la coloration de Grundy partielle, bornes et valeurs exactes du nombre de Grundy partiel pour certains graphes.

2.1 Théorème d'interpolation

Récemment en 2013, R. Balakrishnan et T. Kavaskar ont prouvé que la coloration partielle de Grundy admet un théorème d'interpolation similaire à celui de la coloration de Grundy [29].

Théorème 2.1.1 (Théorème d'interpolation) *[29] Pour tout graphe G et pour tout entier k avec $\chi(G) \leq k \leq \partial\Gamma(G)$, il existe une coloration de Grundy partielle de G avec k couleurs.*

2.2 Quelques bornes du nombre de Grundy partiel

Du point de vue de complexité, Shi et al. [23] en 2005, ont prouvé que le problème de décision lié au nombre de Grundy partiel est NP-complet pour les graphes cordaux et la classe des graphes bipartis. Ils ont également introduit une borne supérieure naturelle, appelée *facteur d'escalier* d'un graphe G notée $\zeta(G)$ pour $\partial\Gamma(G)$.

Définition 2.2.1 *[23] La suite S de r sommets $(g_1, g_2...g_r)$ d'un graphe G est une séquence de Grundy réalisable si : pour $1 \leq i \leq r$ le degré de g_i dans $G - \{g_{i+1}...g_r\}$, est au moins $i-1$. Le facteur d'escalier $\zeta(G)$ de G est la cardinalité maximale d'une séquence de Grundy réalisable.*

Si nous avons une coloration de Grundy partielle d'un graphe G et prenons un sommet de Grundy de chaque classe de couleur de V_k à V_1, nous obtenons une séquence de Grundy réalisable. Il s'ensuit donc que

$$\partial\Gamma(G) \leq \zeta(G) \leq \Delta + 1. \tag{2.1}$$

Dans [23], les auteurs ont parvenu à montrer le résultat suivant.

Théorème 2.2.1 *[23] Pour un graphe G de maille supérieure à 8. On a*

$$\zeta(G) = \partial\Gamma(G).$$

La différence entre le facteur d'escalier $\zeta(G)$ et le nombre de Grundy partiel $\partial\Gamma(G)$ peut être arbitrairement large [36]. En effet, soit K_{n_1,n_2} un graphe biparti complet dont les ensembles des sommets sont $\{x_1, ..., x_{n_1}\}$ et $\{y_1, ..., y_{n_2}\}$. Sans perte de généralité, $n_1 \leq n_2$. Comme $\{x_1, ..., x_{n_1}, y_1\}$ est une séquence de Grundy réalisable de taille $n_1 + 1$, $\zeta(K_{n_1,n_2}) = n_1 + 1$, mais $\partial\Gamma(K_{n_1,n_2}) = 2$.

Dans [30], N. Gastineau et al. ont montré que si G est un graphe connexe cubique et $G \neq K_{3,3}$, alors $\partial\Gamma(G) = 4$.

Shi et al. [23] ont prouvé que le nombre de Grundy peut être trouver rapidement, dans le cas des graphes réguliers.

Théorème 2.2.2 *[23] Pour tout entier fixé r, il existe un entier N_r tel que tous les graphes r-réguliers G avec plus de N_r sommets ont*

$$\partial\Gamma(G) = r + 1.$$

Remarque 2.2.1 *$\partial\Gamma(C_4)$ =2 mais tout les autres 2 réguliers graphes G ont $\partial\Gamma(G) = 3$.*

Théorème 2.2.3 *[22] Pour tout graphe G de degré maximum $\Delta(G)$, on a*

$$\chi(G) \leq \Gamma(G) \leq \partial\Gamma(G) \leq min\{\psi(G), \Delta(G)+1\}.$$

Dans [36], Panda et Verma ont montré que le problème reste NP-complet pour les graphes doublement cordaux qui est une sous-classe de la classe des graphes cordaux. Dans le même manuscrit, les auteurs ont donné des algorithmes linéaire pour déterminer le nombre de Grundy partiel de graphes scindés et de blocs graphes (ce sont deux sous-classes importantes de la classe des graphes cordaux).

Théorème 2.2.4 *[36] Pour un graphe scindé G avec un nombre de cliques $\omega(G)$,*

$$\omega(G) \leq \partial\Gamma(G) \leq \omega(G)+1.$$

Lemme 2.2.1 *[36] Soit (R,S) une partition de l'ensemble de sommets du graphe scindé G tel que S est une clique de taille $\omega(G)$ et R est un ensemble indépendant.*
Alors $\partial\Gamma(G) = \omega(G)$ si et seulement s'il existe un sommet $x \in S$ tel que x ne soit adjacent à aucun sommet dans R.

Proposition 2.2.1 *[36] Soit F une coloration partielle de Grundy d'un graphe $G = (V,E)$, si $N(u) = N(v)$ pour deux sommets $u, v \in V(G)$, alors u et v ne peuvent pas être des sommets de Grundy avec des couleurs différents correspondants à F.*

Proposition 2.2.2 *[35] Pour un graphe G sans sommets isolés, on a $\partial\Gamma(G) = 2$ si et seulement si $G = k_{n,m}$, pour $n \geq 2$ et $m \geq 1$ où G ne contient que les arêtes isolés.*

Corollaire 2.2.1 *[33] Soient G un graphe d'ordre n et de taille m et soit G^c son graphe central. Alors*

- $1 + \Gamma(\overline{G}) \leq \partial\Gamma(G^c) \leq n.$
- $\partial\Gamma(G^c) \geq \alpha(G) + 1.$
- $m \leq \partial\Gamma(\overline{G^c}) \leq m + n - 2.$
- $\partial\Gamma(G^c) + \partial\Gamma(\overline{G^c}) \leq m + 2n - 2.$

Dans [33], Effantin a déterminé le nombre de Grundy partielle du graphe central d'une chaîne.

Théorème 2.2.5 *[33] Soit P_n une chaîne d'ordre $n \geq 7$, Alors*

$$\partial\Gamma(P_n^c) = \begin{cases} n \text{ si } \ n \text{ est impair.} \\ \\ n-1 \text{ sinon .} \end{cases}$$

Proposition 2.2.3 *[33] Soit G un graphe cordal d'ordre $n \geq 3$. Alors,*

$$\partial\Gamma(G^c) = n.$$

Théorème 2.2.6 *[22] Soit G un graphe d'ordre n, de degré maximum $\Delta(G)$ et de degré minimum $\delta(G)$. Alors*

- $2n \leq \partial\Gamma(G) + \partial\Gamma(\overline{G}) \leq n + 1 + \Delta(G) - \delta(G)$.
- $n \leq \partial\Gamma(G)\partial\Gamma(\overline{G}) \leq [(n + 1 + \Delta(G) - \delta(G))/2]^2$.

Corollaire 2.2.2 *[22] Soit G un graphe k-réguliers. Alors*

$$\partial\Gamma(G) + \partial\Gamma(\overline{G}) \leqslant n + 1.$$

Corollaire 2.2.3 *[22] Pour tout graphe auto-complémentaire G. Alors*

$$\partial\Gamma(G) + \partial\Gamma(\overline{G}) \leq 2(\Delta(G) + 1).$$

Proposition 2.2.4 *[22] Pour tout graphe G d'ordre n ayant un sommet d'ordre $n-1$, c'est à dire $G = K_1 + H$, pour quelque graphe H. Alors*

$$\partial\Gamma(G) = 1 + \partial\Gamma(H).[22]$$

Chapitre 3

Nouveaux résultats sur la coloration de Grundy partielle

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la détermination du nombre de Grundy partiel du graphe milieu et graphe total de certains graphes particuliers, comme celui de la chaîne, du cycle et d'une étoile. Ainsi nous donnons la valeur exacte de ce paramètre du joint de deux graphes. En outre, nous introduisons la notion des graphes arête $\partial\Gamma$-critiques, d'où nous donnons quelques propriétés de ces graphes.

3.1 Nombre de Grundy partiel de quelque graphes particuliers

Après avoir définir le graphe milieu et graphe total d'un graphe G, nous déterminons le nombre de Grundy partiel du graphe milieu et graphe total d'une chaîne, d'un cycle et d'une étoile.

3.1.1 Graphe milieu et graphe total

Définition 3.1.1 *(Hamada et Yoshimura) [10] Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.* ***Le graphe milieu*** *de G, noté $M(G)$ est défini comme suit : L'ensemble des sommets de*

$M(G)$ est $V \cup E$, et deux sommets x, y de $M(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- *$x, y \in E$ et x est adjacent à y dans G.*
- *$x \in V$ et $y \in E$ et x est incident à y dans G.*

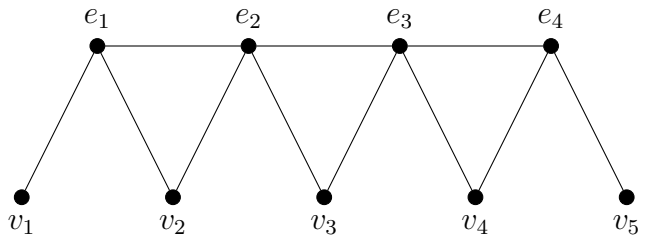


FIGURE 3.1 – Le graphe milieu d'une chaîne d'ordre 5 (P_5).

Définition 3.1.2 *(Behzad) [6] Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.* ***Le graphe total*** *de G, noté $T(G)$, est défini comme suit : L'ensemble des sommets de $T(G)$ est $V \cup E$, et deux sommets x, y de $T(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- *$x, y \in V$ et x, y sont adjacents dans G.*
- *$x, y \in E$ et x est adjacent à y dans G.*
- *$x \in V$ et $y \in E$ et x est incident à y dans G.*

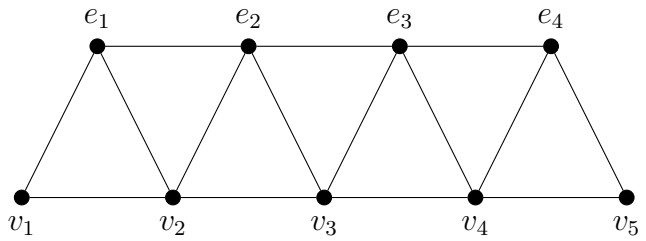


FIGURE 3.2 – Le graphe total d'une chaîne d'ordre 5 (P_5).

3.1.2 Nombre de Grundy partiel du graphe milieu et du graphe total d'une chaîne

Théorème 3.1.1 *Pour toute chaîne P_n d'ordre n avec $n \geq 2$, on a :*

$$\partial\Gamma(M(P_n)) = \begin{cases} n \ si \ 2 \leq n \leq 4, \\ \\ 5 \ si \ n \geq 5. \end{cases}$$

Preuve. Soit P_n une chaîne d'ordre $n \geq 2$ d'ensemble de sommets $V(P_n) = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ et d'ensemble d'arêtes $E(P_n) = \{e_1, e_2, ...e_{n-1}\}$, tel que $e_j = v_j v_{j+1}$ pour $1 \leq j \leq n-1$. Soit G le graphe milieu de P_n d'ensemble de sommets $V(G) = V(P_n) \cup E(P_n)$. Soit c une coloration de Grundy partielle de G avec k couleurs. Si $n = 2$, alors $G \equiv P_3$, d'où $\partial\Gamma(P_3) = 2$. (Voir Figure 3.3).

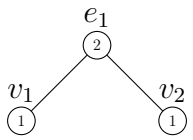


FIGURE 3.3 – Une coloration de Grundy partielle optimale de $M(P_2)$.

Pour $n = 3$, il n'est pas difficile de vérifier que $\omega(G) = 3$, ce qui implique que $\partial\Gamma(G) \geq 3$. Montrons maintenant que $\partial\Gamma(G) \leq 3$. Supposons le contraire, c'est-à-dire $\partial\Gamma(G) \geq 4$. Comme $\Delta(G) = 3$ et en utilisant (2.1) alors $\partial\Gamma(G) = 4$. La structure de G et la coloration de Grundy partielle impliquent que les sommets de G qui peuvent être des sommets de Grundy de couleur 3 et 4 sont e_1 et e_2, car ils sont de degré 3. Sans perte de généralité, supposons que e_1 et e_2 sont des sommets de Grundy de couleur 3 et 4 respectivement. Par conséquent tous les voisins de e_1 et e_2 sont de couleurs distinctes. Pour que e_1 et e_2 soient des sommets de Grundy de couleurs 3 et 4 respectivement, nous affectons (sans perte de généralité) les couleurs 1, 2 et 1 aux sommets v_1, v_2 et v_3 respectivement. Mais dans ce cas, v_2 n'est pas un sommet de Grundy puisque il n'a pas un voisin de couleur 1, donc dans la classe de couleur 2 on n'a aucun sommet de Grundy, contradiction. D'où $k = 3$.

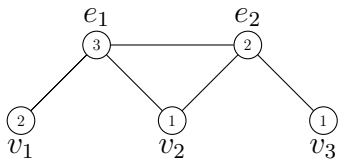


FIGURE 3.4 – Une coloration de Grundy partielle optimale de $M(P_3)$.

Pour $n = 4$, G possède un seul sommet (e_2) de degré 4, deux sommets de degré 3 (e_1 et e_3), deux sommets de degré 2 (v_2 et v_3) et deux sommets de degré 1 (v_1 et v_4). Une coloration de Grundy partielle de G avec 4 couleurs est obtenue comme suit : $c(e_2) = 4$, $c(e_3) = 3$, $c(e_1) = c(v_3) = 2$, $c(v_1) = c(v_2) = c(v_4) = 1$, et donc $k \geq 4$. Montrons maintenant que $k \leq 4$. Supposons le contraire que $k \geq 5$. Comme $\Delta(G) = 4$ et d'après l'inégalité (2.1), alors $k = 5$. Le seul sommet de degré 4 est e_2, donc forcément e_2 sera le seul sommet de Grundy de couleur 5, ce qui implique que tous les voisins de e_2 sont de couleurs distinctes. Vu que $d_G(e_1) = d_G(e_3) = 3$, $d_G(v_2) = d_G(v_3) = 2$ et $d_G(v_1) = d_G(v_4) = 1$, alors les sommets e_1 ou bien e_3 peuvent être de Grundy de couleur 4, disons et sans perte de généralité e_1 l'est, ce qui impossible car il est de degré 3 et il a un voisin de couleur 5 alors il aura toujours une couleur manquante dans son voisinage. Il en résulte donc que $k = 4$.

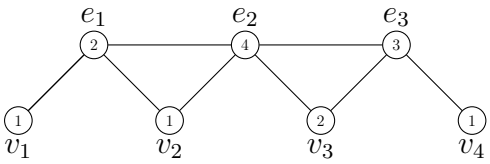


FIGURE 3.5 – Une coloration de Grundy partielle optimale de $M(P_4)$.

Si $n \geq 5$, alors comme $\Delta(G) = 4$ et d'après l'inégalité (2.1) , on a $\partial\Gamma(G) \leq 5$. Pour montrer que $\partial\Gamma(G) \geq 5$ il suffit de donner une coloration de Grundy partielle à G avec 5 couleur comme suit : $c(e_1) = 3$, $c(e_2) = 5$, $c(e_3) = 4$, $c(e_4) = 2$, $c(v_1) = c(v_3) = c(v_5) = 1$, $c(v_2) = 2$, $c(v_4) = 3$, et on termine le reste par une coloration propre sans condition. D'où $k = 5$. ■

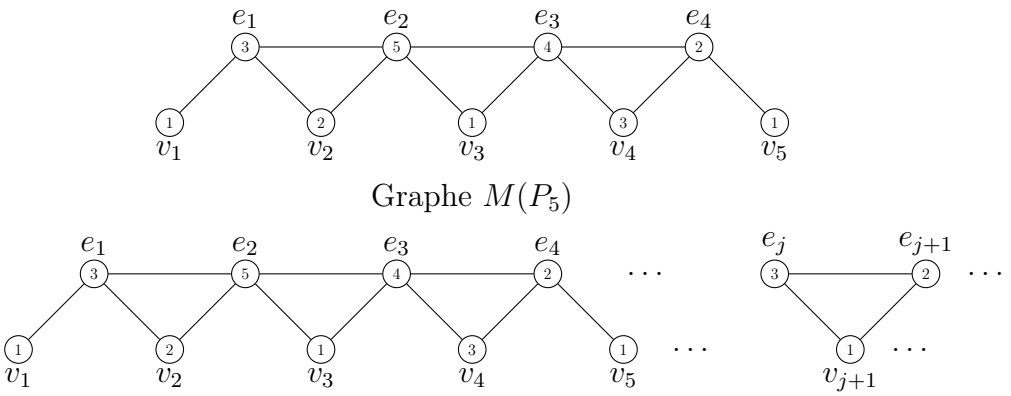


FIGURE 3.6 – Une coloration de Grundy partielle optimale de $M(P_n)$, $n \geq 5$.

Théorème 3.1.2 *Pour toute chaîne P_n d'ordre $n \geq 2$, on a :*

$$\partial\Gamma(T(P_n)) = \begin{cases} n+1 \text{ si } n = 2,3 \\ \\ 5 \text{ si } n \geq 4 \end{cases}$$

Preuve. Soit P_n une chaîne d'ordre $n \geq 2$ d'ensemble de sommets $V(P_n) = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ et d'ensemble d'arêtes $E(P_n) = \{e_1, e_2, ...e_{n-1}\}$, tel que $e_j = v_j v_{j+1}$ pour $1 \leq j \leq n-1$. Soit G le graphe total de P_n d'ensemble de sommets $V(G) = V(P_n) \cup E(P_n)$. Soit c une coloration de Grundy partielle de G avec k couleurs. Si $n = 2$ alors $G = K_3$, donc $\partial\Gamma(G) = 3$.

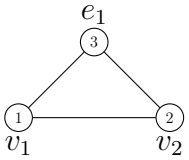


FIGURE 3.7 – Une coloration de Grundy partielle optimale de $T(P_2)$.

Pour $n = 3$, G possède un seul sommet v_2 de degré 4, deux sommets de degré 3 e_1 et e_2 et deux sommets de degré 2 v_1 et v_3. Une coloration de Grundy partielle de G avec 4 couleur peut être obtenue comme suit : $c(v_2) = 4$, $c(v_3) = c(v_1) = 1$, $c(e_1) = 3$ et $c(e_2) = 2$, d'où $k \geq 4$. Montrons maintenant que $k \leq 4$, supposons le contraire que ($k \geq 5$), comme $\Delta(G) = 4$ et d'après l'inégalité (2.1), alors $\partial\Gamma(G) \leq 5$, donc $k = 5$. Comme le seul sommet de degré 4 est v_2 donc forcément $c(v_2) = 5$, ce qui implique que tous les voisins

de v_2 sont de couleurs distinctes. Vu que $d_G(e_1) = d_G(e_2) = 3$ et $d_G(v_1) = d_G(v_3) = 2$, alors la couleur 4 peut être affectée à l'un des deux sommets e_1 et e_2, mais dans les deux cas c ne possède aucun sommet de Grundy de couleur 4 (car les deux sommets sont des voisins au sommet déjà coloré 5). Contradiction, d'où $k = 4$.

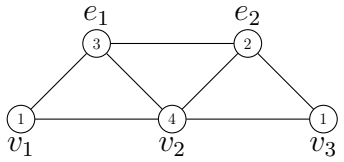


FIGURE 3.8 – Une coloration de Grundy partielle optimale de $T(P_3)$.

Pour $n \geq 4$. Comme $\Delta(G) = 4$ et en utilisant l'inégalité (2.1), alors $\partial\Gamma(G) \leq 5$. Pour montrer que $\partial\Gamma(G) \geq 5$, il suffit de donner une coloration de Grundy partielle à G avec 5 . En effet, $c(e_1) = c(v_4) = 2$, $c(e_2) = 3$, $c(e_3) = c(v_1) = 1$, , $c(v_2) = 5$, $c(v_3) = 4$, et nous terminons la coloration des autres sommets par une coloration propre sans condition. D'où $k = 5$. ■

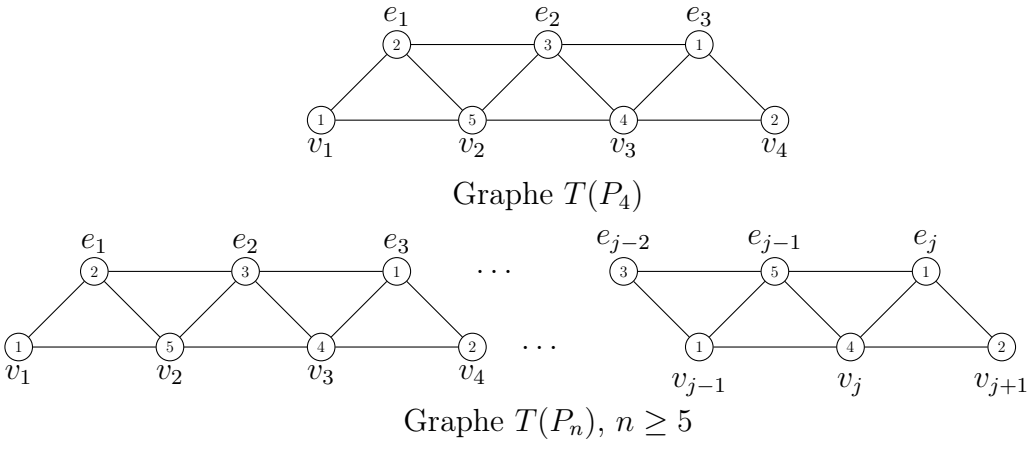


FIGURE 3.9 – Une coloration de Grundy partielle optimale de $T(P_n)$,$n \geq 4$.

3.1.3 Nombre de Grundy partiel du graphe milieu et du graphe total d'un cycle

Théorème 3.1.3 *Soit C_n un cycle d'ordre $n \geq 3$. Alors,*

$$\partial\Gamma(M(C_n)) = \begin{cases} 4 \ si \ n = 3 \\ \\ 5 \ si \ n \geq 4 \end{cases}$$

Preuve. Soit C_n un cycle d'ordre $n \geq 3$ d'ensemble de sommets $V(C_n) = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ et d'ensemble d'arêtes $E(C_n) = \{e_1, e_2, ...e_n\}$, tel que $e_j = v_j v_{j+1}$ pour $1 \leq j \leq n-1$. Soit G le graphe milieu de C_n d'ensemble de sommets $V(G) = V(C_n) \cup E(C_n)$. Soit c une coloration de Grundy partielle de G avec k couleurs.

Pour $n = 3$, une coloration de Grundy partielle de G avec 4 couleurs peut être obtenue comme suit : $c(e_1) = 2$, $c(e_2) = 3$, $c(e_3) = 4$ et $c(v_1) = c(v_2) = c(v_3) = 1$, d'où $k \geq 4$. Il nous reste de montrer que $k \leq 4$, supposons le contraire que $k \geq 5$. Puisque $\Delta(G) = 4$ alors $k = 5$. Étant donnée une coloration de Grundy partielle de G avec 5 couleurs, la structure de G implique que l'un des trois sommets e_1 ,e_2 ou bien e_3 est candidat d'être des sommets de Grundy de couleur 4 et 5. Sans perte de généralité, supposons que e_1 et e_2 sont des sommets de Grundy de couleur 4 et 5 respectivement. Dans ce cas, un seul sommet qui peut être un sommet de Grundy de couleur 3, c'est e_3, car $d_G(v_i) = 2$ (pour $1 \leq i \leq 3$) et l'un de ses voisins est déjà coloré. Les sommets e_1, e_2 et e_3 ont besoin de la couleur 1 et 2 dans leur voisinage, sans perte de généralité,supposons que $c(v_1) = c(v_3) = 2$ et $c(v_2) = 1$, mais dans ce cas, e_3 a la couleur 1 est manquante dans son voisinage, d'où il ne peut pas être de Grundy, contradiction. Il en résulte donc que $k = 4$.

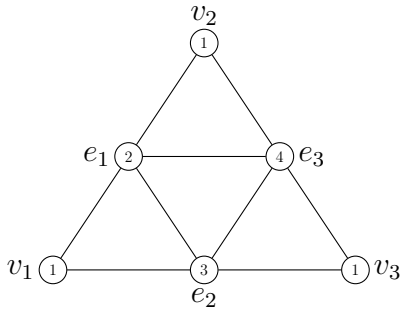
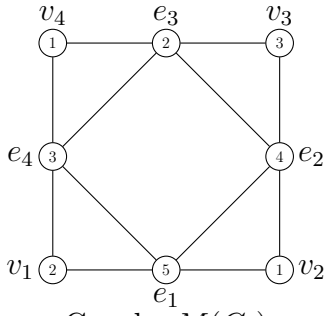


FIGURE 3.10 – Une coloration de Grundy partielle optimale de $M(C_3)$.

Pour $n \geq 4$, alors vu que $\Delta(G) = 4$ et en utilisant l'inégalité (2.1), alors $\partial\Gamma(G) \leq 5$. Pour montrer que $k \geq 5$ il suffit de présenter une coloration de Grundy partielle de G avec 5

couleurs. Pour $n = 4$, voir la Figure (3.11).



Graphe $M(C_4)$

FIGURE 3.11 – Une coloration de Grundy partielle optimale de $M(C_n)$,$n \geq 4$.

Pour $n \geq 5$, nous affectons les couleurs comme suit. $c(e_1) = 5$, $c(e_2) = 4$, $c(e_3) = c(e_n) = 3$, $c(e_4) = c(v_1) = c(v_3) = 2$, $c(v_2) = c(v_4) = 1$, de cette manière les sommets e_1, e_2, e_3 et e_4 sont les sommet de Grundy de couleur 5, 4, 3 et 2 respectivement, et nous terminons le reste par une coloration propre sans condition. D'où $k = 5$. ■

Proposition 3.1.1 *Pour tout cycle C_n d'ordre $n \geq 3$, on a :*

$$\partial\Gamma(T(C_n)) = \begin{cases} 3 \text{ si } n = 3 \\ \\ 5 \text{ si } n \geq 4 \end{cases}$$

Preuve. Soit C_n un cycle d'ordre $n \geq 3$ d'ensemble de sommets $V(C_n) = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ et d'ensemble d'arêtes $E(C_n) = \{e_1, e_2, ...e_n\}$, tel que $e_j = v_j v_{j+1}$ pour $1 \leq j \leq n-1$. Soit G le graphe total de C_n d'ensemble de sommets $V(G) = V(C_n) \cup E(C_n)$. Soit c une coloration de Grundy partielle de G avec k couleurs. Pour $n = 3$, on a $\omega(G) = 3$ alors $k \geq 3$. Montrons maintenant que $k \leq 3$, supposons le contraire $k \geq 4$, comme $\Delta(G) = 4$ et en utilisant (2.1), on a $\partial\Gamma(G) \leq 5$, d'après Théorème 2.1.1 (théorème d'interpolation) G possède une coloration de Grundy partielle avec 4 couleurs, comme G est 4-régulier alors tous les sommets jouent le même rôle et cela à cause de la symétrie. De ce fait on peut assigner la couleur 4 au sommet e_1 et les couleurs 2,3,1 au sommet v_1, v_2, e_2 respectivement, le sommet e_3 et v_3 ne peuvent recevoir la couleur 1, car ils sont adjacents à e_2 déjà coloré 1, mais dans ce cas la couleur 1 est manquante dans le voisinage de v_2, alors on n'obtient aucun sommet de Grundy dans la classe de couleur 3. Contradiction,

d'où $k = 3$

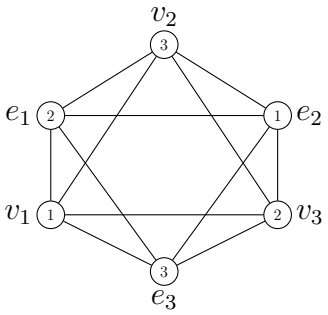


FIGURE 3.12 – Une coloration de Grundy partielle optimale de $T(C_3)$.

si $n \geq 4$, comme $\Delta(G) = 4$ et d'après (2.1), on a $\partial\Gamma(G) \leq 5$. Montrons maintenant que $k \geq 5$, Pour cela il suffit de présenter une coloration de Grundy partielle c avec 5 couleurs comme suit : $c(v_n) = c(e_1) = 1$, $c(e_5) = c(v_3) = 2$, $c(v_1) = 3$, $c(e_1) = 4$, $c(v_2) = 5$, et nous terminons le reste des sommets par une coloration propre sans conditions. Par conséquent, $\partial\Gamma(G) \geq 5$. D'où, $k = 5$.

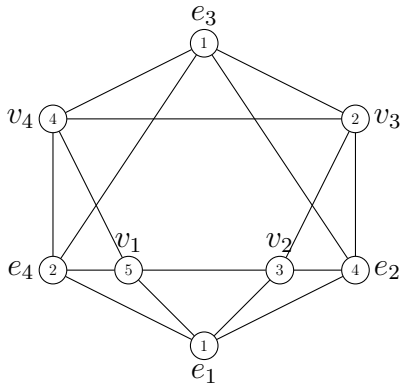


FIGURE 3.13 – Une coloration de Grundy partielle optimale de $T(C_n)$, $n = 4$.

■

3.1.4 Nombre de Grundy partiel du graphe milieu et du graphe total d'une étoile

Dans [27], Vernold et al. ont déterminé le nombre a-chromatic du graphe milieu d'une étoile $K_{1,n}$ d'ordre $n + 1$, tel que $\psi(M(K_{1,n}) = n + 1$.

Proposition 3.1.2 *Soit $K_{1,n}$ une étoile d'ordre $n+1$ avec $n \geq 2$. Alors :*

$$\partial\Gamma(M(K_{1,n})) = n + 1.$$

Preuve. Posons $G = M(K_{1,n})$. Il est facile de vérifier que $\omega(G) = n+1$, alors $\partial\Gamma(M(K_{1,n})) \geq n + 1$. Vu que $\Delta(G) = n + 1$ et $\psi(M(K_{1,n}) = n + 1$, le Théorème 2.2.3 implique que $\partial\Gamma(M(K_{1,n})) \leq n + 1$. D'où, $\partial\Gamma(M(K_{1,n})) = n + 1$. ■

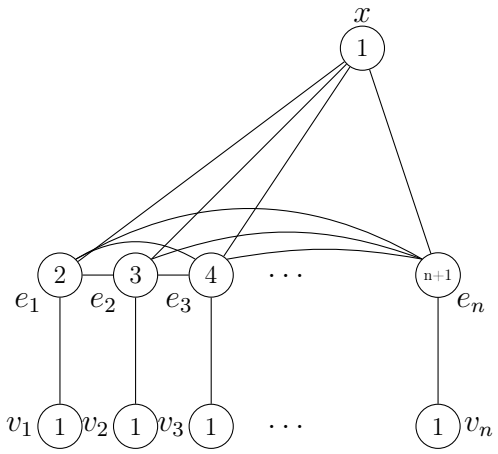


FIGURE 3.14 – Une coloration de Grundy partielle optimale du graphe de $M(K_{1,n})$.

Proposition 3.1.3 *Pour toute étoile $K_{1,n}$ d'ordre $n+1$ avec $n \geq 2$,*

$$\partial\Gamma(T(K_{1,n})) = n + 2.$$

Preuve. Posons $G = T(K_{1,n})$. Vu que $\Gamma(G) = n + 2$ (voir [34]), et d'après Théorème 2.2.3, nous obtenons $\partial\Gamma(G) \geq n + 2$. Il facile de voir que G est un graphe scindé, alors d'après Théorème 2.2.4, $\partial\Gamma(G) \leq n + 2$. Par conséquent, $\partial\Gamma(G) = n + 2$.

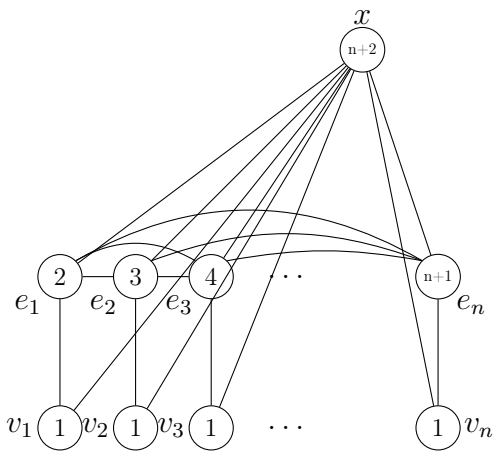


FIGURE 3.15 – Une coloration de Grundy partielle optimale du graphe de $T(K_{1,n})$.

■

3.2 Propositions sur le joint de deux graphes

Observation 3.2.1 *Soit G un graphe non connexe avec les composantes $C_1, ..., C_p$, alors $\partial\Gamma(G) \geq max\{\partial\Gamma(C_i), 1 \leq i \leq p\}$.*

Dans le résultat suivant, nous déterminons le nombre de Grundy partiel du joint de deux graphes.

Proposition 3.2.1 *Soient G_1 et G_2 deux graphes de sommets disjoints. Alors $\partial\Gamma(G_1 \vee G_2) = \partial\Gamma(G_1) + \partial\Gamma(G_2)$.*

Preuve. Posons $G = G_1 \vee G_2$. Soit c une coloration de Grundy partielle de G avec $\partial\Gamma(G) = \partial\Gamma(G_1 \vee G_2)$ couleurs. Comme c est une coloration propre, alors aucune couleur ne peut apparaître dans G_1 et G_2 à la fois. Par conséquent, $\partial\Gamma(G) \geq \partial\Gamma(G_1) + \partial\Gamma(G_2)$. Il reste de prouver que $\partial\Gamma(G) \leq \partial\Gamma(G_1) + \partial\Gamma(G_2)$. Supposons, au contraire, que $\partial\Gamma(G) > \partial\Gamma(G_1) + \partial\Gamma(G_2)$. Ceci signifie que dans une coloration de Grundy partielle de G, il y aura plus de $\partial\Gamma(G_1)$ couleurs (ou $\partial\Gamma(G_2)$ couleurs) qui se présentent dans G_1 (ou G_2), contradiction avec la définition $\partial\Gamma(G_1)$ (ou $\partial\Gamma(G_2)$). ■

3.3 Graphes arête $\partial\Gamma$-critiques

Dans cette section, on s'intéresse à l'étude des graphes, dont la suppression d'une arête quelconque du graphe fait diminuer son nombre de *Grundy partiel*. Tout d'abord, on donne quelque définitions concernant les arêtes (ou les sommets) critiques et les graphes arête(ou sommet)-critiques par rapport au nombre chromatique $\chi(G)$, ainsi on site des classes de graphes arête(ou sommet)-critiques par rapport au nombre de Grundy partiel $\partial\Gamma$. Enfin on présente des résultats caractérisant les graphes arête $\partial\Gamma^{-}$-critiques.

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple k-colorable (ie : $\chi(G) = k$) $k \geqslant 2$.

Définition 3.3.1 *une arête d'un graphe G ($e \in E$)(resp.un sommet $v \in V$) est dite critique, si sa suppression fait diminuer le nombre chromatique de G par au plus un, c'est-à-dire :*

$$\chi(G - e) = k - 1.$$

(resp.$\chi(G - v) = k - 1$)

Définition 3.3.2 *Le graphe G est critique si toutes ses arêtes ou tous ses sommets sont critiques. En particulier, G est dit k-critique s'il est critique avec $\chi(G) = k$. Par conséquent, G est dit arête k-critique (resp.sommet) k-critique si toutes ses arêtes (resp.tous ses sommets) sont critiques.*

La suppression d'une arête ou d'un sommet dans un graphe G n'a pas le même effet sur le nombre $\partial\Gamma(G)$ comme celui sur le nombre chromatique $\chi(G)$; mais, ici, le nombre $\partial\Gamma$ peut augmenter, diminuer ou reste inchangé. Pour cette raison, on peut classer les graphes arête(sommet) $\partial\Gamma$-critiques en six classes comme suit :

- La classe des graphes arête $\partial\Gamma^{-}$-critiques : $\forall$ l'arête $e \in E$, $\partial\Gamma(G - e) < \partial\Gamma(G)$.
- La classe des graphes arête $\partial\Gamma^{=}$-critiques : $\forall$ l'arête $e \in E$, $\partial\Gamma(G - e) = \partial\Gamma(G)$.
- La classe des graphes arête $\partial\Gamma^{+}$-critiques : $\forall$ l'arête $e \in E$, $\partial\Gamma(G - e) > \partial\Gamma(G)$.
- La classe des graphes sommet $\partial\Gamma^{-}$-critiques : $\forall$ le sommet $v \in V$, $\partial\Gamma(G - v) < \partial\Gamma(G)$.

— La classe des graphes sommet $\partial\Gamma^{=}$-critiques : $\forall$ le sommet $v \in V$, $\partial\Gamma(G-v) = \partial\Gamma(G)$.

— La classe des graphes sommet $\partial\Gamma^{+}$-critiques : $\forall$ le sommet $v \in V$, $\partial\Gamma(G-v) > \partial\Gamma(G)$.

Définition 3.3.3 *Soit $G=(V,E)$ un graphe. Alors G est dit :*

— *arête $\partial\Gamma^{-}$-critiques, si $\forall$ l'arête $e \in E$, $\partial\Gamma(G-e) = \partial\Gamma(G)-1$.*

— *arête $\partial\Gamma^{=}$-critiques, si $\forall$ l'arête $e \in E$, $\partial\Gamma(G-e) = \partial\Gamma(G)$.*

— *arête $\partial\Gamma^{+}$-critiques, si $\forall$ l'arête $e \in E$, $\partial\Gamma(G-e) = \partial\Gamma(G)+1$.*

Exemple 3.3.1 — *C_4 est un graphe arête $\partial\Gamma^{+}$-critiques.*

— *P_4 est un graphe arête $\partial\Gamma^{-}$-critiques.*

— *P_5 est un graphe arête $\partial\Gamma^{=}$-critiques.*

3.3.1 Graphes arête $\partial\Gamma$-critiques

Il convient de souligner que dans ce mémoire, nous nous intéressons uniquement à l'étude de la classe des graphes arête $\partial\Gamma^{-}$-critiques. Pour des raisons de simplicité, nous proposons d'appeler cette classe par les graphes arête $\partial\Gamma$-critiques.
Notons que tous les graphes considérés dans notre étude sont sans sommets isolés.

Théorème 3.3.1 *Soient $G=(V,E)$ un graphe arête $\partial\Gamma$-critiques, c une coloration de Grundy partielle de G avec k couleurs tel que $k = \partial\Gamma(G)$ couleurs, C_i les classes de couleurs avec $1 \leq i \leq k$ et S l'ensemble de tous les sommets de Grundy de c. Alors :*

1. *pour tout $i \in \{2,...,k\}$, C ne possède pas deux sommets de Grundy de couleur i. donc $\mid S \mid = \partial\Gamma(G)$*
2. *c est unique.*
3. *les sommets de $V \diagdown S$ induisent un stable.*
4. *Si $u \in V \diagdown S$ et $c(u) = i$, alors u n'a pas de voisins dans la classe de couleur j, tel que : $1 \leq j \leq i-1$. De plus, $d_G(u) \leq k-i$.*
5. *tout sommet de Grundy n'a pas deux voisins de même couleur.*
6. *$\mid C_k \mid = 1$.*

Preuve. Soient $G = (V, E)$ un graphe arête $\partial\Gamma$-critiques, C une coloration de Grundy partielle de G avec $\partial\Gamma(G)$ couleurs, (k couleurs), S l'ensemble de tous les sommets de Grundy de C.

1. Soit G' l'ensemble des classes de couleurs j, tel que : $1 \leq j \leq i-1$. Supposons qu'il existe deux sommets de même couleur i, disons $v_1, v_2 \in S$, de C. Alors $v_t (t = 1, 2)$ a des voisins dans G'. Soit $x \in N_{G'}(v_t)$ $(t = 1, 2)$, alors $\partial\Gamma(G - xv_t) \geqslant \partial\Gamma(G)$, contradiction. Cette unicité implique que $\mid S \mid = \partial\Gamma(G)$.
2. Est une conséquence de (1).
3. Soient v_1, v_2 deux sommets de $V \setminus S$, (2) implique que v_1, v_2 ne sont pas des sommets de Grundy, donc si v_1 est adjacent à v_2 alors $\partial\Gamma(G - v_1v_2) \geqslant \partial\Gamma(G)$, contradiction.
4. Soit $u \in V \setminus S$ et $c(u) = i$, supposons que u a un voisin, disons v, dans la classe de couleur j, tel que $1 \leq j \leq i - 1$, alors $\partial\Gamma(G - uv) \geqslant \partial\Gamma(G)$, contradiction.
5. Soit $u \in S$ de couleur i, supposons qu'il a deux voisins $v_t (t = 1, 2)$ de même couleur j, tel que $1 \leq j \leq i - 1$, alors $\partial\Gamma(G - uv_t) \geqslant \partial\Gamma(G)$, contradiction.
6. Supposons que $\mid C_k \mid \geq 2$, soient $x, y \in C_k$, (1) implique que l'un de ces sommets n'est pas de Grundy, disons $y \in V \setminus S$, (5) implique que $d_G(y) = 0$ contradiction avec le fait G est sans sommets isolés.

■

Théorème 3.3.2 *Si G est un graphe arête $\partial\Gamma$-critique, alors $\partial\Gamma(G) = \Delta + 1$.*

Preuve. Soit G un graphe arête $\partial\Gamma$-critique et soit c une coloration de Grundy partielle de G avec $\partial\Gamma(G)$ couleurs. Posons $k = \partial\Gamma(G)$ pour tout graphe G, il est remarquable que $k \leq \Delta(G) + 1$.

Inversement, pour montrer que $k \geq \Delta(G) + 1$ il suffit de montrer que pour tout sommet $v \in V(G)$, avec G un graphe arête $\partial\Gamma$-critique, $d_G(v) \leq k - 1$, d'où $\Delta(G) \leq k - 1$. Supposons le contraire, il existe un sommet u tel que $d_G(u) > k - 1$, d'après le théorème précédant u ne peut être que un sommet de Grundy, ceci implique que u a au moins deux voisins, disons x, y, de même couleur, tel que l'un des deux sommets disons x, n'est pas un sommet de Grundy, car sinon il y aura un contradiction avec le théorème précédant, mais dans ce cas-là $\partial\Gamma(G - xv) \geq \partial\Gamma(G)$, contradiction. Donc $k = \Delta(G) + 1$. ■

Observation 3.3.1 *Soit G un graphe non connexe. Si G est arête $\partial\Gamma$-critique, alors chaque composante contient au moins un sommet de Grundy.*

Preuve. Soit G un graphe non connexe arête $\partial\Gamma$-critique et soit c une coloration de Grundy partielle de G avec $\partial\Gamma(G)$ couleurs. Supposons qu'il existe une composante connexe de G, disons $G^{'}$ ne contient aucun sommet de Grundy, alors $\partial\Gamma(G \diagdown e) \geq \partial\Gamma(G)$ pour toute arête de $G^{'}$, contradiction. ■

Conclusion et Perspectives

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la notion de la coloration de Grundy partielle.

La détermination de $\partial\Gamma(G)$ est un problème $NP-$Complet pour un graphe quelconque. De ce fait, et après avoir un recueil des notions élémentaires utilisées dans ce travail nous avons présenté quelques résultats et bornes sur la coloration de Grundy partielle.

Notre objectif principal était de déterminer la valeur exacte de la $\partial\Gamma$-coloration pour des classes particulières des graphes, à savoir, les graphes milieu et total d'une chaine, d'un cycle et d'une étoile, ainsi que le nombre de Grundy partiel du joint de deux graphes. Ensuite, nous avons donné quelques propriétés des graphes dits *arête* $\partial\Gamma$*-critiques*.

Nos différents travaux de recherche dans ce mémoire, que ce soit la $\partial\Gamma$-coloration des sommets ou bien la caractérisation des graphes dits *arête* $\partial\Gamma$*-critiques*, nous ont amené à envisager de nombreuses perspectives de recherche qui nous semblent intéressantes pour chaque type de problème étudié. Nous citons quelques perspectives dans ce qui suit.

— Déterminer le nombre de Grundy partielle d'une couronne d'un graphe G.
— Caractériser les graphes arête $\partial\Gamma$-critiques.
— Étudier l'effet de la suppression d'un sommet quelconque sur le nombre de Grundy partiel d'un graphes.
— Étudier l'effet de la contraction d'une arête quelconque sur le nombre de Grundy partielle $\partial\Gamma$.

Bibliographie

[1] P. M. Grundy,Mathematics and games. Eureka 2 (1939) 6-8.

[2] R. L. Brooks. On colouring the nodes of netwok. Proc. Cambridge Phil. Soc, 37 :194-197, 1941.

[3] R. Brooks. On coloring the nodes of a network. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., $37 : 194 - 197, 1941$.

[4] E. A. Nordhaus, J. W. Gaddum. On complementary graphs. Ann. Math. Monthly, $63 : 175 - 177$, 1956.

[5] F. Harary, S. Hedetniemi and G. Prins. An Interpolation theorem for graphical homomorphisme, Port. Math. 26 : 453-462 ; 1967.

[6] M. Behzad : A criterion for the planarity of the total graph of a graph. Proc. Camb.Philos. Soc. 63 : 679 - 681 ; 1967.

[7] C. Berge, Graphs and Hypergraphs. Dunod, Paris, 1970.

[8] R. Karp. Reducibility among combinatorial problems. Dans Complexity of Computer Computations pp. 85–103. Plenum Press, 1972.

[9] C. Berge, "Graphs and Hypergraphs", North Holland, Amsterdam, 1973.

[10] T. Hamada, I. Yoshimura : Traversability and connectivity of the middle graph of a graph. DiscreteMath. 14 : 247¡256 ; 1976.

[11] K. Appel and W.Haken. The existance of unavoidable sets of geographically good configurations. Illinois. Math., 21 : 429-490, 1976.

[12] K. Appel et W. Haken. Every planar map is four colorable : Part 1, discharging. Illinois. J. Maths., $21 : 429 - 490$, 1977.

[13] K. Appel et W. Haken. Every planar map is four colorable : Part 2, reducibility. Illinois. J. Maths., $21 : 491 - 567$, 1977.

[14] C.A.Christer and S.M. Selow, Some perfect coloring properties of graphs, J. Combin. Theory B27 (1979) 49-59.

[15] M. R. Garey, D. S., Johnson. Computers and Intractibility : A guide to the Theory of NP-completeness, W. H. Freman and Company, New York, 1979.

[16] C. Berge. *Graphs*. North Holland, 1985.

[17] T. R. Jensen and B. Toft.Graph coloring problems. Wiley-Interscience, New York, 1995.

[18] N.Robertsonl, D.Sanders, P.Seymour, and R Thomas.The four-colour theorem. J. of comb.theory, 70(B) : 2-44, 1997.

[19] D.F.Manlove.Minimaximal and maximinimal optimisation problems : a partial order- based approach. PhD thesis. Tech. Rep. 27, Comp. Sci. Dept., Univ. Glasgow, Scot- land, 1998.

[20] R.W. Irving, D.F. Manlove. The b-chromatic number of graphs. Discrete Appl. Math. 91 (1999) 127-141.

[21] P. Erdös, S.T. Hedetniemi, R.C. Laskar, G.C.E. Prins, On the equality of the partial Grundy and upper ochromatic numbers of graphs, Discrete Math. 272 (1) (2003) 53–64.

[22] Paul Erdös, Stephen T.Hedetniemi, Renu C.Laskar, Geert C.E.Prins. On the equality of the partial Grundy and upper ochromatic numbers of graphs. Discrete Mathematics, Volume 272, Issue 1, 28 October 2003, Pages 53-64.

[23] Z. Shi, W. Goddard, S.T. Hedetniemi, K. Kennedy, R. Laskar, A. McRae, An algorithm for partial Grundy number on trees, Discrete Math. 304 (2005) 108–116.

[24] Brice Effantin, Hamamache Kheddouci, Grundy number of graphs, Discuss. Math. Graph Theory 27 (2007) 5–18.

[25] Ali Mansouri, Mohamed Salim bouhlel. Coloration de nombre de Grundy pour les graphes triangulés. E-MEDISYS 2008 2 nd International Conference : E-Medical Systems October 29-31, 2008 - TUNISIA.

[26] D. Müller, Introduction à la théorie des graphes 2008.

[27] Vivin J. Vernold, M. Venkatachalam and Ali M.M. Akbar. A note on achromatic coloring of star graph families. Faculty of Sciences and Mathematics, University of Ni¡s, Serbia, Filomat 23 :3 (2009), 251–255 DOI :10.2298/FIL0903251V.

[28] Marie Asté, Frédéric Havet, Cláudia Linhares Sales, Grundy number and products of graphs, Discrete Math. 310 (2010) 1482–1490.

[29] R. Balakrishnan, T. Kavaskar. Interpolation theorem for partial Grundy coloring. Discrete Mathematics 313 (2013) 949–950.

[30] N. Gastineau, H. Kheddoucib, O. Togni. On the family of r-regular graphs with Grundy number $r + 1$, Discrete Mathematics 328 (2014) 5–15.

[31] DYLAN, S. J. (2016, 11 12). https ://m6colorationgraphes.wordpress.com/category/p2/

[32] P. Zhang. Graphs and digraphs. 6 ème édition. Taylor et Francis Group, 2016.

[33] Brice Effantin. A note on Grundy colorings of central graphs. AUSTRALASIAN JOURNAL OF COMBINATORICS Volume 68(3) (2017), Pages 346–356.

[34] R. ZAIBAK. Etude de la coloration de Grundy dans les graphes. Mémoire de Master, Université de Médéa, département Mathématiques et Informatique, 2017.

[35] Brice Effantin, Nicolas Gastineau and Olivier Togni. A characterization of b-chromatic and partial Grundy numbers by induced subgraphs. LE2I UMR6306, CNRS, Arts et Métiers, Univ. Bourgogne Franche-Comté, F-21000 Dijon, France Université de Lyon, CNRS, Université Lyon 1, LIRIS, UMR5205, F-69622, France May 21, 2018.

[36] B.S. Panda and Shaily Verma. On partial Grundy coloring of bipartite graphs and chordal graphs. Discrete Applied Mathematics 271 (2019) 171–183.