REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE MEDEA

FACULTE DES SCIENCES



Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de **:**

Master En physique

Spécialité : Physique Théorique

Par :

LARBI Imane
MAGHRAOUI Loubna

Thème :

Polynômes d' Hermite avec une masse effective dépendante de la position visualisée via la fonction de distribution de Wigner

---

Soutenu publiquement le : 10 /09 /2020, Devant le jury composé de :

Dr. BOUCHACHIA Karim	MCB	Université de Médéa	Président
Dr. AHMAD AMMAR Mohamed	MCB	Université de Médéa	Examinateur 1
Mm. HATTOU Souad	MAA	Université de Médéa	Examinatrice 2
Dr. CHERROUD Othmane	MCB	Université de Médéa	Encadreur

Année universitaire : 2019 / 2020

Remerciements

Tous d'abord, nous remercions le dieu, le tout puissant de nous avoir donné la force et la patience durant tout notre cursus d'étude universitaire, de nous avoir soutenu et aidé et surtout pendant les moments difficiles.

Nous tenons également à remercier à mon encadreur

Dr. CHERROUD Othmane, qui a proposé et dirigé ce travail.

Nous tenons aussi à adresser nos remerciements aux membres de jury :

Dr BOUCHACHIA Karim qui a accepté d'assurer la présidence du Jury,

Dr AHMAD AMMAR Mohamed et Mme HATTOU Souad, pour nous avoir fait l'honneur d'examiner et le plaisir d'accepter et d'évaluer notre travail.

En fin, nous remercions toutes les personnes qui ont contribué de prés ou de loin, au bon déroulement de notre travail et de nos études.

Dédicace

LARBI imane dédie ce travail à :

Avant tous, je remercie dieu le tout puissant de

M'avoir donné le courage et la patience pour réaliser

Ce travail malgré toutes les difficultés rencontrées.

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents, que dieu les garde et les

Protège pour leurs soutien moral, pour

Leurs encouragements et les sacrifices qu'ils ont endurés.

A mon frère Mohamed Islem.

A mes sœurs Khadidja.

A toute ma famille et mes proches.

A toutes mes amies surtout TOUMI Selma,

et collègues d'études.

MAGHRAOUI Loubna dédie ce travail à :

Je remercie le Bon Dieu pour m'avoir

donné la force d'accomplir ce travail.

Je dédie ce modeste travail :

A mes parents pour leurs encouragements et leurs aides.

Et soutien et surtout les sacrifices qu'ils ont fait pour nous voir réussir.

A mes frères : Bilal, Abdelrazak, Mostapha, Abdelghani.

A mes chères sœur : Soumia, Imane, Ranim,

et leurs enfants : Asil, Ouail, Mohammed.

A mon cher mari ''Moussa''.

A tous ma famille ''MAGHRAOUI'' et la famille ''SASSANE ''.

A tous ceux et celles qui m'ont aidé et encouragé de prés comme de loin.

A tous les enseignants de département de physique à l'université de Médéa.

Résumé

Le présent travail a pour but de construire analytiquement et numériquement, les fonctions de distribution de Wigner, pour les états propres qui sont fonctions des polynômes d'Hermite. Ces dernières sont liées à des solutions exactes de l'équation de Schrödinger avec une masse effective dépendante de la position, via une transformation ponctuelle de coordonnée appropriée, notée (TP). La transformation de Weyl sur de nouvelles coordonnées généralisées adaptées dans le cadre d'une masse effective dépendante de la position (MEDP) a été appliquée. Nous avons obtenu analytiquement les valeurs moyennes des nouveaux opérateurs de position et d'impulsion dans le cas d'une masse effective dépendante de la position à l'aide de la transformation de Wigner-Weyl, et ce afin de vérifier la relation, d'incertitude de Heisenberg.

ملخص

الهدف من هذا العمل ، هو بناء دالة التوزيع لويغنير، تحليليا وكذا رقميا لدوال الموجة. وهذه الأخيرة المعبر عنها بمتعدد كثيرات الحدود لهرميث، هي حلول دقيقة لمعادلات شرود نغر ذات الكتلة الفعالة المتغيرة بدلالة الموضع ، المنطوية تحت طريقة تحويل الا حداثيات النقطية.
بالإضافة لاستعمالنا تحويل وايل للإحداثيات المعممة الجديدة ، المتلائمة في إطار حالة الكتلة الفعالة المتغيرة بدلالة الموضع. والتي بدورها نجد القيم المتوسطة لمؤثرات الموضع ، وكمية الحركة الجدد الخاصة بحالة الكتلة الفعالة المتغيرة بدلالة الموضع ، وذلك باستعمالنا لتحويل ويغنير-وايل. والتي على أساسهم يمكن التحقق من علاقة الارتياب لهيزنبارغ.

Abstract

The present work aims to construct analytically and numerically the Wigner distribution functions for eigenstates that are functions of Hermite polynomials. The Hermite polynomials are related to exact solutions of the Schrödinger equation with a position-dependent effective mass (PDEM) via an appropriate punctual coordinate transformation, denoted (PT). The Weyl transformation on new generalized coordinates adapted within the framework of a position-dependent effective mass was applied. In order to verify the uncertainty relation of Heisenberg. We, analytically, carried out and obtained the expectation values of the new position and momentum operators, in the case of an effective position-dependent mass, using the Wigner-Weyl transformation. This uncertainty relation is also verified.

Table des matières

Table des matières

Introduction *1*

1 La fonction de distribution de Wigner *5*

1.1 Définition de la fonction de distribution de Wigner 6

1.2 Propriétés de la fonction de Wigner 12

2 Transformation de Weyl et le produit de Moyal dans l'espace dans phase *16*

2.1 Transformation de Weyl dans l'espace des phases 16

2.2 Valeur moyenne des opérateaurs dans l'espace des phases 20

2.3 Produit de Moyal dans l'espace des phases 22

2.4 Cas limite classique de la théorie quantique 24

3 L'équation de Schrödinger avec une masse effective dépendante de la position via la Méthode de la transformation ponctuelle *26*

3.1 Equation de Schrödinger non relativiste avec une masse effective dépendante de la position 27

3.2 Equation de Schrödinger avec une masse effective dépendante de la position visualisé par la Méthode de la transformation ponctuelle canonique 30

4 Polynomes d'Hermite visualisées via la fonction de distribution de Wigner *36*

4.1 Fonction de distribution de Wigner 38

4.2 Equation de Schrödinger d'une masse effective dépendante de la position au cas d'Hermite avec les potentiels correspondants 40

4.2.1 Discussion à propos de Figure 1 47

4.3 Fonction des distributions de Wigner au cas des polynomes d'Hermite avec une masse dépendante de la position 48

4.3.1 Normalisation de la fonction de Wigner au cas de polynômes d'Hermite d'une masse variable 50

4.3.2 Discussion à propos des figures bidimensionnelle 55

4.3.3 Discussion à propos de la Figure 3 58

4.4 Mécanique quantique canonique et la transformation de Weyl pour les polynômes d'Hermite de Laguerre généralisées 59

Conclusion *61*

Bibliographiques *63*

Liste des Figures et des Tableaux

Liste des Figures et des Tableaux

Figure 1 L'évolution des masses et leurs potentiels associés $V_i(x)$ à travers du potentiel harmonique $\bar{V}(y)$ elles sont tracées par rapport à x pour les différentes valeurs de paramètre λ associé à la masse variable $m(x)$.. .....**47**

Figure 2 La fonction de distribution de Wigner (WDF) pour les différentes masses $m(x)$ de l'équation (4.23) tracée pour $n = 0, 1, 2$ leurs variations du coefficient λ, l'obscurité affiche la valeur minimale tandis que la luminosité définit la valeur maximale. La position est représentée dans l'axe horizontal, et l'impulsion se trouve sur l'axe vertical. **54**

Figure 3 Haut (respectivement, en bas). La fonction de distribution de Wigner (FDW) tridimensionnelle au cas d'Hermite d'une masse variable, Pour différents états n et la masse $m(x)$, le plan horizontal dans toutes les images correspond à la direction x et p, on voit que les deux distributions vérifient l'inégalité $\left|W\left(\psi_n^{(\mathcal{H})}|x\,,p\right)\right| \leq \frac{1}{\pi}$.....**58**

Tableau 1 Des valeurs possibles des paramètres α, β et γ. **28**

Tableau 2 Présente plusieurs potentiels quantiques des formes compliquées pour les différents types de la masse $m(x)$.....**41**

Tableau 3 Des incertitudes de Heisenberg **56**

Introduction

Introduction

Les physiciens se sont toujours intéressés aux problèmes relatifs des potentiels quantiques afin de déterminer leurs propriétés physiques. Les équations d'ondes (Schrödinger, Dirac, ..) ont été résolues par un grand nombre de méthodes pour traiter ces potentiels, dans ce sens , nous sommes intéressés dans le présent travail à la mécanique quantique dans l'espace des phases à l'aide de la fonction de Wigner **[1]** définie sur l'espace des phases au lien des espaces configuration ou impulsions habituels au cas d'une masse dépendante de la position.

La mécanique quantique est un formalisme mathématique qui a pour objet de décrire l'évolution des états dans le temps et de prévoir le résultat de mesure de toutes les grandeurs physiques, c'est-à-dire à l'échelle atomique et subatomique. Le calcul dans ce formalisme fait intervenir l'espace de Hilbert et les opérateurs, ce qui parfois peut sembler assez lourd, surtout pour des systèmes physique complexes.

Par comparaison, le calcul en mécanique classique est relativement plus simple. En effet, pour décrire l'état d'une particule non-relativiste dans le temps, il suffit de connaitre sa position $x(t)$ et son impulsion $p(t)$ à chaque instant, lesquelles sont obtenues à partir des conditions initiales par les lois de la mécanique newtonienne. Les observables du système quantique sont quant à elles des fonctions $f(x,p)$ sur l'espace des phases. On peut aussi rencontrer le cas où l'état de la particule n'est pas déterminé exactement, mais uniquement à l'aide d'une distribution de probabilité $W(x,p)$ sur l'espace des phases. Dans cet état, les valeurs moyennes des observables sont obtenues par la loi de la transformation de Wigner-Weyl.

Les représentations dans l'espace des phases de la mécanique quantique permettent d'établir une correspondance, entre la mécanique quantique et la mécanique classique. Elles permettent ainsi de ramener les calculs de la mécanique quantique à des simples calculs de probabilités classiques, puis une fois les résultats obtenus, de revenir à l'interprétation quantique **[2]**.

La mécanique quantique dans l'espace des phases est une modélisation mathématique qui permet d'étudier des phénomènes physiques. De nombreux physiciens ont abordé le

problème relatif à la relation entre la mécanique quantique et la mécanique classique. Dans ce contexte, la mécanique quantique dans l'espace des phases consiste à décrire les états d'un système physique, à l'aide de fonction de Wigner définies sur l'espace des phases. Il est à noter que chacun des ces formalismes est convenable et avantageux dans un domaine bien déterminé où s'applique la mécanique quantique.

La connexion entre la mécanique quantique et la mécanique classique a été introduite par E. Wigner en 1932 **[1]**, en construisant la fonction de distribution dans l'espace des phases et en se basant sur la description des états quantiques par leurs fonctions de Wigner. Cette dernière est une quasi-distribution de probabilité qui n'est pas définie positive pour tous les états quantiques, mais seulement pour les états gaussiens **[3]**. Après obtention des résultats analogues de ces fonctions, il faut revenir à l'interprétation quantique. Par ailleurs, il est connu que tout état physique en mécanique quantique, doit obéir au principe d'incertitude d'Heisenberg, d'où le besoin de définir les fonctions dépendant de x et p, qui correspondent aux observables quantiques selon la transformation de Weyl (1927).

En particulier, on doit minimiser la propriété intrinsèque de la mécanique quantique dite relation d'incertitude de Heisenberg, en utilisant les valeurs moyennes, pour des fonctions dans l'espace des phases au lieu des valeurs moyennes, des opérateurs quantiques dans l'espace de Hilbert. Avec les valeurs moyennes, des fonctions sont obtenues par la loi de transformation de Wigner-Weyl **[4-6]**. La connexion quantique-classique elle fournit des solutions nettement plus simples à de nombreux problèmes particulièrement au niveau de la physique statistique et de la physique des particules.

D'autres scientifiques ont suivi cette étude, ce qui a permis d'avoir des résultats, surtou pour des systèmes physiques complexes et plus particulièrement au niveau de l'optique quantique **[4]**. Récemment, l'étude dans l'espace des phases est également très utilisée dans le domaine de l'informatique quantique **[2]**. En effet, c'est une voie qui est le point de départ de plusieurs développements pour le traitement de l'information quantique. Cela permettra d'ouvrir de nouvelles perspectives aux expérimentateurs.

L'objectif de ce travail est de donner une présentation plus ciblée sur ce sujet, en examinant la relation entre la physique quantique et la physique classique. Cela concerne

l'étude des états propres qui sont fonctions des polynômes d'Hermite d'une masse variable visualisée via les fonctions de distribution de Wigner.

Ce manuscrit comporte quatre chapitres. Dans le premier chapitre nous allons exposer les concepts de base du formalisme de la fonction de Wigner. En premier lieu nous allons introduire le concept de l'opérateur densité qui va nous permettre par la suite de définir la fonction de Wigner. Ensuite, nous allons établir quelques propriétés fondamentales de cette distribution, à savoir les densités de probabilité marginale correspondants aux variables position x et impulsion p.

Dans le deuxième chapitre nous allons représenter la transformation de Weyl qui permet, entre autres, de faire correspondre à chaque observable une fonction définie dans l'espace des Phases. Le passage entre les opérateurs quantiques et les fonctions correspondantes dans l'espace de phase est réalisé à l'aide d'une transformation de Weyl **[6]**. Ainsi la transformation Wigner-Weyl permet d'exprimer les valeurs moyennes, des opérateurs quantiques dans une forme très similaire. Le formalisme du produit de Moyal **[1-5]** a été basé étroitement sur la correspondance entre le produit des deux opérateurs quantiques, dans l'espace de Hilbert, à celles des valeurs moyennes et le produit de Moyal des fonctions dans l'espace des phases.

Le troisième chapitre, quant à lui, est une analyse les fonctions d'ondes, de polynômes orthogonaux de Hermite avec une masse variable, qui sont des solutions de équation de Schrödinger et seront données pour le cas de l'oscillateur harmonique. Cette analyse est menée, en utilisant la méthode de transformation ponctuelle canonique **[7]** sur les fonctions d'onde est nous permet de convertir l'équation de Schrödinger standard en une équation différentielle du second ordre relative aux potentiels quantique avec une masse effective dépendante de la position, qui admettent comme solutions des fonctions spéciales des polynômes d'Hermite avec un spectre d'énergie de même modèle comme l'oscillateur harmonique.

Dans le quatrième chapitre on construit analytiquement et numériquement, les fonctions de distribution de Wigner, aux cas des états propres des polynômes d'Hermite relatives à plusieurs potentiels quantiques d'une masse variables et peuvent fournir des études systématiques aux solutions exactes de l'équation de Schrödinger. On obtient

analytiquement, les valeurs moyennes des observables quantique des nouveaux opérateurs corrélées en positions et impulsions, adaptés au cas d'une masse effective dépendante de la position, ces derniers qui sont obtenus pour faire la procédure de la transformation ponctuelle canonique. On trouve aussi aux cas d'une masse variable choisis $m(x)$ les valeurs exactes des niveaux d'énergie harmonique à l'aide de la transformation de Wigner-Weyl et ce afin de vérifier la relation d'incertitude de Heisenberg.

Finalement, nous terminons ce mémoire par une conclusion dans laquelle on résume l'essentiel des résultats de notre travail, et on donne des perspectives pour élargir le domaine d'étude à d'autres polynômes orthogonaux.

Chapitre 1

La fonction de distribution de Wigner

La mécanique quantique est l'outil fondamental pour d'étudier des phénomènes physique à l'échelle microscopique par exemple existence des atomes, leurs propriétés et les liaisons chimiques, etc…

Beaucoup de chercheurs ont mis un intérêt particulier de la mécanique quantique en essayant à la résoudre l'équation de Schrödinger par de différentes méthodes comme la méthode de factorisation **[7-10]**, la méthode algébrique **[11]** la super- symétrie de la mécanique quantique ainsi la méthode de la transformation canonique **[8, 12,13]**.

Par ailleurs, la mécanique quantique est un formalisme mathématique pour d'écrire les états, propriétés et évolutions des objets quantiques. Le calcul dans ce formalisme fait intervenir l'espace de Hilbert et les opérateurs.

En 1932 Eugene Wigner a proposé une application qui transforme les états quantiques en des états quasi-classiques **[1]**. Ces états se comportant comme des densités de probabilités de Wigner dans l'espace des phases. La forme alternative de la mécanique quantique dans l'espace des phases permettent d'établir une approche entre la mécanique quantique et la mécanique classique et de ramener les calculs quantiques à de simples calcules de probabilités classiques. La distribution de Wigner permet de retrouver facilement des résultats des calculs quantiques et donner beaucoup plus d'informations sur le système quantique. Cependant, les fonctions de Wigner ne peuvent pas être considérées comme de véritables densités de probabilités, car elles ne vérifiant pas en général, la condition de positivité des probabilités sauf les états quantiques avec les fonctions d'ondes gaussiennes correspondent à des fonctions de Wigner positives.

La distribution de Wigner est largement utilisée pour ramener le calcul quantique à de simple calcul probabiliste classique. Ce dernier est effectue à de nombreux problèmes de la physique et la chimie comme l'optique ou la théorie d'information quantique et le traitement du signal en électronique quantique etc...

En premier lieu, nous allons présente le concept de l'opérateur densité, qui va nous permettre par la suite de construire la fonction quasi-classique de Wigner dans l'espace des phases a partir de la transformée de l'opérateur de densité, ainsi les propriétés servant à déterminer le caractéristique de la fonction de Wigner.

1.1. Définition de la fonction de distribution de Wigner

Dans cette partie, nous allons construire la distribution de Wigner à partir de l'opérateur densité. A chaque état de cet opérateur, on peut associer une distribution dans l'espace des phases, appelée fonction de Wigner. Maintenant, le problème fondamental posé est comme suit: comment pouvons-nous construire des analogues entre la mécanique quantique et la mécanique classique à partir de l'opérateur densité ?

A notre connaissance, la mécanique classique donne une description d'un système de N particules ponctuelles par un nombre fini de degrés de liberté (p^N, x^N), des impulsions et des positions dans l'espace des phases, et aussi pour préciser les mouvements possibles.
Dans ce cas, le système est représenté par un point (p^N, x^N), dans l'espace de phase à $6N$ dimensions, la quantité classique mesurable dans ce point est noté par $A_{cl}(p^N, x^N)$, en négligeant le degré de liberté interne (les particules sans spins).
En outre, en mécanique statistique classique, la description d'un ensemble de systèmes de N particules se fait à l'aide d'une fonction de distribution $\rho_{cl}(p^N, x^N) \geq 0$, dans l'espace des phases.

La valeur moyenne de la quantité classique $A_{cl}(p^N, x^N)$ au point (p^N, x^N), dans l'espace des phases est donnée par

$$\int A_{cl}(p^N, x^N)\, \rho_{cl}(p^N, x^N) dp^N dx^N. \tag{1.1}$$

Dans le cadre de la mécanique quantique, on représente le système par un vecteur d'état $|\psi\rangle$ dans l'espace de Hilbert. A toute quantité observable, correspond un opérateur $\hat{A}$, la valeur moyenne de cette quantité étant donnée par

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \int \psi^* (x) \hat{A}\, \psi(x)\, dx \equiv Tr\big(\hat{A}\, \hat{\rho}\big), \tag{1.2}$$

avec $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$.

Notons d'abord que pour tous les cas des états ψ , l'opérateur densité $\hat{\rho}$ satisfait les propriétés suivantes

1. La densité est hermétique

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^{\dagger}, \tag{1.3}$$

cet opérateur peut être diagonalisé et ses valeurs propres sont positives.

2. Conservation de probabilité totale

$$Tr(\hat{\rho}) = \langle\psi|\psi\rangle = 1. \tag{1.4}$$

3. Dans le cas d'un état ψ, l'opérateur densité est alors un projecteur

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}^{\dagger} = |\psi\rangle\langle\psi|. \tag{1.5}$$

L'opérateur densité $\hat{\rho}(x)$ de la variable de position x, est donné par

$$\hat{\rho}(x) = |\psi(x)\rangle\langle\psi(x)| = |\psi(x)|^2. \tag{1.6}$$

Lorsque $|\psi(x)\rangle$ est orthonormé on a

$$Tr\big(\hat{\rho}(x)\big) = \langle\psi(x)|\psi(x)\rangle = 1. \tag{1.7}$$

On voit que la connaissance de la fonction d'onde $\psi(x)$, nous permet de visualiser facilement la densité de probabilité $\hat{\rho}(x)$. Ainsi, la détermination de la densité de probabilité sur la représentation en impulsion p, est également donnée par la fonction $\phi(x)$.

Cette dernière est déduite en utilisant la transformation de Fourier sur $\psi(x)$ **[3]**

$$\langle p|\psi\rangle = \int \langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{\frac{-ix\,p}{\hbar}} \psi(x)dx = \tilde{\psi}(p) \equiv \phi(p), \tag{1.8}$$

où la relation de Fourier inverse,

$$\langle x|\psi\rangle = \int \langle x|p\rangle\langle p|\psi\rangle dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{\frac{ix\,p}{\hbar}} \phi(p)dp = \psi(x), \tag{1.9}$$

$\langle p|\psi\rangle$ étant la fonction transformée de Fourier $\tilde{\psi}(p) \equiv \phi(p)$ de la fonction d'onde $\psi(x)$.

La quantité $|\phi(p)|^2$ donne la densité de probabilité en fonction de la variable impulsion p. Dans ce cas, la densité d'impulsion $\hat{\rho}(p)$ est difficile à visualiser. Il serait

intéressant d'avoir une fonction dépendante de la variable de position x et de l'impulsion p, dans l'espace des phases, qui s'appelle fonction de distribution de Wigner, et qui détermine la distribution de probabilité. En effet, lors de la localisation d'un système quantique dans l'espace des phases, cette fonction se comporte comme une distribution de probabilité. Elle permet de retrouver facilement les résultats des calculs quantiques, surtout pour des problèmes complexes de la physique. L'objectif est de trouver une certaine correction quantique à la physique statistique classique et aussi, d'examiner la connexion entre la mécanique quantique et la mécanique classique.

Dans le langage de la mécanique statistique quantique, la description d'un état ψ, se fait à l'aide de l'opérateur de densité $\hat{\rho}$. Ce dernier sert à décrire l'état du système quantique. Dans ce contexte, nous présentons l'opérateur de densité statistique pour des états ψ sur la position par $\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}(x'', x')$.

Le couple de positions (x'', x'), définit le saut quantique de la position x' à la position x'', de telle sorte que le centre du couple (x'', x'), est approximé et assimilé à la position x. Nous reviendrons sur ce point dans les sections suivantes.

Alors, pour simplifier l'étude, nous allons construire la fonction de Wigner pour une seule particule se mouvant dans un espace à une dimension. L'opérateur de matrice de densité statistique sur les positions est

$$\hat{\rho}\,(x'', x') \equiv \langle x'' \,|\hat{\rho}|\, x' \rangle, \tag{1.10}$$

décrit par le saut quantique de la position x' à la position x''.

Par ailleurs, on peut définir un centre du saut quantique par

$$x = \frac{x'' + x'}{2}, \tag{1.11}$$

et introduire, au lieu des deux positions x' et x'', le centre x et la distance $y = x'' - x'$, nous avons

$$\begin{cases} x' = x - \frac{1}{2}y & (1.12a) \\ x'' = x + \frac{1}{2}y & (1.12b) \end{cases},$$

on peut écrire, l'opérateur de densité $\hat{\rho}(\hat{x}) \rightarrow \hat{\rho}(x, y)$ par

$$\hat{\rho}(x, y) = \hat{\rho}(x'', x'), \tag{1.13}$$

par conséquent, dans l'état $|\psi\rangle$, l'opérateur de densité d'une seule particule est exprimé en fonction de la position de la manière suivante

$$\hat{\rho}(x'', x') = \left\langle x + \frac{1}{2}y \middle| \hat{\rho} \middle| x - \frac{1}{2}y \right\rangle, \qquad \hat{\rho}(x', x') = \left\langle x - \frac{1}{2}y \middle| \hat{\rho} \middle| x + \frac{1}{2}y \right\rangle. \tag{1.14}$$

Avec l'hermicité de l'opérateur densité $\hat{\rho} = \hat{\rho}^{\dagger}$.

Par ailleurs, la fonction de distribution de quasi-probabilité de Wigner unidimensionnel associée à l'opérateur $\hat{\rho}$, dans le cas non-relativiste de l'état noté $\psi(x)$, est obtenue à travers la transformation de Fourier de la grandeur de densité précédente, comme suit (nous restreindrons au cas d'une seule particule) **[3]**

$$\begin{aligned} W(x, p) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, exp\left(-\frac{ipy}{\hbar}\right) \hat{\rho}(x'', x') \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left\langle x + \frac{1}{2}y \middle| \hat{\rho} \middle| x - \frac{1}{2}y \right\rangle exp\left(-\frac{ipy}{\hbar}\right), \end{aligned} \tag{1.15a}$$

$$\begin{aligned} W(x, p) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, exp\left(+\frac{ipy}{\hbar}\right) \hat{\rho}(x', x'') \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left\langle x - \frac{1}{2}y \middle| \hat{\rho} \middle| x + \frac{1}{2}y \right\rangle exp\left(+\frac{ipy}{\hbar}\right), \end{aligned} \tag{1.15b}$$

cette expression permet de transformer un système d'état quantique de la matrice de densité $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ à l'état quasi-classique de la fonction de distribution de Wigner $W(x,p)$, dans l'espace des phases.

D'après l'équation (1.14), on peut écrire la densité de la position de l'état $\psi(x)$, comme suit

$$\langle x''|\hat{\rho}|x'\rangle = \left\langle x+\frac{1}{2}y\middle|\hat{\rho}\middle|x-\frac{1}{2}y\right\rangle = \psi^*\left(x-\frac{1}{2}y\right)\psi\left(x+\frac{1}{2}y\right). \tag{1.16a}$$

Et comme l'opérateur de densité est hermétique $\hat{\rho} = \hat{\rho}^{\dagger}$ on a donc

$$\langle x'|\hat{\rho}|x''\rangle = \left\langle x-\frac{1}{2}y\middle|\hat{\rho}\middle|x+\frac{1}{2}y\right\rangle = \psi^*\left(x+\frac{1}{2}y\right)\,\psi\left(x-\frac{1}{2}y\right), \tag{1.16 b}$$

la notation des fonctions d'onde sur la position est $\langle x|\psi\rangle \equiv \psi(x)$ et donc la fonction de Wigner est équivalente à

$$\begin{aligned} W(x,p) &= \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\,\psi^*\left(x-\frac{y}{2}\right)\psi\left(x+\frac{y}{2}\right)exp\left(-\frac{ipy}{\hbar}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\,\psi^*\left(x+\frac{y}{2}\right)\psi\left(x-\frac{y}{2}\right)exp\left(+\frac{ipy}{\hbar}\right). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Cette expression donne la distribution de probabilité d'un système unidimensionnel. En outre, c'est une description de l'état quantique ψ dans l'espace des phases, par leurs fonctions de Wigner.

Comme la relation $\langle x''|\hat{\rho}|x'\rangle = \langle x'|\hat{\rho}^{\dagger}|x''\rangle^*$ et lorsque $\hat{\rho}^{\dagger} = \hat{\rho}$ donc

$\langle x''|\hat{\rho}|x'\rangle = \langle x'|\hat{\rho}|x''\rangle^*$, on peut voir dans l équations (1.17), que cette relation a été réalisée. Donc on remarque que le caractère réel de $W(x,p)$ est visible, dans les deux équations précédentes parce que $W^*(x,p) = W(x,p)$.

D'une manière analogue, à partir de la transformation de Fourier de l'élément de matrice de densité sur les impulsions, nous pouvons également exprimer la distribution de Wigner avec une forme de la représentation d'impulsion.

On définit le centre du saut quantique de l'impulsion p' à l'impulsion p'' par

$$p = \frac{p'' + p'}{2}, \tag{1.18}$$

où

$$\begin{cases} p' = p - \frac{1}{2}u\,, & (1.19a) \\ p'' = p + \frac{1}{2}u\,. & (1.19b) \end{cases}$$

Nous obtenons l'opérateur de densité en fonction de l'impulsion comme suit

$$\hat{\rho}(p'', p') = \left\langle p + \frac{1}{2}u \middle| \hat{\rho} \middle| p - \frac{1}{2}u \right\rangle \equiv \phi^*\left(p - \frac{1}{2}u\right)\phi\left(p + \frac{1}{2}u\right), \tag{1.20a}$$

$$\hat{\rho}(p', p'') = \left\langle p - \frac{1}{2}u \middle| \hat{\rho} \middle| p + \frac{1}{2}u \right\rangle = \phi^*\left(p + \frac{1}{2}u\right)\phi\left(p - \frac{1}{2}u\right). \tag{1.20b}$$

La fonction de distribution de quasi-probabilité de Wigner unidimensionnelle dans l'état ψ de l'opérateur de densité $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ est obtenue à travers, de la transformation de Fourier de la grandeur de densité précédente comme suit

$$\begin{aligned} W(x,p) &= \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} du\, exp\left(+\frac{ix\,u}{\hbar}\right)\hat{\rho}(p'', p') \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} du\, exp\left(-\frac{ixu}{\hbar}\right)\hat{\rho}(p', p''), \end{aligned} \tag{1.21}$$

lorsque $\hat{\rho}$ est hermitique.

On écrit l'équivalence de l'équation de Wigner (1.17) sur la base de l'impulsion sous la forme

$$W(x,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} du\, \phi^*\left(p-\frac{1}{2}u\right)\phi\left(p+\frac{1}{2}u\right) exp\left(+\frac{ixu}{\hbar}\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} du\, \phi^*\left(p+\frac{1}{2}u\right)\phi\left(p-\frac{1}{2}u\right) exp\left(\frac{-ixu}{\hbar}\right), \quad (1.22)$$

où la notation de la transformée de Fourier $\langle p|\psi\rangle \equiv \phi(p)$ de la fonction d'onde $\psi(x)$.

On remarque que $W^*(x,p) = W(x,p)$ donc, on peut dire que $W(x,p)$ est réel, parce que $\hat{\rho}$ est hermitique.

1.2. Propriétés de la fonction de Wigner

Les propriétés de la fonction de Wigner sont données dans l'espace des phases, selon les relations suivantes

(i) la fonction de Wigner est réelle car l'opérateur de densité $\hat{\rho}$ est hermisien

$$W\,(x,p) = W^{\,*}(x,p), \quad (1.23)$$

(ii) On obtient l'intégrale de la fonction de Wigner sur p, comme suit

$$W(x) = \int dp\, W\,(x,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int dp \int dy\; exp\left(-\frac{ipy}{\hbar}\right)\left\langle x+\frac{1}{2}y\middle|\hat{\rho}\middle|x-\frac{1}{2}y\right\rangle$$
$$= \int dy\, \delta(y)\left\langle x+\frac{1}{2}y\middle|\hat{\rho}\middle|x-\frac{1}{2}y\right\rangle = \langle x|\hat{\rho}|x\rangle \quad (1.24)$$
$$= \psi^*(x)\,\psi(x) = |\psi(x)|^2 \geq 0,$$

avec $\int exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) dp = 2\pi\hbar\,\delta(x)$.

Alors l'équation (1.24) donne la densité de probabilité de la position x quand le système est soumis à une mesure, dite « distribution marginale de la position ».

(iii) L'intégrale de la fonction de Wigner sur x donne

$$W(p) = \int dx\, W\,(x,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int dx \int dy\ exp\left(-\frac{ipy}{\hbar}\right)\left\langle x+\frac{1}{2}y\middle|\hat{\rho}\middle|x-\frac{1}{2}y\right\rangle, \tag{1.25}$$

en introduisant les deux variables d'intégration (x', x'') précédentes (positions)

$$\begin{cases} x' = x - \frac{1}{2}y & \text{(1.26a)} \\ x'' = x + \frac{1}{2}y & \text{(1.26b)} \end{cases}.$$

Dont le Jacobien

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial x''}{\partial x} & \frac{\partial x''}{\partial y} \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix}^{-1} = 1, \tag{1.27}$$

qui est identique à

$$W(p) = \int dx\, W\,(x,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int dx' \int dx''\ exp\left(-\frac{ip(x''-x')}{\hbar}\right)\langle x''|\hat{\rho}|x'\rangle. \tag{1.28}$$

Comme, nous avons

$$\begin{cases} \langle p|x''\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{-ipx''}{\hbar}} & \text{(1.29a)} \\ \langle x'|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{ipx'}{\hbar}} & \text{(1.29b)} \end{cases},$$

ce qui donne

$$W(p) = \int dx\, W\,(x,p) = \int dx' \int dx''\, \langle p|x''\rangle\langle x'|p\rangle\langle x''|\hat{\rho}|x'\rangle. \tag{1 .30}$$

A partir des relations de fermeture sur les variables de positions suivantes

$$\begin{cases} 1 = \int dx'|x'\rangle\langle x'| & (1.31a) \\ 1 = \int dx''|x''\rangle\langle x''| & (1.31b) \end{cases}.$$

On obtient donc

$$W(p) = \int dx\, W\,(x,p) = \langle p|\hat{\rho}|p\rangle = \phi^*(p)\phi(p) = |\phi(p)|^2 \geq 0. \quad (1.32)$$

L'équation (1.32) donne la densité de probabilité à l'impulsion p, dite « distribution de probabilité marginale relative à l'impulsion ».

Par conséquent, la fonction de Wigner est une représentation de la distribution d'un état quantique $\psi(x)$, dans l'espace des phases (x,p). La projection de $W\,(x,p)$ sur l'axe de position x, donne la distribution de probabilité en x et la projection sur l'axe d'impulsion p donne la distribution de probabilité en p.

(iv) la fonction de Wigner jouant le rôle d'une densité de probabilité. En plus de permettre de calculer les valeurs moyennes des observables de façon classique, la fonction de Wigner $W\,(x,p)$ partage d'autre propriétés aves les densités de probabilité sur tout l'espace des phases (x,p), la fonction de Wigner est normalisée

$$\int dx \int dp\, W\,(x,p) = \int \psi^*(x)\psi(x)\, dx = \langle\psi(x)|\psi(x)\rangle = Tr(\hat{\rho}) = 1, \quad (1.33)$$

donc la fonction de Wigner est normalisable, et on va la considérer comme une fonction de probabilité.

On peut donc interpréter ces intégrales dans les deux propriétés précédentes **(ii)** et **(iii)** comme des probabilités. On notera également que la propriété **(iv)** vérifie la condition de la normalisation suivant $\int dx \int dp\, W\,(x,p) = 1$ comme la probabilité.

(v) Soient $W_\psi\ (x,p)$ et $W_\varphi\ (x,p)$ respectivement les deux fonctions de distributions de Wigner correspondant aux états quantiques $\psi(x)$ et $\varphi(x)$, notons que dans **[3,14]** on a

$$\left|\int dx\ \psi^*(x)\varphi(x)\right|^2 = 2\pi\hbar \int dx \int dp\ W_\psi\ (x,p)W_\varphi\ (x,p). \tag{1.34}$$

où $(2\pi\hbar)$ est une constante.

(vi) Suivant la propriété **(v)** au cas où $\psi(x) = \varphi(x)$ on obtient l'intégrabilité quadratique suivante

$$\int dx \int dp\left|W_\psi\ (x,p)\right|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar}. \tag{1.35}$$

(vii) La fonction de distribution de Wigner est bornée sur tout l'espace des phases

$$\left|W_\psi\ (x,p)\right|^2 \leq \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^2, \tag{1.36}$$

grace à cette dernière équation, on obtient l'inégalité suivante

$$\left|W_\psi\ (x,p)\right| \leq \frac{1}{\pi\hbar} \Rightarrow -\frac{1}{\pi\hbar} \leq W_\psi\ (x,p) \leq +\frac{1}{\pi\hbar}. \tag{1.37}$$

Il est à noter que la fonction de distribution de Wigner $W\ (x,p)$, ne peut pas être partout positive et qu'elle donne également des valeurs négatives pour certaines régions de p et x. Elle est souvent appelée distribution de quasi-probabilité de Wigner.

Chapitre 2

Transformation de Weyl et le produit de Moyal dans l'espace des phases

Pas longtemps après l'invention de la mécanique quantique Herman Weyl a introduit en 1928 une nouvelle quantification qui permet d'associer un opérateur agissant dans l'espace de Hilbert à une fonction décrite avec des variables de position x et d'impulsion p qui est appelée la transformation de Weyl définie sur l'espace des phases. Ce qui a été indiqué et souligné par Moyal en 1949 **[4-7]**.

La transformation de Weyl est la théorie mathématique qui a pour but d'essayer de passer entre le monde quantique et le monde classique.

Dans ce chapitre, on présente en détail le passage entre les observables quantiques et les fonctions de transformées de Weyl, qui sont fonction de x et p (et inversement) à l'aide d'une transformation de Weyl **[15]**. Les valeurs moyennes des observables dans cet état sont obtenue par la loi de la transformation Wigner-Weyl dans l'espace des phases. En outre, le formalisme du produit de Moyal **[5-7]** est basé étroitement sur la correspondance entre le produit des opérateurs quantiques, et le produit Moyal des fonctions dans l'espace des phases. Finalement, on prouve que les transformées de Weyl, sont un moyen pour obtenir la fonction classique qui correspond à l'opérateur quantique. Cette quantité classique est définie lorsque la limite $\hbar \to 0$, dite cas limite classique-quantique.

2.1. Transformation de Weyl dans l'espace des phases

La quantification de Weyl est une technique utilisée pour décrive la mécanique quantique à partir de l'espace de phases de la mécanique classique.
C'est une prescription qui nous permet d'associer un opérateur quantique à une fonction qui dépend des variables de l'espace de phases (variables canoniques).
Considérons dans le cas unidimensionnel une particule avec sa position désignée par x et son impulsion par p. En mécanique statistique classique, la description d'une particule ponctuelle (comme les molécules où les noyaux) à l'aide d'une densité de probabilité positive $\rho_{cl}\,(x,p)$ dans l'espace des phases. La valeur moyenne d'une quantité mesurable classique $A_{cl}\,(x,p)$ dépendante de la position x et de l'impulsion p, au un point (x,p) peut être exprimée comme suit

$$\langle A\rangle_{cl} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dp\ A_{cl}(x,p)\,\rho_{cl}\,(x,p), \tag{2.1}$$

où la densité de probabilité classique $\rho_{cl}\ (x,p) \geq 0$.

D'autre part, en mécanique quantique on représente le système par un vecteur d'état $|\psi\rangle$ dans l'espace des Hilbert et à toute quantité observable correspond un opérateur $\hat{A}$ dans un état quantique $\psi(x)$. La valeur moyenne de cet opérateur dans même état est donnée, à une dimension par

$$\langle \hat{A} \rangle = Tr\big(\hat{A}\,\hat{\rho}\big) = \int \psi^{*}\,(x)\hat{A}\,\psi(x)\,dx = \langle \psi|\hat{A}|\psi\rangle, \tag{2.2}$$

il faut reconnaître que chaque fonction $\tilde{A}(x,p)$ correspond à un opérateur quantique $\hat{A}$, il deviendrait alors possible de décrire un système quantique à l'aide de l'espace des phases. Par similitude avec la distribution classique $\rho_{cl}\ (x,p)$, la valeur moyenne quantique de l'opérateur $\hat{A}$ suit la fonction $\tilde{A}(x,p)$. En utilisant la distribution quasi-probabilité $W(x,p)$ dans l'espace de phase, on obtient

$$\langle \hat{A} \rangle_{quantique} = \int dx \int dp\ \tilde{A}(x,p)\ W(x,p). \tag{2.3}$$

D'après le principe de la forme alternative de la mécanique quantique si à chaque opérateur $\hat{A}$ a correspondait une fonction de phase $\tilde{A}(x,p)$, il deviendrait possible de décrire un système quantique à l'aide de l'espace de phase. Cette correspondance est fournie par la transformation de Weyl **[15]** qui convertit un opérateur $\hat{A}$ en une fonction $\tilde{A}(x,p)$, qui est dépendante de x et p (où à chaque opérateur $\hat{A}$ correspond une seule fonction dans l'espace des phases $\tilde{A}(x,p)$ et inversement, implique que $\hat{A} \leftrightarrow \tilde{A}(x,p)$).

Nous avons vu que si on a une observable quantique $\hat{A}$, pour calculer sa valeur moyenne dans un état $\hat{\rho}$ de façon classique, il suffit de calculer la fonction de Wigner qui lui est associé pour jouer le rôle de l'observable classique. Cela permet aux résultats de la mécanique quantique, d'être sous forme similaire à ceux trouvés en mécanique quantique dans l'espace des phases.

La transformée de Weyl d'un opérateur quantique $\hat{A}$ correspond à celle d'une fonction $\tilde{A}\ (x,p)$, en d'autres mots $\tilde{A}\ (x,p)$ n'est pas la quantité classique, et joue le rôle d'une fonction dans l'espace des phases et est donnée comme la représentation de Wigner de l'équation (1.15) par

$$\tilde{A}(x,p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left\langle x - \frac{1}{2}y \middle| \hat{A} \middle| x + \frac{1}{2}y \right\rangle exp\left(\frac{+ipy}{\hbar}\right), \tag{2.4}$$

en changeant $\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\hat{\rho}\right)$ par $\hat{A}$ et $W(x,p)$ par $\tilde{A}(x,p)$, où $\tilde{A}(x,p)$ est une fonction de la transformée de Weyl qui dépend de l'opérateur $\hat{A}$.

On peut aussi exprimer $\tilde{A}\ (x,p)$ dans la représentation impulsion p comme suit **[3]**

$$\tilde{A}(x,p) = \int_{-\infty}^{+\infty} du \left\langle p + \frac{u}{2} \middle| \hat{A} \middle| p - \frac{u}{2} \right\rangle exp\left(\frac{+ix\,u}{\hbar}\right). \tag{2.5}$$

Nous soulignons que l'équation (2.5) permet également de donner une fonction $\tilde{A}(x,p)$ par rapport à x et p, dans l'espace des phases de n'importe quel opérateur $\hat{A}$.

Si l'opérateur $\hat{A}$ est donné, on trouve sa transformation de Weyl $\tilde{A}(x,p)$.

Il est possible d'obtenir la distribution de Wigner, en utilisant l'opérateur densité $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, puis en remplaçant $\tilde{A}$ par $\tilde{\rho}$, dans l'équation de la transformation de Weyl en position de l'équation (2.4), on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left\langle x - \frac{1}{2}y \middle| \hat{\rho} \middle| x + \frac{1}{2}y \right\rangle exp\left(\frac{ipy}{\hbar}\right) \\ &= \int dy\, exp\left(\frac{ipy}{\hbar}\right) \left\langle x - \frac{1}{2}y \middle| \psi \right\rangle \left\langle \psi \middle| x + \frac{1}{2}y \right\rangle \equiv 2\pi\hbar\, W(x,p), \end{aligned} \tag{2.6}$$

ce qui est identique à l'expression précédente

$$W(x,p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \psi^*\left(x + \frac{y}{2}\right) \psi\left(x - \frac{y}{2}\right) exp\left(+\frac{ipy}{\hbar}\right), \tag{2.7}$$

on conclut que la distribution de Wigner, est la transformée de Weyl de l'opérateur densité $\hat{\rho}$ divisé par $(2\pi\hbar)$, ce qui implique

$$\hat{\rho} \leftrightarrow \tilde{\rho} = 2\pi\hbar\, W(x,p). \tag{2.8}$$

On peut également obtenir $W(x,p)$ à partir de $\hat{\rho}$, en utilisant l'équation (2.5) de la transformation de Weyl en impulsion

$$W(x,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} du\, \phi^*\left(p-\frac{u}{2}\right)\phi\left(p+\frac{u}{2}\right) exp\left(+\frac{ixu}{\hbar}\right). \tag{2.9}$$

Par conséquent $W^*(x,p) = W(x,p)$, on peut dire que $W(x,p)$ est réelle puisque $\hat{\rho}$, est hermétique (comme nous l'avons vu précédemment, la transformée de Weyl d'un opérateur hermétique est réelle).

On peut dire que, la théorie de la transformation de Weyl et la fonction de Wigner, produisent une forme alternative de la mécanique quantique, dans l'espace des phases et représentent une reformulation de la théorie quantique, pour chaque $\hat{A}$ il existe une seule transformée de Weyl $\tilde{A}(x,p)$ et inversement.

Les transformées de Weyl sont particulièrement simples, si l'opérateur est une fonction de $\hat{x}$ ou $\hat{p}$ seulement, alors la transformée de Weyl est la même fonction de x ou de p.

La preuve

$$\begin{aligned}\widetilde{W}\left(\hat{A}(\hat{x})\right) \equiv \tilde{A}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipy/\hbar}\left\langle x+\frac{y}{2}\middle|\hat{A}(\hat{x})\middle|x-\frac{y}{2}\right\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipy/\hbar} A\left(x-\frac{y}{2}\right)\left\langle x+\frac{y}{2}\middle|x-\frac{y}{2}\right\rangle dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipy/\hbar} A\left(x-\frac{y}{2}\right)\delta(y-0)dy = A(x) \equiv \tilde{A}(x).\end{aligned} \tag{2.10}$$

On a également,

$$\begin{aligned}\widetilde{W}\left(\hat{B}(\hat{p})\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixu/\hbar}\left\langle p+\frac{u}{2}\middle|\hat{B}(\hat{p})\middle|p-\frac{u}{2}\right\rangle du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixu/\hbar} B\left(p-\frac{u}{2}\right)\left\langle p+\frac{u}{2}\middle|p-\frac{u}{2}\right\rangle du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixu/\hbar} B\left(p-\frac{u}{2}\right)\delta(u-0)du = B(p) \equiv \tilde{B}(p).\end{aligned} \tag{2.11}$$

La transformation de Weyl de l'opérateur identité $\hat{\mathbb{1}}$, est donnée par

$$\hat{\mathbb{1}} = \int exp\,(-ipy/\hbar)\left\langle x+\frac{1}{2}y\middle|\hat{\mathbb{1}}\middle|x-\frac{1}{2}y\right\rangle dy = \int exp\left(-\frac{ipy}{\hbar}\right)\delta(y-0))dy = 1. \qquad (2.12)$$

2.2. Valeur moyenne des opérateurs dans l'espace des phases

Soient $\hat{A}$ et $\hat{B}$ deux opérateurs quantiques, dans l'espace de Hilbert. La propriété intéressante de la transformation de Weyl est que la trace du produit de ces deux opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{B}$, est donnée dans l'espace des phases par l'intégrale du produit de leurs transformées de Weyl **[15]**

On a

$$Tr(\hat{A}) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int\int dxdp\tilde{A}(x,p), \qquad (2.13)$$

de la même façon, Les traces des produits des opérateurs $\hat{A}\hat{B}$ est

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int dp\int dx\,\tilde{A}(x,p)\,\tilde{B}(x,p) = Tr(\hat{A}\hat{B}). \qquad (2.14)$$

avec $\tilde{A}(x,p)$ et $\tilde{B}(x,p)$ les transformées de Weyl, des opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{B}$.

A partir de l'équation (2.13), la valeur moyenne de $\hat{A}$ est donnée par

$$\int dx\int dp\,\tilde{A}(x,p) = 2\pi\hbar\,Tr(\hat{A}). \qquad (2.15)$$

A partir de l'équation (2.15), si $\hat{A} = \hat{\rho}$ implique que $\tilde{A}(x,p) = 2\pi\hbar\,W(x,p)$, on a donc

$$\int dx\int dp\,W(x,p) = Tr(\hat{\rho}), \qquad (2.16)$$

et comme d'après $Tr(\hat{\rho}) = 1$, on a donc aussi $\int dx\int dp\,W\,(x,p) = 1$ (confirme la normalisation de la fonction de distribution de Wigner).

Ensuite, si nous prenons $\hat{B} = \hat{\rho} \Rightarrow \tilde{B}(x,p) = 2\pi\hbar\,W(x,p)$ l'équation (2.14), se réduit à

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int dx\int dp\,\tilde{A}(x,p)\tilde{\rho} = \int dx\int dp\,\tilde{A}(x,p)W(x,p) = Tr(\hat{A}\,\hat{\rho}) \equiv \langle\hat{A}\rangle. \qquad (2.17)$$

Ce qui est équivalent à l'équation (2.2), donc l'équation (2.17), donne une valeur moyenne dans l'espace des phases de la transformée de Weyl $\tilde{A}(x,p)$, via la fonction de distribution $W(x,p)$ identique à la valeur moyenne de l'opérateur $\hat{A}$ dans l'espace de Hilbert. Par ailleurs, la fonction de Wigner joue donc le rôle d'une fonction de distribution, comme le montrent les deux équations (2.16) et (2.17). D'autre part, on ne peut l'interpréter comme une densité de probabilité dans l'espace des phases, parce qu'elle n'est pas nécessairement définie positive, comme l'est la fonction de distribution de la théorie classique.

Par ailleurs, si nous prenons $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\rho}$, l'équation (2.14), se transforme en équation (1.36) de l'intégrabilité quadratique et encore une fois $\hat{\rho}$ représente la densité d'état ψ, avec $Tr(\hat{\rho})^2 = Tr(\hat{\rho}) = 1$.

Il peut être utile de considérer la propriété de l'équation (2.14). En particulier, elle permet de trouver la fonction $\tilde{f}\,(x,p)$, qui correspond au produit $\hat{f}(\hat{x},\hat{p}) = \hat{A}(\hat{x},\hat{p})\,\hat{B}(\hat{x},\hat{p})$ des deux opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{B}$ et sont associés aux fonctions $\tilde{A}\,(x,p)$ par $\tilde{B}\,(x,p)$ comme suit

$$\int\int \tilde{f}\,(x,p)dxdp = \int\int \tilde{A}(x,p)\tilde{B}(x,p)dxdp. \tag{2.18}$$

Par conséquent, le premier membre de cette équation est égal à $(2\pi\hbar)Tr(\hat{f}(\hat{x},\hat{p}))$. Il est clair que l'équation (2.18) est identique à l'équation (2.14).

On déduit la transformation de Weyl de l'opérateur Hamiltonien

$\widehat{H}(\hat{x},\hat{p}) = \widehat{T}(\hat{p}) + \widehat{U}(\hat{x})$ du système unidimensionnel, par la forme $\widetilde{H}(x,p) = \tilde{T}(p) + \tilde{U}(x)$.

Les valeurs moyennes des opérateurs $\hat{x}$, $\hat{p}$, $\widehat{T}$, $\widehat{U}$ et $\widehat{H}$, sont respectivement données par

$$\langle\hat{x}\rangle = \int\int W(x,p)\tilde{x}\;\,dx\,dp = \int\int W(x,p)x dx\,dp, \tag{2.19}$$

$$\langle\hat{p}\rangle = \int\int W(x,p)\tilde{p}\;\,dx\,dp = \int\int W(x,p)p\,dx\,dp, \tag{2.20}$$

$$\langle\widehat{T}\rangle = \int\int W(x,p)\tilde{T}(p)dx\,dp = \int\int W(x,p)T(p)dx\,dp, \tag{2.21}$$

$$\langle\widehat{U}\rangle = \int\int W(x,p)\tilde{U}(x)\,dx\,dp = \int\int W(x,p)U(x)\,dx\,dp, \tag{2.22}$$

$$\langle \hat{H} \rangle = \int\int W(x,p)\tilde{H}(x,p)dx\,dp = \int\int W(x,p)\{T(p)+U(x)\}\,dx\,dp, \tag{2.23}$$

où T et U représentent respectivement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système. La transformée de Weyl sera indiquée par un tilde, qui convertit l'opérateur en une fonction dépendante de x et p, dans l'espace des phases.

2.3. Produit de Moyal dans l'espace des phases

La transformation de Weyl du produit $\hat{A}\,\hat{B}$ respectivement exprimée en fonctions des transformées de Weyl $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ des opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{B}$, satisfait à une relation du produit de Moyal des deux fonctions $\tilde{A}(x,p) \star \tilde{B}(x,p)$, dans l'espace des phases, cet dernière a été obtenue par H.J.Groenewold en 1946 **[15]**.

Elle définit la transformation de Weyl du produit $\hat{A}\,\hat{B}$ respectivement par $\tilde{A}(x,p) \star \tilde{B}(x,p)$ à travers, la transformation de Weyl des deux opérateurs individuels.

Le symbole $\star$ indique le produit étoile de Moyal entre les fonctions de la transformée de Weyl $\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C}\cdots$, dans l'espace des phases. Autrement dit, la transformée de l'opérateur $(\hat{A}\hat{B})$ est en général différente du produit ordinaire $\tilde{A}(x,p)\tilde{B}(x,p)$ des transformées de chacun des opérateurs.

La transformation de Weyl du produit d'opérateurs $\hat{A}\,\hat{B}$ est définie comme suit

$$\hat{A}\,\hat{B} \leftrightarrow \tilde{A}\,(x,p) \star \tilde{B}(x,p) \;= \tilde{A}\,(x,p)\; exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\Lambda\right)\tilde{B}(x,p), \tag{2.24}$$

où le produit étoile de Moyal est

$$\star \equiv \; exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\Lambda\right), \tag{2.25}$$

agit sur tout ce qui est à sa droite et à sa gauche.

Λ appelé opérateur différentiel, est donné dans le cas unidimensionnel par

$$\Lambda = \; \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\cdot\frac{\vec{\partial}}{\partial x} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x}\cdot\frac{\vec{\partial}}{\partial p}, \tag{2.26}$$

les flèches indiquent dans quelle direction agissent les dérivées.

L'expression générale (2.24) semble, à première vue, compliquée. Mais le plus souvent les deux fonctions $\tilde{A}(x,p)$ et $\tilde{B}(x,p)$ sont des polynômes avec de faibles puissances en x et p. Dans ce cas, l'expression générale se réduit à des sommes simples. Les calculs avec le produit de Moyal sont alors plus faciles que ceux avec les produits des opérateurs.

On peut écrire l'équation (2.24), comme suit

$$\left(\hat{A}\hat{B}\right) \leftrightarrow exp\left(\frac{\hbar}{2i}\left(\frac{\partial^{(\tilde{A})}}{\partial p}\frac{\partial^{(\tilde{B})}}{\partial x} - \frac{\partial^{(\tilde{A})}}{\partial x}\frac{\partial^{(\tilde{B})}}{\partial p}\right)\right)\tilde{A}(x,p)\tilde{B}(x,p) \overset{\hbar\to 0}{\to} A_{cl}B_{cl}, \tag{2.27}$$

où $\tilde{A} \equiv \tilde{A}(x,p)$, $\tilde{B} \equiv \tilde{B}(x,p)$ et $\frac{\partial^{(\tilde{f})}}{\partial p}$ (ou $\frac{\partial^{(\tilde{f})}}{\partial x}$) est la dérivée par rapport p (ou x) qui agit sur la fonction $\tilde{f} \equiv \left(\tilde{A},\tilde{B}\right)$ de la transformée de Weyl de l'opérateur $\hat{f} \equiv \left(\hat{A},\hat{B}\right)$, avec $exp\left(\frac{\hbar}{2i}\left(\frac{\partial^{(\tilde{A})}}{\partial p}\frac{\partial^{(\tilde{B})}}{\partial x} - \frac{\partial^{(\tilde{A})}}{\partial x}\frac{\partial^{(\tilde{B})}}{\partial p}\right)\right) \overset{\hbar\to 0}{\to} 1$ et $\tilde{A}(x,p)\tilde{B}(x,p) \overset{\hbar\to 0}{\to} A_{cl}B_{cl}$.

Il est connu que le produit étoile $\star$ de Moyal de deux fonctions $\tilde{F}$ et $\tilde{G}$, dans l'espace des phases, n'est pas commutatif, d'où

$$\tilde{F} \star \tilde{G} \neq \tilde{G} \star \tilde{F}, \tag{2.28}$$

mais il est associatif, c'est-à-dire

$$\left(\tilde{F}_1 \star \tilde{F}_2\right) \star \tilde{F}_3 = \tilde{F}_1 \star \left(\tilde{F}_2 \star \tilde{F}_3\right), \tag{2.29}$$

en remplaçant l'exponentielle par son développement en série, tel que ($exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$), il est facile de montrer que,

$$\hat{x}\hat{p} \leftrightarrow x \star p = x\left[1 - \frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\cdot\frac{\vec{\partial}}{\partial x} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x}\cdot\frac{\vec{\partial}}{\partial p}\right)\right]p = xp + \frac{i\hbar}{2}, \tag{2.30}$$

et

$$\hat{p}\hat{x} \leftrightarrow p \star x = p\left[1 - \frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\cdot\frac{\vec{\partial}}{\partial x} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x}\cdot\frac{\vec{\partial}}{\partial p}\right)\right]x = px - \frac{i\hbar}{2}, \tag{2.31}$$

avec $\tilde{x} \equiv x$, $\tilde{p} \equiv p$.

Ensuite, le commutateur du produit étoile $\star$ de Moyal en x et p est

$$[x,p]_\star \equiv x \star p - p \star x = i\hbar, \tag{2.32}$$

Ce résultat est identique à la relation de commutation canonique, de la mécanique quantique suivante

$$[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar. \tag{2.33}$$

A partir de l'expression du produit $\star$ de Moyal des deux fonctions $\tilde{A}\ (x,p)$ et $\tilde{B}\ (x,p)$, nous remarquons que la relation entre le terme différentiel Λ et le symbole de crochet de Poisson $\{.,.\}_{P.B}$ est donnée par

$$\Lambda = -\{.,.\}_{C.B}, \tag{2.34}$$

d'où

$$-A\Lambda B = \{A,B\}_{C.B}, \tag{2.35}$$

le crochet de Poisson unidimensionnel entre les fonctions A et B, est donné par

$$\{A,B\}_{C,B} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial x}. \tag{2.36}$$

Ainsi le produit de Moyal de l'équation (2.24), peut être exprimé par l'exposant du crochet de Poisson suivant

$$\tilde{A}(x,p)\tilde{B}(x,p) = \tilde{A}(x,p)exp\left(\frac{i\hbar}{2}\{.,.\}_{C.B}\right)\tilde{B}(x,p). \tag{2.37}$$

2.4. Cas limite classique de la théorie quantique

On peut utiliser les transformées de Weyl pour obtenir la fonction classique qui correspond à l'opérateur $\hat{A}$. Cette fonction n'est pas simplement la transformée de Weyl elle-même, car cette dernière dépend en général de la constante de Planck $(\hbar)$. mais on l'obtient si on prend la limite $\hbar \to 0$,

l'opérateur $\hat{A}\ (\hat{x},\hat{p}) \leftrightarrow la$ fonction $\tilde{A}(x,p) \overset{\hbar\to 0}{\to}$ la fonction classique $A_{cl}(x,p)$, (2.38)

où la fonction classique est donnée par

$$A_{cl}(x,p) = \lim_{\hbar\to 0} \tilde{A}(x,p). \tag{2.39}$$

Chapitre 3

L'équation de Schrödinger avec une masse effective dépendante de la position via la Méthode de la transformation ponctuelle

Plusieurs méthode et approches se sont avérées depuis quelques années extrêmement utiles en physique théorique dans le but d'étudier les potentiels quantiques et développées dans l'étude des systèmes à masse constante, ont été généralisées aux systèmes avec une masse effective dépendant de la position et ont produit plusieurs résultats intéressants.

Parmi ces méthodes, les intégrales de chemins **[16]**, la méthode de factorisation **[9 ,10]**, la super-symétrie de la mécanique quantique **[17]**, ainsi que la théorie des groupes par l'approche des algèbres de Lie **[11]** qui ont permis de résoudre exactement les équations d'ondes quantiques avec une masse constante, s'étendent à des systèmes avec une masse effective dépendante de la position.

L'intérêt majeur de ces méthodes consiste à déterminer, avec une approche simple et élégante à la fois, des propriétés physiques des systèmes quantiques associées via leurs spectres d'énergie et fonction d'onde, sans avoir recours à résoudre l'équation aux valeurs propres (l'équation de Schrödinger et l'équation de Dirac etc.…).

Un intérêt particulier est porté ces dernières années aux problèmes relatifs à la masse effective et exactement solubles en mécanique quantique. Ceci concerne naturellement le fait que la description de ces systèmes physique est très compliquée. Cependant, dans quelques cas, de tels systèmes peuvent être modifiés au moyen d'un opérateur Hamiltonien simple qui conduit aux problèmes usuels de la mécanique quantique.

Comme les propriétés spectrales de l'équation de Schrödinger pour masse constante sont bien connues, on peut aisément obtenir un potentiel correspondant à l'équation de Schrödinger pour une masse effective dépendante de la position avec un spectre d'énergie identique.

Dans le présent chapitre, on utilise la méthode des transformations ponctuelles canonique **[8]**, sur les équations de Schrödinger unidimensionnelle. On cherche leurs solutions relatives à plusieurs potentiels. Cette méthode permette de transformée l'équation de Schrödinger standard en une équation différentielle du second ordre, qui admettent comme solutions des fonctions spéciales des polynômes d'Hermite avec un spectre d'énergie du modèle d'oscillateur harmonique.

Ce chapitre est organisé comme suit : dans la section (1) on traite la constriction symétrique de la partie cinétique. Ce dernier n'est pas unique, peut être écrite de différentes manières et nous utilisons dans la section (2), la méthode de la transformation canonique ponctuelle sur l'équation de Schrödinger harmonique, qui introduit des solutions exactes de l'équation du second ordre de Schrödinger avec une masse effective dépendante de la position.

3.1. Equation de Schrödinger non relativiste avec une masse effective dépendante de la position

La forme la plus générale de l'opérateur d'énergie cinétique pour un système doté d'une masse effective dépendante de la position a été proposée par O. Von Roos **[18]**, comme suit

$$\begin{aligned}\hat{T}(\hat{x},\hat{p}) &= \left\{\frac{p^2}{2m(x)}\right\} \\ &= -\frac{1}{4}\Big(M^{\alpha}(\hat{x})\hat{p}\,M^{\beta}(\hat{x})\hat{p}\,M^{\gamma}(\hat{x}) + M^{\gamma}(\hat{x})\,\hat{p}\,M^{\beta}(\hat{x})\hat{p}\,M^{\alpha}(\hat{x})\Big),\end{aligned} \tag{3.1}$$

où $\{.,.\}$ désigne l'opération de symétrisation, avec les opérateurs d'impulsion $\hat{p} \Rightarrow -i\hbar\,\frac{d}{dx}$ et position $\hat{x} \Rightarrow x$, et la masse $M(\hat{x}) = m_0\, m(\hat{x})$ avec la forme du partie cinétique $\hat{T}(\hat{x},\hat{p})$, est symétrique.

En raison de la non-commutativité entre l'opérateur de quantité de mouvement $\hat{p}$ et l'opérateur de masse effective dépendant de la position $m(\hat{x})$, $\hat{T}(\hat{x},\hat{p})$ a été spécifiquement construit pour être hermitien, au cas unidimensionnel $m\,(\hat{x})$ est (MEDP) et $\hat{p}$ l'opérateur de la quantité de mouvement.

Les paramètres α, β et γ, sont connues sous le nom des paramètres d'ambiguïté de O.Von Roos, qui ont été proposés en se basant sur des considérations physiques particulières aux problèmes étudiés. Ils sont liés par la contrainte suivante

$$\alpha + \beta + \gamma = -1. \tag{3.2}$$

Sachant que le choix des paramètres de Von Roos, pour les opérateurs d'énergie cinétique doit être limité, il existe donc plusieurs formes pour définir l'opérateur d'énergie cinétique du système quantique **[18]**, qui assurent de retrouver la forme conventionnelle de l'opérateur de l'énergie cinétique au cas d'une masse constante. Sachant que les choix des paramètres α, β et γ correspondra à un Hamiltonien différent et par conséquent, le même problème physique conduira à des spectres différents. Par exemple, ces paramètres peuvent être ajustés de telle sorte à approcher les valeurs expérimentales d'un problème physique connu.

Nous dressons ci-dessous un tableau des valeurs possibles des paramètres α, β et γ, qui ont été proposés pour résoudre certain problème physique (voir les références)

paramètres d'ambiguïté	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\gamma}$
Ref. **[19]**	0	-1	0
Refs. **[20]** et **[21]**	-1	0	0
Ref. **[22]**	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
Ref. **[23]**	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Par conséquent, la forme de l'énergie cinétique introduite par Ben Daniel et Duke qui caractérise l'effet de la masse variable **[19]**, est nécessaire d'exiger la condition suivante $\alpha = \gamma = 0$, et qui implique que $\beta = -1$. Lorsque $\beta = \gamma = 0$ et $\alpha = -1$ est donner l'énergie cinétique introduite par Gora et Williams ou le Barstard. Dans le cas $\alpha = \gamma = -\frac{1}{2}$ implique que $\beta = 0$ se réduit au l'énergie cinétique de Zhu et Kromer. Ainsi lorsque $\beta = \gamma = -\frac{1}{2}$ on obtient le cas de Li-Kuhn.

L'équation (3.1) est réduite à la forme

$$\hat{T}(\hat{x},\hat{p}) \Rightarrow \hat{T}(x) = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\left[\frac{d}{dx}\frac{1}{m(x)}\frac{d}{dx}\right] + U_{\alpha\gamma}(x), \tag{3.3}$$

où le potentiel complémentaire $U_{\alpha\gamma}(x)$ est donné comme suit

$$U_{\alpha\gamma}(x) = -\frac{\hbar^2}{4m^3(x)}[(\alpha+\gamma)m(x)m''(x) - 2(\alpha\gamma+\alpha+\gamma)m'^2(x)], \tag{3.4}$$

où $m'(x)$ et $m''(x)$ désignent respectivement les dérivées première et seconde de la distribution de la $m(x)$ par rapport à la position x, par exemple dans le cas de Ben Daniel et Duke on choisit $\alpha = \gamma = 0$ et $\beta = -1$, donc le terme $U_{\alpha\gamma}(x)$ a disparu.

Au cas unidimensionnelle l'Hamiltonien est s'écrit par la somme de l'opérateur d'énergie cinétique $\hat{T}(x)$ et l'énergie potentielle $\tilde{V}(\hat{x})$ comme suit

$$\hat{H} = \hat{T}(\hat{p},x) + \tilde{V}(\hat{x}) = \left\{\frac{p^2}{2m(x)}\right\} + \tilde{V}(\hat{x}), \tag{3.5}$$

l'Hamiltonien générale du système relatif à une masse effective dépendante de la position $M(x)$ où $\tilde{V}(x)$ est l'énergie potentielle, est donné par

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\left[\frac{d}{dx}\frac{1}{m(\hat{x})}\frac{d}{dx}\right] + U_{\alpha\gamma}(x) + \tilde{V}(x), \tag{3.6}$$

en utilisant les unités naturelles ($m_0 = \hbar = 1$), au cas du système unidimensionnel, nous obtenons l'Hamiltonien de l'équation (3.6), comme suit

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m(x)}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m'(x)}{2m^2(x)}\frac{d}{dx} + U_{\alpha\gamma}(x) + \tilde{V}(x), \tag{3.7}$$

par ailleurs, l'équation de Schrödinger d'une masse effective dépendante de la position, correspondante à l'Hamiltonien de l'équation (3.7) peut-être écrite sous une forme différentielle

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{m'(x)}{2m(x)}\frac{d\psi(x)}{dx} + m(x)V(x)\psi(x) = E\psi(x). \tag{3.8}$$

Où le potentiel d'interaction ou le potentiel effective $V(x)$ est composé par la somme du potentiel physique $\tilde{V}(x)$ et d'une partie complémentaire $U_{\alpha\gamma}(x)$, ce dernier est la conséquence de la dépendance spatiale de la masse effective, elle disparaitra si la masse constante, auquel cas le problème est standard.

Où E (valeur propre) est l'énergie relative à la fonction d'onde $\psi(x)$.

3.2. Equation de Schrödinger avec une masse effective dépendante de la position visualisé par la Méthode de la transformation ponctuelle canonique

Dans cette section nous présentons une méthode théorique dite la transformation ponctuelle canonique. L'intérêt de présente cette méthode est que les équations différentielles du second ordre sont réductibles en équations différentielles du premier ordre et en intégrant ces dernières, on trouve aisément la solution désirée. Pour résoudre l'équation (3.8) exactement, qui nous mènent à définir des potentiels analytiquement solubles pour les systèmes quantiques. L'approche directe consiste à appliquer les transformations ponctuelles canoniques **[24]** à l'équation de Schrödinger à masse constante pour des potentiels dont les solutions exactes sont bien établies, et de déduire les solutions exactes appropriées aux potentiels effectifs avec masse dépendante de la position.

Soit un potentiel physique unidimensionnel $\bar{V}(y)$, l'équation de Schrödinger standard indépendante du temps à masse constante s'écrit par

$$\left(-\frac{d^2}{2dy^2}+\bar{V}(y)\right)\phi(y)=E\,\phi(y). \tag{3.9}$$

Où E exprime l'énergie de système. Pour transformer l'équation de Schrödinger standard en une équation de Schrödinger avec une masse variable dépendante de la position, il est nécessaire de suivie la transformation de coordonnée qui est, définie par

$$y \to f(x). \tag{3.10}$$

Nous appliquons la méthode de transformation ponctuelle canonique sur la fonction d'onde $\phi(y)$, Dans ce cas, il est d'usage de mettre la fonction d'onde $\phi(y)$ sous forme d'un

produit d'une fonction de masse $m^{\alpha}(x)$ et d'une autre fonction d'onde $\psi(x)$,de sorte que la solution de l'équation (3.9) se réduit la résolution d'une équation différentielle de seconde ordre pour la fonction d'onde $\psi(x)$, qui est appelée aussi équation de Schrödinger avec une masse effective dépendante de la position

$$\phi(y) = m^{\alpha}(x)\psi(x), \tag{3.11}$$

a partir de (3.10), on obtient

$$\frac{d}{dy} = \frac{1}{f'(x)}\frac{d}{dx}, \tag{3.12}$$

donc

$$\frac{d^2}{dy^2} = \frac{1}{f'^2(x)}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{f''(x)}{f'^3(x)}\frac{d}{dx}, \tag{3.13}$$

en appliquant les deux membres de l'équation (3.13) sur la fonction d'onde $\phi(y)$ définie par l'équation (3.11), il vient que

$$\frac{d}{dx}(m^{\alpha}\psi) = \alpha\, m^{\alpha-1}m'\psi + m^{\alpha}\psi', \tag{3.14}$$

et

$$\frac{d^2}{dx^2}(m^{\alpha}\psi) = \alpha(\alpha-1)m^{\alpha-2}m'^2\psi + \alpha m^{\alpha-1}m''\psi + 2\alpha m^{\alpha-1}m'\psi' + m^{\alpha}\psi'', \tag{3.15}$$

en substituant (3.14) et (3.15) dans (3.9), on obtient l'équation différentielle satisfaite par la nouvelle fonction d'onde $\psi(x)$ sous la forme

$$\left\{-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} - \left(\alpha\frac{m'}{m} - \frac{f''}{2f'}\right)\frac{d}{dx} - \frac{\alpha}{2}\left[\frac{m''}{m} + (\alpha-1)\left(\frac{m'}{m}\right)^2 - \left(\frac{m'}{m}\right)\frac{f''}{f'}\right] + (f')^2\,\bar{V}\big(f(x)\big)\right\}\psi(x) = (f')^2 E\,\psi(x), \tag{3.16}$$

où $\psi(x)$ satisfait à une équation du type Schrödinger transformée avec une masse variable dépendante de la position.

En comparant l'équation (3.8) avec l'équation (3.16) et par l'identification terme à terme nous pouvons déduire les expressions suivantes

$$\alpha\frac{m'}{m}-\frac{f''}{2f'}=\frac{m'(x)}{2m(x)}, \tag{3.17}$$

et

$$V(x)-E=\frac{(f')^2}{m}(\bar{V}(f(x))-E)-\frac{\alpha}{2m}\left[(\alpha-1)\left(\frac{m'}{m}\right)^2-\left(\frac{m'}{m}\right)\frac{f''}{f'}+\frac{m''}{m}\right], \tag{3.18}$$

avec $V(x)=U_{\alpha\gamma}(x)+\tilde{V}(x)$,

en intégrant l'équation (3.17), on obtient la fonction auxiliaire $f(x)$ de la forme

$$f'=m^{2\alpha+1}, \tag{3.19}$$

en insérant l'expression (3.19) dans l'équation (3.18), on obtient

$$\begin{aligned}V(x)&=U_{\alpha\gamma}(x)+\tilde{V}(x)\\&=\frac{(f')^2}{m}\bar{V}\big(f(x)\big)+(1-m^{4\alpha+1})E\\&\quad-\frac{\alpha}{2m}\left[\frac{m''}{m}-(\alpha+2)\left(\frac{m'}{m}\right)^2\right].\end{aligned} \tag{3.20}$$

Le potentiel $V(x)$ est considérée comme une partie dépendante de position x et du terme de masse $m(x)$, au lieu des valeurs propre de l'énergie E de ce système, donc il est nécessaire que le paramètre α prend une valeur $\alpha=-1/4$ (pour éliminée le deuxième membre de l'équation (3.20)).

Il est donc évident de trouver la fonction auxiliaire par

$$f(x) = \int \sqrt{m(x)}dx, \tag{3.21}$$

et par conséquent la fonction d'onde $\psi(x)$ d'un système doté d'une masse effective dépendante de la position se réduit en

$$\psi(x) = m^{\frac{1}{4}}(x)\phi(y) = m^{1/4}(x)\phi(f(x)), \tag{3.22}$$

avec un potentiel correspondant est

$$V(x) = U_{\alpha\gamma}(x) + \tilde{V}(x) = \bar{V}\big(f(x)\big) + \frac{1}{8m}\left[\frac{m''}{m} - \frac{7}{4}\left(\frac{m'}{m}\right)^2\right]. \tag{3.23}$$

Nous avons transformé l'équation de Schrödinger standard (3.9) relative à la fonction d'onde $\phi(y)$ d'une particule de masse constante, placée dans le potentiel $\bar{V}(y)$ en une autre équation de Schrödinger (3.8) satisfait la fonction $\psi(x)$ relative à une particule de masse variable dans l'espace, placée dans le potentiel physique $V(x)$, de distribution de masse $m(x)$.

Sachant que l'énergie E dans les deux équations (3.8) et (3.9) ont un spectre d'énergie identique. Par conséquent, la méthode de la transformation ponctuelle canonique est utilisée pour obtenir des potentiels, l'un correspondant à une particule de masse constante et l'autre correspondant à une particule de masse dépendante de l'espace.

Dans cette partie nous essayons de traiter explicitement le système d'oscillateur harmonique. La détermination du spectre d'énergie E (valeur propre) et des fonctions d'onde $\phi(y)$ du problème A une dimension, d'une particule placée dans un potentiel quadratique, appelé oscillateur harmonique $\bar{V}(y) = \frac{1}{2}\, y^2 = \frac{1}{2}\,(f(x))^2$, revient à la résolution de l'équation de Schrödinger (3.9). Les solutions elles sont données par

$$E = E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right), n \in N \tag{3.24}$$

et

$$\phi(y) = \phi_n^{(\mathcal{H})}\big(f(x)\big) = \mathcal{N}_n^{(\mathcal{H})}\ exp\left(-\frac{1}{2}f(x)^2\right) H_n\big(f(x)\big), \tag{3.25}$$

nous déterminons la constante de normalisation $\mathcal{N}_n^{(\mathcal{H})}$ d'équation (3.25), à partir de la relation d'ortho- normalisation :

$$\big(\psi_n(x), \psi_m(x)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n{}^*(x)\, \psi_m(x) dx = \delta_{nm}, \tag{3.26}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker qui vaut 1 pour $n = m$ et 0 pour $n \neq m$.

En utilisant la condition de normalisation de l'équation (3.26) on obtient la constante de normalisation, au cas d'Hermite dans l'équation (3.25)

$$\mathcal{N}_n^{(\mathcal{H})} = \sqrt{\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}}\ . \tag{3.27}$$

L'expression de la fonction d'onde normalisé dans le cas des potentiels d'oscillateur Harmonique est donnée en terme de polynôme d'Hermite par

$$\phi(y) = \phi_n^{(\mathcal{H})}\big(f(x)\big) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}}\ exp\left(-\frac{1}{2}f(x)^2\right) H_n\big(f(x)\big), \tag{3.28}$$

à partir des équations (3.11) et (3.28) on aboutit une fonction d'onde $\psi(x)$ de l'équation du type de Schrödinger avec une masse variable dépendante de la position suivante

$$\psi(x) = m^{\frac{1}{4}}(x)\phi(y) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}}\ m^{1/4}(x)\, exp\left(-\frac{1}{2}f(x)^2\right) H_n\big(f(x)\big), \tag{3.29}$$

en effet le potentiel se réduit au potentiel de l'équation (3.23) quelles que soient les masse effectives $m(x)$.

La méthode de transformation ponctuelle peut être utilisée pour étudier les solutions exactes de l'équation de Schrödinger avec une masse effective dépendante de la position pour plusieurs potentiels. Les états propres de tous ces systèmes avec MEDP, peuvent être exprimés par trois types de fonctions spéciales, telles le polynôme d'Hermite, Laguerre généralisé et Jacobi.

Où PH, PLG et PJ sont respectivement les abréviations des polynômes d'Hermite, les polynômes de Laguerre généralisés et polynôme de Jacobi.

Chapitre 4

Polynômes d'Hermite visualisées via la fonction de distribution de Wigner

L'équation de Schrödinger d'une masse variable a été depuis longtemps confrontée à un dilemme, celui du problème d'ordonnancement. En effet, puisque la masse, dépendante de la position, et l'opérateur d'impulsion ne commutent pas dans les problèmes relatifs aux masses variables, la question concernant la forme correcte que peut prendre l'opérateur de l'énergie cinétique dans le Hamiltonien généralisé est d'une importance capitale **[19].** Ce problème existe depuis de longue date en mécanique quantique et il est considéré aujourd'hui comme une ambigüité.

Bien que le traitement de l'équation de Schrödinger avec masses effectives soit difficile, plusieurs méthodes ont été élaborées pour éviter cette ambigüité. D'une part, en proposant des modèles théorique dans l'unique but est de construire une équation de Schrödinger pour masses effectives dépourvue d'ambigüité **[3]** d'autre part, des modèles ont été introduites pour établir la relation entre la solution exacte de l'équation de Schrödinger avec masse effective et l'ambiguïté d'ordonnancement.

On peut citer la méthode de Nikifarov-uvarov N-U **[25]**, la théorie d'itération asymptotique **[26]**. Il est intéressant de trouver en physique mathématique, l'état cohérent **[27]** et les états PT-symétrie **[3]**. Plusieurs méthodes approchées, y compris la méthode de factorisation **[10]**, La super-symétrie de la mécanique quantique et les potentiels invariants des formes **[17]**, l'Algèbre de Lie **[12]**, les intégrales de chemin **[16]** et les techniques des opérateurs **[11]** ont été appliquées au système quantique, pour obtenir les solutions exactes de manière algébrique. Il est à noter que chacun des ces formalismes est convenable et avantageux dans un domaine bien déterminé où s'applique la mécanique quantique.

Un cas particulièrement intéressant apparait lorsque nous essayons de reformuler la mécanique quantique sur l'espace des phases dans le contexte d'une particule soumise à un potentiel arbitraire et dotée d'une masse dépendante de la position **[28, 29]** l'étude des systèmes physiques avec des masses effectives dépendantes de la position via le formalisme de quasi distribution de Wigner a été de nombreux travaux scientifiques ces dernières années **[3, 30, 31, 32,33].** Dépendamment d'être un sujet intéressant lui-même, une telle fonction a trouvée une large application dans les sciences des matériaux et en physique de la matière condensée, non seulement dans la description du mouvement des électrons dans des semi-conducteurs à puits quantique **[34]** mais aussi on la trouve dans l'étude des puits et liquides quantiques, les propriétés du ^3He, les impuretés dans les cristaux **[34]** etc.

Nous intéressons dans ce travail, à la détermination, dans le cas de polynôme d'Hermite via le formalisme de la mécanique quantique dans l'espace des phases, la distribution de Wigner, les valeurs moyennes de l'observable $\mu(x)$ et d'impulsion p relatifs à la masse variable avec les incertitudes ainsi que les valeurs propres de niveaux d'énergie correspondante. Dans le but de trouver une certaine correction quantique à la physique statistique classique, les distributions de quasi-probabilité de Wigner associées à la transformation de Weyl, sont des fonctions que nous cherchons à étudier. Les fonctions de distribution de Wigner est une technique bien connue. A titre d'exemple, elle est utilisée en optique quantique, pour établir des analogies entre la mécanique classique et la mécanique quantique. Elles permettent également de mettre en œuvre une approche classique pour un problème quantique pour induire des informations sur la dynamique du système quantique. Les deux formalismes, à savoir la mécanique quantique dans l'espace de Hilbert (Heisenberg, Schrödinger et Dirac) et les intégrales de chemin de Feynman sont établis, comme il est bien connu, pour apporter une explication aux différents phénomènes quantiques. Parallèlement, les fonctions de distributions de Wigner et la transformation de Weyl fournissent un traitement alternatif pour décrire la mécanique quantique dans l'espace des phases, indépendamment des deux premiers formalismes. Notons que certaines études de systèmes quantiques par les fonctions de Wigner et la transformation de Weyl ont été réalisées.

Ce travail est organisé comme suit: Dans la section (4.2), nous allons déterminer analytiquement la fonction de distribution de Wigner pour des états propres des polynômes d'Hermite avec une masse effective dépendante de la position, et nous présentons leurs fonctions de distribution de Wigner bidimensionnelles et tridimensionnelles qui nous permettent de tirer certaines propriétés. Dans la section (4.3) nous calculerons, les écarts quadratiques de $\Delta\hat{\mu}$ et de l'impulsion $\Delta\hat{p}$ afin de vérifier le principe d'incertitude de Heisenberg pour la masse est variable et on détermine ainsi les valeurs propres $E_n^{(\mathcal{H})}$de l'énergie pour le cas d'Hermite. Nous terminons par une conclusion générale dans laquelle nous résumerons l'essentiel de nos résultats, et les perspectives futures pour élargir les études existantes concernant les polynômes orthogonaux.

4.1. Fonction de distribution de Wigner

Comme nous avons vu dans le premier chapitre, la fonction de distribution de Wigner unidimensionnelle d'une fonction d'onde $\psi_n(x)$, dans l'espace de phase (x,p), est donnée par

$$W(\psi_n|x,p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, {\psi_n}^*\left(x-\frac{\hbar y}{2}\right)\psi_n\left(x+\frac{\hbar y}{2}\right) exp(-ipy). \tag{4.1}$$

Cette fonction satisfait les propriétés suivantes :

(i) La réalité

$$W\,(\psi_n|x,p) = W^{\,*}(\psi_n|x,p), \tag{4.2}$$

(ii) Densité de probabilité marginale de la position

$$P(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp\;\; W\,(\psi_n|x,p), \tag{4.3}$$

(iii) Densité de probabilité marginale relative à l'impulsion

$$P(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\;\; W\,(\psi_n|x,p), \tag{4.4}$$

(iv) La fonction de Wigner est normalisée

$$NorW\,(\psi_n|x,p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dp\;\; W\,(\psi_n|x,p) = 1, \tag{4.5}$$

(v) La fonction de Wigner est bornée

$$|W\,(\psi_n|x,p)| \leq \frac{1}{\pi\hbar}. \tag{4.6}$$

A partir de l'équation (4.1), on obtient la valeur moyenne d'un opérateur quantique $\hat{\mathcal{O}}$ via la transformation de Wigner-Weyl, comme suit

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, W(\psi_n|x\,,p)\widetilde{W}\big[\hat{\mathcal{O}}\big], \tag{4.7}$$

où $\tilde{\mathcal{O}} \equiv \widetilde{W}[\hat{\mathcal{O}}]$ est la transformée de Weyl de l'opérateur $\hat{\mathcal{O}}$ dans l'espace de phase, et est définie par

$$\widetilde{W}[\hat{\mathcal{O}}] = \hbar \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipy} \left\langle x + \frac{\hbar y}{2} \middle| \hat{\mathcal{O}} \middle| x - \frac{\hbar\, y}{2} \right\rangle dy. \tag{4.8}$$

Alors que les deux correspondances, les équations (4.7) et (4.8), permettent de calculer les valeurs moyennes des observables quantiques. Nous calculons, analytiquement et numériquement, la fonction de distribution de Wigner pour des états propres qui sont fonctions des polynômes d'Hermite. Comme il est bien connu, les systèmes quantiques associés à la masse constante sont exprimés par rapport des coordonnées généralisées $(\hat{x}, \hat{p})$. Dans ce chapitre, nous permet de calculer les valeurs moyennes des nouveau coordonnées $(\mu(\hat{x}), \hat{p})$ qui sont obtenus a partir de la méthode transformation ponctuelle canonique , Cette dernière permette de transformée l'équation de Schrödinger standard en une équation différentielle du second ordre associée à une masse variable , qui admettent comme solutions des fonctions spéciales des polynômes d'Hermite avec un spectre d'énergie du modèle d'oscillateur harmonique.

Afin d'analyser la relation d'incertitude de Heisenberg (PUH). Nous avons examiné la correspondance qui existe entre les fonctions dans l'espace des phases et les observables quantiques dans l'espace de Hilbert, notre analyse révèle: **(i)** les fonctions des distributions de Wigner dans l'espace des phases pour le cas d'Hermite d'une masse dépendante de la position ont des formes circulaires et sont comprimées dans la direction x et s'élargissent dans la direction de l'impulsion p lorsque le nombre λ augmente.

Dans ce cas des polynômes d'Hermite d'une masse variable $m(x)$, on peut observer qu'il existe un modèle comme étant un comportement linéaire, de la relation d'incertitude est :

$$\Delta\hat{\mu}\, \Delta\hat{p} = n + \frac{1}{2}, \tag{4.9}$$

4.2. Equation de Schrödinger d'une masse effective dépendante de la position au cas d'Hermite avec les potentiels correspondantes

Dans ce travail, nous avons étudié en détail un certain potentiel quantique $V(x)$ dans le cadre de la mécanique quantique non relativiste basée sur une masse effective dépendante de la position $m(x)$.

Comme nous avons vu dans le troisième chapitre l'équation de Schrödinger d'une masse effective dépendante de la position s'écrit sous la forme

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{m'(x)}{m(x)}\frac{d\psi(x)}{dx} + 2m(x)[E - V(x)]\psi(x) = 0, \tag{4.10}$$

cette dernière à été résolue selon la base d'oscillateur harmonique par l'utilisation la méthode de la transformation ponctuelle voir le chapitre trois.

Pour résoudre l'équation de Schrödinger d'une particule non relativiste à une dimension (4.10) nous avons proposé quatre types de la masse effective $m(x)$, sachant que la masse $m(x)$ admet un nombre spécifique des potentiels $V(x)$ qui sont obtenus à partir des paramètres d'ambiguïté (α, β, γ) de O.Von Roos, ces dernières sont portés dans le Tableau 2.

les potentiels correspondants $V(x) \equiv V_i(x)$ où $i \epsilon \{1,2,3\}$ pour certaines choix possibles de paramètres d'ambiguïté α, β et γ sont noter par

$$\begin{cases} V(x) = V_1(x) \ ; (\alpha, \beta, \gamma) \equiv \ (0, -1, 0) \\ V(x) = V_2(x) \ ; (\alpha, \beta, \gamma) \equiv (-1, 0, 0) \\ V(x) = V_3(x) \ ; (\alpha, \beta, \gamma) \equiv \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) \text{ où } (\alpha, \beta, \gamma) \equiv \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \end{cases}, \tag{4.11}$$

tels que la conduction suivante est toujours vérifiée **[18]**

$$\alpha + \beta + \gamma = -1. \tag{4.12}$$

Le tableau suivant présente plusieurs potentiels quantiques des formes compliquées pour les différents types de la masse $m(x)$

Les masses $m(x)$	Les potentiels correspondants $V_i(x)$ pour des différentes valeurs possibles de (α, β, γ)	La fonction de masse auxiliaire $f(x) = \mu(x)$
$m(x) = \left(\frac{\lambda + x^2}{1 + x^2}\right)^2$	$V_1(x) = \frac{1}{2}(f(x))^2 + \frac{\lambda - 1}{2(\lambda + x^2)^4}(3x^4 + (4 - 2\lambda)x^2 - \lambda)$ $V_2(x) = \frac{1}{2}(f(x))^2 + \frac{(-1+\lambda)(\lambda+4\lambda x^2-3x^2(2+x^2))}{2(\lambda+x^2)^4}$ $V_3(x) = \frac{1}{2}(f(x))^2 + \frac{(-1+\lambda)\ (\lambda - 2x^2 - 3x^4)}{2(\lambda + x^2)^4}$	$f(x)$ $= x + (\lambda - 1)\arctan(\lambda x)$
$m(x) = e^{\lambda x}$	$V_1(x) = \frac{1}{2}(f(x))^2 - \frac{3}{32}\lambda^2 e^{-\lambda x}$ $V_2(x) = \frac{1}{2}(f(x))^2 + \frac{5}{32}\lambda^2 e^{-\lambda x}$ $V_3(x) = \frac{1}{2}(f(x))^2 + \frac{1}{32}\lambda^2 e^{-\lambda x}$	$f(x) = \frac{2}{\lambda}\, e^{\frac{\lambda}{2}x}$
$m(x) = \frac{1}{1 + \lambda x^2}$	$V_1(x) = \frac{1}{2}(f(x))^2 - \frac{\lambda^2(2 + \lambda^2 x^2)}{8 + 8\lambda^2 x^2}$ $V_2(x) = \frac{1}{2}(f(x))^2 - \frac{1}{8}\lambda^2(-3 + \frac{1}{1+\lambda^2 x^2})$ $V_3(x) = \frac{1}{2}(f(x))^2 - \frac{\lambda^2(-2 + \lambda^2 x^2)}{8 + 8\lambda^2 x^2}$	$f(x) = \frac{1}{\lambda}\mathrm{ArcSinh}(\lambda x)$
$m(x) = \frac{1}{\lambda + x^2}$	$V_1(x) = \frac{1}{2}(f(x))^2 - \frac{x^2 + 2\lambda}{8(x^2 + \lambda)}$ $V_2(x) = \frac{1}{2}(f(x))^2 + \frac{1}{4} + \frac{x^2}{8(x^2+\lambda)}$ $V_3(x) = \frac{1}{2}(f(x))^2 - \frac{x^2 - 2\lambda}{8(x^2 + \lambda)}$	$f(x) = \log[x + \sqrt{x^2 + \lambda}]$

Avec la fonction de masse auxiliaire $f(x)$, pour une masse $m(x)$, est donnée par

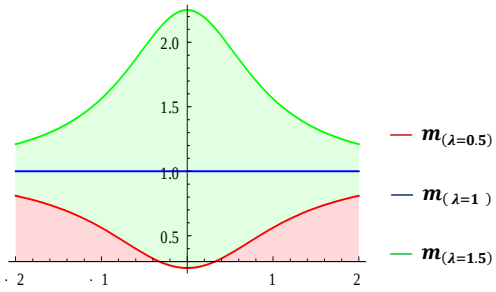
$$f(x) = \mu(x) = \int \sqrt{m(x)}\, dx, \tag{4.13}$$

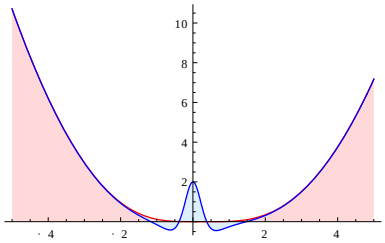
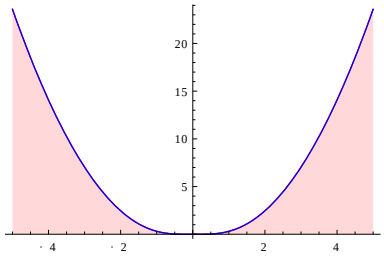
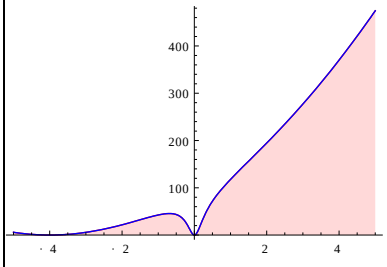
où λ est un paramètre réel positif associé à la masse variable $m(x)$.

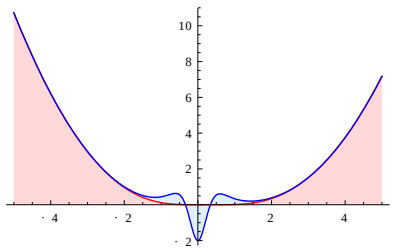
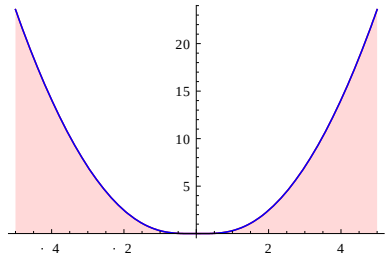
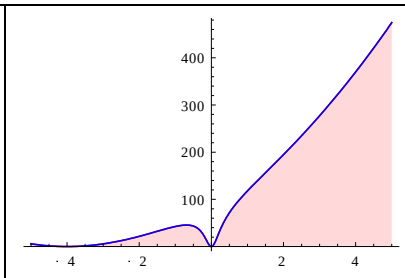
Les allures de potentiels et de distributions de masses sont représentées respectivement

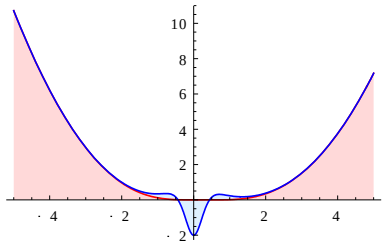
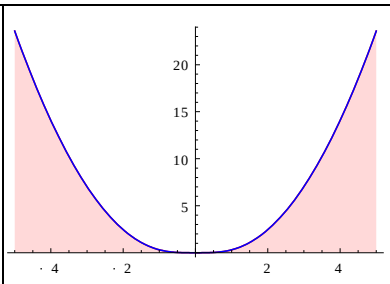
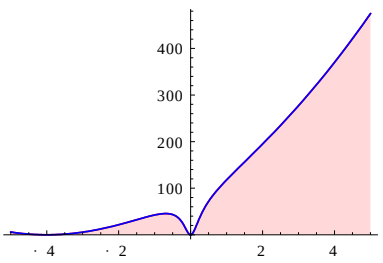
sur les figures ci-contre pour des valeurs proposer de paramètre de masse λ.

- **Cas 1 :** $m(x) = \left(\frac{\lambda+x^2}{1+x^2}\right)^2$

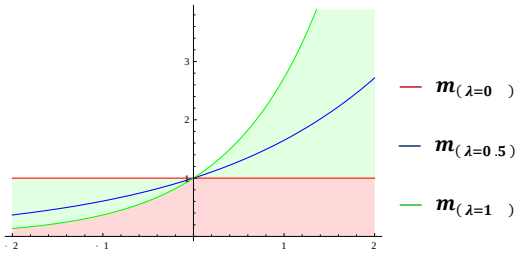


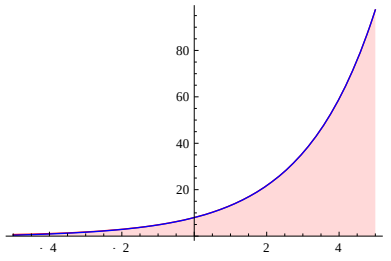
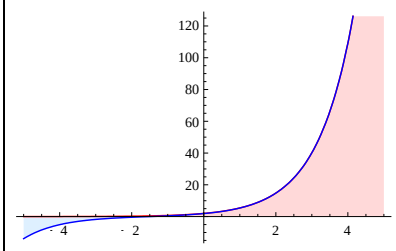
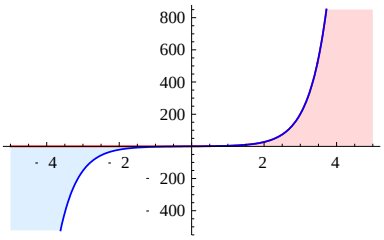
		
$_V_{oH}$ $_V_1(\alpha,\beta,\gamma) = V_1(0,-1,0); \lambda = 0.5$	$_V_{oH}$ $_V_1(\alpha,\beta,\gamma) = V_1(0,-1,0); \lambda = 1$	$_V_{oH}$ $_V_1(\alpha,\beta,\gamma) = V_1(0,-1,0); \lambda = 5$

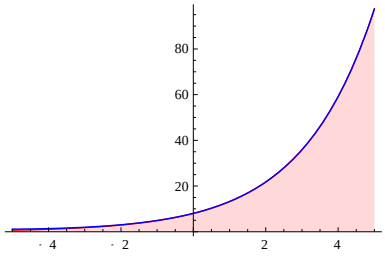
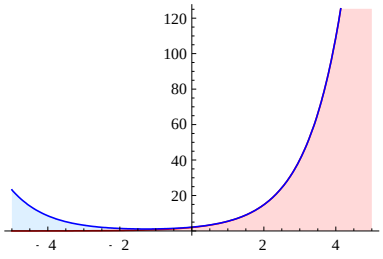
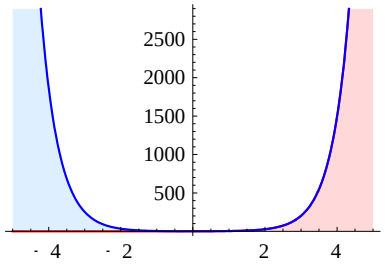
		
$_V_{oH}$ $_V_2(\alpha,\beta,\gamma) = V_2(-1,0,0); \lambda = 0.5$	$_V_{oH}$ $_V_2(\alpha,\beta,\gamma) = V_2(-1,0,0); \lambda = 1$	$_V_{oH}$ $_V_2(\alpha,\beta,\gamma) = V_2(-1,0,0); \lambda = 5$

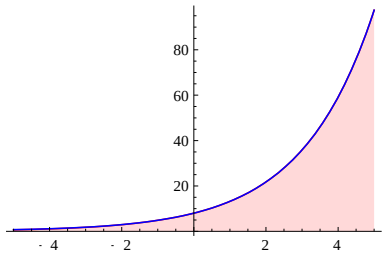
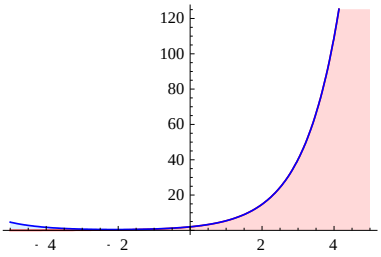
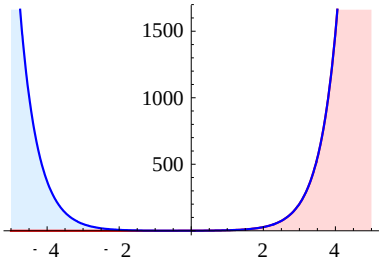
		
$_V_{oH}$	$_V_{oH}$	$_V_{oH}$
$_V_3(\alpha,\beta,\gamma) = V_3\left(-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right);\lambda = 0.5$	$_V_3(\alpha,\beta,\gamma) = V_3\left(-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right);\lambda = 1$	$_V_3(\alpha,\beta,\gamma) = V_3\left(-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right);\lambda = 5$

- **Cas 2 :** $m(x) = e^{\lambda x}$

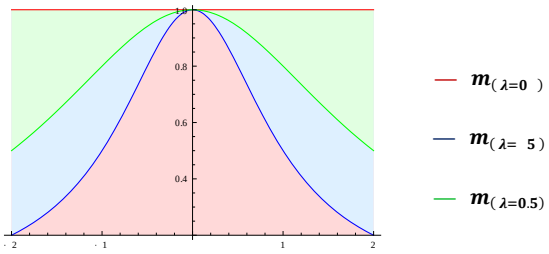


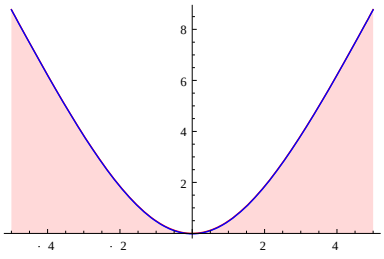
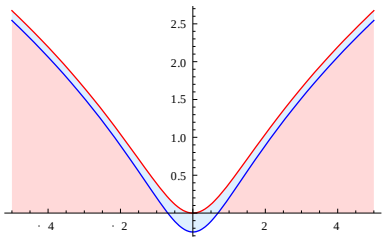
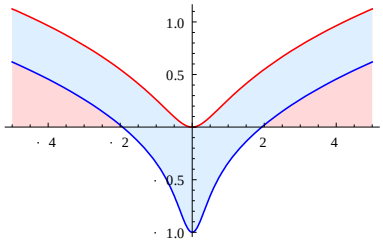
		
$_V_{oH}$	$_V_{oH}$	$_V_{oH}$
$_V_1(\alpha,\beta,\gamma) = V_1(0,-1,0);\lambda = 0.5$	$_V_1(\alpha,\beta,\gamma) = V_1(0,-1,0);\lambda = 1$	$_V_1(\alpha,\beta,\gamma) = V_1(0,-1,0);\lambda = 2$

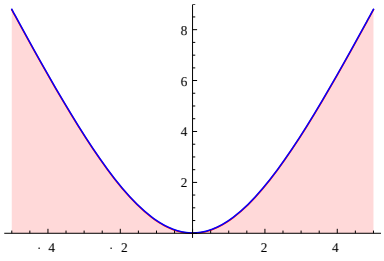
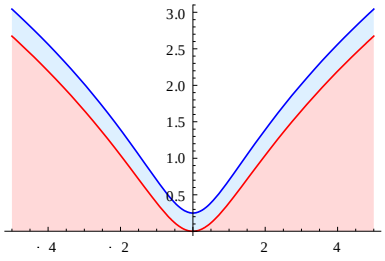
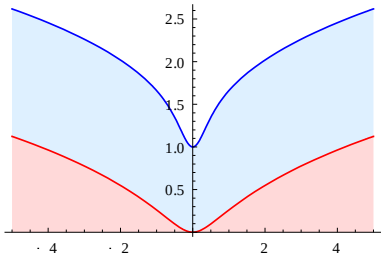
		
$_V_{oH}$ $_V_2(\alpha,\beta,\gamma) = V_2(-1,0,0); \lambda = 0.5$	$_V_{oH}$ $_V_2(\alpha,\beta,\gamma) = V_2(-1,0,0); \lambda = 1$	$_V_{oH}$ $_V_2(\alpha,\beta,\gamma) = V_2(-1,0,0); \lambda = 2$

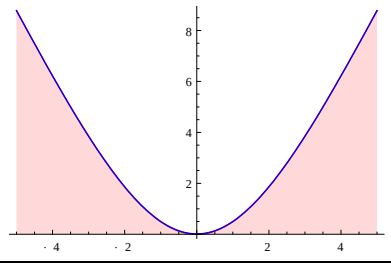
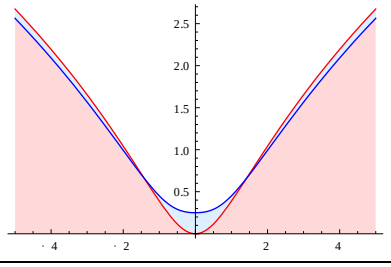
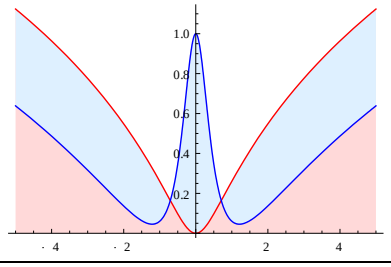
		
$_V_{oH}$ $_V_3(\alpha,\beta,\gamma) = V_3\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right); \lambda = 0.5$	$_V_{oH}$ $_V_3(\alpha,\beta,\gamma) = V_3\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right); \lambda = 1$	$_V_{oH}$ $_V_3(\alpha,\beta,\gamma) = V_3\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right); \lambda = 2$

- **Cas 3 :** $m(x) = \frac{1}{1+\lambda x^2}$

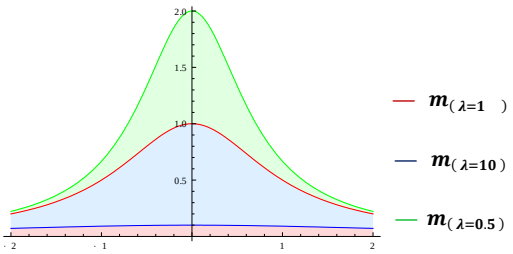


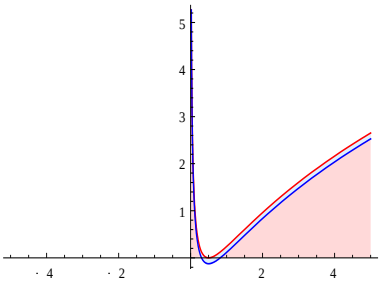
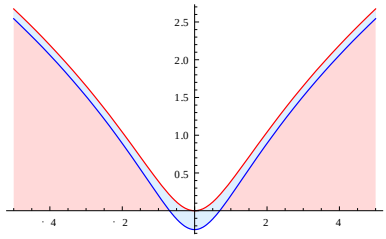
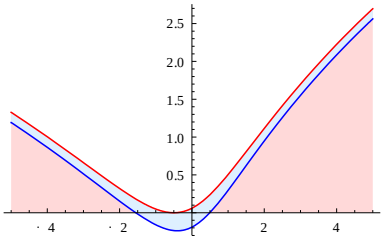
		
$_V_{oH}$ $_V_1(\alpha,\beta,\gamma) = V_1(0,-1,0); \lambda = 0.25$	$_V_{oH}$ $_V_1(\alpha,\beta,\gamma) = V_1(0,-1,0); \lambda = 1$	$_V_{oH}$ $_V_1(\alpha,\beta,\gamma) = V_1(0,-1,0); \lambda = 2$

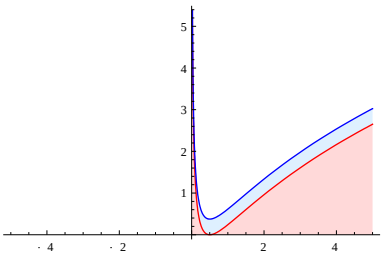
		
$_V_{oH}$ $_V_2(\alpha,\beta,\gamma) = V_2(-1,0,0); \lambda = 0.25$	$_V_{oH}$ $_V_2(\alpha,\beta,\gamma) = V_2(-1,0,0); \lambda = 1$	$_V_{oH}$ $_V_2(\alpha,\beta,\gamma) = V_2(-1,0,0); \lambda = 2$

		
$_V_{oH}$	$_V_{oH}$	$_V_{oH}$
$_V_3(\alpha,\beta,\gamma) = V_3\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right);\lambda = 0.25$	$_V_3(\alpha,\beta,\gamma) = V_3\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right);\lambda = 1$	$_V_3(\alpha,\beta,\gamma) = V_3\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right);\lambda = 2$

- **Cas 4 :** $m(x) = \frac{1}{\lambda+x^2}$

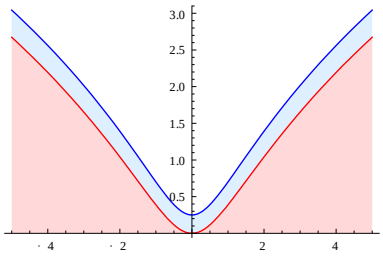


		
$_V_{oH}$	$_V_{oH}$	$_V_{oH}$
$_V_1(\alpha,\beta,\gamma) = V_1(0,-1,0);\lambda = 0$	$_V_1(\alpha,\beta,\gamma) = V_1(0,-1,0);\lambda = 1$	$_V_1(\alpha,\beta,\gamma) = V_1(0,-1,0);\lambda = 2$



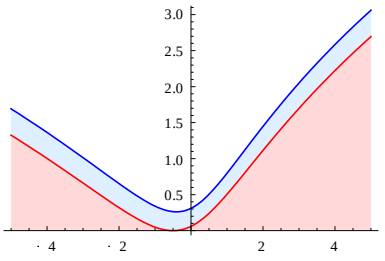
$_V_{oH}$

$_V_2(\alpha,\beta,\gamma) = V_2(-1,0,0); \lambda = 0$



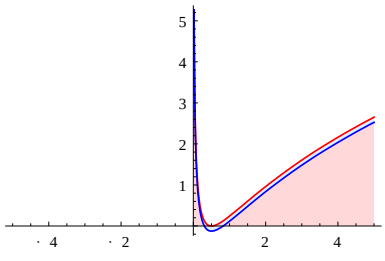
$_V_{oH}$

$_V_2(\alpha,\beta,\gamma) = V_2(-1,0,0); \lambda = 1$



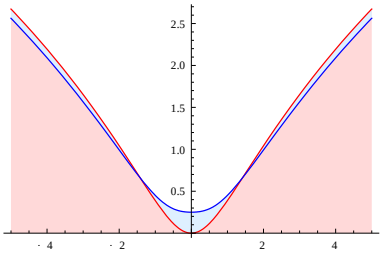
$_V_{oH}$

$_V_2(\alpha,\beta,\gamma) = V_2(-1,0,0); \lambda = 2$



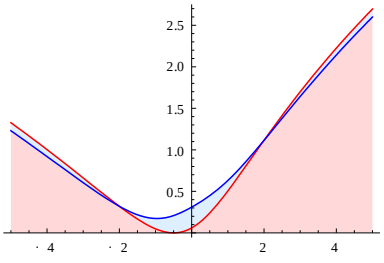
$_V_{oH}$

$_V_3(\alpha,\beta,\gamma) = V_3\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right); \lambda = 0$



$_V_{oH}$

$_V_3(\alpha,\beta,\gamma) = V_3\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right); \lambda = 1$



$_V_{oH}$

$_V_3(\alpha,\beta,\gamma) = V_3\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right); \lambda = 2$

Figure 1: L'évolution des masses et leurs potentiels associés $V_i(x)$ à travers du potentiel harmonique $\bar{V}(y)$ elles sont tracées par rapport à x pour les différentes valeurs de paramètre λ associé à la masse variable $m(x)$.

4.2.1. Discussion à propos de la Figure 1

Les courbes des potentiels aux différents choix de la masse $m(x)$ indiquées dans le tableau (2) et leur potentiel d'oscillateur Harmonique $\bar{V}(y) = \frac{1}{2}\,(f(x))^2$ sont représentées sur la Figure 1. Elles sont tracées par rapport x avec des différentes valeurs de paramètre λ. Il est intéressant de noter que le paramètre λ correspond à la masse $m(x)$.

Nous pouvons observer le comportement de potentiel d'oscillateur Harmonique $\bar{V}(y) = \frac{1}{2}\,(f(x))^2$ainsi que leurs potentiels $V(x) \equiv V_i(x)$ où $i\,\epsilon\,\{1,2,3\}$ pour différents choix de la masse $m(x)$.

Par conséquent, dans le cas 1 on a remarquée que lorsque le paramètre $\lambda = 0.5$ les deux potentiels $\bar{V}(y)$ et $V_i(x)$ sont identique avec une concavité et convexité au l'origine du repère d'autre part les graphes sont conformes au fur et à mesure que le paramètre λ augmente c'est-dire le potentiel $V_i(x)$ est s'approche asymptotiquement du potentiel harmonique.

Parallèlement la variation des graphes des potentiels pour le cas 2 sont alignés et le même comportement sur le coté droite avec une évolution croissantes et décroissant sur le coté gauche. Par contre le comportement de lignes des potentiels aux cas 3 et 4 est double d'une part sont équidistantes et convergentes et d'autre part non équidistantes et divergence avec une concavité et convexité au centre du repère suit de l'évolution du paramètre de masse λ. Par la suite, nous avons évalué les fonctions de distribution de Wigner correspondants aux équations (3.29) (voir le chapitre 3).

4.3. Fonctions des distributions de Wigner au cas des polynômes d'Hermite avec une masse dépendante de la position

Le concept de transformation ponctuelle à été établi dans le chapitre trois pour transformer l'équation de Schrödinger standard en une équation de Schrödinger avec une masse variable dépendante de la position, relative à la fonction d'onde suivant

$$\psi(x) = \mathcal{N}_n^{(\mathcal{H})} m^{(1/4)}(x)\phi(f(x)\ ). \tag{4.14}$$

Comme nous avons vu dans le chapitre 3 au cas des polynômes d'Hermite avec une masse dépendante de la position, la fonction d'onde donnée par

$$\psi(x) = m^{(1/4)}(x)\phi(y) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}}\, m^{(1/4)}(x)\, exp\left(-\frac{1}{2}f(x)^2\right) H_n\big(f(x)\big), \tag{4.15}$$

où $f(x) = \int \sqrt{m(x)}\, dx$ est une fonction de masse auxiliaire.

Pour trouver l'expression analytique de la fonction de distribution de Wigner en utilisant la formule de Wigner suivante

$$W\left(\psi_n^{(\mathcal{H})}|x\,,p\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipy}\psi_n{}^*\left(x-\frac{y}{2}\right)\psi_n\left(x+\frac{y}{2}\right)dy. \tag{4.16}$$

Nous commençons par remplacer la fonction d'onde (4.15) dans l'équation (4.16), on obtient

$$W\left(\psi_n^{(\mathcal{H})}|x\,,p\right) = \frac{m^{(1/2)}(x)}{\pi 2^n n!\sqrt{\pi}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-f^2(x)-y^2} e^{2ipy}\, H_n(f(x)+y) H_n(f(x)-y)\, dy. \tag{4.17}$$

En effectuant un changement de variable liée à la variable y par

$$\mu^2 = (y-ip)^2, \tag{4.18}$$

c'est-à-dire

$$y = \mu + ip \;\text{ où } \mu > 0, \tag{4.19}$$

Nous pouvons enfin intégrer (4.17) en utilisant la relation de la référence **[35]** suivante

$$H_n(-\mu) = (-1)^n H_n(\mu). \tag{4.20}$$

L'intégrale devient :

$$W\left(\psi_n^{(\mathcal{H})}|x\,,p\right) = \frac{(-1)^n m^{(1/2)}(x)}{\pi 2^n n!\sqrt{\pi}}\, e^{-f^2(x)-p^2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2}\, H_n\big(\mu+ip-f(x)\big) H_n\big(\mu+ip+f(x)\big)\, d\mu. \tag{4.21}$$

Ensuite, en insérant la relation de la référence **[35]** suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2} H_n\big(\mu + ip - f(x)\big) H_n\big(\mu + ip + f(x)\big)\, d\mu = 2^n n!\sqrt{\pi} L_n\big(2(f(x)^2 + p^2)\big). \tag{4.22}$$

Enfin, on obtient la fonction de distribution de Wigner dans le cas d'Hermite pour n'import quelle masse variable $m(x)$ comme suit

$$W\left(\psi_n^{(\mathcal{H})}|x\,,p\right) = \frac{(-1)^n m^{(1/2)}(x)}{\pi} e^{-f^2(x)-p^2} \times L_n\big(2(f(x)^2 + p^2)\big). \tag{4.23}$$

4.3.1. Normalisation de la fonction de Wigner au cas de polynômes d'Hermite d'une masse variable:

Nous commençons par remplacer la fonction de distribution de Wigner de l'équation (4.23) dans l'équation (4.5), et on intègre par l'utilisation la formule de Newton suivant

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \tag{4.24}$$

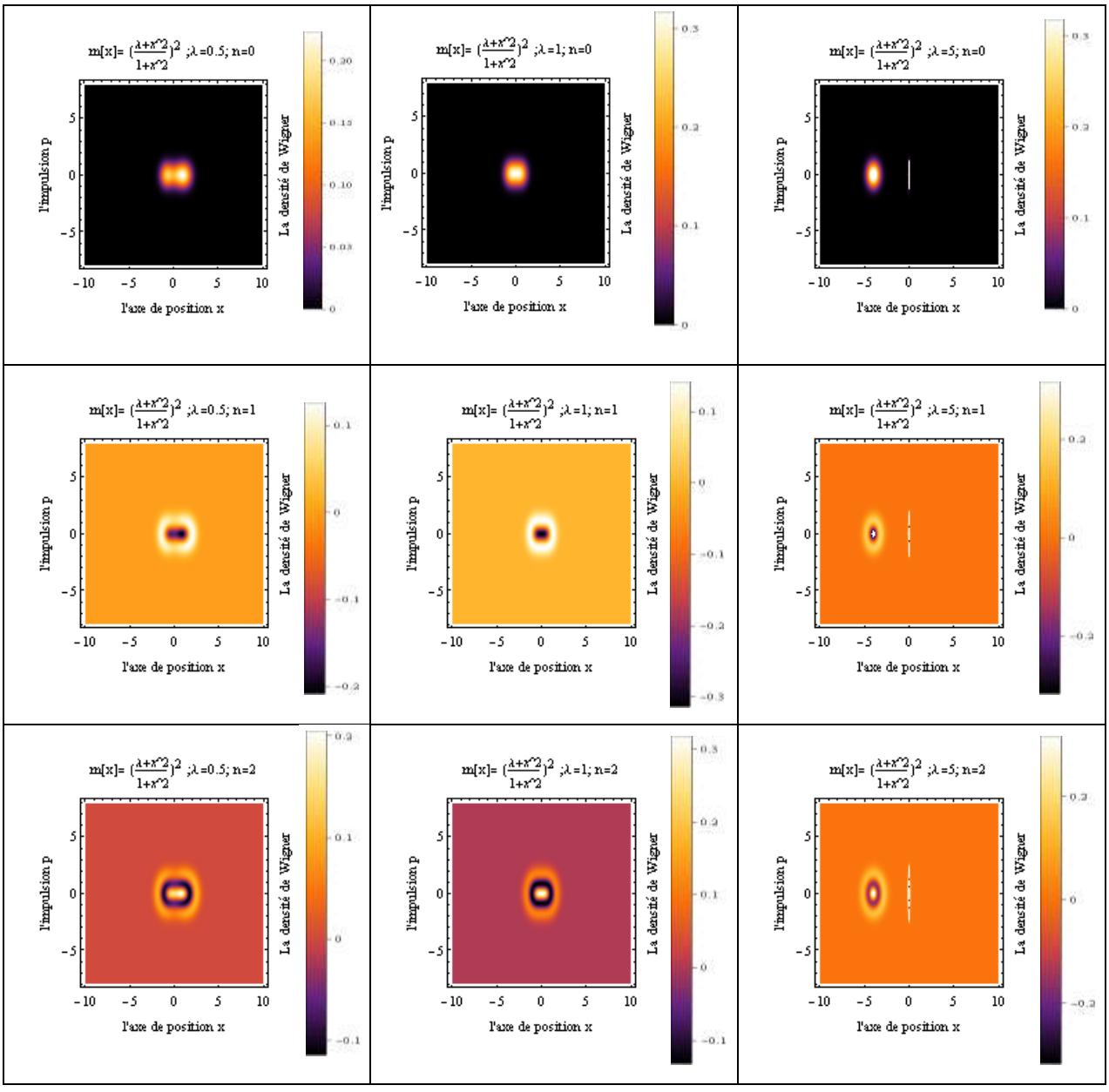
où x et y sont deux éléments et les nombres $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

on obtient

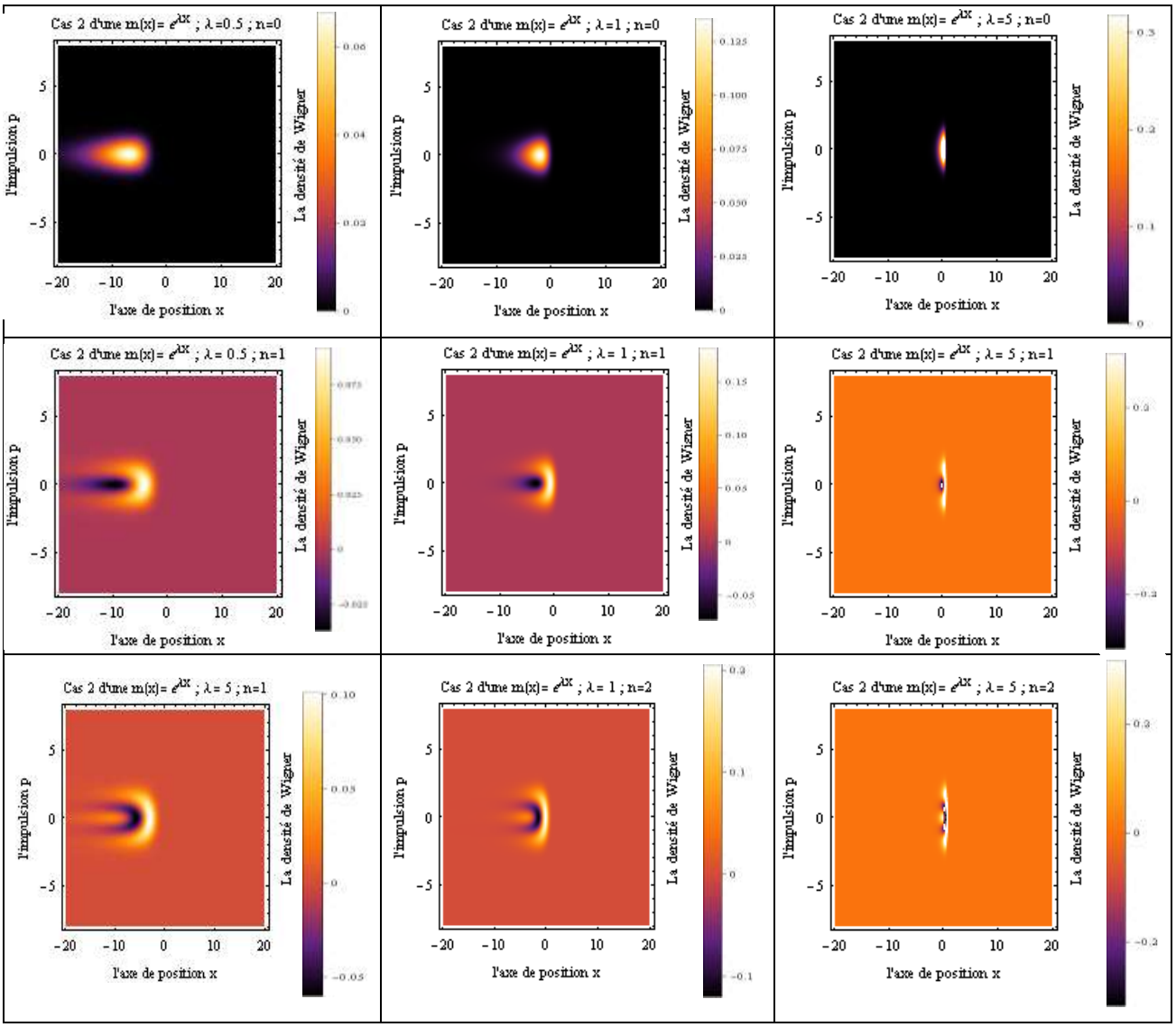
$$NorW\left(\psi_n^{(\mathcal{H})}|x\,,p\right) = \frac{(-1)^n}{\pi} \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} (-2)^k \frac{n!}{k!\,(n-k)!\,(k-l)!\,l!} \times \Gamma(k-l+1/2)\,\Gamma(l+1/2) \equiv 1, \tag{4.25}$$

cette dernier est normalisée quelle que soit les valeurs de nombre quantique principal n.

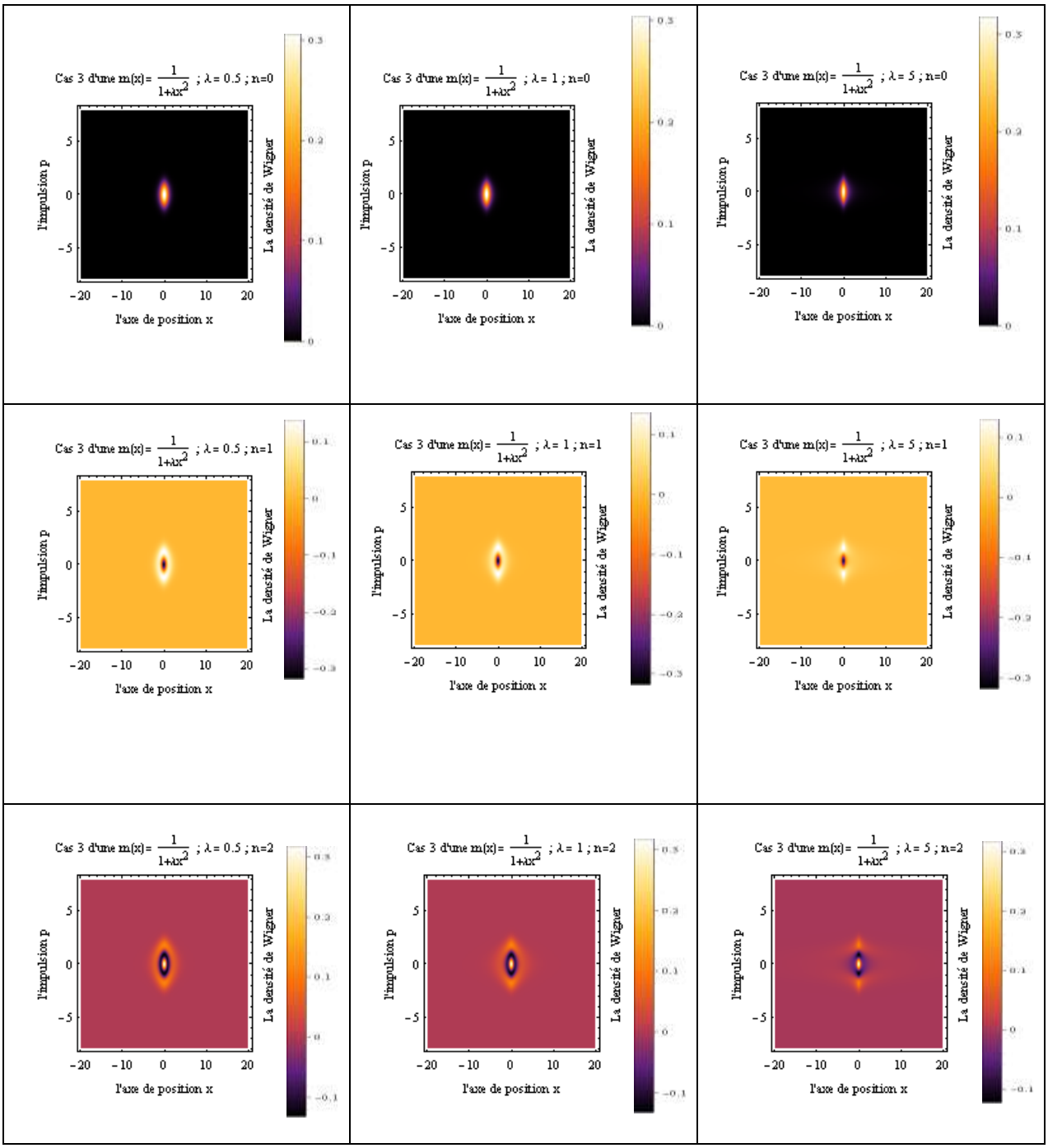
- **Cas 1 :** $m(x) = \left(\frac{\lambda+x^2}{1+x^2}\right)^2$



- **Cas 2 :** $m(x) = e^{\lambda x}$



- **Cas 3 :** $m(x) = \frac{1}{1+\lambda x^2}$



- **Cas 4 :** $m(x) = \frac{1}{\lambda + x^2}$

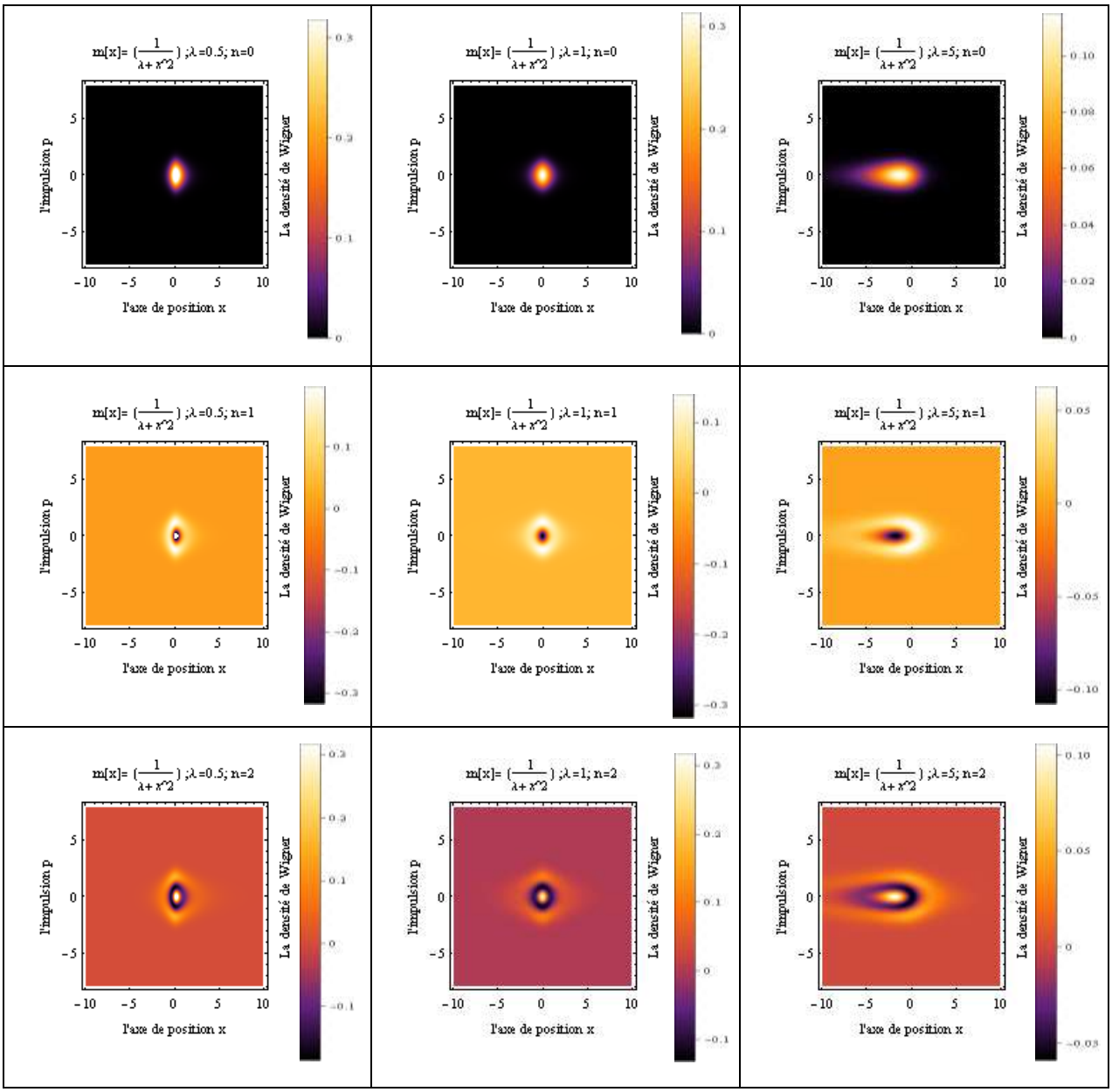


FIGURE 2. La fonction de distribution de Wigner (WDF) pour les différentes masses $m(x)$ de l'équation (4.23) tracée pour $n = 0, 1, 2$ leurs variations du coefficient λ, l'obscurité affiche la valeur minimale tandis que la luminosité définit la valeur maximale. La position est représentée dans l'axe horizontal, et l'impulsion se trouve sur l'axe vertical.

4.3.2. Discussion à propos des figures bidimensionnelle

Nous avons tracé sur la figures 2, le comportement bidimensionnel (2D) des distributions de Wigner de l'équations (4.23) pour quatre type de la masse effective dépendante de la position $m(x)$ en fonction de x et p dans l'espace des phases pour l'état fondamental $(n = 0)$ et les deux premiers états excités de $(n = 1, 2)$. On peut observer que les distributions comme des cellules autour de x et p dans l'espace des phases ont une forme circulaire et confirment dans toutes les images l'inégalité $\left|W\left(\psi_n^{(\mathcal{H},\mathcal{M})}|x\,,p\right)\right| \leq \frac{1}{\pi}$, (propriété intrinsèque de la distribution de Wigner).

On peut voir que les fonctions de distribution de Wigner à l'état fondamental $(n = 0)$ ont une même forme gaussienne (comme cela devrait être dans tous les états fondamentaux) avec un minimum localisé sur le plan (x, p).

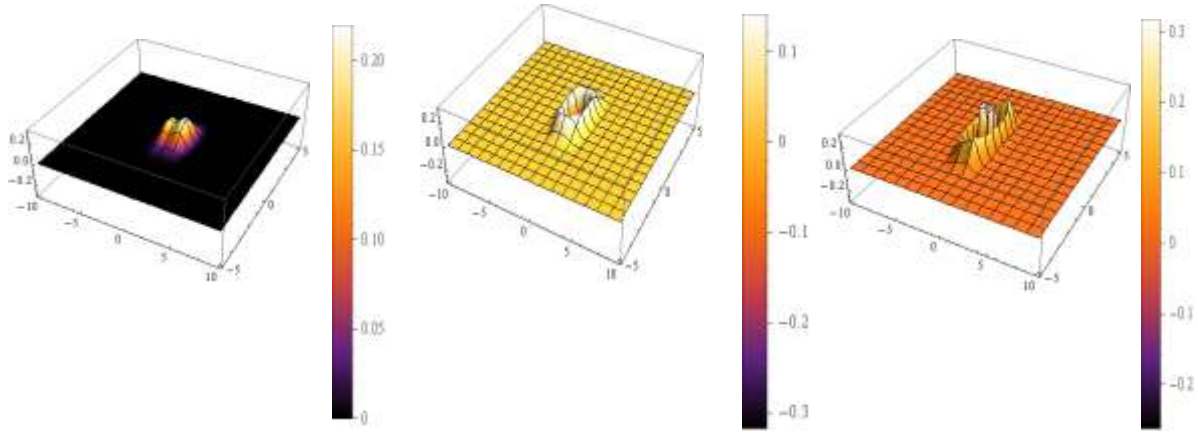
Alors que les états excités ont une même forme gaussienne-déformée, il existe certaines régions où leurs valeurs sont négatives avec une concentration plus élevée. Au fur et à mesure que le nombre λ augmente, les distributions de Wigner sont comprimées dans la direction x et dispersées de plus en plus sur la direction de l'impulsion p avec un léger déplacement vers la gauche. pour tous les états fondamentale la fonction de Wigner est une gaussienne de variance $1/2$ suivant x et $1/2$ suivant p, centrée en $(\bar{x} = 0\,;\, \bar{p} = 0)$ (elle est nulle à l'origine), par contre la fonction de Wigner pour les états excitées elle est négative autour de l'origine avec un minimum de l'origine $W_{2n+1}(0;\, 0) = -\frac{1}{\pi}$; Ce minimum est le même pour tous les états impairs par contre les états pairs présentent un maximum au centre par : $W_{2n}(0;\, 0) = \frac{1}{\pi}$.

Il est évident que la fonction de Wigner pour tous les états excitées est normalisée à 1, non gaussienne et qu'elle donne également des valeurs négatives pour certaines régions dans l'espace des phases, elle est souvent appelée la distribution de quasi-probabilité de Wigner.

Lorsque la fonction de Wigner dans l'état fondamentale est positive, alors le comportement de cette dernière dans l'espace des phases est gaussien, c'est à dire, les inégalités de Heisenberg est saturées, voir le tableau suivante

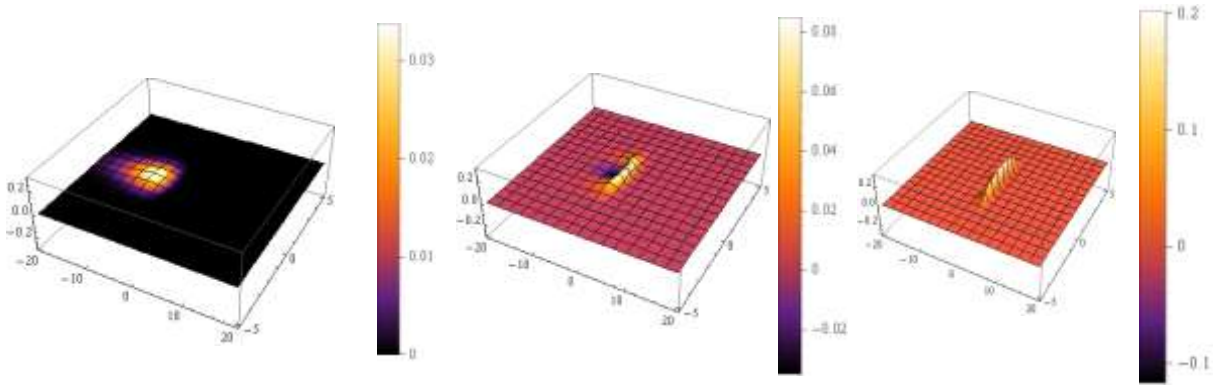
Les états n		
Etats Gaussien $n = 0$	La fonction de Wigner est positive	$\Delta x \Delta p = \frac{1}{2}$
Etats non Gaussienne $n \neq 0$	La fonction de Wigner est négative	$\Delta x \Delta p > \frac{1}{2}$

- **Cas 1 :** $m(x) = \left(\frac{\lambda+x^2}{1+x^2}\right)^2$



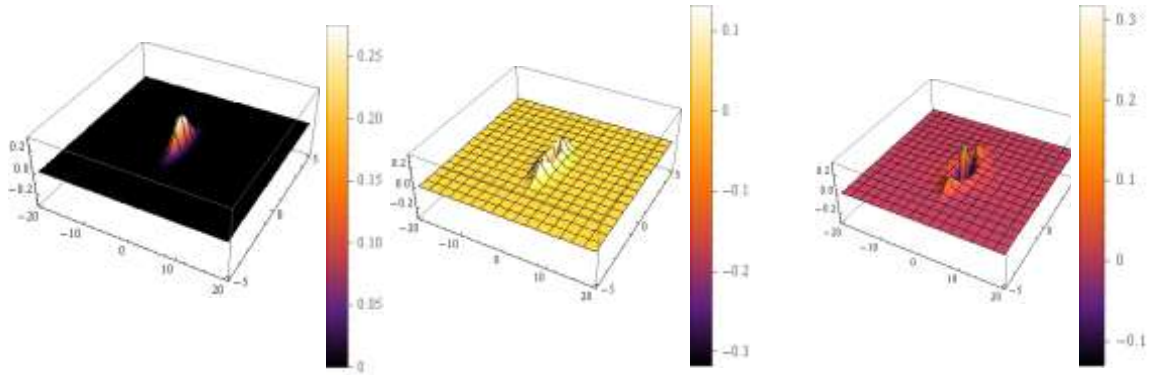
$\boldsymbol{n = 0;\ \lambda = 0.5}$ $\boldsymbol{n = 1;\ \lambda = 1}$ $\boldsymbol{n = 2;\ \lambda = 2}$

- **Cas 2 :** $m(x) = e^{\lambda x}$



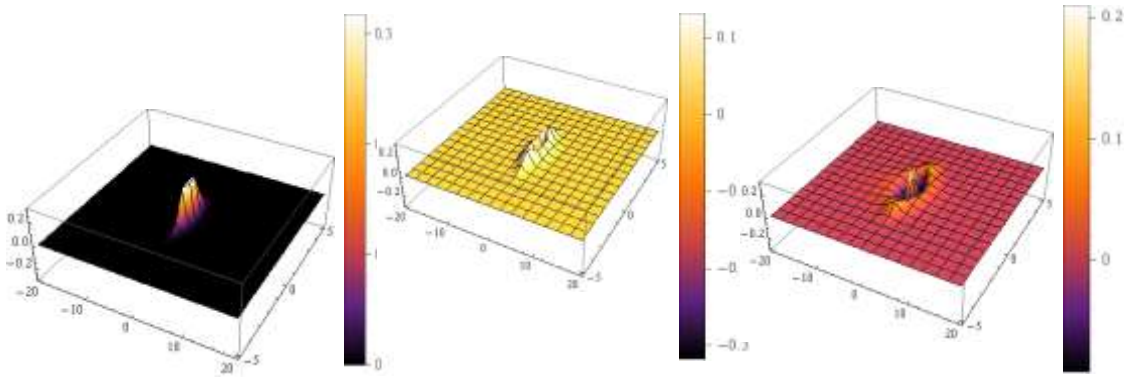
$\boldsymbol{n = 0;\ \lambda = 0.5}$ $\boldsymbol{n = 1;\ \lambda = 1}$ $\boldsymbol{n = 2;\ \lambda = 2}$

- **Cas 3 :** $m(x) = \frac{1}{1+\lambda x^2}$



$\boldsymbol{n = 0;\ \lambda = 0.5}$ $\boldsymbol{n = 1;\ \lambda = 1}$ $\boldsymbol{n = 2;\ \lambda = 2}$

- **Cas 4 :** $m(x) = \frac{1}{\lambda + x^2}$



$\boldsymbol{n = 0;\ \lambda = 0.5}$ $\boldsymbol{n = 1;\ \lambda = 1}$ $\boldsymbol{n = 2;\ \lambda = 2}$

FIGURE 3. Haut (respectivement, en bas). La fonction de distribution de Wigner (FDW) tridimensionnelle au cas d'Hermite d'une masse variable, Pour différents états n et la masse $m(x)$, le plan horizontal dans toutes les images correspond à la direction x et p, on voit que les deux distributions vérifient l'inégalité $\left|W\left(\psi_n^{(\mathcal{H})}|x\,,p\right)\right| \leq \frac{1}{\pi}$.

4.3.3. Discussion à propos de la Figure 3

Par ailleurs, nous représentons dans la Figure 3 les distributions de Wigner tridimensionnelle (3D) pour la fonction de distributions de Wigner précédentes. Les figures indiquent que les fonctions de distributions de Wigner ont une forme Gaussienne définie positive pour l'état fondamental $(n = 0)$, tandis que pour les deux premiers états excités $(n = 1, 2)$, les fonctions de distributions de Wigner ont une forme Gaussienne déformée avec des valeurs négatives pour certaines régions dans l'espace des phases, et confirment dans toutes les images de l'inégalité $|W(\psi_n^{(\mathcal{H})}|x\,,p)| \leq \frac{1}{\pi}$.

4.4. Mécanique quantique canonique et la transformation de Weyl pour les polynômes d'Hermite et de Laguerre généralisées

Les coordonnées généralisées adaptées dans le cadre d'une masse dépendante de la position sont les variables $(\mu(x), p)$.

Dans l'espace des phases, Nous nous intéressons à évaluer les écarts quadratiques de $\mu(x)$ et de l'impulsion p à partir de la relation :

$$\Delta\hat{\Theta} = \sqrt{\langle\hat{\Theta}^2\rangle - \langle\hat{\Theta}\rangle^2}, \tag{4.26}$$

avec $\hat{\Theta} = (\hat{\mu}\,, \hat{p})$.

Afin de vérifier le principe d'incertitude de Heisenberg, nous devons utiliser la transformation de Weyl définie dans les équations (4.7) et (4.8), qui mesurera les valeurs moyennes et déterminera les coordonnées $(\mu(x), p)$ de la transformation de Weyl $(\tilde{\mu}\,(x)\,, \tilde{p})$, de ces opérateurs quantiques correspondants $(\hat{\mu}(x), \hat{p})$.

Nous sommes maintenant de trouver la transformation de Weyl (WT) de $\hat{\mu}^m(x)$ et $\hat{p}^m$, $m = 1{,}2$.

Il faut noter que $\hat{\mu}^m$ (ou $\hat{p}^m$) ont des fonction purement de $\hat{x}$ (ou $\hat{p}$), alors la transformation de Weyl (T.Weyl) est juste la fonction originale de $\hat{x}$ (où $\hat{p}$) remplacée par x (où p), La preuve de cette propriété, est détaillée dans la référence **[3]**. Selon la définition de la transformation de Weyl (WT) donnée de l'équation (4.8), et après intégrations nous obtenons

$$\widetilde{W}[\hat{\mu}^m] \equiv \tilde{\mu}^{\,m} = \mu^m, \qquad (m = 1{,}2), \tag{4.27}$$

$$\widetilde{W}[\hat{p}^m] \equiv \tilde{p}^{\,m} = p^m, \qquad (m = 1{,}2). \tag{4.28}$$

En insérant l'expression de la fonction de distribution de Wigner (FDW) donnée dans l'équations (4.23) ainsi que les expressions (4.27), (4.28) dans l'équation (4.7) de la transformation Wigner-Weyl. Les expressions analytique ont pour valeurs moyennes $\langle\hat{\mu}^m\rangle_{\mathcal{H}}$ $\langle\hat{p}^m\rangle_{\mathcal{H}}$ et $\langle\widehat{H}\rangle_{\mathcal{H}}$ et, où $m = 1{,}2$ dans le cas d'Hermite d'une masse variable, elles sont

données pour un état représenté par la fonction de distribution de Wigner (FDW) de l'équation (4.23)

$$\langle \hat{\mu}(x) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \hat{p} \rangle_{\mathcal{H}} = 0, \tag{4.29}$$

$$\langle \hat{\mu}^2(x) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \hat{p}^2 \rangle_{\mathcal{H}} = (-1)^n \frac{\Gamma(2)\Gamma(n+1)}{\mathrm{n!}\,\Gamma(1)}\ {}_2F_1(-n, 2, 1; 2), \tag{4.30}$$

et après la simplification, on obtient

$$\langle \hat{\mu}^2(x) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \hat{p}^2 \rangle_{\mathcal{H}} = \left(\frac{2n+1}{2}\right). \tag{4.31}$$

Ainsi que la valeur propre de l'énergie harmonique est donnée par

$$\begin{aligned} \langle \widehat{H} \rangle_{\mathcal{H}} = E_n{}^{(\mathcal{H})} &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{H}\, W\left(\psi_n^{(\mathcal{H})} | x, p\right) \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{p^2}{2} + \frac{\mu^2(x)}{2}\right) W\left(\psi_n^{(\mathcal{H})} | x, p\right) = \frac{\langle \hat{\mu}^2(x) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \hat{p}^2 \rangle_{\mathcal{H}}}{2} \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \tag{4.32}$$

D'après la relation des écarts quadratiques (4.26) et les résultats précédents on constate directement que le principe d'incertitude de Heisenberg est toujours vérifié

$$(\Delta\hat{\mu}(x))_{\mathcal{H},n} \cdot (\Delta\hat{p})_{\mathcal{H},n} \equiv \left(n + \frac{1}{2}\right).\ (n = 0,1,2,\cdots). \tag{4.33}$$

$\mathcal{H}$ est l'abréviation des polynômes d'Hermite.

Conclusion

Conclusion

Notre travail s'intéresse à la résolution de l'équation de Schrödinger généralisée à des systèmes à masses dépendant de la position par la méthode basée sur la transformation ponctuelle des coordonnées.

Nous exposons en détail les potentiels quantique proposées pour certains choix des paramètres d'ambigüité qui ont été réalisés sur la plupart des travaux importants traités par les auteurs dans ce domaine. Ainsi nous déterminons analytiquement et numériquement les fonctions de distribution de Wigner pour les états propres qui sont fonctions des polynômes d'Hermite d'une masse dépendante de la position, pour prévoir les influences des états propres d'une masse dépendantes de la position sur les fonctions de distribution de Wigner.

Par la suit, nous constatons que les fonctions de distribution de Wigner ont une forme circulaire dans l'espace des phases. Ces formes varient par rapport le coefficient de masse λ.

Nous observons que les fonctions de distribution de Wigner dans l'espace des phases, sont comprimées dans la direction x ou localisée en position x et dispersées de plus en plus dans la direction d'impulsion p, au fur et à mesure que le coefficient de masse λ augmente, avec un léger déplacement vers le sens inverse des positions x. Puis, nous donnons les valeurs propres $E_n^{(\mathcal{H})}$ de l'énergie via la distribution de Wigner dans l'espace des phases.

Dans le cas d'Hermite d'une masse variable, nous constatons que notre résultat des niveaux d'énergie associé au différent potentiel quantique est harmonique.

Nous utilisons également la transformation de Weyl et Wigner-Weyl sur les nouvelles coordonnées généralisées $\mu(x)$ et p associées a la masse variable pour trouver les valeurs moyennes et évaluer l'écart quadratique de ces derniers, afin de vérifier la relation d'incertitude de Heisenberg.

Il serait intéressant d'étendre le présent travail pour considérer des autres solutions, exprimées en termes de polynômes d'Hermite, Laguerre et de Jacobi et ce, avec des profils différents de la fonction d'onde, adaptée à certains types de potentiels.

Dans une étude future, nous envisagerons également d'appliquer ce traitement à un système quantique multi-dimensionnel et un système quantique ayant une masse effective dépendante de la position, résolu par les équations de Klein-Gordon et de Dirac.

Nous pouvons conclure que la représentation de Wigner et la transformation de Weyl dans l'espace des phases, sont largement utilisées pour ramener les calculs quantiques à un simple calcul probabiliste classique, très souvent moins complexe. Ceci nous facilite énormément l'étude de certains phénomènes quantiques.

Bibliographiques

Bibliographiques*s*

[1] E. Wigner, *On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium*, Phys. rev.40, 749 (1932).

[2] Juba. Messameh, *Étude de quelques aspects de l'information quantique pour un système galiléen stochastique, thèse de doctorat, USTHB* (2016).

[3] Cherroud Othmane, *Mécanique quantique PT symétrique et hamiltonien à masse variable, thèse de doctorat, USTHB* (2018).

O. Cherroud, S-A. Yahiaoui, and M. Bentaiba, *Generalized Laguerre polynomials with position-dependent effective mass visualized via Wigner's distribution functions*, J. Math. Phys, 58, 063503 (2017).

O. Cherroud, and M. Bentaiba, *Wigner's distribution functions with position-dependent effective mass*, the International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM 2018), Istanbul, Turkey.

O. Cherroud, and M. Bentaiba, *La function de Wigner de l'oscillateur Harmonique Isotropique tridimensionnel*; La 12 éme congrés national de la physique et ses applications; USTHB , Alger (2018).

S-A. Yahiaoui, and M. Bentaiba, *New Fourier transform containing a pair of complex Euler gamma functions with a monomial*, J. Math. Phys, 59, 023510 (2018).

[4] W. P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space, Book, WILEY-VCH* (2001). C. C. Gerry and P. L. Knight, *Introductory Quantum Optics; Cambridge University Press* (2005).

[5] J. Hancock, M. A. Walton, and B. Wynder, *Quantum mechanics another way*, Eur. j. Phys.25.525-534 (2004).

[6] W. B. Case, *Wigner functions and Weyl transforms for pedestrians* Am. J. Phys.**7**6, 937 (2008). H. Y. Fan, H. C. Yuen, G. C. Cai, and N. Q. Jiang, *Operators' ordering: from Weyl ordering to normal ordering*, Sci. China Phys. Mech. Astronomy. 54, 1394-1397 (2011).

[7] J. E. Moyal, *Quantum mechanics as a statistical theory*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 45 (01), 99-124, (1949).

[8] BULENT GONUL, OKAN OZER, BESIRE GONUL and FATMA UZGUN, *Exact Solutions of effective mass Schrödinger equations***,** Physics Letters A Vol. 17, No. 37(2002).

C. Quesne, *Point Canonical Transformation versus Deformed Shape Invariance for Position Dependent Mass Schrödinger Equations*, SIGMA **5**, 046 (2009).

Souza Dutra, Exact solvability of potentials with spatially dependent effective masses, Physics Letters A ,Vol 275, Issues 1–2, 2 October 2000, Pages 25-30.

L Liu, YS Wong, BHK Lee, *non-linear aeroelastic analysis using the point transformation method*, part 1: free play model, Journal of Sound and Vibration,(2002).

Elsevier, A.D. Alhaidari *solution of the non relativistic wave equation with position-dependent effective mass*, Phys Rev, A66, 042116 (2002).

A. Anderson, *Canonical Transformations in Quantum Mechanics*, Ann. Phys. 232, 292 (1994).

A.de Souza. Dutra, C.A.S. Almeida, *Exact solvability of potentials with spatially dependent effective masses*, Physics Letters A275, 25-30 (2000).

[9] S.-H. Dong, *Factorization Methods in Quantum Mechanics, Book*, (Springer, Dordrecht, (2007)).

[10] Shi-Hai Dong, *Factorization method in quantum mechanics, Book*, (2007). Springer.

[11] O. L. de Lange and R. E. Raab, *Operator Methods in Quantum Mechanics* (Clarendon Press, New York, (1991)).

[12] JU.G.-X, C.-Y. Cai, Y. X-yang, and Z.-Z. REN, *Coordinate Transformation and Exact Solutions of Schrödinger Equation with Position- Dependent Effective Mass*, Commun. Theor. Phys.47, 1001-1009 (2007).

JU.G.-X, *Non- hypergeometric Type of Polynomials and Solutions of Schrödinger Equation with Position -Dependent Mass*, Commun.Theor. Phys. 56, 235-240 (2011).

[13] G. Lévai. *Asearch for shape -invariant potentials*. J. Phys. A. Gen 689-702(1989). A.R palastino, A.gigo, M.Casas, F.Garcias, and A. Plastino, *Supersymmetric approach to quantum systems with position-dependent effective mass*, Phys Review A 6 (1999).

[14] M. Hillary, R. F. Ó Connell, M. O. Scully, and E. P. *Wigner, Distribution functions in physics: Fundamentals*, Phys. Rep. 106, 121-167 (1984).

[15] Sybren de Groot, *La transformation de Weyl et la fonction de Wigner: une forme alternative de la mécanique quantique*, (1974). Les Presses de l'Université de Montréal C.P. 6128, Montréal 101, Canada.

[16] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics and Financial Markets*, 4th, ed. (World Scientific, Singapore, (2006)).

[17] F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme, *Supersymmetry and quantum mechanics*, Phys. Rep. 251, 267-385 (1995).

[18] O. Von Roos, *Position dependent effective masses in semiconductor theory*. Phys. Rev. B 27, 7547 (1983).

[19] D. J. BenDaniel and C. B. Duke, *Space-Charge Effects on Electron Tunneling*, *Phys. Rev.* B152, 683 (1966).

[20] T. Gora and F. Williams, Theory of Electronic States and Transport in Graded Mixed Semiconductors, *Phys. Rev.* 177, 1179 (1969).

[21] G. Bastard, *Superlattice band structure in the envelope-function approximation*, *Phys. Rev.* B24, 5693 (1981).

[22] Q. G. Zhu and H. Kroemer, *Interface connection rules for effective-mass wave functions at an abrupt heterojunction between two different semiconductors*, *Phys. Rev.* B27, 3519 (1983).

[23] T. Li and K. J. Kuhn, *Band-offset ratio dependence on the effective-mass Hamiltonian based on a modified profile of the GaAs-AlxGa1−xAs quantum well*, *Phys. Rev.* B47, 12760 (1993).

[24] Cevdet.T.Ramazan.Sever, *Exact Solutions of the Schrödinger Equation with Position-dependent Effective Mass via General Point Canonical Transformation, Journal of Mathematical Chemistry volume 42, pages387–395(2007).*

[25] F Yaşuk, C Berkdemir and A Berkdemir, Exact solutions of the Schrödinger equation

with non-central potential by the Nikiforov–Uvarov method,J of Phys A,V 38,N 29 (2005).

[26] G. Bastard, *Wave Mechanics Applied to Semiconductor Heterostructures* Les Ulis: Éditions de Physique, (1998).

[27] S.-A. Yahiaoui and M. Bentaiba, *Pseudo-Hermitian coherent states under the generalized quantum condition with position-dependent mass*, J. Phys. A. Math. Theor. 47,025301(2014). S.-A. Yahiaoui and M. Bentaiba *Pseudo-Hermitian coherent states under the generalized quantum condition with position-dependent mass*, J. Phys. A. Math. Theor 45,444034 (2012). S.-A. Yahiaoui and M. Bentaiba *Isospectral Hamiltonian for position-dependent mass for an arbitrary quantum system and coherent states*, journal of Mathematical Physics 58, 063507 (2017).

[28] L. Dekar, L. Chetouani, and T.F. Hammann, *An exactly soluble Schrödinger equation with smooth position-dependent mass*, J. Math. Phys. 39, 2551 (1998).

[29] L. Dekar, L. Chetouani, and T.F. Hammann, *Wave function for smooth potential and mass step*, Phys. Rev. A 59 , 107 (1999).

[30] A. Franck, A. L. Rivera, and K. B. Wolf, *Wigner function of Morse potential eigenstates*, Phys. Rev. A 61, 054102 (2000).

[31] Boumenir.Oussama, Distribution de Wigner, pour les différents états propres : cas des polynomes d'hermite et des fonctions de Laguerre généralisés (2019).

[32] Z.-D. Chen and G. Chen, *Wigner function of the position-dependent effective Schrödinger equation*, Phys. Scr. 73, 354 (2006).

[33] A. de Souza Dutra and J. A. de Oliveira, *Wigner distribution for a class of isospectral position- dependent mass systems*, Phys. Scr. 78, 035009 (2008).

[34] P. Harrison, *Quantum Wells, Wires and Dots* (John Wiley & Sons, Ltd, (2005)).

Lozada. Cassou, M. Dong, S.H.and Yu. J, *Quantum features of semiconductor quantum dots*, Physics.Lett.A.331.45-52 (2004).

F. Arias de Saavedra, J. Boronat, A. Polls, and A. Fabrocini, *Effective mass of one ^4He atom in liquid ^3He*, Phys. Rev. B 50, 4248 (1994).

[35] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products (Academic Press, New York*, (2007)).