République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Médéa

Faculté des Sciences



Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de Master

En : Physique

Spécialité : Physique Théorique

Par : *DAHMANI Rachid*

Fonctions d'ondes modèles aux états de l'effet Hall quantique fractionnaire

---

Soutenue publiquement, le 19/06/2019, *devant le jury composé de :*

K. BOUCHACHIA	MCB	*Univ.Médea*	Président
N. ZEGHOU	MCB	*Univ.Médéa*	Examinateurs 1
O. CHERROUD	MCB	*Univ.Médéa*	Examinateurs 2
M. AHMED AMMAR	MCB	*Univ.Médéa*	Encadreur

Résumé

L'effet Hall quantique fractionnaire ($EHQF$) a été observé dans divers systèmes bidimensionnels d'électrons en présence d'un champ magnétique intense. Au départ il s'agissait surtout de gaz d'électrons dans des hétérostructures ou puits quantiques à base de $GaAs$. Aucun régime de faible interaction ne peut alors être traité aisément, ce qui fait de l'$EHQF$ un des problèmes d'électrons fortement corrélés les plus difficiles. Face à cet obstacle, une approche fut introduite par Laughlin (1983), elle consiste à proposer des fonctions d'onde d'essai variationnelles pour décrire l'état fondamental ainsi que les premiers états excités du spectre des phases de Hall au remplissage des niveaux de Landau $\upsilon = 1/m$, avec m impair. Plusieurs chercheurs ont montré qu'une grande partie des fonctions d'onde test de l'effet Hall peuvent être écrites comme des états de l'effet Hall fractionnaire telles que la fonction d'onde de Laughlin, Jain et Moore-Read. Chaque fonction d'onde modèle est censée être une bonne description de l'état fondamental pour l'interaction coulombienne entre les fermions(électrons) à son facteur de remplissage υ.

Mot Clé : Effet Hall quantique fractionnaire ($EHQF$), électrons fortement corrélés, fonctions d'onde modèles.

Remerciements

Je tiens avons tout à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Ce travail a été effectué à l'université Dr Yahia Farès de Médéa, donc en seconde lieu je remercier cette université pour son accueil chaleureux et les conditions de travail idéales dont j'ai pu bénéficier.

Je tiens à remercier mon encadreur Monsieur *M. AHMED AMMAR*, son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail.

Je vif remerciements vont aussi également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon recherche en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Je souhaite vivement à remercier tous les membres du jury, monsieur *K. BOUCHACHIA* pour avoir présidé mon jury de mémoire, monsieurs les docteurs *N. ZEGHOU* et *O.CHERROUD* pour avoir accepté d'examiner mon manuscrit.

A ma famille et mes amis qui par leurs prières et leurs encouragements, on a pu surmonter tous les obstacles. Tous mes enseignants durant les années des études.

Enfin, je remercier s'étendent également à toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce travail .

À mes chers parents,

À mes chers frères,

À touts ma famille,

À tous mes amis.

À tous ceux qui m'ont encouragé pour aller jusqu'au bout.

Table des matières

Introduction générale **1**

1 L'effet Hall entre l'état classique et quantique **3**

1.1 Introduction 3

1.2 L'effet Hall classique 4

1.3 La résistance de Hall : 5

1.4 L'effet Hall quantique entier : 6

1.5 L'effet Hall quantique fractionnaire : 7

1.6 Conclusion : 8

2 Un électron dans un champ magnétique **10**

2.1 Introduction : 10

2.2 Mouvement cyclotron : 10

2.3 Niveaux de Landau : 12

2.4 Invariance de jauge : 15

2.5 Fonction d'onde d'une particule : 17

2.6 Conclusion : 19

3 Les fonctions d'ondes modèles **20**

3.1 Introduction 20

3.2 Fonction d'onde de laughin 20

3.3 Fonction d'onde de jain : 22

3.4 Fonction d'onde de Moore-Read 25

3.5 conclusion 26

4 Application par mathematica **28**

4.1 introduction 28

4.2 Méthode de laughlin 28

4.3 Méthode de Jain 30

4.4 Méthode de Moore-Read 31

4.5 Resultat 32

4.6 Conclusion 33

Conclusion générale **33**

Appendices **34**

A Méthode analytique (interaction e-e) **35**

Nomenclature **38**

Bibliographie **40**

Table des figures

1.1 Géométrie de l'effet Hall [1]. 5
1.2 Résistance de Hall R_H en fonction du champ magnétique B[11]. 5
1.3 résistance longitudinale R_L et résistance Hall R_H varie en fonction du champ magnétiqueB[1]. 7
1.4 Différents fractions de l'EHQF[1]. 8

2.1 Mouvement cyclotron d'un électron à la position r autour du centre de guidage R[11] 12
2.2 Niveaux de Landau. n représente les niveaux, et m est associé à la dégénérescence de chaque niveau[11]. 14

3.1 Particule de charge fractionnaire e/3 dans l'état fractionnaire nu=1/ 3[1]. . 21
3.2 Schéma d'un état fondamental. (a) pour EHQE du v=n, (b) pour EHQF à v=(n/(2n+1))[11]. 23
3.3 Représentation du vortex[11]. 24
3.4 EHQF à la fraction v= = 11/2, 9/2, 7/2 et 5/2[1] 26

Liste des tableaux

4.1 L'énergies d'interactions(électron-électron) par particules pour un système de 4 particules 33
4.2 L'énergies d'interactions(électron-électron) par particules pour un système de 6 particules 33

Introduction générale

L'effet Hall fractionnaire découvert en 1982 par Klaus von Klitzing, il apparaît lorsqu'un gaz d'électrons, confiné à deux dimensions et soumis à un champ magnétique très intense. Dans ce cas la résistance transverse des échantillons présente en fonction de ce dernier des plateaux alors que la résistance longitudinale s'annule. Sur chaque plateau, la résistance de Hall a une valeur quantifiée donnée par une fraction du quantum de résistance. Notre travail présent dans ce manuscrit est une étude de l'influence du potentiel coulombien sur les états de l'effet Hall quantique fractionnaire ($EHQF$), à travers les fonctions d'ondes de Laughlin, Jain et Moore-Read. Cette étude repose sur des calculs numériques exacts qui permettent de déterminer l'état fondamental du système pour un petit nombre d'électrons. Nous utilisons le logiciel Mathematica pour déterminer les énergies d'un système de plusieurs électrons à des facteurs de remplissages 1/3, 1/5, 1/7, 2/5 et 5/2, afin d'en étudier les propriétés des fonctions d'onde modèles tels que celui présenter auparavant. On a fait un bref rappel sur la physique de l'effet Hall classique, en prenant en considération les propriétés les plus remarquables d'un électron dans un champ magnétique.

Dans le chapitre 1, j'ai donné les définitions des effets Hall classique et quantique (entier $EHQE$ et fractionnaire $EHQF$). Dans le chapitre 2, nous passerons au cas quantique, nous étudierons en particulier la structure de l'hamiltonien, et les fonctions d'ondes à un corps dans le plus bas niveau de Landau correspondant à différents choix de jauge.

Au chapitre 3, nous avons présenté les trois théories les plus remarquables de des fonctions d'ondes modèles, à savoir celles de Laughlin, Jain et Moore-Read les plus utilisées par les physiciens, aussi présenté la définition de ces théories (fonctions d'ondes) dans cette étude on utilise la géométrie de disque,

Finalement, dans le chapitre 4, nous présentons la méthode analytique appliquée à l'$EHQE$, cette méthode basée sur la détermination de l'énergie d'interaction coulombienne pour($N_e = 4$ particules), pour déterminer les énergies fondamentales par particule pour un système d'électrons dans les états de Laughlin a des facteurs des remplissage $\upsilon = 1/3, 1/5$ et $1/7$, et de Jain $\upsilon = 2/5$, nous avons tenté de décrire l'état Pfaffion en de Moore-Read de l'$EHQF$ dans la géométrie du disque aux facteurs de remplissages $\upsilon = 5/2$.

Chapitre 1

L'effet Hall entre l'état classique et quantique

1.1 Introduction

La physique des effets Hall a trait à trois phénomènes appelés effet Hall classique, quantique entier et quantique fractionnaire[1]. L'effet Hall classique apparait lorsqu'un matériau baignant dans un champ magnétique engendre une tension perpendiculaire à ce dernier. Cet effet résulte en une tension appelée tension de Hall et une résistance appelée résistance de Hall, contrairement à l'effet Hall classique, les effets Hall quantiques ($EHQE, EHQF$) ne se produisent que lorsqu'un gaz d'électron confinés à deux dimensions et a base Température[2]. Alors, à basse température et à champ magnétique intense, la résistance transverse présente, en fonction de l'intensité du champ magnétique, des plateaux sur lesquels elle est quantifié tandis que la résistance longitudinale s'annule. D'autre part, la valeur de la résistance de Hall correspondant à une fraction du facteur de remplissage, ces deux derniers phénomènes sont d'origine purement quantique[1]. Pour simplifier les choses, on commence par l'effet Hall classique.

1.2 L'effet Hall classique

La découverte de l'effet Hall classique a été en 1879 par le physicien américain "Edwin Herbert Hall". L'effet Hall classique expérimentalement c'est un courant électrique $I = (I, 0, 0)$ traversant un matériau baignant dans un champ magnétique $B = (0, 0, B)$ engendre une tension perpendiculaire à ce dernier. Cette tension transverse V_H est dite tension de Hall. Le courant électrique acquiert une résistance transversale proportionnelle au champ magnétique que nous appelons cette résistance la résistance de Hall.

L'effet Hall classique a été découvert avant l'électron qui découvert par J.J. Thompson en 1897, et a été la première preuve que les courants électriques dans les métaux sont généralement la conséquence du mouvement de particules de charge négative. L'effet Hall classique a aussi permis de montrer que, dans certains matériaux, il était plus pertinent de considérer que le courant électrique était dû aux déplacements de "trous" de charge positive plutôt qu'à celui des électrons.

L'effet Hall classique peut être compris de manière purement classique. En effet, la force de Lorentz subie par un électron (de charge $-e$) se déplaçant avec une vitesse $\overrightarrow{v}$ en absence d'un champ électrique $\overrightarrow{E}$ et en présence d'un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ est donnée par[2, 3] :

$$\overrightarrow{F}_L = q\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B} \tag{1.1}$$

Avec $q = -e < 0$; le sens de cette force $\overrightarrow{F}_L$ est définie par la règle de la main droite. (voir figure 1.1[1]) .

Ces électrons s'accumulent en haut de la plaque. Lorsque la force de Coulomb compense exactement la force magnétique, l'équilibre est atteint $|F_e| = |F_m|$, on obtient l'effet Hall classique qui peut donc être expliqué de manière purement classique

$$q\overrightarrow{E} = q\left(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}\right) \tag{1.2}$$

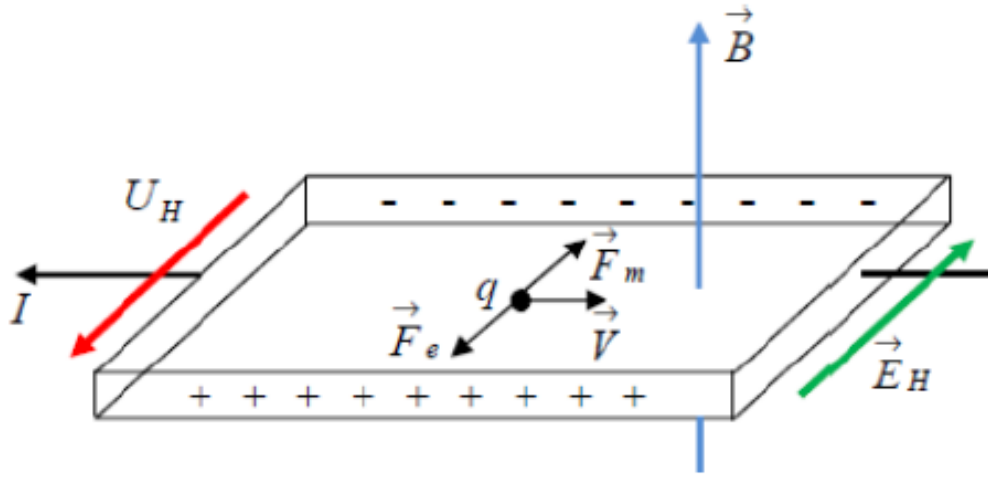


FIG. 1.1 – Géométrie de l'effet Hall [1].

1.3 La résistance de Hall :

Il s'agit simplement du ratio de la tension de Hall sur le courant circulant dans un métal bidimensionnel. On remarque que la résistance de Hall varie linéairement avec le champ $\overrightarrow{B}$.

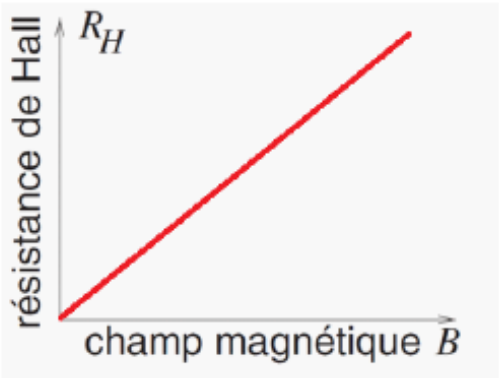


FIG. 1.2 – Résistance de Hall R_H en fonction du champ magnétique B[11].

Si l'on injecte un courant I dans un métal bidimensionnel, exposé à un champ magnétique perpendiculaire, une différence de concentration de charge s'établit entre deux

bords opposés perpendiculairement au courant.

$$E\phi = U = R_H.J_x \tag{1.3}$$

On a : $q = -e$

$$\begin{aligned} E_H &= \frac{J_x}{n_e.q}B \\ &= R_H.J_x \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$R_H = \frac{E_H}{J_x} = \frac{B}{n_e.q} \tag{1.5}$$

1.4 L'effet Hall quantique entier :

La découverte de l'effet Hall quantique entier ($EHQE$) a été en 1980 par le physicien allemand Klaus Von Klitzing, il est lauréat du prix Nobel de physique en 1980 pour la découverte de ($EHQE$).

L'expérience de ($EHQE$), est réaliser dans un gaz d'électron confinés à deux dimensions et a basse température, il a observé dans ces conditions que ce gaz avait un comportement totalement différent de celui prédit par la physique classique. Ses mesures des résistances transversales R_H et longitudinale R_L sont exposées dans la figure(1.3). Pour un champ magnétique faible, la résistance de Hall varie linéairement avec le champ magnétique tandis que la résistance longitudinale reste constante, et on retrouve l'effet Hall classique (les prédictions qu'on a vu dans la physique classique sont correctes).

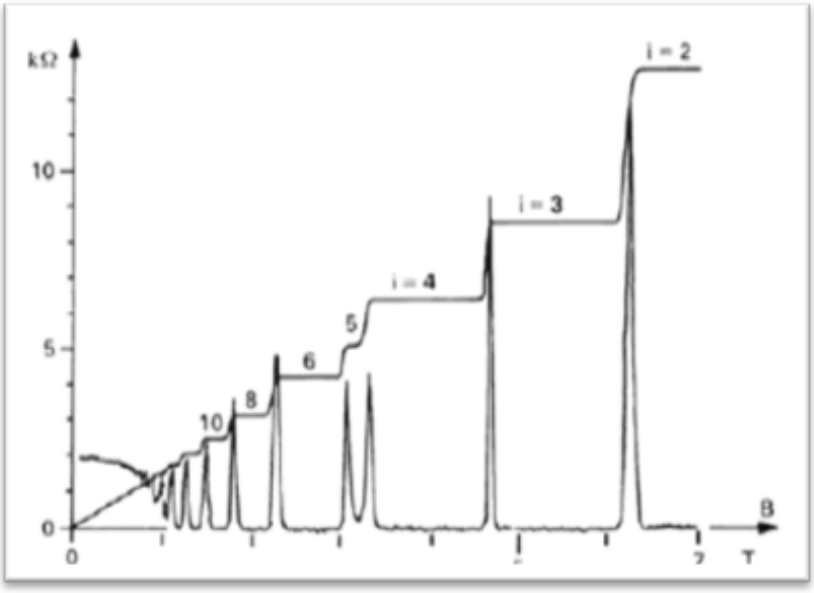


FIG. 1.3 – résistance longitudinale R_L et résistance Hall R_H varie en fonction du champ magnétiqueB[1].

1.5 L'effet Hall quantique fractionnaire :

La découverte de l'effet Hall quantique fractionnaire ($EHQF$) est exactement deux ans après La découverte de l'effet Hall quantique entier par D.C. Tsui, H.L. Stormer et A.C.Gossard[4]. La découverte de ces effets, qui a ouvert un nouveau domaine de recherche, autant théorique qu'expérimental, a été récompensée par deux Prix Nobel en 1985, cette distinction fut attribuée à K.V. Klitzing pour la découverte de l'$EHQE$, et Tsui, Stormer et Gossard partagèrent ce prix en 1998 pour leurs travaux respectivement expérimentaux et théoriques sur l'$EHQF$.

Il a été observé la présence d'un plateau dans la résistance de Hall a une valeur de $R_H = \frac{3h}{2}$, Ou la résistance transverse s'annule. D'autre part, la valeur de la résistance de Hall correspondant à une fraction du facteur de remplissage, il s'agit de l'effet Hall quantique fractionnaire ($EHQF$). Le schéma représenté sur la figure montre une observation

de l'effet Hall quantique fractionnaire. Aujourd'hui, d'autres plateaux fractionnaires ont été observés : 4/3, 5/3, 7/3, 8/3, 2/5, 1/5, etc..., ce qui correspond à des nombres de la forme p/q, p et q étant des entiers avec q impair. Les valeurs fractionnaires de ces plateaux sont extrêmement précises. Enfin, il faut savoir que les plateaux fractionnaires peuvent être vus, ou ne pas être vus, selon la température ou le degré d'impureté de L'échantillon.

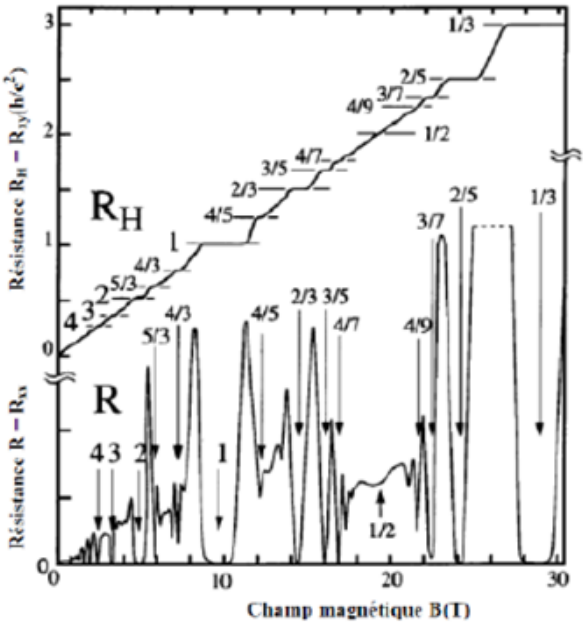


FIG. 1.4 – Différents fractions de l'EHQF[1].

1.6 Conclusion :

Les études théorique et expérimentale de l'effet Hall classique oblige la prise en compte du mouvement d'un électron dans un champ magnétique. Ce traitement ne se comprend que par une étude quantique du mouvement des électrons pour décrire ce phénomène. La résistance longitudinale R_L est indépendante du champ magnétique, ainsi que la résistance de Hall R_H avec le champ magnétique.

Pour comprendre l'effet Hall quantique, il faut étudier un gaz d'électrons confiné à deux dimensions. Pour notre cas l'absence de rebond pour les échantillons peu perturbés, lors du transport actuel le long des bords, était à l'origine de ces plateaux d'apparence.

Pour les échantillons courts ou étroits, la dispersion peut apparaître d'un bord à l'autre, ce qui sera lié à une ligne égale, laissant une résistance de trou résistante et détruisant la résistance longitudinale.

Chapitre 2

Un électron dans un champ magnétique

2.1 Introduction :

Notre compréhension des effets Hall quantiques, entier et fractionnaire, est essentiellement basée sur le traitement quantique d'un électron dans un champ magnétique lorsque sa dynamique est restreinte au plan xy. Dans ce chapitre, on s'intéresse aux propriétés des électrons sur une surface bidimensionnelle soumis à un champ magnétique $\overrightarrow{B}$, c'est le problème dit "des niveaux de Landau". Cette étude repose principalement sur traitement quantique de l'électron dans un champ magnétique[1].

2.2 Mouvement cyclotron :

Un électron de charge $q_e = -e$, de masse m et de vitesse $\overrightarrow{v}$ est déplacé dans un plan (x, y) et dans un champ magnétique B qui lui perpendiculaire .la force de Lorentz est donnée par[2, 3] :

$$\overrightarrow{F_L} = -e(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}) \tag{2.1}$$

Avec les vitesses v_x et v_y

$v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, on obtient

$$m\ \ddot{x} = -eB\ \dot{y} \tag{2.2}$$

$$m\ \ddot{y} = eB\ \dot{x} \tag{2.3}$$

$$m\ \ddot{z} = 0 \tag{2.4}$$

Dans la direction z, c'est le mouvement d'une particule libre. Dans le plan perpendiculaire au champ $\overrightarrow{B}$, on a

$$\dot{x} = -\omega_c y \tag{2.5}$$

$$\dot{y} = \omega_c x \tag{2.6}$$

Le mouvement cyclotron d'un électron dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ autour du centre de guidage $R(x;y)$est considéré comme une constante du mouvement, où R est le centre de l'orbite cyclotron[1]. L'équation suivant donne la relation entre $\overrightarrow{R}$, $\overrightarrow{r}$ et $\overrightarrow{\eta}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\eta} &= (\eta_x, \eta_y) \\ &= \overrightarrow{r} - \overrightarrow{R} \end{aligned} \tag{2.7}$$

$\overrightarrow{r}$: représente la position de l'électron.

$\overrightarrow{R}$: est le centre de l'orbite cyclotron.

$\overrightarrow{\eta}$: est le rayon cyclotron.

On intègre les équations (2.1et2.2)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega_c(y - Y)x \Longrightarrow X - r\sin(\omega_c t + \phi) \\ \dot{y} &= \omega_c(x - X)y \Longrightarrow Y + r\cos(\omega_c t + \phi) \end{aligned} \tag{2.8}$$

ϕ : représente la phase

Le mouvement de la particule projeté dans le plan $(x; y)$ est donc un cercle de centre $(x; y)$, parcouru à la fréquence ω_c, comme schématisé sur la figure(2.1)[5].

Où r représente la position de l'électron, $\overrightarrow{\eta}$ relie les deux vecteurs $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{r}$.

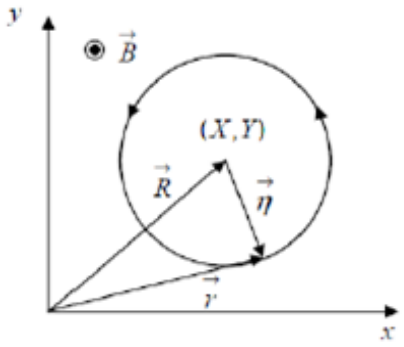


FIG. 2.1 – Mouvement cyclotron d'un électron à la position r autour du centre de guidage R[11]

2.3 Niveaux de Landau :

Dans n'importe quel mouvement circulaire de rayon η et de vitesse $\overrightarrow{v}$, l'accélération vers le centre du mouvement est donné par $a_N = \gamma = \frac{v^2}{\eta}$, afin que la partie magnétique, de la force de Lorentz défini par $\overrightarrow{F}_m$ de l'équation du mouvement soit équivalente à $m\overrightarrow{\gamma}$ [1], la relation entre $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{\eta}$ par :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} &= \frac{eB}{m}\overrightarrow{\eta} \\ &= \omega_c \overrightarrow{\eta} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Rappelons que l'hamiltonien d'un électron dans un champ magnétique représenté par :

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{P} + e\vec{A})^2 \tag{2.10}$$

L'opérateur quantité de mouvement $\overrightarrow{\Pi} = m\overrightarrow{v}$s'écrit

$$\overrightarrow{\Pi} = \vec{P} + e\vec{A} \tag{2.11}$$

Avec les relations de commutation :

$$[r_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \tag{2.12}$$

Avec :

$\hbar$: presenté le constante de planck.

On peut écrit l'Hamiltonien de l'équation (2.9) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{H} &= \frac{\overrightarrow{\Pi}^2}{2m} \\ &= \frac{\left(\Pi_x^2 + \Pi_y^2\right)}{2m} \end{aligned} \tag{2.13}$$

Ainsi que :

$$\begin{aligned} [\Pi_x, \Pi_y] &= e([p_x; A_y] + [A_x + p_y]) \\ &= -i\hbar e(\partial_x A_y - \partial_y A_x) \\ &= -i\hbar e\left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}\right) \\ &= -i\hbar e\overrightarrow{B} \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} \tag{2.15}$$

Ou, en termes de longueur magnétique $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$ l'équation (2.13) devient :

$$[\Pi_x, \Pi_y] = -i\frac{\hbar^2}{l_B^2} \tag{2.16}$$

Pour montrer plus explicitement la structure de l'oscillateur harmonique, on introduit les opérateurs de création et d'annihilation, (a, a^+) et (b, b^+) avec les relations de commutations prennent la forme $[\eta_x, \Pi_x] = i\hbar$, $[\eta_x, \eta_y] = -il_B^2$ et $[X, Y] = il_B^2$

$$\begin{aligned} a &= \frac{l_B}{\sqrt{2\hbar}}(\Pi_x - i\Pi_y) \implies a^+ = \frac{l_B}{\sqrt{2\hbar}}(\Pi_x + i\Pi_y) \\ b &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(X + iY) \implies b^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(X - iY) \end{aligned} \tag{2.17}$$

Avec la normalisation, on obtient :

$$[a, a^+] = 1 \tag{2.18}$$

alors on peut ecrire l'hamilonien (H) sous la forme suivant :

$$\begin{aligned} H &= \frac{\hbar^2}{2ml_B^2}(aa^+ + a^+a) \\ &= \hbar\omega_c(a^+a + \frac{1}{2}) \end{aligned} \tag{2.19}$$

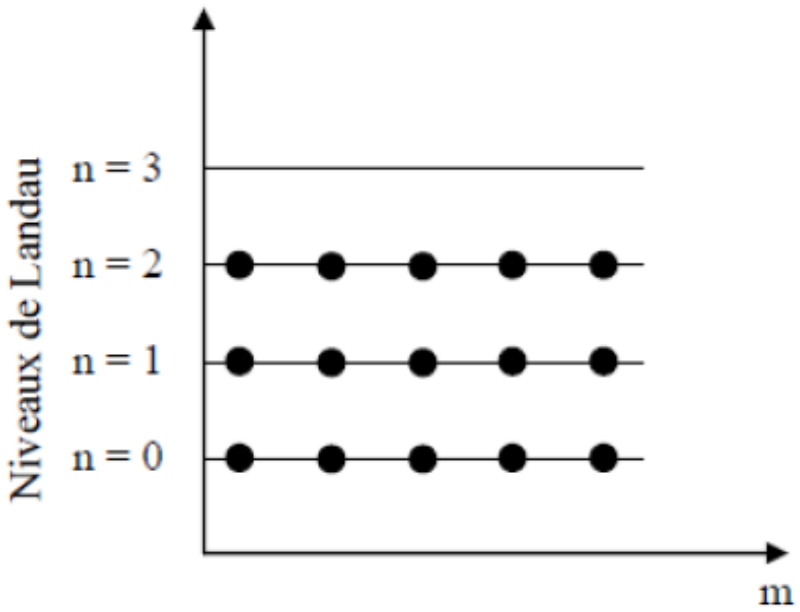


FIG. 2.2 – Niveaux de Landau. n représente les niveaux, et m est associé à la dégénérescence de chaque niveau[11].

2.4 Invariance de jauge :

Le problème correspond au système d'électrons en $2D$ loin des parois de confine ment de l'échantillon qui bordent le gaz. Pour traiter un certain nombre de problèmes, il est utile de connaitre les fonctions propres du système. Une façon commode pour construire des bases d'états propres de H_{xy} consiste à choisir une jauge. Deux choix sont particulièrement utiles : la jauge de Landau et la jauge symétrique. Elles sont particulièrement adaptées pour les problèmes invariants par translation selon la direction z. En mécanique classique le champ électromagnétique $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ peut s'écrire en fonction d'un potentiel scalaire $\phi(x)$ et d'un potentiel vecteur $\vec{A}$, tels que :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}\phi \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \vec{A} \tag{2.20}$$

Nous considérons la transformation suivante, où χ est fonction arbitraire :

$$\phi \longmapsto \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{A} \longmapsto \vec{A} + \overrightarrow{\nabla}\chi \tag{2.21}$$

La transformation entre la jauge symétrie et la jauge de Landau est décrite par la fonction : $\chi = -\frac{B}{2}xy$ [1]donc

$$\begin{aligned} \vec{A}_L &= \vec{A}_s + \overrightarrow{\nabla}\chi \\ &= \frac{\overrightarrow{B}}{2}(-y, x, 0) - \frac{\overrightarrow{B}}{2}(y, x, 0) \\ &= \overrightarrow{B}(-y, 0, 0) \end{aligned} \tag{2.22}$$

on peut écrire l'hamiltonien H_{xy} sous la forme :

$$\begin{aligned} H_{xy} &= \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L_{xy} \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2m}[(p_x - qA_x)^2 + (p_y - qA_y)^2] \end{aligned} \tag{2.23}$$

finalement :

$$H = \frac{1}{2m}[(\overrightarrow{P} - q\overrightarrow{A})]^2 \tag{2.24}$$

et on peut écrire l'hamiltonien sous la forme des variables (η_x, η_y)

$$H = \frac{1}{2} m\omega_c^2(\eta_x^2 + \eta_y^2) \tag{2.25}$$

Pour la quantification en niveau de Landau, la description quantique du même système, on impose la non commutativité de la position avec son moment :

$$[x, p_x] = [y, p_y] = i\hbar, \text{ et } [x, y] = [p_x, p_y] = [x, p_y] = [y, p_x] = 0 \tag{2.26}$$

La relation de commutation $[x, y] = 0$ nous donne :

$$[\eta_x, \eta_y] = -[X, Y] \tag{2.27}$$

Avec la relation de commutation

$$[\eta_x, \Pi_x] = i\hbar \tag{2.28}$$

La transformation sur les champs $\overrightarrow{A}$ et $\phi(x)$, appelée changement de jauge. Ce changement de jauge laisse les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ invariants et donc la trajectoire classique inchangée. Le choix de jauge fait jouer des rôles symétriques aux variables $x$et y, ce qui satisfait la condition de la symétrie du problème.

En calculant les commutateurs $[\eta_x, \eta_y]$ et $[X, Y]$ [5] :

$$\begin{aligned} [\eta_x, \eta_y] &= \frac{l}{m\omega_c^2}([p_x, A_y] - [p_y, A_x]) \\ &= \frac{1}{l_B^2}(\partial_x A_y[p_x, x] - \partial_y A_x[p_y, y]) \\ &= \frac{-i\hbar^2}{l_B} \end{aligned} \tag{2.29}$$

et

$$\begin{aligned} [X, Y] &= [x - \frac{\Pi_y}{eB}, y + \frac{\Pi_x}{eB}] \\ &= \frac{1}{eB}[x, p_x] - \frac{1}{eB}[y, p_y] - \frac{1}{(eB)^2}[\Pi_y, \Pi_x] \\ &= \frac{2i\hbar}{eB} - \frac{1}{(eB)^2}\frac{i\hbar^2}{l_B^2} \\ &= \frac{i\hbar}{eB} \\ &= il_B^2 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Le résultat est bien évidemment un invariant de jauge.

2.5 Fonction d'onde d'une particule :

Dans cette partie, nous donnerons une explicationle de fonction d'onde d'une particule dans un champ magnétique.ou les fonctions d'onde à un corps dans le plus bas niveau de Landau étaient des polynômes en z multipliés par un facteur gaussien présent pour tous les niveaux de Landau. Pour trouver les fonctions d'onde $\Phi_{n,m}(x,y) = \langle x, y \mid n, m\rangle$ dans la jauge symétrique il suffit d'utiliser $p_x = -i\hbar\partial x$ et $p_y = -i\hbar\partial y$ dans les équations suivant :

$$\begin{aligned} a \mid 0, m\rangle &= 0 \\ b \mid n, 0\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Pour $n = 0$ et $m = 0$,et des nombres n négatifs sont exclus[5].

On trouve la représentation dans la jauge symétrique Pour l'$EHQF$ on change de variables d'espace selon $z = x - iy$ est la position de

l'électron dans le plan complexe et $\overline{z} = x + iy$ son complexe conjugué, ainsi les paramètres de dérivées partielles ∂_zet $\partial_{\overline{z}}$ liées par :

$$\begin{aligned} \partial_z &= \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) \\ \partial_{\overline{z}} &= \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \end{aligned} \tag{2.32}$$

tel que : $\partial_z z = \partial_{\overline{z}}\overline{z} = 1$,$\partial_{\overline{z}} z = \partial_z \overline{z} = 0$

L'expression de l' opérateur d'annihilation a défini par :

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sqrt{m\omega_c}}{2\hbar}(\eta_x + \frac{i}{m\omega_c}\Pi_x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega_c}}[p_y + eA_y + i(p_x + eA_x)] \\ &= \frac{l_B}{\sqrt{2}}[\partial_x - i\partial_y + \frac{x - iy}{2l_B^2}] \\ &= \sqrt{2}(\frac{z}{4l_B} + l_B\partial_{\bar{z}}) \end{aligned} \tag{2.33}$$

Donc :

$$a = \sqrt{2}(\frac{z}{4l_B} + l_B\partial_{\overline{z}}) \Rightarrow a^+ = \sqrt{2}(\frac{\overline{z}}{4l_B} - l_B\partial_z) \tag{2.34}$$

et

$$b = \sqrt{2}(\frac{\overline{z}}{4l_B} + l_B\partial_z) \Rightarrow b^+ = \sqrt{2}(\frac{z}{4l_B} - l_B\partial_{\overline{z}}) \tag{2.35}$$

Avec ces opérateurs,on peut écrire l'hamiltonien H sous la forme suivant :

$$H = \hbar\omega_c(a^+a + \frac{1}{2}) \tag{2.36}$$

Avec :

ω_c : La fréquence cyclotron

et Il y a plusieurs représentations possibles de H et L_z qui prennent donc la forme :

$$H = \frac{\hbar\omega_c}{2}(\frac{\overline{z}z}{4l_B^2} - 4l_B^2\partial_z\partial_{\overline{z}} + \overline{z}\partial_{\overline{z}} - z\partial_z) \tag{2.37}$$

Avec :

$$L_z = \hbar(\overline{z}\partial_{\overline{z}} - z\partial_z) \tag{2.38}$$

Un état dans le plus bas Niveau Landau (NL) est déterminé par l'équation différentielle pour $n = 0$:

$$a\Psi_{n=0,m}(z,\overline{z}) = 0 \tag{2.39}$$

Pour a^+, b^+et poue Niveau Landau (NL) est plus bas s'écrit :

$$\Psi_{n=0,m}(z,\overline{z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi l_B^2 m!}}(\frac{z}{\sqrt{2}l_B})^m e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}} \tag{2.40}$$

$$\Psi_{m=0,n}(z,\overline{z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi l_B^2 n!}}(\frac{\overline{z}}{\sqrt{2}l_B})^n e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}} \tag{2.41}$$

Généralement :

$$\Psi_{PBNL}(z,\overline{z}) = f(z)e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}} \tag{2.42}$$

2.6 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté les propriétés des électrons dans un plan bi-dimensionnels. Nous recherchons les états propres de l'hamiltonien H d'un oscillateur harmonique dans la jauge symétrique, nous avons également expliqué les propriétés des fonctions d'ondes des équations telles qu'elles sont utilisées pour $n = 0, m$, pour la fonction d'ondes de Laughlin et de ses états excités, et cette dernière équation a la même densité de probabilité à tous les niveaux de Landau[6].

Chapitre 3

Les fonctions d'ondes modèles

3.1 Introduction

En 1982, Tsui et Stormer[4] ont découvert des plateaux de résistance correspondants à des remplissages fractionnaires, il s'agit de l'effet Hall quantique fractionnaire.

L'image de $EHQF$ est basée sur plusieurs fonctions d'ondes variationelles proposées par Laughlin en 1983, ces fonctions sont basées sur la fonction d'onde d'un oscillateur harmonique (voir équation 2.42).

Pour remarqué l'$EHQF$ il y'a plusieurs théorie (fonctions d'ondes) ,dans ce chapitre on representé les 4 fonctions d'ondes de l'effet Hall quantique fractionnaire, à savoir celles de Laughlin , Jain et Moore-Read les plus utilisées par les physiciens, pour Laughlin on utilise une fonction d'onde d'état fondamental à facteur de remplissage généraliser $\upsilon = 1/m$, avec m entier impair .dans la théorie de Jain on prendre l'$EHQF$ comme l'$EHQE$

Moore-Read déterminer l'état Pfaffien à facteur de remplissage $\upsilon = 5/2$

3.2 Fonction d'onde de laughin

En 1983, Laughlin a proposé une fonction d'onde pour l'état fondamental à $\upsilon = 1/3$ [7], pour ensuite la généraliser pour $\upsilon = 1/m$, avec m entier impair, ce qui donne m quanta de flux par électron figure 3.1.

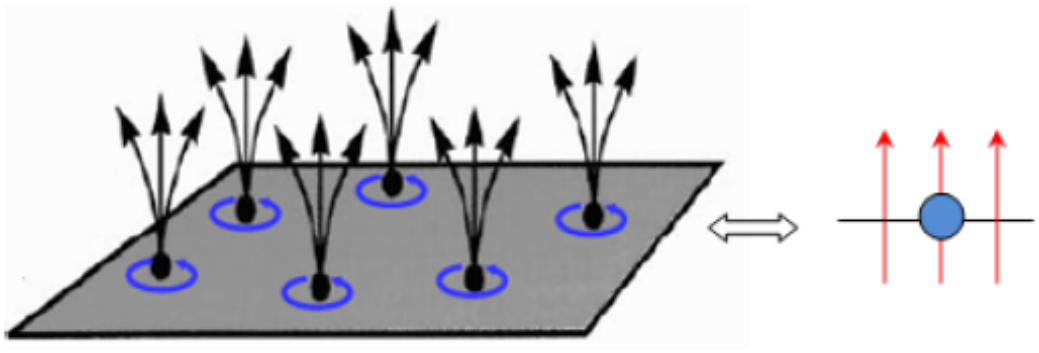


FIG. 3.1 – Particule de charge fractionnaire e/3 dans l'état fractionnaire nu=1/ 3[1].

Considérons le cas sans interaction, où le niveau de Landau complètement rempli correspond à une fonction d'onde à N_e électrons de la forme :

$$\Psi(r_1, r_2, ..., r_{Ne}) = F(z_1, z_2, ..., z_{Ne}) \exp(-\sum_{i=1}^{Ne} \mid Z_i \mid^2 /4l_B^2) \tag{3.1}$$

La fonction $F(z_1, z_2, ..., z_{Ne})$ satisfait les conditions d'antisymétrie. Un déterminant de Slater construit à partir des polynômes$F(z_1, z_2, ..., z_{Ne})$ et ne dépend pas des Z_i :

$$\begin{aligned} F(z_1, z_2, ..., z_{Ne}) &= \begin{pmatrix} Z_1^0 & Z_2^0 & . & . & Z_N^0 \\ Z_1^1 & Z_2^1 & . & . & Z_N^1 \\ . & . & . & . & . \\ Z_N^{N-1} & Z_N^{N-1} & . & . & Z_N^{N-1} \end{pmatrix} \\ &= \prod_{i<j}^{N} f(z_i - z_j) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Avec $F(z_1, z_2, ..., z_{Ne})$ est une fonction analytique à plusieurs variables $z_1, z_2, ..., z_{Ne}$ correspondant aux positions des électrons $1, 2, ..., N$.

En cas ou les niveaux de Landau ne sont pas mélangés, la fonction d'onde (3.4) est unique[8] pour tout hamiltonien d'interaction. Pour une fonction propre du premierNL, le moment cinétique Lz est proportionnel à m. La seule forme qui satisfasse ces critères

est

$$f(z) = z^m \tag{3.3}$$

Le préfacteur doit être un polynôme de degré fixé, ce qui donne la forme suivante[9] :

$$F(z_i - zj) = \prod_{i<j}^{N} f(z_i - z_j)^m \tag{3.4}$$

Le paramètre entier m contient entre La fonction d'essai proposée par Laughlin, forcément impair et pend les valeurs $3, 5, 7 \ldots$etc. De plus, la symétrie ou l'antisymétrie de P sous l'échange de deux particules implique $f(-z) = f(z)$. La seule forme qui satisfasse ces critères est :

$$f(z) = z^m \tag{3.5}$$

avec m est un impair pour les fermions. Le succès des fonctions d'onde variationnelles de Jastrow pour décrire l'hélium superfluide et connaissant la nature de liquide incompressible de l'état à $\upsilon = 1/3$, supposons la forme

$$F(z_i - zj) = \prod_{i<j}^{N} (z_i - z_j)^m \tag{3.6}$$

Finalement, la fonction d'onde totale doit être un vecteur propre du moment angulaire total $L = 3N(N-1)/2$ pour la géométrie du disque [10].

3.3 Fonction d'onde de jain :

Beaucoup des théories ont été proposées pour décrire des fonctions d'onde qui permis d'expliquer la théorie de l'$EHQF$ parmi ces théories, est celle de fermions composites introduite par Jain en 1989. La théorie de Jain des FC nous permet de prendre l'$EHQF$ comme un $EHQE$ sur la figure(3.2). Le schémanci-dessous (3.2) représente l'idée géniale de Jain [1].

La théorie de Jain est propose une généralisation des états au facteur de remplissag $\upsilon = \frac{p}{2ps+1}$ avec s et p entier, en termes de fermions composites (FC).À partir l'équation

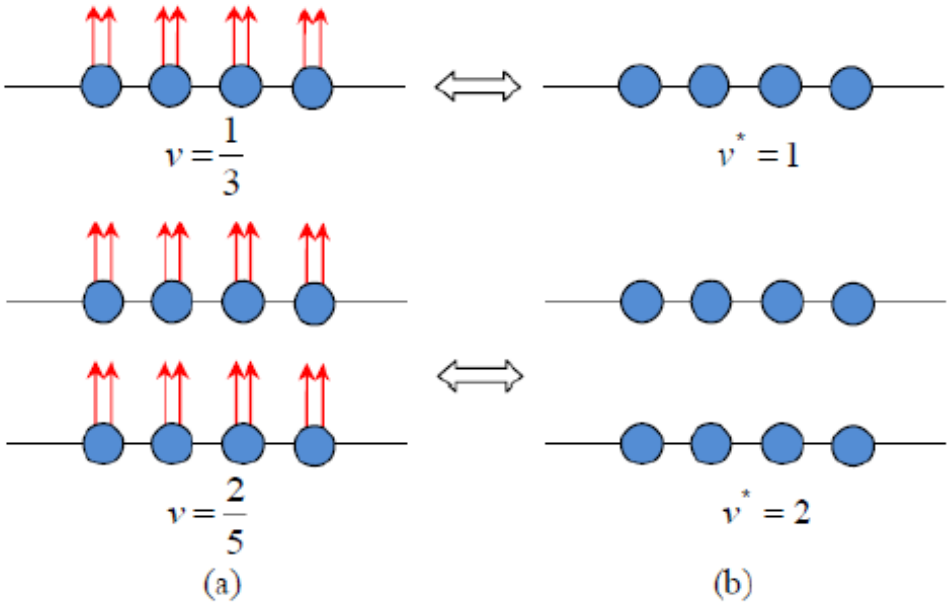


FIG. 3.2 – Schéma d'un état fondamental. (a) pour EHQE du v=n, (b) pour EHQF à v=(n/(2n+1))[11].

du modèle de Laughlin, nous pouvons écrire la fonction Ψ_{2s+1} à l'aide de la fonction Ψ_1 correspondant au facteur $v^* = 1$

$$\begin{aligned}\Psi_{2s+1} &= \prod_{i<j}^{Ne}(z_i - z_j)^{2s+1}\exp(-\sum_{k=1}^{Ne} \mid Z_k^2 \mid) \\ &= \prod_{i<j}^{Ne}(z_i - z_j)^{2s}\prod_{i<j}^{Ne}(z_i - z_j)\exp(-\sum_{k=1}^{Ne} \mid Z_k^2 \mid) \\ &= \prod_{i<j}^{Ne}(z_i - z_j)^{2s}\Psi_1 \end{aligned} \tag{3.7}$$

L'état fondamental de la fonction d'onde non normalisée des fermions composites pour $\nu^* = p$ prend la forme [11]

$$\Psi_v^{FC} = P_{PBNL}[\prod_{j<k}^{Ne}(z_j - z_k)^{2s}\Psi_{v^*}] \tag{3.8}$$

Ce qui donne la formule générale du facteur de remplissage réduit υ^*

$$\upsilon = \frac{\upsilon^*}{2s\upsilon^* + 1} \tag{3.9}$$

La fonction d'onde de Jain au facteur de remplissage $\upsilon = \frac{2}{5}$ s'écrit :

$$\Psi_{\frac{2}{5}} = P_{PBNL}[\prod_{j<k}^{Ne}(z_j - z_k)^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & . & z_N \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & . & z_N^2 \\ . & . & . & . & . \\ z_1^{\frac{N}{2}-1} & z_2^{\frac{N}{2}-1} & z_3^{\frac{N}{2}-1} & . & z_N^{\frac{N}{2}-1} \\ \overline{z}_1 & \overline{z}_2 & \overline{z}_3 & . & \overline{z}_N \\ z_1\overline{z}_1 & z_2\overline{z}_2 & z_3\overline{z}_3 & . & z_N\overline{z}_N \\ z_1^2\overline{z}_1 & z_2^2\overline{z}_2 & z_3^2\overline{z}_3 & . & z_N^2\overline{z}_N \\ . & . & . & . & . \\ z_1^{\frac{N}{2}-1}\overline{z}_1 & z_2^{\frac{N}{2}-1}\overline{z}_2 & z_3^{\frac{N}{2}-1}\overline{z}_3 & . & z_N^{\frac{N}{2}-1}\overline{z}_N \end{pmatrix} \exp(-\frac{1}{4}\sum_{j}^{N} \mid Z_i^2 \mid) \tag{3.10}$$

Les états électroniques $\upsilon = \frac{1}{3}$ et $\upsilon = \frac{2}{5}$ sont interprétés comme un $EHQE$ aux facteurs de remplissages entier $\upsilon^* = 1$ et $\upsilon^* = 2$ en termes de FC, dont les vortex portent $2s$ quanta de flux chacun.(voir figure3.3)

jain est généralisé à une idée introduisire une particule efective qui s'appelle le fermion composite représentés par un état lié d'un électron avec un nombre pair de vortex (un tourbillon du liquide quantique)

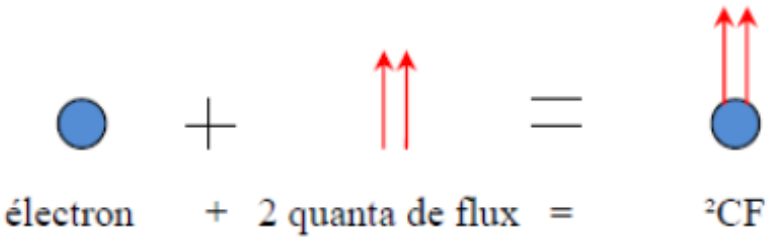


FIG. 3.3 – Représentation du vortex[11].

3.4 Fonction d'onde de Moore-Read

En 1987, Willett et ses collaborateurs ont montré l'observation d'un état de l'$EHQF$ à $\upsilon = 5/2$ dans le second NL à une température de 100 mK [12]. Un travail théorique approfondi a indiqué que l'état $\upsilon = 5/2$ est probablement décrit par la fonction d'onde "Pfaffien" de Moore-Read (MR) dans le second niveau de Landau [13].

on utilise une méthode semblable à la méthode de Laughlin,on obtenons l'état fondamental de l'interaction de Coulomb de N particules avec($N = 4$)[1],le déterminant Pfaffien permet alors de déterminer précisément l'état fondamental du système à 5/2.le déterminant Pfaffien c'est un des polynomiale d'une matrice antisymétrique de taille $N \times N$ avec N pair.matrice de taille impaire implique directement polynôme nul,Le Pfaffien en d'une matrice antisymétrique A est noté $Pf(A)$ et s'écrit

$$Pf(A) = \begin{bmatrix} 0 & X_{12} & X_{13} & X_{14} & . & . & X_{1N} \\ X_{21} & 0 & X_{23} & X_{24} & . & . & X_{2N} \\ X_{31} & X_{32} & 0 & X_{34} & . & . & X_{3N} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & 0 & . & . & X_{4N} \\ . & . & . & . & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 & . \\ X_{N1} & X_{N2} & X_{N3} & X_{N4} & . & . & 0 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

La fonction d'onde de l'état Pfaffien en de Moore et Read est décrite par un état apparié de fermions composites dans la géométrie du disque sous la forme :

$$\Psi_{MR}(z_1, ..., z_N) = Pf(\frac{1}{z_i - z_j}) \prod_{i<j=1}^{N} (z_i - z_j)^2 \exp(-\frac{1}{4}\sum_{i}^{N} \mid Z_i \mid^2) \tag{3.12}$$

Le facteur $\prod_{i<j=1}^{N} (z_i - z_j)^2$ représente l'attachement de 2 quantum de flux ($2\phi_0$) à chaque électron aux positions des particules z_i , $\exp(-\frac{1}{4}\sum_{i}^{N} \mid Z_i \mid^2)$ est représenté le facteur gaussien

et $Pf(\frac{1}{z_i - z_j})$ est représente un appariement en ondes P d'électrons. Après le déve-

loppement de Pfaffien $Pf(\frac{1}{z_i - z_j})$ on défini Pf par :

$$Pf(\frac{1}{z_i - z_j}) = \frac{1}{z_1 - z_2}\frac{1}{z_3 - z_4}...\frac{1}{z_{N-1} - z_N} + \epsilon_\sigma \tag{3.13}$$

Avec ϵ_σ est la signature de σ permutation et σ les permutations des N électrons,

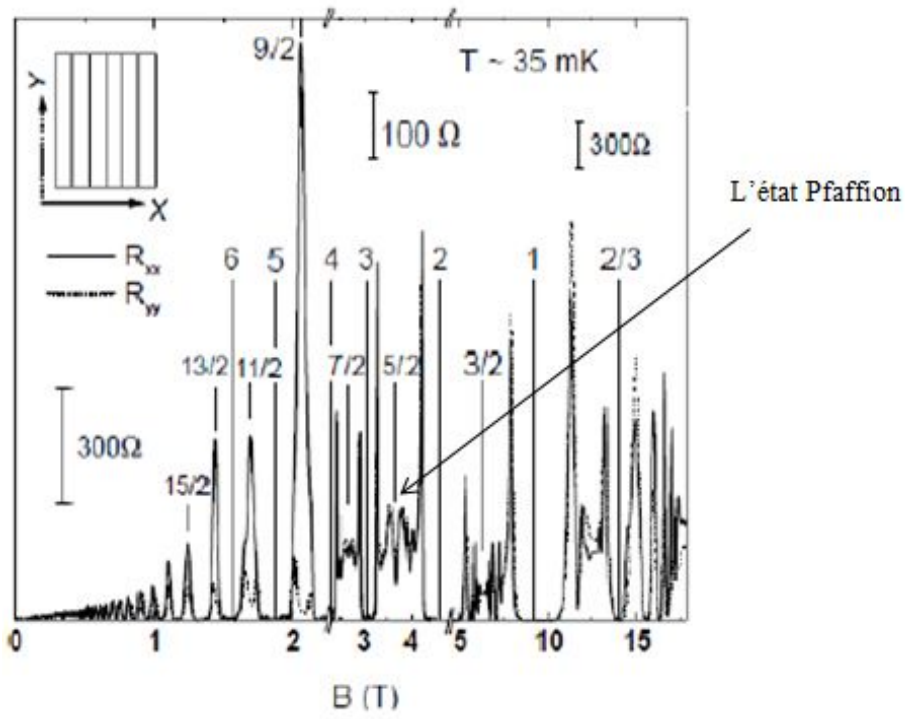


FIG. 3.4 – EHQF à la fraction υ= = 11/2, 9/2, 7/2 et 5/2[1]

la figure 3.5 représenté la mesure des plateaux dans la résistance de Hall à d'autres remplissages , comme les fractions $11/2, 9/2, 7/2$ et $3/2$

3.5 conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit les fonctions d'ondes modèles telle que celle de(Laughin, Jain et Moore-Read), qui est une très bonne approximation pour les états propres exactes d'un oscillateur harmonique, Nous avons utilisé le facteurs de remplissage $\upsilon = \frac{1}{m}$ pour la fonction d'onde de Laughlin et pour la fonction d'onde de Jain, on a utilisé le remplissage $\upsilon = \frac{1}{m}$ et $\upsilon = \frac{\upsilon^*}{2s\upsilon^*+1}$.

Pour expliquer d'autres facteurs de remplissage nous avons utilisé les fonctions d'ondes de Moore-Read.

Chapitre 4

Application par mathematica

4.1 introduction

L'effet Hall quantique fractionnaire ($EHQF$) est beaucoup plus complexe et nécessite une compréhension profonde d'introduire le problème de N électrons en interaction coulombienne. Dans ce chapitre nous présentons les fonctions d'onde de Laughlin ,Jain et de Moore-Read qui sont de très bonnes approximations du fondamental lorsque le facteur de remplissage est $\upsilon = \frac{1}{m}$ où $\upsilon = \frac{\upsilon^*}{2s\upsilon^*+1}$.

Nous présentons la méthode analytique pour trouver l'énergie d'interaction coulombienne entre les électrons(électron-électron)[18]. on prendre comme exemple $N_e = 4$ particule et différent facteur de remplissage, et pour simplifier les calculs on utilise le logiciel mathematica pour déterminer l'énergie d'interaction coulombienne.

4.2 Méthode de laughlin

Interaction electron–electron V_{ee}

Ona $N_e = 4$ ($4particule$), on va déterminer l'énergie d'interaction ε_{ee} (électron–électron), par particule :

$$p_{Laughlin} = (z_1 - z_2)^3(z_1 - z_3)^3(z_1 - z_4)^3(z_2 - z_3)^3(z_2 - z_4)^3(z_3 - z_4)^3 \qquad (4.1)$$

l'interaction coulombienne pour la fonction de Laughlin $\Psi(r_1, ..., r_{Ne})$ est s'écrit comme :

$$V_{ee} = \frac{N_e(N_e-1)}{2} \frac{\int d^2r_1.....d^2r_{N_e} \frac{e_0^2}{|r_1-r_2|} \mid \Psi_{laughlin}(r_1, ..., r_{Ne}) \mid^2}{\int d^2r_1.....d^2r_{N_e} \mid \Psi_{laughlin}(r_1, ..., r_{Ne}) \mid^2} \tag{4.2}$$

les coordonnées complexes de Jacobi Z_i est :

$$\begin{aligned} Z_1 &= z_1 - z_2 \\ Z_2 &= \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2} - z_3 \\ Z_3 &= \frac{z_1}{3} + \frac{z_2}{3} + \frac{z_3}{3} - z_4 \\ Z_4 &= \frac{z_1}{4} + \frac{z_2}{4} + \frac{z_3}{4} + \frac{z_4}{4} \end{aligned} \tag{4.3}$$

On va calculer la matrice inverse de la matrice de Jacobi avec les inconue z_1, z_2, z_3, z_4 , on obtient :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{3} + \frac{Z_3}{4} + Z_4 \\ z_2 &= -\frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{3} + \frac{Z_3}{4} + Z_4 \\ z_3 &= -\frac{2Z_2}{3} + \frac{Z_3}{4} + Z_4 \\ z_4 &= -\frac{3Z_3}{4} + Z_4 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Le polynôme vecteur P_{Jacobi} devient :

$$P_{Jacobi} = Z_1^3(\frac{-Z_1}{2} + Z_2)^3(\frac{Z_1}{2} + Z_2)^3(\frac{-2Z_2}{3} + Z_3)^3(\frac{-Z_1}{2} + \frac{Z_2}{3} + Z_3)^3(\frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{3} + Z_3)^3 \tag{4.5}$$

Et nous avons :

$$\int \prod_{K=1}^{N} d^2Z_K = \int \prod_{K=1}^{N} d^2Z_K, avec N_e \geq 2. \tag{4.6}$$

On peut écrire la forme suivante pour les coordonnées de Jacobi :

$$\sum_{k=1}^{N_e} r_K^2 = N_e R_{N_e}^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{j}{j+1} Z_j^2, avec N_e \geq 2. \tag{4.7}$$

et

$$S_4(R, Z_1, Z_2, Z_3) = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 = \frac{Z_1^2}{2} + \frac{2Z_2^2}{3} + \frac{3Z_3^2}{4} + 4Z_4^2. \tag{4.8}$$

D'après le changement de coordonnées correspondant V_{ee} devient [11]

$$\varepsilon_{ee} = \frac{3}{2} \frac{\int d^2Z_1 \int d^2Z_2 \int d^2Z_3 \int d^2Z_4 [P_{Jacobi}]^2 \exp -(\frac{Z_1^2}{4} + \frac{Z_2^2}{3} + \frac{3Z_3^2}{8} + 2Z_4^2)/l_0^2 \frac{e_0^2}{Z_1}}{\int d^2Z_1 \int d^2Z_2 \int d^2Z_3 \int d^2Z_4 [P_{Jacobi}]^2 \exp -(\frac{Z_1^2}{4} + \frac{Z_2^2}{3} + \frac{3Z_3^2}{8} + 2Z_4^2)/l_0^2}. \tag{4.9}$$

4.3 Méthode de Jain

Pour la méthode de Jain on refait la même méthode de Laughlin pour l'intéraction (électron–électron) .

Seulement, il faut déterminer la polynôme de Jain :

$$P_{Jain} = P_{PBNL} \prod_{j<k}^{N} (z_j - z_k)^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ \overline{z}_1 & \overline{z}_2 & \overline{z}_3 & \overline{z}_4 \\ z_1\overline{z}_1 & z_2\overline{z}_2 & z_3\overline{z}_3 & z_4\overline{z}_4 \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

Avec $\overline{z} = 2\frac{\partial}{\partial z}$.

$$
\begin{aligned}
P_{Jain} = {} & 8(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_2-z_3)(z_1-z_4)(z_2-z_4)(z_3-z_4)\{7z_2^4(z_3^2-z_3z_4+z_4^2) \\
& +z_3^2z_4^2(7z_3^2-22z_3z_4+7z_4^2)+z_2^3(-22z_3^3+19z_3^2+19z_3z_4^2-22z_4^3) \\
& +z_2z_3z_4(-7z_3^3+19z_3^2z_4+19z_3z_4^2-7z_4^3)+z_2^2(7z_3^4+19z_3^3z_4-69z_3^2z_4^2+ \\
& 19z_3z_4^3+7z_4^4)+7z_1^4(z_2^2+z_3^2-z_3z_4+z_4^2-z_2(z_3+z_4))+z_1^3(-22z_2^3-22z_3^3 \\
& +19z_3^2z_4+19z_3z_4^2-22z_4^3+19z_2^2(z_3+z_4)+z_2(19z_3^2-48z_3z_4+19z_4^2)) \\
& +z_1^2(7z_2^4+7z_3^4+19z_3^3z_4-69z_3^2z_4^2+19z_3z_4^3+7z_4^4+19z_2^3+(z_3+z_4) \\
& -3z_2^2(23z_3^2-8z_3z_4+23z_4^2)+z_2(19z_3^3+24z_3^2z_4+24z_3z_4^2+19z_4^3)) \\
& +z_1(-7z_2^4(z_3+z_4)+z_2^3(19z_3^2-48z_3z_4+19z_4^2)+z_3z_4(-7z_3^3+19z_3^2z_4+19z_3z_4^2 \\
& -7z_4^3)+z_2^2(19z_3^3+24z_3^2z_4+24z_3z_4^2+19z_4^3)-z_2(7z_3^4+48z_3^3z_4-24z_3^2z_4^2+ \\
& 48z_3z_4^3+7z_4^4))\}
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

De même méthode de Laughlin on obtient le polynôme de Jacobi P_{Jacobi}

$$
\begin{aligned}
P_{Jacobi} = {} & -\frac{1}{69984}(z_1(z_1-2z_2)(z_1+2z_2)(2z_2-3z_3)(3z_1+2z_2+6z_3)(3z_1-2(z_2+3z_3)) \\
& (729z_1^6+16z_2^2(z_2+3z_3)^2(4z_2^2-156z_2z_3+63z_3^2)-81z_1^4(68z_2^2-44z_2z_3+93z_3^2) \\
& +36z_1^2(316z_2^4+88z_2^3z_3-558z_2^2z_3^2+1026z_2z_3^3+189z_3^4)))
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

Avec :

$$
V_{ee}=\frac{N_e(N_e-1)}{2}\frac{\int d^2r_1.....d^2r_{N_e}\frac{e_0^2}{|r_1-r_2|}\mid\Psi_{Jain}(r_1,.....,r_{Ne})\mid^2}{\int d^2r_1.....d^2r_{N_e}\mid\Psi_{Jain}(r_1,.....,r_{Ne})\mid^2} \tag{4.13}
$$

4.4 Méthode de Moore-Read

Interaction electron–electron V_{ee}

Pour un système de $N_e = 4$ particules, on utilise la fonction d'onde de Moore-Read (MR) présenté par l'équation (3.12), avec $z_j = r_j \exp(-i\varphi_j)$ permet de décrire la phase de Hall apparaissant dans le second niveau de Landau à $\upsilon = \frac{5}{2}$ [1]

On détermine le facteur $Pf(\frac{1}{z_i-z_j})$ dans le cas de $N_e = 4$ particules.

$$Pf(\frac{1}{z_i - z_j}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{z_1-z_2} & \frac{1}{z_1-z_3} & \frac{1}{z_1-z_4} \\ \frac{-1}{z_1-z_2} & 0 & \frac{1}{z_2-z_3} & \frac{1}{z_2-z_4} \\ \frac{-1}{z_1-z_3} & \frac{-1}{z_2-z_3} & 0 & \frac{1}{z_3-z_4} \\ \frac{-1}{z_1-z_4} & \frac{-1}{z_2-z_4} & \frac{-1}{z_3-z_4} & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.14}$$

ce qui donne :

$$Pf(\frac{1}{z_i - z_j}) = \frac{1}{z_1 - z_2}\frac{1}{z_3 - z_4} - \frac{1}{z_1 - z_3}\frac{1}{z_2 - z_4} + \frac{1}{z_1 - z_4}\frac{1}{z_2 - z_3}. \tag{4.15}$$

on peut écrire la fonction d'onde de MR comme :

$$\Psi_{MR} = (\frac{1}{z_1 - z_2}\frac{1}{z_3 - z_4} - \frac{1}{z_1 - z_3}\frac{1}{z_2 - z_4} + \frac{1}{z_1 - z_4}\frac{1}{z_2 - z_3}) \prod_{i<j=1}^{4} (z_i - z_j)^2 * \exp(-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} \mid Z_i \mid^2). \tag{4.16}$$

Donc le potentiel de Coulomb s'écrit par [1]

$$\varepsilon_{ee} = \frac{(N_e - 1)}{2} \frac{\int d^2r_1 ... d^2r_{N_e} \frac{e_0^2}{|r_1 - r_2|} \mid \Psi_{MR}(z_1, ..., z_N) \mid^2}{\int d^2r_1 ... d^2r_{N_e} \mid \Psi_{MR}(z_1, ..., z_N) \mid^2}. \tag{4.17}$$

4.5 Resultat

Dans cette section, nous présentons les énergies obtenues par un calcul analytique exact de différentes ondes modèles (Laughlin, Jain et Moore-Read). Nous allons présenter les résultats d'un système de $N = 4$ et 6 particules. Les énergies caractéristiques de ces fonctions sont résumées dans les deux tableaux.

	1/3	1/5	1/7	2/5	5/2
Laughlin	0.327649	0.252296	0.212046	–	–
Jain	–	–	–	0.421628	–
Moore-Read	–	–	–	–	0.453495

TAB. 4.1 – L'énergies d'interactions(électron-électron) par particules pour un système de 4 particules

	1/3	1/5	1/7	2/5	5/2
Laughlin	0.477399	0.368213	–	–	–
Jain	–	–	–	0.580328	–
Moore-Read	–	–	–	–	0.651591

TAB. 4.2 – L'énergies d'interactions(électron-électron) par particules pour un système de 6 particules

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des différentes fonctions d'ondes pour calculer l'énergie d'interaction coulombienne (électron-électron) de l'état fondamental. Pour ce calcul on utilise les fonctions d'ondes de (Laughlin,Jain et Moore-Read). Pour les facteur de remplissage fractionaire 1/3, 1/5, 1/7, 2/5 et 5/2. Ce qui montre que, pour chaque fraction il faut adapter une fonction d'onde correspondante. Par conséquent, notre résultat théorique est en accord avec les résultats obtenu par les articles de Ciftja[17] et Jain[16].

Conclusion générale

La physique de l'effet Hall quantique fractionnaire est un domaine en plein développement. Notre travail de ce mémoire m'a permis d'étudier divers aspects de cet effet. J'ai étudié analytiquement l'$EHQF$ avec le potentiel de Coulomb, dans la géométrie du disque. En particulier, j'ai montré le rôle de l'interaction coulombienne pour décrire des différentes fractions pour la théorie de Laughlin, Jain et Moore-Read.

L'effet Hall, bien qu'étudié depuis plus d'un siècle, fait l'objet de nouvelles études théoriques et expérimentales qui sont motivées par la découverte de nouveaux matériaux et effets quantiques, tel que l'effet Hall quantique entier et fractionnaire.

Au cours de ce mémoire, on a étudié divers aspects de la physique de l'$EHQF$ dans la géométrie disque[1]. On a déterminé numériquement par calcul de l'interaction Coulombienne dans le plus bas NL un système jusqu'à 6 particules.

Pour un système de Laughlin, nous avons calculé analytiquement l'énergie d'interaction électron-électron d'un système de $N_e = 6$ électrons à différents facteurs de remplissage $\upsilon = 1/3$, $\upsilon = 1/5$ et $\upsilon = 1/7$, et pour les autres systèmes (Jain et Moore-Read) $\upsilon = 2/5$ et $\upsilon = 5/2$. On a démontré la correspondance entre les fonctions d'ondes modèles et les facteurs de remplissages dans le premier et le second niveau de Landau.

Après ces fonctions d'ondes, d'autres auteurs ont proposé d'autres fonctions d'onde permettant d'expliquer certains plateaux de conductance.

Finalement, on peut dire que chaque fonction d'onde modèle est censée être une bonne description de l'état fondamental pour l'interaction coulombienne entre les fermions(électrons) à son facteur de remplissage υ.

Annexe A

Méthode analytique (interaction e-e)

Nous présentons dans cette annexe une méthode analytique semblable à celle utilisée dans le cas de Laughlin(1983)[7] pour trois particules. Pour déterminer l'interaction coulombienne V_{ee} de 4 électrons, il faut suivre ces étapes[1]

Transformation de Jacobi

(*=== Code 1 ===*)

n = 4 ;

H = n ;

Print[Z_H = Sum[$\frac{z_i}{H}$, {i, 1, H}]]

Do[Print[Z_H = Sum[$\frac{z_i}{H}$, {i, 1, H}] - z_{H+1}], {H, 1, n - 1}]

On obtient z_i en fonction de Z_H

$z_1 = \frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{3} + \frac{Z_3}{4} + Z_4$

$z_2 = \frac{-Z_1}{2} + \frac{Z_2}{3} + \frac{Z_3}{4} + Z_4$

$z_3 = \frac{-2\ Z_2}{3} + \frac{Z_3}{4} + Z_4$

$z_4 = \frac{-3\ Z_3}{4} + Z_4$

Le polynôme vecteur P_L de Laughlin s'écrive

$P_L = (z_1 - z_2)^3(z_1 - z_3)^3(z_1 - z_4)^3(z_2 - z_3)^3(z_2 - z_4)^3(z_3 - z_4)^3$

On inclut z_1 , z_2 , z_3 , z_4 dans le polynôme vecteur P_L, alors P_J de Jacobi s'écrive

$P_J = Z_1^3(\frac{-Z_1}{2} + Z_2)^3(\frac{Z_1}{2} + Z_2)^3(\frac{-2Z_2}{3} + Z_3)^3(\frac{-Z_1}{2} + \frac{Z_2}{3} + Z_3)^3(\frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{3} + Z_3)^3$

Méthode Analytique

Ce polynôme P_J contient des coefficients impairs C_i =3, 5,...

(*=== Code 2 ===*)

Clear["Global '*"]

SetDirectory[NotebookDirectory[]] ;

Module[{coeffi, clist, inner, inlist, I1, I2, I3, I4, I5, I6, Ke, KeN},

coeffi = Coefficient[Expand[$Z_1^3(\frac{-Z_1}{2}+Z_2)^3(\frac{Z_1}{2}+Z_2)^3(\frac{-2Z_2}{3}+Z_3)^3(\frac{-Z_1}{2}+\frac{Z_2}{3}+Z_3)^3$

$(\frac{Z_1}{2}+\frac{Z_2}{3}+Z_3)^3$,Z_1, C_i] ;

clist = coeffi /. Plus -> List ;

inner =

Inner[Times, clist /. {Z_2 -> 1, Z_3 -> 1}, clist, Plus] ;

inlist = inner /. Plus -> List /. {Z_2 ->r_2^2, Z_3 ->r_3^2} ;

I1 = Integrate[inlist*$r_2 r_3$*Exp[-$\frac{3}{8}\frac{r_3^2}{l_0^2}$], {$r_3$,0, Infinity}, Assumptions -> ($l_0 > 0$)] ;

I2 = Integrate[I1*Exp[-$\frac{1}{3}\frac{r_2^2}{l_0^2}$], {$r_2$,0, Infinity}, Assumptions -> ($l_0 > 0$)] ;

I3 = Integrate[I2*r_4*Exp[-2$\frac{r_4^2}{l_0^2}$], {r_4,0, Infinity}, Assumptions -> ($l_0 > 0$)] ;

I4 = Plus @@ I3 ;

I5 = Integrate[$r_1^{2*C_i}$*Exp[-$\frac{r_1^2}{4l_0^2}$], {r_1,0, Infinity}, Assumptions -> ($l_0 > 0$)] ;

I6 = Integrate[$r_1^{2*C_i+1}$*Exp[-$\frac{r_1^2}{4l_0^2}$], {r_1,0, Infinity}, Assumptions -> ($l_0 > 0$)] ;

Ke = Times[I4, I5] ;

KeN = Times[I4, I6] ;

Export["sortie0.nb", Ke, "List"] ;

Export["sortie0N.nb", KeN, "List"] ;

Print[Ke] ;

Print[KeN] ;]

Résultat de calcul

(*=== Code 3 ===*)

Clear["Global '*"]

SetDirectory[NotebookDirectory[]] ;

Module[{Ne, m, M, L1, L, S1, S1N, S2, S2N, S3, S3N, S4, S4N, S5, S5N,

S6, S6N, S7, S7N, Sumnomi, Sumdenomi, Sumglo, Prod},

S1 = Import["sortie0.nb"] ;

S1N = Import["sortie0N.nb"] ;

S2 = Import["sortie1.nb"] ;

S2N = Import["sortie1N.nb"] ;

S3 = Import["sortie2.nb"] ;

S3N = Import["sortie2N.nb"] ;

S4 = Import["sortie3.nb"] ;

S4N = Import["sortie3N.nb"] ;

S5 = Import["sortie4.nb"] ;

S5N = Import["sortie4N.nb"] ;

S6 = Import["sortie5.nb"] ;

S6N = Import["sortie5N.nb"] ;

S7 = Import["sortie6.nb"] ;

S7N = Import["sortie6N.nb"] ;

Sumnomi = Plus[S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7] ;

Sumdenomi = Plus[S1N, S2N, S3N, S4N, S5N, S6N, S7N] ;

Sumglo = Divide[Sumnomi, Sumdenomi] ;

Prod = Times[Sumglo, $\frac{3}{2}e_0^2$] ;

N[Prod, 20]

$0.327648838811844478 13\frac{e_0^2}{l_0}$.

Nomenclature

Sigle	Signification
EHQE	*Effet Hall Quantique Entier*
EHQF	*Effet Hall Quantique Fractionnaire*
FC	*Fermions Composites*
NL	*Niveau de Landau*
PBNL	*Plus Bas Niveau de Landau*
MR	*Moore-Read*

Sigle	Signification	Sigle	Signification
$\overrightarrow{E}$	Champ éléctrique	a	Opérateur d'annihilation
$\overrightarrow{B}$	Champ magnétique	a^+	Opérateur de création
$\overrightarrow{E}_H$	Vecteur champ de Hall	b	Opérateur d'annihilation
$\overrightarrow{F_e}$	Force électrique	b^+	Opérateur de création
$\overrightarrow{F_m}$	Force magnétique	l_B	Longueur magnétique
$\overrightarrow{F_L}$	Force de Lorentz	N_e	Nombre d'électrons
$\overrightarrow{A}$	Potentiel vecteur	n	Niveau de Landau
$\overrightarrow{\Pi}$	Opérateur qantité de mouvement	ν	Facteur de remplissage
L	Moment angulaire totale	P_J	Polynôme de Jacobi
$a_N = \frac{v^2}{\eta}$	Accélération (normale)	P_L	Polynôme de Laughlin
U_H	Tension de Hall	R_N	Rayon du disque
$\overrightarrow{v}$	Vecteur vitesse de l'électron	r	Position de l'électron
$q = e$	Charge de l'électron	Z_i	Coordonnées de Jacobi
m	Masse réalle de système	z_i	Position d'électron
I	Courant éléctrique	z	Nombre complexe
J	Densité du courant	$\overline{z}$	Complexe conjugué
Ψ	Fonction d'onde	L	Moment angulaire totale
γ	Accélération	R_H	Résistance de Hall
$\overrightarrow{\nabla}$	Vecteur Nabla	ω_c	La fréquence cyclotron

Bibliographie

[1] M. AHMED AMMAR, Méthodes Analytique et Numérique dans l'Effet Hall Quantique Fractionnaire et Rôle du Spin des Électrons, thèse de doctorat, Université Abou-bekr belkaid - Tlemcen, 2018.

[2] C. KITTEL, Introduction à la physique de l'état solide, Dunod, 1979.

[3] A. HOUARI, Physics Education, Vol. 42, No. 6, p 603, 2007.

[4] TSUI, D. C., GOSSARD, A. C., and STRMER, Phys. Rev. Lett. 48, 1559(1982).

[5] M. O. GOERBIG, P. LEDERER, Electrons bidimensionnels sous champ magnétique fort : la physique des e ets Hall quantiques, Notes de cours, 2006.

[6] J. GUIGNARD, Étude de l'effet Hall quantique dans le graphène exfolié en vue d'une application en métrologie quantique, Thèse de Doctorat, Université Paris Sud 11, 2011.

[7] R. B. LAUGHLIN, Phys. Rev. Lett.50, 1395(1983).

[8] J. K. JAIN, Composite-fermion approach for the fractional quantum Hall effect.Phys.Rev. Lett. 63, 199(1989).

[9] F. MILA, Notes de cours sur l'Effet Hall Quantique, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2011 − 2012.

[10] A. STERDYNIAK, Etude de l'intrication dans l'effet Hall quantique fractionnaire,Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2013.

[11] K. LADJAL et H.S. MIHOUBI, Étude analytique et numérique de l'effet Hall quantique fractionnaire par la méthode de Laughlin et de Jain aux fermions composites,mémoire master, Université de Médéa, 2017.

[12] R. WILLETT et AL., Phys. Rev. Lett. 59, 1776, 1987.

[13] G. MOORE and N. READ, Nucl. Phys. B360, 362, 1991.

[14] D.DOUIHASNI et I. FODIL , Calcul exact de l'énergie d'interaction coulombienne pour un système de l'effet Hall quantique entier au facteur de remplissage $\upsilon = 1$ dans une géométrie du disque,mémoire master, Université de Médéa, 2018.

[15] O.CIFTJA, Exact results for finite quantum Hall systems of electrons at filling factor one : Disk geometry,journal of Mathematical Physics, 2011.

[16] J. K. JAIN, Composite Fermions, Cambridge : Cambridge University Press, 2007.

[17] O. CIFTJA, C. Wexler, Phys. Rev. B 67075304, 2003.

[18] M.A. AMMAR, Z. BENTALHA, S. BEKHECHI. Method of computation of energies in the fractional quantum Hall effect regime. Condensed Matter Physics, 2016, vol. 19, No.3, 33702

ملخص

لقد لوحظ مفعول هول الكمـــــــي الكسري في مختلف أنظمة الالكترونات الموجودة في مجال ذو بعدين و بوجود حقل مغناطيسي قوي. في البداية كانت التجارب تقتصر على غاز الالكترونات الموجودة في البنيات المختلطة أوالبئر الكمونية ذات القاعدة GaAs. بالنسبة للأنظمة اين يكون تفاعل الالكترونات ضعيفا فإننا لا نستطيع ملاحظة مفعول هول الكمـي الكسري و هذا ما أرجع مشكل الالكترونات المتماسكة بشدة صعب الدراسة. مقابل هذا الحاجز ظهرت مقاربة بسيطة قام بها العالم لوفلين في 1983 أين قدم مجموعـة من الدوال الموجيـة التجريبيـــة المختلفة لوصف الحالة الأساسية و كذلك الحالات الأولى المثارة لطيف طور هول من المستوى الادنـــى للوندوفـــي عامل ملء m/1، مع m فردي. في المقابل مجموعة من الباحثين أثبتوا أن هناك عدد لابأس به من الدوال يمكن أن تصف حالات مفعول هول الكمـي الكسري تناسبا مع عوامل الملء أمثال موجة لوفلين، جان و مور-ريد. في الأخير يمكننا القول أن كل موجـــة نموذجيـــة يمكنها أن تصف حالة أساسية بوجود تفاعل كولومب بين الفارميونات المركبة التي هـــي فـــــي هذه الحالة عبارة عن الكترونات في عامل الملء υ.

الكلمات المفتاحية: مفعول هول الكمي الكسري، الكترونات متماسكة بشدة، دوال موجية نموذجية.

Résumé

L'effet Hall quantique fractionnaire (EHQF) a été observé dans divers systèmes bidimensionnels d'électrons en présence d'un champ magnétique intense. Au départ il s'agissait surtout de gaz d'électrons dans des hétérostructures ou puits quantiques à base de GaAs. Aucun régime de faible interaction ne peut alors être traité aisément, ce qui fait de l'EHQF un des problèmes d'électrons fortement corrélés les plus difficiles. Face à cet obstacle, une approche fut introduite par Laughlin (1983), elle consiste à proposer des fonctions d'onde d'essai variationnelles pour décrire l'état fondamental ainsi que les premiers états excités du spectre des phases de Hall au remplissage des niveaux de Landau υ = 1/m, avec m impair. Plusieurs chercheurs ont montré qu'une grande partie des fonctions d'onde test de l'effet Hall peuvent être écrites comme des états de l'effet Hall fractionnaire telles que la fonction d'onde de Laughlin, Jain et Moore-Read. Chaque fonction d'onde modèle est censée être une bonne description de l'état fondamental pour l'interaction coulombienne entre les fermions(électrons) à son facteur de remplissage υ.

Mot Clé : Effet Hall quantique fractionnaire (EHQF), électrons fortement corrélés, fonctions d'onde modèles.

Abstract

The fractional quantum Hall effect (FQHE) was observed in various two-dimensional electrons systems in the presence of an intense magnetic field. At the beginning they were especially for the gases of electrons in heterostructures or quantum wells with a base of a GaAs. No models of weak interaction can then be treated easily, which makes the FQHE one of the most difficult problems of the strongly correlated electrons. The simple approach was introduced by Laughlin (1983), it consists in proposing the variational wave functions test to describe the fundamental state as well as the first excited states of the spectrum in the quantum Hall regime in the Landau levels at 1/m, with m odd. Several researchers showed that most of the wave functions test of the Hall effect can be written like states of the fractional Hall effect such as the wave function of Laughlin, Jain and Moore-Read. Each wave function model is supposed being a good description of the fundamental state for the Coulomb interaction between the fermions(electrons) at various filling factors υ.

Key Word: Fractional quantum Hall effect (EHQF), strongly correlated electrons, waves functions models