RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ YAHIA FARES DE MÉDÉA

FACULTÉ DES SCIENCES



Département de Mathématiques et informatiques

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Option : Analyse Mathématiques et Applications.

TITRE

Un système dynamique d'ordre deux pour les problèmes d'équilibre

Présenté par :

Brahim Boulares Faiza

Devant le jury :

Toumache Kamel	Univ. Médéa	Président
Bibi Hamza	Univ. Médéa	Examinateur
Benterki Abdessalem	Univ. Médéa	Examinateur
Alleche Boualem	Univ. Médéa	Encadreur

Promotion : 2023-2024

Table des matières

Remerciement **3**

Dédicace **4**

Notation **5**

Résume **6**

Abstract **7**

Introduction **8**

1 Les problèmes d'équilibre **10**
1.1 Notions et résultats préliminaires 10
1.2 Le problème d'équilibre 12
1.3 Modèles mathématiques pour les problèmes d'équilibre 12
1.3.1 Inéquation variationnelle 13
1.3.2 Problème d'optimisation 13
1.3.3 Problèmes d'optimisation de Pareto 13
1.3.4 Problèmes de point de selle 13
1.3.5 Problèmes de complémentarité et systèmes d'équations 14
1.3.6 Problèmes de point fixe 14
1.3.7 Problèmes d'équilibre de Nash 14
1.3.8 Problème multivoque et inclusions variationnelles 15
1.4 Existence des solutions des problèmes d'équilibre 17

2 Systèmes dynamiques projetés **20**
2.1 Rappel sur les systèmes dynamiques projetés pour les inéquations variationnelles sur $\mathbb{R}^n$ 20
2.1.1 Système dynamiques projeté localement 21
2.1.2 Système dynamique projeté globalement 22
2.2 Définitions et quelques propriétés de monotonie 22
2.3 Un système dynamique d'ordre deux 24
2.4 Convergence exponentielle globale 27
2.5 Convergence linéaire d'un système discret 31

3 Résultats numériques sur la convergence et la stabilité **36**
3.1 Introduction 36
3.2 Problème 1 36
3.3 Problème 2 38

3.4 Problème 3 39

Conclusion **43**

Bibliographie **45**

Remerciement

La Louange est à Allah, le Seigneur des mondes. Et que la prière et le salut soient sur celui qu'Allah a envoyé en miséricorde pour l'univers, ainsi que sur famille, ses compagnons et ses frères jusqu'au Jour de la Rétribution.
Je voudrais tout d'abord et avant tout remercier Allah le Tout-Puissant de m'avoir accordé la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.
Je tiens à exprimer ma gratitude au Professeur ***«ALLECHE Boualem»*** pour avoir accepté de diriger mon mémoire. Votre influence positive dans ma vie académique a été d'une valeur inestimable, et je tiens à vous remercier du fond du cœur pour votre engagement et votre soutien constant.
Votre passion pour votre domaine de recherche est palpable, et cela a été une source d'inspiration pour moi tout au long de mon parcours.
Votre expertise et votre connaissance approfondie du sujet ont éclairé ma compréhension et ont contribué à la qualité de mon travail de recherche. Je suis reconnaissant d'avoir eu l'opportunité de bénéficier de vos connaissances et de votre expérience.
Mes remerciements vont également à ***«Mr.TOUMACHE Kamel»*** président du jury qui a accepté de relire ce travail.
Je remercie vivement
«Mr. BIBI Hamza» et «Mr. BENTERKI Abdessalem» qui m'ont fait l'honneur en acceptant d'examiner et de juger ce travail.
je souhaite aussi remercier tous les enseignants de département de mathématiques et informatiques de la faculté des sciences de l'université ***Dr Yahia Farès Médéa.***

♠ ***BRAHIM BOULARES Faiza*** ♠

Dédicace

Avec l'expression de ma reconnaissance, je dédie ce modeste travail à ceux qui, quels que soient les termes employés, je n'arriverai jamais à leur exprimer mon amour sincère.

À mon très cher père

Pour ses encouragements, son soutien, et surtout pour son amour et son sacrifice afin que rien n'entrave le déroulement de mes études.

À mon très cher mère

Ma raison d'être, ma raison de vivre, la lanterne qui éclaire mon chemin et m'illumine de douceur et d'amour.

À mon frère Redhouane

Qui est toujours présent et m'a toujours soutenu.

À mes sœurs Assia et Ikram

Pour l'amour qu'elles me réservent. Je leur souhaite une vie pleine de bonheur et de succès.

Mes neveux et nièces

$\ll$ *Iness*, *Douaa*, *Loudjaine*, *Baraa*, *siradje* $\gg$

À toute ma famille **Brahim Boulares et Said Othmani**, source d'espoir et de motivation.

À mes meilleurs amis

$\ll$ *Maroua*, *Khadidja*, *Lina*, *Lamisse*, *Amina*, *Nadjet*, *Manel*, *Souad*, *Imane*, *Faiza*, *Ahlem* $\gg$ en souvenir de nos éclats de rire et des bons moments, en souvenir de tout ce que nous avons vécu ensemble. J'espère de tout mon cœur que notre amitié durera éternellement

À mes amis et tous collègues de ***Analyse Mathématique et Application*** université de ***Dr. Yahia Farés de Médéa***, promotion ***2024***

♠ ***BRAHIM BOULARES Faiza*** ♠

Notation

H	Espace de Hilbert.
C	Ensemble convexe et fermé de $\mathbb{R}^n$.
$\|.\|$	La norme.
$\|.\|$	Norme de Hilbert.
$\langle ., . \rangle$	Produit scalaire.
$\mathbb{R}$	Corps des réels.
$\mathbb{R}^n$	L'espace euclidien d'ordre n.
$\mathbb{R}^+_n$	Orthant positif.
p_c	Projection métrique de x sur C.
$\prod_C(x, v)$	La dérivée directionnelle de la projection en x dans la direction v.
$N_C(x)$	Cône normal d'un ensemble convexe C de $\mathbb{R}^n$ au point x.
$T_C(x)$	Cône tangent à C au point $x \in C$.
∂C	Frontière de l'ensemble C.

Résumé

Nous considérons un système dynamique d'ordre deux pour résoudre des problèmes d'équilibre dans les espaces de Hilbert. Sous les condition certaines conditions, nous prouvons l'existence et l'unicité de solution globale forte du système dynamique proposé. Nous établissons la convergence exponentielle des trajectoires sous forte pseudo-monotonicité et type Lipschitz conditions.

Nous étudions ensuite une version discrète du système dynamique d'ordre deux, qui conduit à un algorithme de type point fixe avec effet inertiel et relaxation. La convergence linéaire de cet algorithme est établie dans des conditions appropriées sur les paramètres.

Enfin, quelques expériences numériques sont apportées pour confirmer les résultats théoriques.

Abstract

We consider a second-order dynamical system for solving equilibrium problems in Hilbert spaces. Under some conditions, we prove existence and uniqueness of strong global solution of the proposed dynamical system. We establish the exponential convergence of trajectories under strong pseudo-monotonicity and Lipschitz-type conditions.

We then investigate a discrete version of the second-order dynamical system, which leads to a fixed point-type algorithm with inertial effect and relaxation. The linear convergence of this algorithm is established under suitable conditions on parameters.

Finally, some numerical experiments are reported confirming the theoretical results

Introduction

L'étude des systèmes dynamiques d'ordre deux pour résoudre les problèmes d'équilibre dans les espaces de Hilbert offrent un cadre mathématique riche et précis pour étudier des problèmes d'équilibre complexes.

L'existence et l'unicité d'une solution globale forte pour le système dynamique proposé dans des conditions optimales est un point important pour garantir l'existence de solutions des problèmes d'équilibre. La convergence de manière exponentielle des trajectoires du système dynamique est obtenue grâce à des conditions de forte pseudo-monotonie et de type Lipschitz, qui assurent une convergence rapide et stable du système vers son équilibre. L'introduction d'une version discrète conduit au développement d'un algorithme de type point fixe qui intègre des propriétés pour atteindre la convergence vers la solution du problème d'équilibre de manière efficace.

Le but de ce travail est d'approfondir la compréhension du système. Les expériences numériques sont menées pour valider les résultats théoriques obtenus, ce qui confirme la convergence de l'algorithme et la pertinence des résultats théoriques dans des situations pratiques.

Cette étude offre une analyse approfondie de l'utilisation d'un système dynamique d'ordre deux pour résoudre des problèmes d'équilibre dans les espaces de Hilbert, en couvrant les aspects théoriques et pratiques de la résolution de ce type de problèmes.

Ce travail est subdivisé en trois chapitres distincts mais complémentaires.

♠ ***Le premier chapitre*** est dédié aux notions et résultats préliminaires sur les problèmes d'équilibre. Le problème d'équilibre est y présenté ainsi que les principaux modèles mathématiques pour les problèmes d'équilibres comme cas particuliers : les inéquations variationnelles, les problèmes d'optimisation, le problème du point selle, le problème d'équilibre de Nash, les problèmes d'équilibre multivoques et inclusions variationnelles. Quelques résultats fondamentaux sur l'existence de solutions des problèmes d'équilibre sont également présentés.

♠ ***Le deuxième chapitre*** est consacré à la présentation des systèmes dynamiques projetés pour les problèmes d'équilibre. On se concentre ensuite sur le système dynamique projeté d'ordre deux en montrant les résultats fondamentaux sous certaines conditions de pseudo-monotonie et de continuité Lipshitzienne. La convergence exponentielle des trajectoires du système dynamique projeté et linéaire du système discret closent les investigations dans ce chapitre.

♠ ***Dans le troisième Chapitre***, nous considérons quelques exemples et présen-

tons des résultats numériques pour illustrer les résultats théoriques obtenus auparavant. Le premier exemple provient du modèle d'équilibre oligopolistique de Cournot Nash, le second concerne le problème d'optimisation de Rosen-Suzuki et le troisième est un problème d'équilibre fortement monotone. Des données numériques ainsi que des figures sont présentées dans ce chapitre.

Chapitre 1

Les problèmes d'équilibre

1.1 Notions et résultats préliminaires

Dons cette section, nous mentionnons quelques résultats et définitions d'analyse convexe et fonctionnelle, voir [6] pour plus de détails.

Définition 1.1.1. *Soit H un espace vectoriel. Un produit scalaire (u, v) est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$, symétrique, définie positive*
$[i, e.(u, v) \geq 0 \quad \forall u \in H$ et $(u, u) > 0$ si $u \neq 0]$.
Rappelons qu'un produit scalaire vérifie l'inégalité de Caouch-Schwarz :

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{1/2}(v, v)^{1/2} \quad \forall u, v \in H.$$

[Remarquons que pour établir l'inégalité de Cauchy-Schwarz on n'utilise pas l'hypothèse $(u, u) > 0$ si $u \neq 0$].
Rappelons aussi que $|u| = (u, u)^{1/2}$ est une norme.

Définition 1.1.2 (Espace de Hilbert)**.** *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d' un produit scalaire (u, v) et qui est complet pour la norme $||u|| = (u, v)^{1/2}$ Dans toute la suite H désigne un espace de Hilbert.*

Exemple 1. *$L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

est un espace de Hilbert ; l'espace de Sobolev H^1 que nous rencontrerons, est un espace de Hilbert $\ll$ model $\gg$ sur L^2.

Proposition 1.1. *Si H est un espace de Hilbert, alors H est uniformément convexe et donc réflexif.*

Démonstration. soient $\varepsilon > 0, u, v \in H$ tels que $|u| \leq 1$, $|v| \leq 1$, $|u - v| > \varepsilon$. Grasse à l'identité du parallélogramme on a

$$|\frac{u+v}{2}|^2 \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \text{ et donc } |\frac{u+v}{2}| < 1 - \delta \text{ avec } \delta = 1 - (1 - \frac{\varepsilon^2}{4})^{1/2} > 0.$$

□

Définition 1.1.3 (Ensemble convexe fermé). *Un sous-ensemble C d'un espace de Hilbert H est dit convexe si*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in C \quad \forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1].$$

Le sous-ensemble C est dit convexe fermé s'il est convexe et fermé dans H à la fois.

Théorème 1.1.1 (Projection sur un convexe fermé). *Soit C un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert H. Alors pour tout $f \in H$, il existe $u \in C$ unique tel que*

$$|f-u| = \min_{v \in C} |f-v|. \tag{1.1}$$

De plus u est caractérisé par la propriété :

$$u \in K(f-u, v-u) \leq 0 \quad \forall v \in C \tag{1.2}$$

On note $u = P_c f =$ Projection de f sur C.

Démonstration. a) Existence. Nous indiquerons deux démonstrations

1. La fonction $\varphi(v) = |f-v|$ est convexe, continue et $\lim_{|v|\to\infty} \varphi(v) = +\infty$. Donc φ atteint son minimum sur K puisque H est réflexif.
2. La deuxième démonstration ne fait pas appel à la théorie des espaces réflexifs. soit (v_n) une suite minimisante pour (1.1) i, e. $v_n \in K$ et

$$d_n = |f - v_n| \to d = \inf_{v \in K} |f-v|.$$

Montrons que (v_n) est de Cauchy. Appliquant l'identité du parallélogramme avec $a = f - v_n, b = f - v_m$ il vient

$$|f - \frac{v_n + v_m}{2}|^2 + |\frac{v_n - v_m}{2}|^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2).$$

Or $\frac{v_n + v_m}{2} \in K$ et donc $|f - \frac{v_n + v_m}{2}| \geq d$. par conséquent

$$|\frac{v_n - v_m}{2}|^2 \leq \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2) - d^2 \quad \text{et} \quad \lim_{m,n\to\infty} |v_n - v_m| = 0.$$

Donc $v_n \to u \in K$ et l'on $d = |f-u|$.

b) Équivalence de (1.1) et (1.2) Soit $u \in K$ vérifiant(1.1) et soit $w \in K$. On a

$$v = (1-t)u + tw \in K \quad \text{pour} \quad t \in]0,1]$$

et donc

$$|f-v| \leq |f - [(1-t)u + tw]| = |(f-u) - t(w-u)|.$$

par suite

$$|f-u|^2 \leq |f-u|^2 - 2t(f-u, w-u) + t^2|w-u|^2.$$

i,e $2(f-u, w-u) \leq t|w-u|^2$. Quand $t \to 0$ on obtient(1.2). Inversement, soit u vérifiant (1.2). Alors on a

$$|u-f|^2 - |v-f|^2 = 2(f-u, v-u) - |u-v|^2 \leq 0 \quad \forall v \in K;$$

d'où(1.2)

c) Unicité

soient u_1 et u_2 vérifiant (1.2). On a

$$(f_1 - u_1, v - u_1) \leq 0 \quad \forall v \in K \tag{1.3}$$

$$(f_2 - u_2, v - u_2) \leq 0 \quad \forall v \in K. \tag{1.4}$$

Reportant $v = u_2$ dons (1.3) et $v = u_1$ dans (1.4), on obtient après addition

$$|u_1 - u_2|^2 \leq (f_1 - f_2, u_1 - u_2).$$

Par suite $|u_1 - u_2| \leq |f_1 - f_2|$. □

Définition 1.1.4 (Quasi-convexe). *[9] Soit X un sous-ensemble convexe d'un certain espace vectoriel et soit $h : X \to \mathbb{R}$ soit une fonction. Alors h est dit quasi-convexe si pour tout $x_1, x_2 \in X$ et $0 < \lambda < 1$*

$$h(\lambda x_1 + (-\lambda)x_2) \leq \max\{h(x_1), h(x_2)\}.$$

On dit que h est quasi-concave si $-h$ est quasi-convexe.

1.2 Le problème d'équilibre

Le problème d'équilibre (également connu sous le nom d'inégalité variationnelle de Ky Fan) fournit un cadre mathématique qui comprend plusieurs types de problèmes d'optimisation comme nous allons le voir dans la suite de ce document.

Soit C un convexe fermé d'un espace de Hilbert H et $f : C \times C \to \mathbb{R}$ une fonction, appelée *bifonction.*

Définition 1.2.1. *Le problème d'équilibre, noté par $EP(f, C)$ est un problème de la forme : trouver un point $x^* \in C$ tel que*

$$f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in C \qquad (EP(f, C))$$

On note l'ensemble des solutions du problème d'équilibre $EP(f, C)$ par $Sol(f, C)$.

Remarque 1.1. *Le problème d'équilibre $EP(f, C)$ est parfois appelé* inégalité variationnelle de Ky Fan.

1.3 Modèles mathématiques pour les problèmes d'équilibre

Les problèmes d'équilibre jouent un rôle central dans l'étude des systèmes complexes et compétitifs. Il y a plusieurs exemples classiques tant en sciences de l'ingénieur (problèmes d'équilibre dans un réseau de circulation) qu'en économie (par exemple, équilibre de marché oligopolistique). De nombreuses formulations variationnelles de ces problèmes ont été présentés ces dernières années.

Le problème d'équilibre est un modèle mathématique général qui inclut, comme cas particuliers, le problème d'optimisation, l'inégalité variationnelle, le problème du point selle, le problème de Nash. Problème d'équilibre dans les jeux non coopératifs, problème du point fixe et autres, et nous montrons brièvement comment certains des principaux modèles mathématiques d'équilibre peuvent être formulés dans le format général (PE), et nous rappelons juste quelques-unes de leurs applications récentes.Voir[4]

1.3.1 Inéquation variationnelle

L'inéquation variationnelle est un outil très important dans l'étude des solutions d'équilibre et de leur stabilité. [14, 10].

Définition 1.3.1. *Pour un ensemble convexe fermé $C \subseteq \mathbb{R}^n$ et une fonction vectorielle $F : C \to \mathbb{R}^n$, une inéquation variationnelle de type **Stampacchia** consiste à déterminer un vecteur $x^* \in C$ tel que*

$$\langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \textit{pour tout} \quad y \in C \qquad (IV(F, C))$$

Où $\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

Exemple 2. *Quand $f(x, y) = F(x), y - x$ pour tout $x, y \in H$, le problème d'équilibre $EP(f, C)$ se réduit à l'inégalité variationnelle classique $IV(F, C)$ qui consiste à trouver un point $x^* \in C$ tel que*

$$\langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \textit{pour tout} \quad y \in C$$

où $F : H \longrightarrow H$ est une application continue.

1.3.2 Problème d'optimisation

Un problème de minimisation est un problème du type : trouver un minimum global d'une fonction $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sur un ensemble fermé $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Ceci revient à résoudre le problème d'équilibre (PE) avec

$$f(x, y) = \psi(y) - \psi(x).$$

En effet, x^* est un minimum global de ψ sur C si et seulement si $\psi(y) - \psi(x^*) \geq 0$, pour tout $y \in C$. Autrement dit, x^* est un minimum global de ψ sur C si et seulement si $f(y, x^*) \geq 0$, pour tout $y \in C$.

1.3.3 Problèmes d'optimisation de Pareto

Les problèmes d'optimisation de Pareto visent à trouver des solutions équilibrées entre plusieurs objectifs contradictoires. Étant donné m fonctions à valeurs réelles $\psi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, un minimum global Pareto faible de la fonction vectorielle $\psi = (\psi_1; ...; \psi_m)$ sur un ensemble fermé $C \subseteq \mathbb{R}^n$ est tout $x^* \in C$ tel que pour tout $y \in C$ il existe un indice i tel que $\psi_i(y) - \psi_i(x^*) \geq 0$.

Trouver un minimum global Pareto faible revient à résoudre le problème d'équilibre (PE) avec

$$f(x; y) = \max_{i=1...m} \psi_i(y) - \psi_i(x).$$

1.3.4 Problèmes de point de selle

Les points de selle présentent divers défis lorsqu'on optimise une fonction. Étant donné deux ensembles fermés $C_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ et $C_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$, une selle point d'une fonction $L : C_1 \times C_2 \to \mathbb{R}$ est tout $x^* = (x_1^*; x_2^*) \in C_1 \times C_2$ tel que

$$L(x_1^*; y_2) \leq L(x_1^*; x_2^*) \leq L(y_1; x_2^*)$$

est valable pour tout $y = (y_1; y_2) \in C_1 \times C_2$.

Trouver un point selle de L revient à résoudre (PE) avec $C = C_1 \times C_2$ et

$$f((x_1; x_2), (y_1; y_2)) = L(y_1; x_2) - L(x_1; y_2).$$

1.3.5 Problèmes de complémentarité et systèmes d'équations

Dans les cadres des problèmes de complémentarité, étant donné un convexe fermé cône $C \subseteq \mathbb{R}^n$ et une fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, le problème de complémentarité demande de déterminer un point $x^* \in C$ tel que $\langle F(x^*), v\rangle \geq 0$ pour tout $v \in C$, c'est-à-dire $F(x^*) \in C^*$ où C^* désigne le double cône de C.

Le système de les équations $F(x) = 0$ sont un problème de complémentarité particulier avec $C = \mathbb{R}^n$.

Résoudre le problème de complémentarité revient à résoudre (PE) avec

$$f(x, y) = \langle F(x), y - x\rangle.$$

1.3.6 Problèmes de point fixe

Les problèmes de point fixe sont des concepts fondamentaux en mathématiques et en informatique, utilisés pour trouver des solutions stables dans une variété de contextes.

Étant donné un ensemble fermé $C \subseteq \mathbb{R}^n$, un point fixe d'une application $F : C \longmapsto C$ est tout $x^* \in C$ tel que $x^* = F(x^*)$.

Trouver un point fixe revient à résoudre (PE) avec

$$f(x, y) = \langle x - F(x), y - x\rangle$$

Si $F : C \rightrightarrows C$ est une fonction multivoque, alors trouver $x^* \in C$ tel que $x^* \in F(x^*)$ revient à résoudre (PE) avec

$$f(x, y) = \max_{u \in f(x)} \langle x - u, y - x\rangle.$$

1.3.7 Problèmes d'équilibre de Nash

Les problèmes d'équilibre de Nash constituent un domaine central dans la théorie des jeux non coopératifs, où chaque joueur cherche à maximiser son utilité individuelle tout en tenant compte des actions des autres joueurs : Dans un jeu non coopératif à p joueurs, chacun Le joueur i dispose d'un ensemble de stratégies possibles $K_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ et vise à minimiser une fonction de perte $f_i : K \to \mathbb{R}$ avec $K = K_1 \times ... \times K_p$. Un équilibre de Nash est tout $x^* \in K$ tel qu'aucun joueur ne puisse réduire sa perte en changeant unilatéralement sa stratégie, dans les formules quelconques $x^* \in K$ telles que

$$f_i(x^*) \leq f_i(x^*(y_i))$$

est valable pour tout $y_i \in K_i$ et tout $i = 1; ...; p$, avec $x^*(y_i)$ désignant le vecteur obtenu à partir de x^* en remplaçant x_i^* par y_i.

Trouver un équilibre de Nash revient à résoudre (PE) avec la bifonction dite Nikaido-Isoda, c'est à dire,

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{p} \left[f_i(x(y_i)) - f_i(x) \right].$$

Il est à noter que le problème de trouver un équilibre de Nash dans le cas de stratégies conjointement convexes ne peut pas être formulé dans le (PE) format.

Quoi qu'il en soit, l'ensemble de solutions de (PE) avec la bifonction Nikaido-Isoda correspondante coïncide avec la sous-classe de ce qu'on appelle la bifonction normalisée Equilibrée de Nash.

1.3.8 Problème multivoque et inclusions variationnelles

Cette section concerne une généralisation des problèmes d'équilibre aux bifonctions multivoques ainsi que leurs applications à la résolution des inclusions variationnelles de Browder.

Fonction multivoque

Définition 1.3.2. *Soient X et Y doux ensembles.*

Une fonction multivoque F de X dans Y est une fonction à valeurs ensembliste qui à chaque $x \in X$ associe une partie $F(x) \subset Y$. On la note par $F : x \rightrightarrows Y$

Il est clair qu'une fonction multivoque F de X dans Y est une fonction de X dans l'ensemble des sous-ensembles de Y.

Dans la suite, une fonction $f : X \to Y$ est identifiée à la fonction multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ définie par $F(x) := \{f(x)\}$ pour chaque $x \in X$.

Semi-continue inférieure

Une fonction multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ est dite semi-continue inférieure en un point $x_0 \in X$ si chaque fois que V est un sous-ensemble ouvert de Y tel que $F(x_0) \bigcap V \neq \emptyset$, l'ensemble inverse inférieure $F^-(V)$ de V par F est un voisinage de x_0.

Il s'avère que F est semi-continu inférieur en $x_0 \in X$ si et seulement si F est continu en $x \in X$ en fonction de X sur l'ensemble des sous-ensembles de Y dotés de la topologie Vietoris inférieure.

Semi-continue supérieure

Une fonction multivoque définies $F : X \rightrightarrows Y$ est dite semi-continue supérieure en un point $x_0 \in X$ si elle est continue en $x_0 \in X$ en fonction de X à l'ensemble des sous-ensembles de Y dotés du Vietoris supérieur topologie. Autrement dit, F est semi-continu supérieur en $x_0 \in X$ si chaque fois que V est un sous-ensemble ouvert de Y tel que $F(x_0) \subset V$, l'ensemble inverse supérieur $F^+(v)$ de V par F est un voisinage de x_0.

Une fonction multivoque définie $F; X \rightrightarrows Y$ est dite continue en un point $x_0 \in X$ si elle est inférieure et supérieure semi-continu en $x_0 \in X$.

Problème d'équilibre multivoque

Soit C un sous-ensemble non vide d'un espace de Hilbert, et $\Phi : C \times C \rightrightarrows \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une bifonction multivoque. Le problème d'équilibre multivoque fort est un problème du type :

$$\text{trouver } x_0 \in C \ \text{ tel que } \ \Phi(x_0, y) \subset \overline{\mathbb{R}}_+ \quad \forall y \in C. \qquad (PEM_fort)$$

Le problème d'équilibre multivoque fixes faibles est un problème de la forme

$$\text{trouver } x_0 \in C \ \text{ tel que } \ \Phi(x_0, y) \bigcap \overline{\mathbb{R}}_+ \neq \emptyset \quad \forall y \in C. \qquad (PEM_faible)$$

Définition 1.3.3 (Fonction multivoque KKM). *Soit X un espace de Hilbert et M un sous-ensemble de X. Une fonction multivoques définies $F : M \rightrightarrows X$, est dite être une fonction multivoque KKM si pour tout fini sous-ensemble $\{x_1, ..., x_n\}$ de M, on a*

$$cov\,\{x_1, ..., x_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} F(x_i).$$

Le résultat suivant, appelé lemme de Ky Fan, est un résultat classique. Voir [7] pour la démonstration.

Lemme 1. *Supposons que $F : M \rightrightarrows X$ vérifie les conditions suivantes.*

1. *F est une fonction multivoque KKM,*
2. *$F(x)$ est fermé pour tout $x \in M$ et*
3. *il existe $x_0 \in M$ tel que $F(x_0)$ soit compact.*

Alors $\bigcap_{x\in M} F(x) \neq \emptyset$.

Nous définissons fonction multivoque définies suivantes $\Phi^+, \Phi^{++} : C \rightrightarrows C$ par

$$\Phi^+(Y) = \left\{x \in C | \Phi(x, y) \bigcap \overline{\mathbb{R}}_+ \neq \emptyset\right\} \quad y \in C,$$

$$\Phi^{++}(Y) = \left\{x \in C | \Phi(x, y) \bigcap \overline{\mathbb{R}}_+\right\} \quad y \in C.$$

Remarque 1.2. *On $\Phi^{++}(y) \subset \Phi^+(y)$ pour tout $y \in C$. On remarque aussi que*

1. *$x_0 \in C$ est une solution du problème d'équilibre multivoque fixes faibles (PEM_faible) si et seulement si $x_0 \in \bigcap_{y\in C} \Phi^+(y)$, et*
2. *$x_0 \in C$ est une solution du problème d'équilibre multivoque fixes fortes (PEM_fort) si et seulement $x_0 \in \bigcap_{y\in C} \Phi^{++}(y)$. Dans la suite, nous définissons*

$$cl\Phi^+(y) = cl(\Phi^+(y)) \quad et \quad cl\Phi^{++}(y) = cl(\Phi^{++}(y))$$

la fermeture de $\Phi^+(y)$ et $\Phi^{++}(y))$ respectivement, pour chaque $y \in C$.

Nous sommes maintenant confrontés à des problèmes d'équilibre multivoque fixées faibles. Le résultat suivant met l'accent sur le rôle de la quasi-hémicontinuité supérieure dans la résolution d'un équilibre multivoque définies problèmes. Il généralise également, pour une fonction multivoque unique. Nous définissons une fonction multivoque définies suivant $\Phi^{--} : C \rightrightarrows C$ par

$$\Phi^{--}(y) = \left\{x \in C | \Phi(x, y) \bigcap \mathbb{R}_- \neq \emptyset\right\} \quad \forall y \in C,$$

et nous avons mis

$$cl\Phi^{--}(y) = cl(\Phi^-(y)),$$

la fermeture de$\Phi^{--}(y)$, pour tout $y \in C$.

Inclusions variationnelles de Browder

Nous traitons des inclusions variationnelles de Browder impliquant des opérateurs pseudomonotones multivoque définies. Inclusions variationnelles de Browder qui généralisent Les inégalités variationnelles de Browder–Hartman-Stampacchia ont de nombreuses fonction, y compris les fonctions aux problèmes multivoques limites elliptiques non linéaires et à la surjectivité des fonctions multivoque définies.

Dans la suite, pour un espace de Hilbert X, on note l'espace dual de X, et par $\langle .,. \rangle$ l'appariement de dualité entre X^* et X. Soit C un sous-ensemble non vide, fermé et convexe d'un espace de Hilbert X. Dans la littérature, certaines notions de coercition pour les opérateurs multivoques fixe ont été introduit une généralisation de celles pour les opérateurs linéaires et les formes bilinéaires sur Hilbert les espaces.

Un opérateur ensembliste $F : C \rightrightarrows X^*$ est dit coercitif sur C s'il existe $y_0 \in C$ tel que

$$\lim_{\substack{\|x\| \to +\infty \\ x \in C}} \inf_{x^* \in F(x)} \langle x^*, x - y_0 \rangle > 0$$

ou si la condition la plus forte

$$\lim_{\substack{\|x\| \to +\infty \\ x \in C}} \frac{\inf_{x^* \in F(x)} \langle x_*, x - y_0 \rangle}{\|x\|} = +\infty$$

est satisfait. Il n'est pas difficile de voir que sous les deux notions de coercition de F, il existe $R > 0$ tel que $y_0 \in K_R$ et $\inf_{x^* \in F(x)} \langle x_*, x - y_0 \rangle < 0$, pour chaque $x \in K_R$, où $K_R = \{x \in C | \ \|x\| \leq R\}$. Clairement, K_R est faiblement compact chaque fois que X est réflexif.

L'ensemble K_R est appelé un ensemble de coercition, et le couple (y_0, K_R) peut ne pas être unique. Nous n'aurons jamais besoin d'un tel ensemble de coercition K_R, mais d'un ensemble de coercition faiblement compact sans nécessiter que l'espace X soit réflexif.

Rappelons qu'un opérateur à valeur fixe $F : C \rightrightarrows E^*$ est appelé pseudo-monotone sur C si pour tout $x, y \in C$

$$\langle x^*, y - x \rangle \geq 0 \Longrightarrow \langle y^*, x - y \rangle \leq 0 \quad \forall x^* \in F(x) \quad \forall y^* \in F(y)$$

Définition 1.3.4 (Inclusions variationnelles de Browder)**.** *Pour $x \in X$ et un sous-ensemble A de X^*, on pose*

$$\langle A, x \rangle = \{\langle x^*, x \rangle : x^* \in A\}.$$

Problèmes de la forme : trouver $x_0 \in C$ tel que $\langle A, x_0 \rangle \subset \mathbb{R}_+$ ou trouver $x_0 \in C$ tel que que $\langle A, x_0 \rangle \bigcap \mathbb{R}_+ \neq \phi$.

Pour des résultats récents sur l'existence de solutions des problèmes d'équilibre multivoques et des des inclusions variationnelles de Browder, définis ci-dessus, le lecteur est invité à consulter [3, 1, 2], par exemple.

1.4 Existence des solutions des problèmes d'équilibre

Nous présentons dans cette section quelques résultats fondamentaux sur l'existence des solutions des problèmes d'équilibre. Voir[9]

Définition 1.4.1. *1. On dit que f est semi-continue supérieurement en première variable si pour tout $y \in C$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est semi-continue supérieurement.*

2. f est quasi-convexe en deuxième variable si pour tout $x \in C$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est quasi-convexe.

Théorème 1.4.1. *Soit C un convexe compact et non vide d'un espace de Hilbert et soit $f : C \times C \to \mathbb{R}$. On suppose que f vérifie les conditions suivantes*

1. *f est semi-continue supérieurement en première variable,*
2. *f est quasi-convexe en deuxième variable, et*
3. *$f(x,x) \geq 0$, pour tout $x \in X$.*

Alors le problème d'équilibre $EP(f,C)$ admet une solution.

Démonstration. Pour chaque $b \in C$, considérons l'ensemble $F(b) := a \in C | f(.,b) \geq 0$. Ces ensembles sont fermés, et comme C est compact, ils le sont aussi. C'est facile voir que la conclusion du théorème est équivalente à

$$\bigcap_{b \in C} f(b) \neq \emptyset \tag{1.5}$$

Afin de prouver la relation (1.5), soit $b1, b2, ..., bn \in C$. Nous allons montrer que

$$co\{b_i | i \in \{1,2,...,n\}\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} F(b_i) \tag{1.6}$$

En effet, supposons par contradiction qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \geq 0, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, tel que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j \notin \bigcup_{i=1}^{n} F(b_j)$$

Par définition, ce dernier signifie

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j, b_j\right) < 0, \quad \forall i \{1,2,...,n\}.$$

On obtient

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j\right) < 0$$

□

Le résultat suivant a été démontre dans [9].

Théorème 1.4.2. *Supposons que*
(a) $f(x,.)$ est borné inférieur et semi-continu inférieur, pour tout $x \in C$;
(b) $f(t,t) = 0$, pour tout $t \in C$;
(c) $f(z,x) \leq f(z,y) + f(y,x)$, pour tout $x, y, z \in C$;
(d) $f(.,y)$ est semi-continu supérieur, pour tout $y \in C$.
Alors $(EP(f,C))$ admet une solution.

Démonstration. On peut supposer sans perte de généralité que K_r n'est pas vide. Pour chaque $x \in C$ considère l'ensemble non vide

$$S(x) := \{y \in C : \|y\| \leq \|x\| : f(x,y) \leq 0\}.$$

Observez que pour tout $x, y \in C$, $y \in S(x)$ implique $S(y) \subseteq S(x)$. En effet, pour $z \in S(y)$ nous avons $\|z\| \leq \|y\| \leq \|x\|$ et par $(c) f(x,z) \leq f(x,y) + f(y,z) \leq 0$. Par contre, puisque $K_{\|x\|}$ est compact, par (a) on obtient que $S(x) \subseteq K_{\|x\|}$ est un ensemble compact pour tout $x \in C$. De plus il existe un élément $x_r \in K_r$ tel que

$$f(x,y) \geq 0 \quad \forall y \in K_r. \tag{1.7}$$

Supposons qu'il existe $x \in C$ avec $f(x_r, x) < 0$ et mettons

$$a := \min_{y \in S(x)} \|y\|$$

le minimum est pris puisque $S(x)$ est non vide, compact et la norme est continu. Nous distinguons deux cas.

Cas 1 :

$a \leq r$. Soit $y_0 \in S(x)$ tel que $\|y\| = a \leq r$. Ensuite nous avons $f(x, y_0) \leq 0$ Depuis $f(x_r, x) < 0$, il s'ensuite par (c) que

$$f(x_r, y_0) \leq f(x_r, x) + f(x, y_0) < 0,$$

contredisant (1.7).

Cas 2 :

$a < r$. Soit encore $y_0 \in S(x)$ tel que $\|y\| = a > r$ Alors, $y_1 \in A$ avec $\|y_1\| < \|y_0\| = a$ tel que $f(y_0, y_1) \leq 0$. Ainsi $y_1 \in S(y_0) \subseteq S(x)$ contredisant

$$\|y_1\| < a = \min_{y \in S(x)} \|y\|.$$

Par conséquent, il n'existe pas de $x \in A$ tel que $f(x_r, x) < 0$, c'est-à-dire que x_r est une solution de $EP(f, C)$ (sur C). □

Chapitre 2

Systèmes dynamiques projetés

Dans ce chapitre nous présentons les systèmes dynamiques projetés pour les problèmes d'équilibre. L'essentiel de ce chapitre est pris des travaux de [18].

2.1 Rappel sur les systèmes dynamiques projetés pour les inéquations variationnelles sur $\mathbb{R}^n$

Avant de présenter le système dynamique projeté pour les problèmes d'équilibre et qui nous intéresse dans ce document, nous rappelons ici les définitions des systèmes dynamiques projetés pour les inéquation variationnelles.

Nous rappelons quelques définitions bien connues utiles dans la suite. Soient C un convexe de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.1.1. *Soit $g : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre, convexe et semi-continue inférieure. On appelle g subdifférentiable en x si l'ensemble n'est pas vide.*

$$\partial g(x) = \{u \in H : g(y) \geq g(x) + \langle u, y - x\rangle \quad \forall y \in H\}$$

Alors, $\partial g(x)$ est appelé le sous-différentiel de g en x et le vecteur $w \in \partial g(x)$ est appelé un sous-gradient de g en x. La fonction g est subdifférentiable sur C si elle est subdifférentiable en chaque point de C.

Notez que si la fonction g est convexe, Sci et a un domaine complet, alors il est continu sur tout l'espace. Dans ce cas, g est subdifférentiable sur H. De plus, soit f et g fonctions propres, convexes, Sci telles que $domf \bigcap intdomg \neq \emptyset$ ou $dom(g) = H$, ici $domf = \{x \in H, f(x) < +\infty\}$ désigne le domaine de f, alors $\partial(f+g) = \partial f + \partial g$

Définition 2.1.2 (Cône Normal)**.** *$N_c(x)$ le cône normal à C en point $x \in C$ est défini par :*

$$N_c(x) = \{w \in H : \langle w, x - y\rangle \leq 0, \forall y \in C\}$$

et $N_c(x) = \emptyset$ si $x \notin C$.

La fonction indicatrice de C est définie comme $i_c(x) = 0$ si $x \in C$ et $i_C(x) = +\infty$ sinon. De plus, on a $\partial i_C(x) = N_c(x)$ pour tout $x \in H$.

pour tout $x \in H$, la projection métrique $P_c(x)$ de x sur C est définie par

$$p_c(x) = \arg\min \{\|y - x\| : y \in C\}$$

puisque C est non vide, fermé et convexe, $P_c(x)$ existe et est unique.

Définition 2.1.3 (Fonctions absolument continues). *Soient $a, b \in \mathbb{R}$tels que $a < b$. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est dite absolument continue sur $[a, b]$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ telle que pour toute collection finie $([a_n, b_n])_n$ d'intervalles deux-à-deux disjoints, inclus dans $[a, b]$ et vérifiant $\sum_n (b_n - a_n) < \delta$, on ait*

$$\sum_n \|f(b_n) - f(a_n))\| < \epsilon.$$

Proposition 2.1.

1. *Toute fonction absolument continue est à la fois continue et de variation bornée.*

   La réciproque est fausse en général.
2. *Toute fonction lipschitzienne est absolument continue.*
3. *Si f et g sont absolument continues, alors il en est de même pour, $f+g, f-g$ et $f \times g$. Si de plus, il existe $C > 0$ tel que $|g(x)| \geq C$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\frac{f}{g}$ est absolument continue sur $[a, b]$*

On se voir plus détail dons [16]

2.1.1 Système dynamiques projeté localement

Dans [13] (voir aussi [14]), il est introduit le système dynamique projeté localement par rapport à un système fermé et ensemble convexe C et un champ vectoriel continu F défini sur un ensemble ouvert contenant C. Étant donnés $x \in C$ et $v \in \mathbb{R}^n$, on définit la projection du vecteur v en x (par rapport à C) par

$$\Pi_c(x, v) = \lim_{\delta \longrightarrow 0} (P_c(x + \delta v) - x)/\delta,$$

où P_c est défini comme :

$$P_c = \arg min_{z \in k} \|x - z\|.$$

Remarque 2.1. *La projection définie ci-dessus $\Pi_c(x; v)$ définie ci-dessus est équivalente à la projection euclidienne de v sur le cône tangent à C en x. Pour voir cela, introduisons le cône normal à C en x :*

$$N_c(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x' - x \rangle \leq 0, \quad \forall x' \in C\},$$

et l'ensemble

$$n(x) = \{\gamma \in \mathbb{R}^n : \|\gamma\| = 1, \gamma \in N_c(x)\}.$$

Nous désignons respectivement la frontière et l'intérieur de C par ∂C et int C. L'interprétation géométrique suivante de Π_c est bien connue.

Définition 2.1.4. *Nous définissons le système dynamique projeté localement comme le différentiel ordinaire équation suivant*

$$x' = \Pi_c(x, -F(x)), \quad x(0) = x_0 \in C, \qquad \text{(SDPL(F, C))}$$

où C est un ensemble convexe fermé et F est un champ vectoriel continu défini sur C.

2.1.2 Système dynamique projeté globalement

Définition 2.1.5. *Nous définissons le système dynamique projeté globalement comme étant l'équation différentielle ordinaire :*

$$x' = P_C(x - \alpha F(x)) - x, \qquad (SDPG(F, C, \alpha))$$

où α est une constante positive.

Remarque 2.2. *Notons que le membre de droite de $SDPG(F, C, \alpha)$ est continu sur C et peut être différent de $-F(x)$ même si x est un point intérieur à C. Ainsi, en général, les solutions de $SDPG(F, C, \alpha)$ et $SDPL(F, C)$ sont différentes.*

Proposition 2.2. *Dans le cas particulier $C = \mathbb{R}^n$ le $SDPG(F, C, \alpha)$ coïncide avec le système dynamique autonome classique*

$$x' = -\alpha F(x). \qquad (DS(\alpha F))$$

2.2 Définitions et quelques propriétés de monotonie

Définition 2.2.1. *L'application $f : H \times H \to \mathbb{R}$ est dite*

(a) Fortement monotone de module $\delta > 0$ sur C si

$$f(x, y) + f(y, x) \leq -\delta\|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in C$$

(b) Fortement pseudo-monotone de module $\delta > 0$ sur C si

$$f(x, y) \geq 0 \Longrightarrow f(y, x) \leq -\delta\|x - y\|^2$$

pour tout $x, y \in C$;

(c) Satisfaire une condition de type Lipschitz sur C s'il existe une constante $L > 0$ telle que

$$f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) - L\|x - y\|\|y - z\| \quad \forall x, y, z \in C \qquad (2.1)$$

L'exemple suivant fournit une classe de problème d'équilibre où la fonction f est fortement pseudo-monotone et pas fortement monotone sur C.

Exemple 3. *soit $C \in H$ et*

$$f(x, y) = \alpha(x, y)g(x, y)$$

où

$$\alpha(x, y) \geq \alpha > 0 \quad \forall x, y \in C$$

et g est fortement monotone sur C de module $\delta > 0$, par exemple $g(x, y) := \langle x, y - x\rangle$ (donc $\delta = 1$). On peut vérifier que f est fortement pseudo-monotone sur C. En effet, soit $x, y \in C$ tel que $f(x, y) \geq 0$, puisque $\alpha(x, y) \geq \alpha > 0$ nous avons $g(x, y) \geq 0$. Par la monotonie δ-forte de g sur C on en déduit $g(y, x) \leq -\delta\|x - y\|^2$ pour tout $x, y \in C$. Donc

$$f(y, x) = \alpha(y, x)g(y, x) \leq -\delta\alpha(y, x)\|x - y\|^2 \leq -\delta\alpha\|x - y\|^2,$$

c'est-à-dire que f est fortement pseudo-monotone sur C avec un module $\delta\alpha > 0$. Notez qu'en général f n'est ni fortement monotone ni monotone. Pour voir cela, laissez $H = \mathbb{R}^n, \alpha(x,y) = R - \|x\|, g(x,y) = \langle x, y - x\rangle$ et $C = \{x \in H, \|x\| \leq r\}$ avec $R > r > R/2$. En choisissant $x = (R/2, 0, 0, ...), y = (r, 0, 0, ...) \in C$ on a

$$f(x,y) + f(y,x) = (r - R/2)^3 > 0.$$

Remarque 2.3. *(i) Les implications $(a) \Longrightarrow (b)$ sont évidentes. Notez également que la propriété (b) garantit que (EP(f,C)) ne peut pas avoir plus d'une solution. En effet si la fonction f est fortement pseudo-monotone et continue alors le problème d'équilibre EP(f,C) a une solution unique x^*. Quand EP se réduit à IV, c'est-à-dire $f(x,y) = \langle F(x), y - x\rangle$ pour tout $x, y \in H$, la monotonie (généralisée) de la fonction f définie ci-dessus correspond au bien connu monotonie (généralisée) de la cartographie F.*

(ii) On remarque que (2.1) est plus faible que la condition de type Lipschitz, qui peut s'écrire

$$|[f(x,y) - f(x,z)] - [f(u,y) - f(u,z)|] \leq \|x - u\|\|y - z\| \quad \forall u, x, y, z \in C. \quad (2.2)$$

En effet, en prenant $u = y$ dans(2.2), puisque $f(y,y) = 0$, on peut en déduire

$$\begin{aligned} -f(x,y) + f(x,z) - f(y,z) &\leq |f(x,y) - f(x,z) + f(y,z)| \\ &\leq L\|x - y\|\|y - z\| \quad \forall x, y, z \in C \end{aligned}$$

ce qui implique (2.1). D'autre part, (2.1) implique la condition de type Lipschitz

$$f(x,y) + f(y,z) \geq f(x,z) - c_1\|x - y\|^2 - c_2\|y - z\|^2 \quad \forall x, y, z \in C$$

où c_1, c_2 sont deux constantes positives données.

Lorsque$f(x,y) = \langle F(x), y - x\rangle$ pour tout $x, y \in H$, c'est-à-dire que PE s'effondre en un IV problème, alors f satisfait la condition Lipschitzienne d'Antipin (2.2) sur C (et donc aussi (2.1) si F est Lipschitz continu sur C avec une constante Lipschitz $L > 0$.

En effet, puisque F est Lipschitzique continue, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $u, x, y, z \in C$ que

$$\begin{aligned} |[f(x,y) - f(x,z)] - [f(u,y) - f(u,z)|] &= |\langle F(x) - F(u), y - z\rangle| \\ &\leq \|F(x) - F(u)\|\|y - z\| \\ &\leq L\|x - u\|\|y - z\|. \end{aligned}$$

Pour établir les principaux résultats, il faut rappeler les concepts de stabilité d'un point d'équilibre du système dynamique général

$$x'(t) = T(x(t)), \quad t \geq 0. \quad (2.3)$$

où T est une application continue de H vers H et $x : [0, +\infty) \to H$.

Définition 2.2.2. *(a) Un point $x^* \in H$ est un point d'équilibre pour (2.3) si $T(x^*) = 0$;*

(b) Un point d'équilibre x^* de (2.3) est stable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x_0 \in B(x^*, r)$, la solution $x(t)$ du système dynamique avec

$x(0) = x_0$ *existe et est contenu dans* $B(x^*, \varepsilon)$ *pour tout* $t > 0$, *où* $B(x^*, r)$ *désigne la boule ouverte de centre* x^* *et de rayon* r ;

(c) Un point d'équilibre stable x^* *de (2.3) est asymptotiquement stable s'il existe* $r > 0$ *tel que, pour toute solution* $x(t)$ *de(2.3) avec* $x(0) \in B(x^*, r)$, *on*

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = x^*;$$

(d) Un point d'équilibre x^* *de (2.3) est exponentiellement stable s'il existe* $r > 0$ *et constantes* $k > 0$ *et* $\theta > 0$ *telles que, pour chaque solution* $x(t)$ *de (2.3) avec* $x(0) \in B(x^*, r)$, *on a*

$$\|x(t) - x^*\| \leq k\|x(0) - x^*\|e^{-\theta t} \quad \forall t \geq 0. \tag{2.4}$$

De plus, x^* *est globalement exponentiellement stable si (2.4) est vrai pour toutes les solutions* $x(t)$ *de (2.3)*

2.3 Un système dynamique d'ordre deux

Soit $\alpha, \beta : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable de Lebesgue, $\lambda > 0$ et $x_0, v_0 \in H$. Dans cette section, nous aborderons l'ensemble des solutions de $EP(f, C)$ à partir d'un perspective continue. Pour tout $\lambda > 0$, on définit une fonction $\psi_\lambda : H \to H$ par

$$\psi_\lambda(x) = \arg\min_{y \in C}\{\lambda f(x, y) + \frac{1}{2}\|y - x\|^2\} \quad \forall x \in H. \tag{2.5}$$

Pour tout $x \in H$ et $\lambda > 0$, puisque $f(x, .)$ est convexe et C est un ensemble convexe, le problème

$$\min_{y \in C}\{\lambda f(x, y) + \frac{1}{2}\|y - x\|^2\} \tag{2.6}$$

est un problème fortement convexe, il a donc une solution unique. Par conséquent, la fonction ψ_λ est bien défini et a des valeurs uniques sur H.

Suite aux travaux, nous considérons le système dynamique d'ordre deux suivant :

$$\begin{cases} x''(t) + \alpha(t)x'(t) + \beta(t)(x(t) - \psi_\lambda(x(t))) = 0, \\ x(0) = x_0, x' = v_0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Définition 2.3.1. *Une fonction* $x : [0, b] \to H$ *où* $(b > 0)$ *est dite absolument continu si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*

(i) Il existe une fonction intégrable $y : [0, b] \to H$ *telle que*

$$x(t) = x(0) + \int_0^t y(s)ds \quad \forall t \in [0, b]$$

(ii) x *est continu et sa dérivée distributionnelle* x' *est intégrable de Lebesgue sur* $[0, b]$.

Avant d'énoncer l'existence et l'unicité de la trajectoire de (2.7), il faut rappeler la définition de sa solution globale forte.

Définition 2.3.2. *On dit que $x : [0, +\infty) \to H$ est une solution globale forte de dynamique système (2.7) si les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i) $x, x' : [0, +\infty) \to H$ sont localement absolument continus, autrement dit, absolument continu sur chaque intervalle $[0, b]$ pour $0 < b < +\infty$;

(ii) $x''(t) + \alpha(t)x'(t) + \beta(t)(x(t) - \psi_\lambda(x(t))) = 0$ presque par tout $t \in [0, +\infty)$;

(iii) $x(0) = x_0$ et $x'(0) = v_0$.

Le lemme suivant sera utile dans la suite pour l'analyse de convergence. Nous fournissons une preuve simple pour être complet.

Lemme 2. *Pour tout $\lambda > 0$ et $x \in H$, en définissant $z := \psi_\lambda \in C$, alors il est vrai*

$$\lambda(f(x, y) - f(x, z)) \geq < x - z, y - z > \quad \forall y \in C. \tag{2.8}$$

Démonstration. Pour tout $x \in H$, z est l'unique solution de la minimisation fortement convexe problème (2.6). La condition d'optimalité associée à (2.6) implique que $0 \in \partial G(x)$, où $G(y) := \lambda f(x, y) + \frac{1}{2}\|y - x\|^2 + i_C(y)$. Depuis les deux premiers termes de G ont un domaine complet, la règle de somme des sous-différentiels peut être appliquée. Il existe donc $S \in \partial_2 f(x, z)$ tel que

$$0 \in \lambda_s + z - x + N_C(z)$$

où $N_C(z)$ désigne le cône normal à C en z. Ainsi, par définition de ce cône, nous avons

$$\langle x - z - \lambda s_s, y - z\rangle \leq 0 \quad \forall y \in C. \tag{2.9}$$

Par contre, puisque $s \in \partial_2 f(x, z)$, il s'ensuit

$$f(x, y) - f(x, z) \geq \langle s, y - z\rangle \quad \forall y \in C \tag{2.10}$$

En combinant (2.9)et (2.10), on obtient

$$\lambda(f(x, y) - f(x, z)) \geq \langle \lambda_s, y - z\rangle \geq \langle x - z, y - z\rangle \quad \forall y \in C$$

En conséquence du lemme 1 nous avons le résultat suivant □

Corollaire 2.1. *Pour tout $\lambda > 0, x \in Sol(f, C)$ si et seulement si $x = \psi_\lambda(x)$.*

Démonstration. Si $x = z$ alors puisque $\lambda > 0$ on a de (2.8) et $f(x, x) = 0$ que

$$f(x, y) \geq 0 \forall y \in C$$

c'est-à-dire $x \in Sol(f, C)$. Inversement, si $x \in Sol(f, C)$, alors en substituant $y = x$ dans (2.8), puisque $z \in C$ on obtient

$$\|x - z\|^2 \leq \lambda(f(x, x) - f(x, z)) = -\lambda f(x, z) \leq 0,$$

ce qui implique $x = z$ □

Remarque 2.4. *Dans le cas $f(x, y) = \langle F(x), y - x\rangle$ pour tout $x, y \in H$, le corollaire (1) réduit à la caractérisation bien connue de la solution de(IV(F, C)) : Pour tout*

$\lambda > 0$, *x est une solution de*(*IV*(F, C)) *si et seulement si* $x = pc(x - \lambda F(x))$, *En effet,*

$$\begin{aligned}\psi_\lambda(x) &= \arg\min_{y\in C} \lambda f(x,y) + \frac{1}{2}\|y-x\|^2 \\ &= \arg\min_{y\in C} \lambda \langle F(x), y-x\rangle + \frac{1}{2}\|y-x\|^2 \\ &= \arg\min_{y\in C} \|y-(x-\lambda F(x))\|^2 \\ &= Pc-(x-\lambda F(x))\end{aligned}$$

Où Pc désigne l'opérateur de projection sur C. Le système dynamique d'ordre deux (2.7*) pour IV*(F, C) *s'écrit comme suit*

$$\begin{cases} x''(t) + \alpha(t)x'(t) + \beta(t)(x(t) - Pc(x(t) - \lambda F(x(t))) = 0, \\ x(0) = x_0, x' = v_0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Dont la convergence exponentielle globale a été récemment établie. L'existence et l'unicité de la trajectoire de (2.12*) sont énoncées dans ce qui suit résultat, où nous employons la technique utilisée dans [5].*

Théorème 2.3.1. *Soient* $\alpha, \beta : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *des fonctions mesurables de Lebesgue telles que* $\alpha, \beta \in L^1_{loc}([0, +\infty))$ *(c'est-à-dire* $\alpha, \beta, \in L^1_{loc}([0, +\infty))$ *pour chaque* $0 < b < +\infty$*).*

Supposons que ψ_λ *soit Lipschitzien continu pour tout* $\lambda > 0$*. Alors pour chaque* $x_0, v_0 \in H$*, il existe une solution globale forte unique du système dynamique (* 2.7*).*

Démonstration. Pour tout $x \in H$, définissant $S : H \to H$ par

$$S_x := x - \psi_\lambda(x)$$

nous pouvons réécrire le système dynamique(2.7) comme

$$\begin{cases} x''(t) + \alpha(t)x'(t) + \beta(t)Sx(t) = 0, \\ x(0) = x_0, x' = v_0 \end{cases} \tag{2.12}$$

De plus, le lemme 1 donne $Zros(S) = Sol(f, C)$. Par la continuité lipschitzienne de ψ_λ et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il est clair que S est Lipschitzique continue. Par conséquent, la conclusion est obtenue suite à la preuve de [[5], Théorème 4]. □

Nous fournissons dans ce qui suit quelques conditions suffisantes pour la continuité Lipschitzienne de ψ_λ.

Proposition 2.3. *Si f satisfait la condition de Lipschitz (* 2.2*), alors* ψ_λ *est Lipschitzien continu avec constante* $1 + \lambda L$*.*

Démonstration. Soit $x_1, x_2 \in H$ ete $z_1 = \psi_\lambda(x_1)$, $z_2 = \psi_\lambda(x_2)$ on a $z_1, z_2 \in C$ et de Lemme 1 ça tient

$$\lambda(f(x_1, y) - f(x_1, z_1)) \geq \langle x_1 - z_1, y - z_1\rangle \, \forall y \in C$$

En remplaçant $y := z_2 \in C$ nous obtenons

$$\lambda(f(x_1, z_2) - f(x_1, z_1)) \geq \langle x_1 - z_1, z_2 - z_1 \rangle$$

De même, on peut en déduire

$$\lambda(f(x_1, z_2) - f(x_1, z_1)) \geq \langle x_1 - z_1, z_2 - z_1 \rangle$$

En ajoutant les deux dernières inégalités et en utilisant la condition de Lipschitz (2.2), nous avons

$$\begin{aligned}\langle z_1 - z_2, z_1 - x_1 + x_2 - z_2 \rangle &\leq \lambda([f(x_1, z_2) - f(x_1 - z_1)] - [f(x_2, z_2) - f(x_2, z_1)]) \\ &\leq \lambda L \|x_1 - x_2\| \|z_1 - z_2\|\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|z_1 - z_2\|^2 \leq \langle z_1 - z_2, x_1 - x_2 \rangle + \lambda L \|x_1 - x_2\| \|z_1 - z_2\| \leq (1 + \lambda L) \|x_1 - x_2\| \|z_1 - z_2\|$$

Ainsi

$$\|z_1 - z_2\| \leq (1 + \lambda L) \|x_1 - x_2\|$$

□

2.4 Convergence exponentielle globale

Dans cette section, nous étudierons la convergence exponentielle des trajectoires $x(t)$ généré par le système dynamique(2.7),pour résoudre les inclusions monotones. A partir de maintenant, nous supposons que f est δ-fortement pseudo-monotone sur C et satisfait la condition de type Lipschitz (2.1) de module $L > 0$ sur H. Le résultat suivant jouera un rôle important dans notre analyse de convergence.

Proposition 2.4. *Soit x^* l'unique solution de $EP(f, C)$ et $\lambda > 0$. Alors, pour tout $x \in H$, on a*

$$\langle x - \psi_\lambda(x), x - x^* \rangle \geq \left(1 - \frac{\lambda L^2}{4\delta}\right) \|x - \psi_\lambda(x)\|^2. \tag{2.13}$$

et

$$\|x - x^*\| \leq \frac{1 + \lambda\delta + \lambda L^2}{4\delta} \|x - \psi_\lambda(x)\| \tag{2.14}$$

Démonstration. En définissant $z := \psi_\lambda \in C$ et en substituant $y = x^* \in C$ dans (2.8), nous avons

$$\lambda f(x, x^*) - f(x, z) \geq x - z, x^* - z.$$

En combinant cette inégalité avec la condition de type Lipschitz de f on obtient

$$\begin{aligned}\langle x - z, z - x^* \rangle &\geq \lambda \left(f(x, z) - f(x, x^*)\right) \\ &\geq -\lambda f(z, x^*) - \lambda L \|x - z\| \|z - x^*\|\end{aligned} \tag{2.15}$$

Puisque $x^* \in Sol(f, C)$ et $z \in C$, on considère que $f(x^*, z) \geq 0$. Puis par le δ-fort pseudomonoticité de f nous avons $f(z, x^*) \leq -\delta \|z - x^*\|^2$. Il résulte de (2.15) que

$$\langle x - z, z - x^* \rangle \geq \lambda\delta \|z - x^*\|^2 - \lambda L \|x - z\| \|z - x^*\|. \tag{2.16}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\langle x-\psi_\lambda(x), x-x^*\rangle &= \langle x-z, x-z+z-x^*\rangle \\ &= \|x-z\|^2 + \langle x-z, z-x^*\rangle \\ &\geq \|x-z\|^2 + \lambda\delta\|z-x^*\| - \lambda L\|x-z\|\|z-x^*\| \\ &= \left(1-\frac{\lambda L^2}{4\delta}\right)\|x-z\|^2 + \frac{\lambda L^2}{4\delta}\|x-z\|^2 + \lambda\delta\|z-x^*\|^2 - \lambda L\|x-z\|\|z-x^*\| \\ &\geq \left(1-\frac{\lambda L^2}{4\delta}\right)\|x-z\|^2\end{aligned}$$

Où nous avons utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans la dernière estimation. Ce implique (2.13).

Encore une fois, à partir de (2.16) et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\lambda\delta\|z-x^*\| \leq \|x-z\|\|z-x^*\| + \lambda L\|x-z\|\|z-x^*\|$$

ce qui implique

$$\|z-x^*\| \leq \frac{1+\lambda L}{\lambda\delta}\|x-z\|$$

Ainsi

$$\|x-x^*\| \leq \|x-z\| + \|z-x^*\| \leq \frac{1+\lambda\delta+\lambda L}{\lambda\delta}\|x-z\|$$

□

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le résultat principal de cette section où nous

Théorème 2.4.1. *Soit x^* l'unique solution de $EP(f,C)$, soit $0<\lambda<\frac{4\delta}{L^2}$ et $\xi = 1-\frac{\lambda L^2}{4\delta}$.*

Soit $\alpha,\beta : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ une fonction localement absolument continue satisfaisant pour tout $t\in[0,+\infty)$

(i) $1<\alpha\leq\alpha(t)\leq\dfrac{\xi\lambda^2\delta^2}{(1+\lambda\delta+\lambda L)^2}\beta(t)+1$;

(ii) $\dot{\alpha(t)} \leq 0$ *et* $\dfrac{d}{dt}\left(\frac{\alpha(t)}{\beta(t)}\right)\leq 0$;

(iii) $\alpha^2(t)-\alpha(t)-\dfrac{2\beta(t)}{\xi}\geq 0$.

Alors toute solution globale forte $x(t)$ du système dynamique(2.7) converge exponentiellement à x^* lorsque $t\to\infty$, c'est-à-dire qu'il existe des nombres positifs K,θ tels que

$$\|x(t)-x^*\| \leq K\|x(0)-x^*\|e^{-\theta t} \quad \forall\ t\geq 0.$$

Démonstration. Considérons pour tout $t\in[0,+\infty)$ la fonction de Lyapunov $E(t) = \frac{1}{2}\|x(t)-x^*\|^2$.

Alors

$$\xi'(t) = \langle x(t)-x^*, x'(t)\rangle, \xi''(t) = \|x'(t)\|^2 + \langle x(t)-x^*, x''(t)\rangle.$$

En posant $z(t) := \psi_\lambda(x(t))$ et en tenant compte de l'équation(2.7) on obtient pour tout $t \in [0, +\infty)$ que

$$\xi''(t) + \alpha(t)\xi'(t) + \beta(t)\left\langle x(t) - x^*, x(t) - z(t)\right\rangle = \|x'(t)\|^2,$$

ce qui, avec (2.13) implique

$$\xi''(t) + \alpha(t)\xi'(t) + \xi\beta(t)\|x(t) - z(t)\|^2 \leq \|x'(t)\|^2,$$

où $\xi = 1 - \dfrac{\lambda L^2}{4\delta} > 0$. Encore une fois, il résulte de (2.7) que

$\xi''(t) + \alpha(t)\xi'(t) + \frac{\xi}{2}\beta(t)\|x(t) - z(t)\|^2 + \dfrac{\xi}{2\beta(t)}\|x''(t) + \alpha(t)x'(t)\|^2 + \leq \|x'(t)\|^2.$

En appliquant (2.14), on obtient de la dernière inégalité

$$\begin{aligned}&\xi''(t) + \alpha(t)\xi'(t) + \xi_1\beta(t)\xi(t) + \frac{\xi}{2\beta(t)}\|x''(t)\|^2\\ &+ \left(\frac{\xi\alpha^2(t)}{2\beta(t)} - 1\right)\|x'(t)\|^2 + \frac{\xi\alpha(t)}{\beta(t)}\left\langle x''(t), x'(t)\right\rangle \leq 0,\end{aligned} \tag{2.17}$$

où $\xi_1 = \dfrac{\xi\lambda^2\delta^2}{(1 + \lambda\delta + \lambda L)^2}$. puisque $\dfrac{d}{dt}\|x'(t)\|^2 = 2\left\langle x''(t), x'(t)\right\rangle$, réglage pou tout $t \in [0, +\infty)$

$a(t) := \xi_1\beta(t),\ b(t) := \dfrac{\xi\alpha(t)}{2\beta(t)},\ c(t) := \dfrac{\xi\alpha^2(t)}{2\beta(t)} - 1,\ u(t) := \|x'(t)\|^2$ et en éliminant un terme non négatif $\dfrac{\xi}{2\beta(t)}\|x''(t)\|^2$ dans(2.17), nous obtenons

$$\xi''(t) + \alpha(t)\xi'(t) + a(t)\xi(t) + b(t)u'(t) + c(t)u(t) \leq 0. \tag{2.18}$$

En multipliant les deux côtés de (2.18) avec et $e^t > 0$, et en utilisant les identités

$$\begin{aligned}e^t\varepsilon''(t) &= \frac{d}{dt}\left(e^t\varepsilon'(t)\right) - e^t\varepsilon'(t)\\ e^t\varepsilon'(t) &= \frac{d}{dt}\left(e^t\varepsilon(t)\right) - e^t\varepsilon(t)\\ e^tu'(t) &= \frac{d}{dt}\left(e^tu(t)\right) - e^tu(t)\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(e^t\varepsilon'(t)\right)(\alpha(t) - 1)\frac{d}{dt}\left(e^t\varepsilon'(t)\right)(\alpha(t) - 1) + (a(t) + 1 - \alpha(t))e^t\varepsilon(t)\\ &+ b(t)\frac{d}{dt}\left(e^tu(t)\right) + (c(t) - b(t))e^tu(t) \leq 0.\end{aligned} \tag{2.19}$$

A partir des hypothèses (i) et (iii) nous avons

$$a(t) + 1 - \alpha(t) \geq 0, c(t) - b(t) \geq 0\ \forall t \in [0, +\infty)$$

Donc à partir de (2.19) on peut écrire

$$\frac{d}{dt}\left(e^t\varepsilon'(t)\right) + (\alpha(t)-1)\frac{d}{dt}\left(e^t\varepsilon(t)\right) + b(t)\frac{d}{dt}(e^t u(t) \leq 0. \tag{2.20}$$

Depuis

$$(\alpha(t)-1)\frac{d}{dt}\left(e^t\varepsilon(t)\right) = \frac{d}{dt}\left[(\alpha(t)-1)e^t\varepsilon(t)\right] - \alpha'(t)e^t\varepsilon(t)$$
$$b(t)\frac{d}{dt}\left(e^t u(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(b(t)e^t u(t)\right) - b'(t)e^t u(t),$$

nous avons de(2.20)

$$\frac{d}{dt}\left(e^t\varepsilon'(t)\right) + \frac{d}{dt}\left[(\alpha(t)-1)e^t\varepsilon(t)\right] - \alpha'(t)e^t\varepsilon(t) + \frac{d}{dt}\left(b(t)e^t u(t)\right) - b'(t)e^t u(t) \leq 0, \tag{2.21}$$

Par hypothèse (ii), $\alpha'(t) \leq 0$ et $b'(t) \leq 0$ pour tout $t \in [0, +\infty)$. Par conséquent, nous avons de (2.21)

$$\frac{d}{dt}\left[(e^t\varepsilon'(t) + (\alpha(t)-1)e^t\varepsilon(t) + b(t)e^t u(t)\right] \leq 0.$$

Cela implique que la fonction

$$t \to e^t\varepsilon'(t) + (\alpha(t)-1)e^t\varepsilon(t) + b(t)e^t u(t)$$

est décroissant de façon monotone, donc il existe $M > 0$ tel que

$$e^t\varepsilon'(t) + (\alpha(t)-1)e^t\varepsilon(t) + b(t)e^t u(t) \leq M.$$

Puisque $b(t), u(t) \geq 0$, on obtient

$$\varepsilon'(t) + (\alpha(t)-1)e^t\varepsilon(t) \leq Me^{-t}$$

ainsi

$$\varepsilon'(t) + (\alpha-1)e^t\varepsilon(t) \leq Me^{-t}$$

pour tout $t \in [0, \infty)$. Ce ci implique que

$$\frac{d}{dt}\left[e^{(\alpha-1)t}\varepsilon(t)\right] \leq Me^{(\alpha-2)t}$$

pour tout $t \in [0, \infty)$. Par intégration, nous avons

(i) si $1 < \alpha < 2$ alors

$$0 \leq \varepsilon(t) \leq \left(\varepsilon(0) + \frac{M}{\alpha-2}\right)e^{-(\alpha-1)t};$$

(ii) si $2 < \alpha$ alors

$$0 \leq \varepsilon(t) \leq \varepsilon(0)e^{-(\alpha-1)t} + \frac{M}{2-\alpha}e^{-t} \leq \left(\varepsilon(0 + \frac{M}{2-\alpha}\right)e^{-t};$$

(iii) si $\alpha = 2$ alors

$$0 \leq \varepsilon(t) \leq (\varepsilon(0) + Mt)\, e^{-t}.$$

Cela implique que $x(t)$ converge exponentiellement versx^*.

□

Remarque 2.5. *On remarque qu'il est facile de trouver des fonctions α, β satisfaisant hypothèses (i)–(iii) dans le théorème 2*

Exemple 4. *si nous choisissons $\alpha(t) = \alpha + \dfrac{1}{t+1}$ et $\beta(t) = \beta - \dfrac{1}{t+1}$ pour tout $t \in [0, +\infty)$ et $\alpha > 1$, alors (ii) est rempli.Hypothèse (iii) est équivalent à*

$$\alpha^2 - \alpha - \frac{2}{\xi}\beta + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{t+1} + \frac{2}{\xi(t+1)} \geq 0.$$

qui peut être garanti si

$$\alpha^2 - \alpha - \frac{2}{\xi}\beta \geq 0,$$

ou

$$\alpha \geq \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8\beta}{\xi}}\right).$$

L'hypothèse (i) se lit comme suit

$$\alpha + \frac{1}{t+1} \leq \xi_1\left(\beta - \frac{1}{t+1}\right) + 1,$$

c'est à dire,

$$\alpha \leq \xi_1\beta - \frac{\xi_1 + 1}{t+1} + 1,$$

qui est garanti à chaque fois

$$\alpha \leq \xi\beta - (\xi_1 + 1) + 1 = (\beta - 1)\xi_1.$$

Par conséquent, pour remplir les hypothèses (i) à (iii), il suffit de choisir β (assez grand) et α satisfaisant

$$\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8\beta}{\xi}}\right) \leq \alpha \leq (\beta - 1)\xi_1. \tag{2.22}$$

Aussi toutes fonctions constantes $\alpha(t) = \alpha$ et $\beta(t) = \beta$ pour tout $t \in [0, +\infty)$ avec α et β satisfaisant

$$\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8\beta}{\xi}}\right) \leq \alpha \leq \beta\xi_1 + 1.$$

remplir les hypothèses (i) à (iii).

2.5 Convergence linéaire d'un système discret

Discrétisation explicite A Un schéma de différences finies pour (2.7) par rapport au temps variable t, avec pas $h_k > 0$, variable de relaxation $\beta_k > 0$, variable d'amortissement $\alpha_k > 0$, et les points initiaux x_0 et x_1 donnent le schéma itératif suivant :

$$\frac{1}{h_k^2}(x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}) + \frac{\alpha_k}{h_k}(x_k - x_{k-1}) + \beta_k(y_k - \psi_\lambda(y_k)) = 0. \tag{2.23}$$

où y_k est un point extrapolé de x_k et x_{k-1} qui sera choisi plus tard (car $S := I - \psi_\lambda(.)$ est Lipschitzien continu, il y a une certaine flexibilité dans ce choix). Nous pouvons écrire (2.23) comme

$$x_{k+1} = x_k + (1 - \alpha_k h_k)(x_k - x_{k-1}) - h_k^2 \beta_k (y_k - \psi_\lambda(y_k)).$$

Paramètre $\rho_k = 1 - \alpha_k h_k, \eta_k = h_k^2 \tau_k$ et choisissez $y_k := x_k + \rho_k(x_k - x_{k-1})$ nous pouvons écrivez le schéma ci-dessus comme

$$\begin{cases} y_k = x_k + \rho_k(x_k - x_{k-1}) \\ x_{k+1} = (1 - \eta_k) y_k + \eta_k \psi_\lambda(y_k) \end{cases}$$

qui est une version décontractée de l'algorithme de point fixe avec des effets inertiels supplémentaires. Dans cette section, nous étudierons les propriétés de convergence de (2.24). Pour l'amour de Pour simplifier, nous ne considérons que le cas où tous les paramètres sont constants, c'est-à-dire $\rho_k = \rho$ et $\eta_k = \eta$ pour tout k.

$$\begin{cases} y_k = x_k + \rho(x_k - x_{k-1}) \\ x_{k+1} = (1 - \eta) y_k + \eta \psi_\lambda(y_k). \end{cases} \tag{2.24}$$

Nous faisons également les hypothèses suivantes sur les paramètres :

(A1) : $\theta > 0$ et $0 < \lambda < \dfrac{2\delta}{\theta L^2}$;

(A2) : $0 < \eta < min\left\{ \dfrac{1}{1-q}, +q(1 - \frac{1}{\theta}) \right\}$

où $q := \dfrac{1}{1 + \lambda(2\delta - \lambda\theta L^2)}$.

(A3) : $0 \leq \rho \leq min\left\{ \dfrac{1 - \eta + \eta q}{3}, \dfrac{(1 - \frac{1}{\theta})q + 1 - \eta}{(1 - \frac{1}{\theta})q + 1 - \eta} \right\}$.

Remarque **2.6.** *Notez que (A2) permet une surrelaxation, c'est-à-dire $\eta > 1$, ce qui peut accélérer la vitesse de convergence dans certains exemples. Si $\eta = 1$ et (A1) est rempli, alors (A2) est valable pour tout $\theta > 1$ et (A3) devient*

$$0 \leq \rho \leq min\left\{ \frac{q}{3}, \frac{(1 - \frac{1}{\theta})q}{(1 - \frac{1}{\theta})q + 2} \right\}.$$

Dans ce cas, (2.24) se réduit à la méthode du point fixe avec effet inertiel

$$\begin{cases} y_k = x_k + \rho(x_k - x_{k-1}) \\ x_{k+1} = \psi_\lambda(yk). \end{cases}$$

L'algorithme (2.24) est très général, dans le sens où il inclut de nombreux autres algorithmes comme un cas particulier.

Exemple 5. *Lorsque $\rho = 0$ et $\eta = 1$, cela se réduit au fixe algorithme de points étudié dans [11, 12] ; lorsque $\rho = 0$, il se réduit au point fixe détendu algorithme considéré dans [19] ; lorsque $\eta = 1$ c'est l'algorithme du point fixe avec inertie effet proposé dans [17].*

Comme cette section, nous supposons que f est $\delta - fortement$ pseudo-monotone sur C et satisfait la condition de type Lipschitz (2.1) avec module $L > 0$ sur H, la convergence linéaire du schéma (2.24) est énoncée comme suit.

Théorème 2.5.1. *Soit les paramètres λ, η, ρ tels que les hypothèses (A1), (A2) et (A3) sont remplies. Alors la séquence x_k générée par (2.24) converge linéairement vers le solution unique x^* de $EP(f, C)$.*

Démonstration. En définissant $z_k := \psi\lambda(yk) \in C$ et en substituant $y = x^* \in C$ dans (2.8), nous avons

$$\lambda \left(f(y_k, x^*) - f(y_k, z_k) \right) \geq \langle y_k - z_k, x^* - z_k \rangle$$

En combinant cette inégalité avec la condition de type Lipschitz de f on obtient

$$\begin{aligned} \langle y_k - z_k, z_k - x^* \rangle &\geq \lambda \left(f(y_k, z_k) - f(y_k, x^*) \right) \\ &\geq -\lambda f(z_k, x^*) - \lambda L \|y_k - z_k\| \|z_k - x^*\|. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Puisque $x^* \in Sol(f, C)$ et $z_k \in C$, on considère que $f(x^*, z_k) \geq 0$. Puis par le δ-fort pseudomonoticité de f nous avons $f(z_k, x^*) - \delta \|z_k - x^*\|^2$. Il résulte de(2.25) que

$$\langle y_k - z_k, z_k - x^* \rangle \geq \lambda\delta \|z_k - x^*\|^2 - \lambda L \|y_k - z_k\| \|z_k - x^*\|.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} -2\lambda\delta \|z_k - x^*\|^2 + 2\lambda L \|y_k - z_k\| \|z_k - x^*\| &\geq 2 \langle y_k - z_k, x^* - z_k \rangle \\ &= \|z_k - x^*\|^2 - \|y_k - x^*\|^2 + \|y_k - z_k\|^2, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} (1 + 2\lambda\delta) \|z_k - x^*\|^2 &\leq \|y_k - x^*\|^2 - \|y_k - z_k\|^2 + 2\lambda L \|y_k - z_k\| \|z_k - x^*\| \\ &\leq \|y_k - x^*\|^2 - \|y_k - z_k\|^2 + \frac{1}{2} \|y_k - z_k\|^2 + 2\lambda^2 L^2 \|z_k - x^*\|^2 \\ &\leq \|y_k - x^*\|^2 - \frac{1}{2} \|y_k - z_k\|^2 + 2\lambda^2 L^2 \|z_k - x^*\|^2 \end{aligned}$$

ou équivalent,

$$\left[1 + 2\lambda(\delta - \lambda L^2) \right] \|z_k - x^*\|^2 \leq \|y_k - x^*\|^2 - \frac{1}{2} \|y_k - z_k\|^2$$

Donc,

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|(1 - \eta) y_k + \eta z_k - x^*\|^2 \\ &= \|(1 - \eta)(y_k - x^*) + \eta(z_k - x^*)\|^2 \\ &= (1 - \eta) \|y_k - x^*\|^2 + \eta \|_k - x^*\|^2 - \eta(1 - \eta) \|y_k - z_k\|^2 \\ &\leq (1 - \eta) \|y_k - x^*\|^2 + \frac{\eta}{1 + 2\lambda(\delta - \lambda L^2)} \|y_k - x^*\|^2 \\ &- \frac{1}{2(1 + 2\lambda(\delta - \lambda L^2))} \|y_k - z_k\|^2 - \eta(1 - \eta) \|y_k - z_k\|^2 \\ &= k_1 \|y_k - x^*\|^2 - k_2 \|y_k - z_k\|^2 \end{aligned} \tag{2.26}$$

où

$$k_1 := 1 - \eta + \frac{\eta}{1 + 2\lambda(\delta - \lambda L^2)} = 1 - \eta + \eta q > 0$$

et

$$k_2 := \frac{1}{2(1 + 2\lambda(\delta - \lambda L^2))} + \eta(1 - \eta) = \frac{q}{2} + \eta(1 - \eta) > 0$$

par l'hypothèse (A2).

Estimons le membre de droite de (2.26). Nous avons

$$\begin{aligned}
\eta^2\|y_k - z_k\|^2 &= \|x_{k+1} - y_k\|^2 \\
&= \|x_{k+1} - x_k - \rho(x_k - x_{k-1})\|^2 \\
&= \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \rho^2(x_k - x_{k-1})\|^2 - 2\rho\langle x_{k+1} - x_k, x_k - x_{k-1}\rangle \\
&\geq \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \rho^2\|x_k - x_{k-1}\|^2 - 2\rho c\|x_k - x_{k-1}\| \\
&\geq \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \rho^2\|x_k - x_{k-1}\|^2 - \rho\|x_{k+1} - x_k\|^2 - \rho\|x_k - x_{k-1}\|^2 \\
&= (1 - \rho)\|x_{k+1} - x_k\|^2 - \rho(1 - \rho)\|x_k - x_{k-1}\|^2. \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

En outre

$$\begin{aligned}
\|y_k - x^*\|^2 &= \|(1 + \rho)(x_k - x^*) - \rho(x_{k-1} - x^*)\|^2 \\
&= (1 + \rho)\|x_k - x^*\|^2 - \rho\|x_{k-1} - x^*\|^2 + \rho(1 + \rho)\|x_k - x_{k-1}\|^2.
\end{aligned}$$

Combinaison (2.26), (2.27) et (2.28), on obtient

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq\ & k_1(1 + \rho)\|x_k - x^*\|^2 - k_1\rho\|x_{k-1} - x^*\|^2 + k_1\rho(1 + \rho)\|x_k - x_{k-1}\|^2 \\
&+ \frac{k_2\rho(1 - \rho)}{\eta}\|x_k - x_{k-1}\|^2 - \frac{k_2(1 - \rho)}{\eta}\|x_{k+1} - x_k\|^2.
\end{aligned}$$

Puisque $k_1 \in (0, 1)$, la dernière inégalité implique

$$\begin{aligned}
&\|x_{k+1} - x^*\|^2 - \rho\|x_k - x^*\|^2 + \frac{k_2(1 - \rho)}{\eta}\|x_{k+1} - x_k\|^2 \\
&\leq \|x_{k+1} - x^*\|^2 - k_1\rho\|x_k - x^*\|^2 + \frac{k_2(1 - \rho)}{\eta}\|x_{k+1} - x_k\|^2 \\
&\leq k_1\left[\|x_k - x^*\|^2 - \rho\|x_{k-1} - x^*\|^2 + \frac{k_2(1 - \rho)}{\eta}\|x_k - x_{k-1}\|^2\right] \\
&- \left(\frac{k_1k_2(1 - \rho)}{\eta} - \frac{k_2\rho(1 - \rho)}{\eta} - k_1\rho(1 + \rho)\right)\|x_k - x_{k-1}\|^2. \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

Paramètre

$$A_k := \|x_k - x^*\|^2 - \rho\|x_{k-1} - x^*\|^2 + \frac{k_2(1 - \rho)}{\eta}\|x_k - x_{k-1}\|^2,$$

On prouve que $A_k \geq 0$ pour tout $k \geq 0$. En effet, en appliquant l'inégalité suivante avec $\xi > 0$

$$a^2 + \xi b^2 \geq \min\{1, \xi\}(a^2 + b^2) \geq \min\{1/2, \xi/2\}(a - b)^2,$$

on obtient

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{k_2(1 - \rho)}{\eta}\|x_k - x_{k-1}\|^2 \geq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{k_2(1 - \rho)}{2\eta}\right\}\|x_{k-1} - x^*\|^2$$

D'après l'hypothèse (A3), nous avons $\rho \leq \dfrac{k_2}{k_2+2\eta}$, c'est-à-dire $\rho \leq \dfrac{k_2(1-\rho)}{2\eta}$ et

$$0 \leq \rho \leq \min\left\{\frac{k_1}{3}, \frac{k_2}{k_2+2\eta}\right\} < \frac{1}{3}. \tag{2.29}$$

Ainsi

$$A_k \geq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{k_2(1-\rho)}{2\eta}\right\}\|x_{k-1}-x^*\|^2 - \rho\|x_{k-1}-x^*\|^2 \geq 0.$$

De plus, à partir de (2.29), nous avons

$$\frac{k_2\rho(1-\rho)}{\eta} \leq \frac{k_1k_2\rho(1-\rho)}{3\eta}$$
$$k_1\rho(1+\rho) < k_1\frac{k_2\rho(1-\rho)}{2\eta}\frac{4}{3} = \frac{2k_1k_2(1-\rho)}{3\eta}$$

ce qui implique

$$\frac{k_1k_2(1-\rho)}{\eta} - \frac{k_2\rho(1-\rho)}{\eta} - k_1\rho(1+\rho) \geq \sigma > 0.$$

où $\sigma := \dfrac{2k_1k_2(1-\rho)}{3\eta} - k_1\rho(1+\rho) > 0$. Par conséquent, (2.28) implique que

$$A_{k+1} \leq K_1A_k - \sigma\|x_k - x_{k-1}\|^2 \leq K_1A_k,$$

pour tout $k \geq 0$, d'où on déduit

$$A_k \leq A_0K_1^k \text{ et } \sigma\|x_k - x_{k-1}\|^2 \leq K_1A_k \leq A_0K_1^{k+1}$$

C'est-à-dire que $\{A_k\}$ et $\{\|x_k - x_{k-1}\|\}$ convergent linéairement vers 0 et cela implique immédiatement que la séquence $\{x_k\}$ converge linéairement vers l'unique solution x^*.

□

Chapitre 3

Résultats numériques sur la convergence et la stabilité

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons quelques résultats numériques pour illustrer la relation exponentielle globale stabilité du point d'équilibre unique du système dynamique(2.7) et convergence linéaire de sa discrétisation. Les codes ont été implémentés dans MATLAB 2019b sur un ordinateur avec un processeur Intel Core i7 à 2,6 GHz et 16 Go de mémoire. La condition d'arrêt est $x(t) - \psi\lambda(x(t)) \leq \epsilon$ pour tous les problèmes de test, où $\epsilon = 10^{-4}$.

Dans nos codes, le sous-problème (2.6) est résolu à l'aide de la fonction « fmincon » depuis Matlab chaque fois qu'il n'y a pas de solution explicite.

3.2 Problème 1

La bifonction f du problème d'équilibre considéré ici provient du modèle d'équilibre oligopolistique de Cournot Nash. Les fonctions prix et frais-fax étant considérées affines.

Le problème de test est décrit comme suit : supposons qu'il y a m entreprises qui produisent une marchandise. Soit x le vecteur dont l'entrée x_j représente la quantité de marchandise produite par l'entreprise j.

Nous supposons que le prix $p_j(x)$ est une fonction affine décroissante de s avec $s = \sum_{j=1}^{m} x_j$, c'est-à-dire

$$P_j(s) = \alpha_j - \beta_j s, \text{où} \quad \alpha_j > 0, \beta_j > 0.$$

Le bénéfice réalisé par l'entreprise j est donné par $f_j(x) = P_j(s)x_j - c_j(x_j)$ où $c_j(x_j)$ est la taxe et les frais pour générer x_j. Supposons que $C_j = \left[x_j^{\min}, x_j^{\max}\right]$ soit l'ensemble de stratégies de l'entreprise j, alors l'ensemble de stratégies du modèle est $C := C_1 \times C_2 ... \times C_m$. Chaque entreprise cherche à maximiser son profit en choisissant le niveau de production correspondant en supposant que la production des autres entreprises est un intrant paramétrique. Une approche couramment utilisée pour ce modèle est basé sur le célèbre concept d'équilibre de Nash.

Nous rappelons qu'un point $x^* \in C = C_1 \times C_2 ... \times C_m$ est dit *un point d'équilibre du modèle* si

$$f_j(x^*) \geq f_j(x^*[x_j]) \quad \forall x_j \in C_j, \quad \forall j = 1, 2, ..., m,$$

Où le vecteur $x^*[x_j]$ représente le vecteur obtenu à partir de x^* en remplaçant x_j^* par x_j.

En prenant $f(x,y) := \phi(x,y) - \phi(x,x)$ avec $\phi(x,y) := -\sum_{j=1}^{m} f_j(x[y_j])$, le problème de trouver un point d'équilibre de Nash du modèle peut être formulé comme suit : Trouver $x^* \in C$ tel que

$$f(x^*, x) \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

Définition 3.2.1 (Fonction taxe-taxe)**.** *La fonction taxe-taxe $c_j(x_j)$ soit croissante et affine pour chaque j.*

Cette hypothèse signifie que la taxe et les frais pour la production d'une unité augmentent à mesure que la quantité de production augmente.

Dans ce cas, la bifonction f peut être formulé sous la forme suivante

$$f(x,y) = \langle P_x + Q_y + r, y - x \rangle \tag{3.1}$$

Où $r \in \mathbb{R}^m$, et P et Q sont deux matrices carrées d'ordre m. Il a été prouvé dans [15] que la fonction f est fortement pseudo-monotone de module $\delta = \lambda_{\min}(P-Q)$, la plus petite valeur propre de $P-Q$ et f satisfait la condition de type Lipschitz avec module $L = P - Q$, f est convexe dans la deuxième variable chaque fois que Q est positif semi-défini. Dans notre test, le vecteur r et les matrices P et Q sont choisi comme suit :

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3.1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1.6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

L'ensemble de contraintes de ce problème est défini par

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 | \sum_{i=1}^{5}, \quad -5 \leq x_i \leq 5, \quad i = 1,2,3,4,5 \right\},$$

et sa solution x^* est donnée par

$$x^* = (-0.725388, 0.803109, 0.72000, -0.866667, 0.200000)^T.$$

Pour ce problème, $\delta = \lambda_{\min}(P-Q) = 0.7192$ et $L = \|P-Q\| = 2.905$, et nous choisir $\theta = 2$; $\lambda = \frac{1.9*\delta}{\theta L^2} = 0.0811$; $\eta = 0.9 * \min\left\{\frac{1}{1-q}, 1 + q(1-\frac{1}{\theta})\right\} = 1.3474$;

$$\rho = \min\left\{\frac{1-\eta+\eta q}{3}, \frac{(1-\frac{1}{\theta})q + 1 - \eta}{(1-\frac{1}{\theta})q + 1 + \eta}\right\} = 0.0526.$$

Les hypothèses (A1), (A2) et (A3) sont donc remplies.

La figure (3.1) affiche les trajectoires générées par le système dynamique (2.7). Il est clair que $x(t)$ converge exponentiellement au point d'équilibre unique x^*.

La figure (3.2) compare le comportement de l'algorithme (2.24) dans quatre cas où $x_0 = (2,1,4,-1,-4)^T$:l'algorithme inertiel détendu (AI-Point Fixe $\eta_k = 1.3474, \rho_k = 0.0526$), l'algorithme inertiel (I-Point Fixe : $\eta_k = 1, \rho_k = 0.0526$), l'algorithme détendu (AI-Point Fixe : $\eta_k = 1.3474, \rho_k = 0$), et le point fixe algorithme (Fixe Point : $\eta_k = 1, \rho_k = 0$) pour tout k. Notez que l'algorithme inertiel, l'algorithme détendu et l'algorithme du point fixe et respectivement.

Nous pouvons voir que même si tous les algorithmes convergent linéairement, la méthode à inertie détendue prend l'avantage dans cet exemple

3.3 Problème 2

Nous considérons le problème d'optimisation de Rosen-Suzuki, où la fonction de coût ϕ définie pour $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\phi(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 5x_1 - 5x_2 - 21x_3 + 7x_4.$$

Ce problème qui a été traité dans [18] s'appuie sur la [[8],Problème 43].

1.jpg

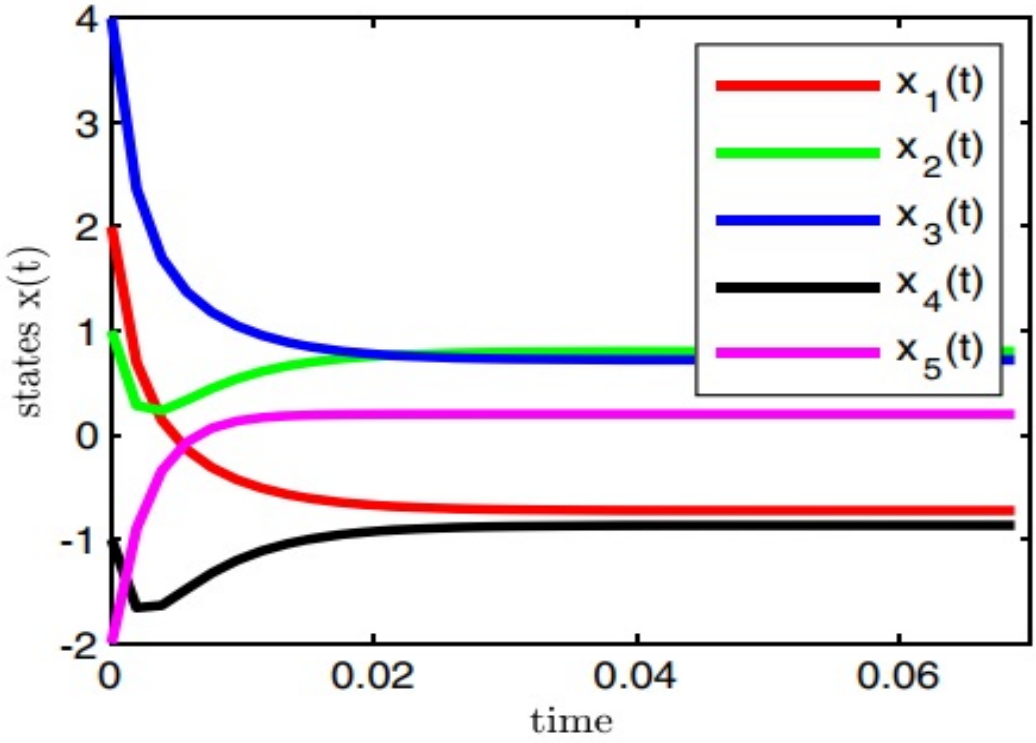


FIGURE 3.1: La trajectoire du système dynamique(2.7) pour le problème 1 lorsque $x_0 = (2, 1, 4, -1, -2)^T$, où $x_i(t)$ représente la quantité de marchandise produite par l'entreprise i au moment t

L'ensemble de contraintes est donné par $C = \{x \in \mathbb{R}^4 | g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} g_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 8, \\ g_2(x) &= x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + x_1 - x_4 - 10, \\ g_3(x) &= 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 - x_2 - x_4 - 5, \end{aligned}$$

Ce problème est reformulé comme un problème d'équilibre avec la fonction f définie pour chaque $x, y \in \mathbb{R}^4$ par

$$f(x, y) = \langle \bigtriangledown\phi(x), y - x \rangle$$

ici $\bigtriangledown\phi$ désigne le gradient de ϕ. Pour ce problème, on a $\delta = 2$ et $L = 4$, et nous choisissons

$\theta = 2$; $\quad \lambda = \frac{1.9*\delta}{\theta L^2} = 0.0811$; $\quad \eta = 0.9 * \min\left\{\frac{1}{1-q}, 1 + q(1 - \frac{1}{\theta})\right\} = 1.3396$;

2.jpg

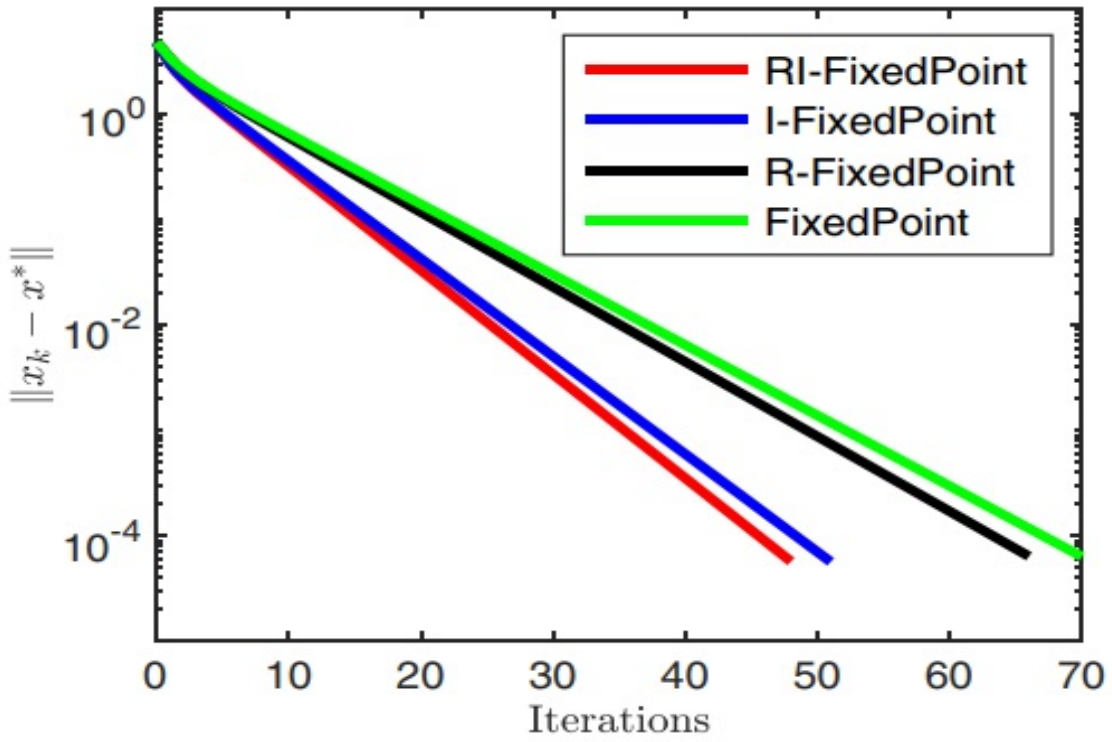


FIGURE 3.2: Comparaison de l'algorithme inertiel détendu avec l'algorithme inertiel, l'algorithme détendu et l'algorithme de point fixe lorsque $x_0 = (2, 1, -1, -2)^T$ pour le problème 1

$$\rho = \min\left\{\frac{1-\eta+\eta q}{3}, \frac{(1-\frac{1}{\theta})q+1-\eta}{(1-\frac{1}{\theta})q+1+\eta}\right\} = 0.0526.$$

La solution optimale de ce problème est $x^* = (0, 1, 2, 1)^T$. La figure(3.3) affiche les trajectoires générées par le système dynamique(2.7). C'est clair que $x(t)$ converge exponentiellement vers l'unique point d'équilibre x^*.

La figure(3.4) présente le comportement de l'algorithme (2.24) dans quatre cas où $x_0 = (1, -1, 2, -3)^T$: l'algorithme inertiel détendu (RI-point fixe : $\eta_k = 1.3396, \rho_k = 0.0526$), l'algorithme inertiel(I-point fixe : $\eta_k = 1, \rho_k = 0.0526$), le déten (RI- point fixe : $\eta_k = 1.3396, \rho_k = 0$), et l'algorithme de virgule fixe (point fixe : $\eta_k = 1, \rho_k = 0$) pour tout k. On voit que tous les algorithmes convergent linéairement et la méthode inertielle détendue surpasse les autres.

3.4 Problème 3

Enfin, nous considérons le problème d'équilibre fortement pseudo-monotone comme dans l'exemple 1. avec

$$f(x, y) = (R - \|x\|)\langle x, y - x\rangle \text{ et} C = \{x \in H, \|x\| \leq r\}$$

avec $R > r > R/2 > 0$. notez que la fonction f n'est ni monotone ni fortement monotone, mais il est fortement pseudo-monotone de module $\delta = R - r$.

3.jpg

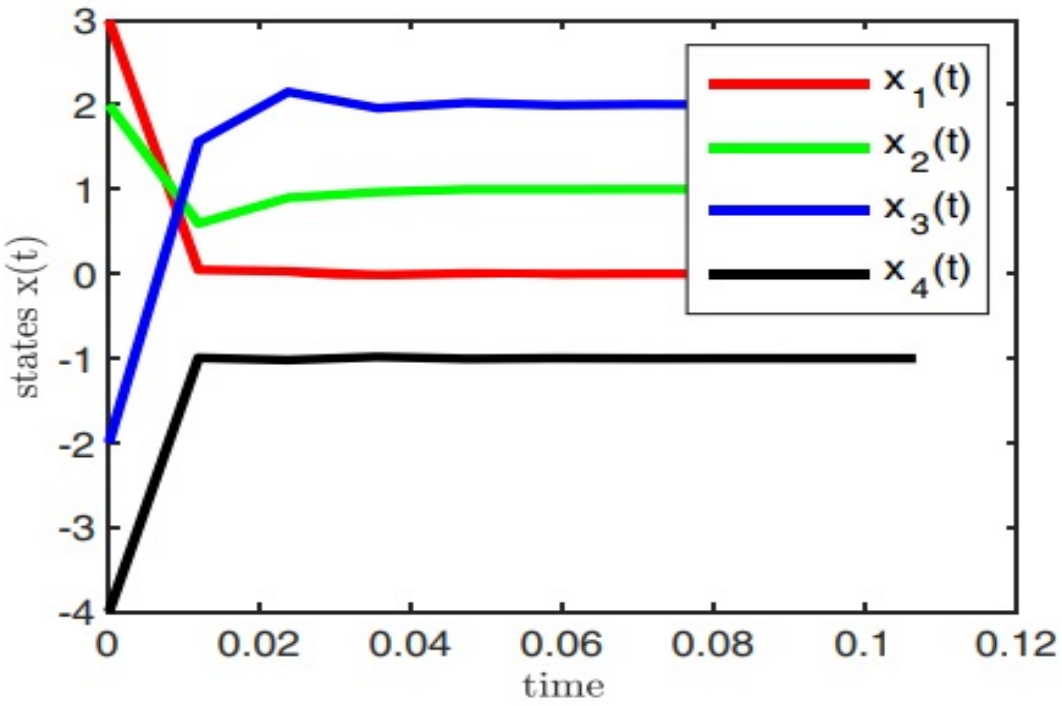


FIGURE 3.3: La trajectoire du système dynamique (2.7) pour le problème 1 lorsque $x_0 = (3, 2, -2, -4)^T$

Nous vérifions que f satisfait la condition de type Lipschitz (2.1) sur C avec $L = R + 2r$. En effet, laissez $x, y, z \in C$ on a

$$\begin{aligned} f(x,y) + f(y,z) - f(x,z) &= (R - \|x\|)\langle x, y - x\rangle + (R - \|y\|)\langle y, z - y\rangle \\ &\quad - (R - \|x\|)\langle x, z - x\rangle \\ &= (R - \|x\|)\langle x, y - z\rangle + (R - \|y\|)\langle y, y - z\rangle \\ &= \langle Rx - Ry, y - z\rangle + \langle \|y\|y - \|x\|x, y - z\rangle \\ &\geq -R\|x - y\|\|y - z\| - \|y\|y - \|x\|x\|y - z\| \\ &\geq -R\|x - y\|\|y - z\| - 2r\|y - x\|\|y - z\| \\ &= -L\|x - y\|\|y - z\|. \end{aligned}$$

Dans notre expérience, nous choisissons $H = \mathbb{R}^{100}, R = 8, r = 5$ et $\theta = 2$, $\lambda = \frac{1.9 * \delta}{\theta L^2} = 0.0088$ $\eta = 0.9 * \min\left\{\frac{1}{1-q}, 1 + q(1 - \frac{1}{\theta})\right\} = 1.3488$

$$\rho = \left\{\frac{1 - \eta + \eta q}{3}, \frac{(1 - \frac{1}{\theta})q + 1 - \eta}{(1 - \frac{1}{\theta})q + 1 + \eta}\right\} = 0.0526.$$

La solution optimale de ce problème est $x^* = 0 \in \mathbb{R}^{100}$.

Nous n'affichons pas le trajectoires générées par le système dynamique (2.7) car il est encombrant.

La figure (3.5) présente le comportement de l'algorithme (2.24) dans quatre cas où x_0 est choisi aléatoirement dans $[-10, 10]^{100}$: l'algorithme inertiel détendu (AI- point fixe : $\eta_k = 1.3488, \rho_k = 0.0526$), l'algorithme inertiel (I- point fixe :

4.jpg

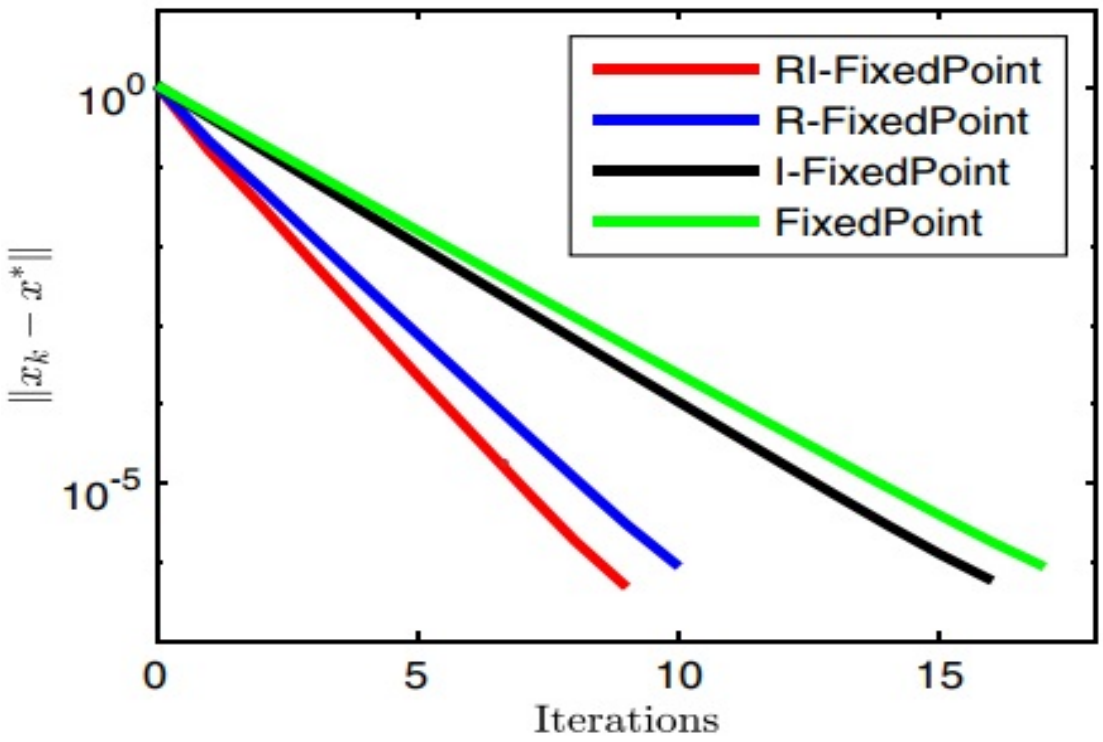


FIGURE 3.4: Comparaison de l'algorithme inertiel détendu avec l'algorithme inertiel, l'algorithme détendu et l'algorithme du point fixe pour le problème 2 lorsque $x_0 = (1, , -1, 2, -3)^T$

$\eta_k = 1, \rho_k = 0.0526$), le détendu algorithme (AI-Point fixe : $\eta_k = 1,3488, \rho_k = 0$), et l'algorithme de virgule fixe (Point fixe : $\eta_k = 1, \rho_k = 0$) pour tout k.

Il est clair que tous les algorithmes convergent linéairement et la méthode du point fixe détendu est comparable au point fixe inertiel détendu méthode et les deux surpassent les autres résultats.

5.jpg

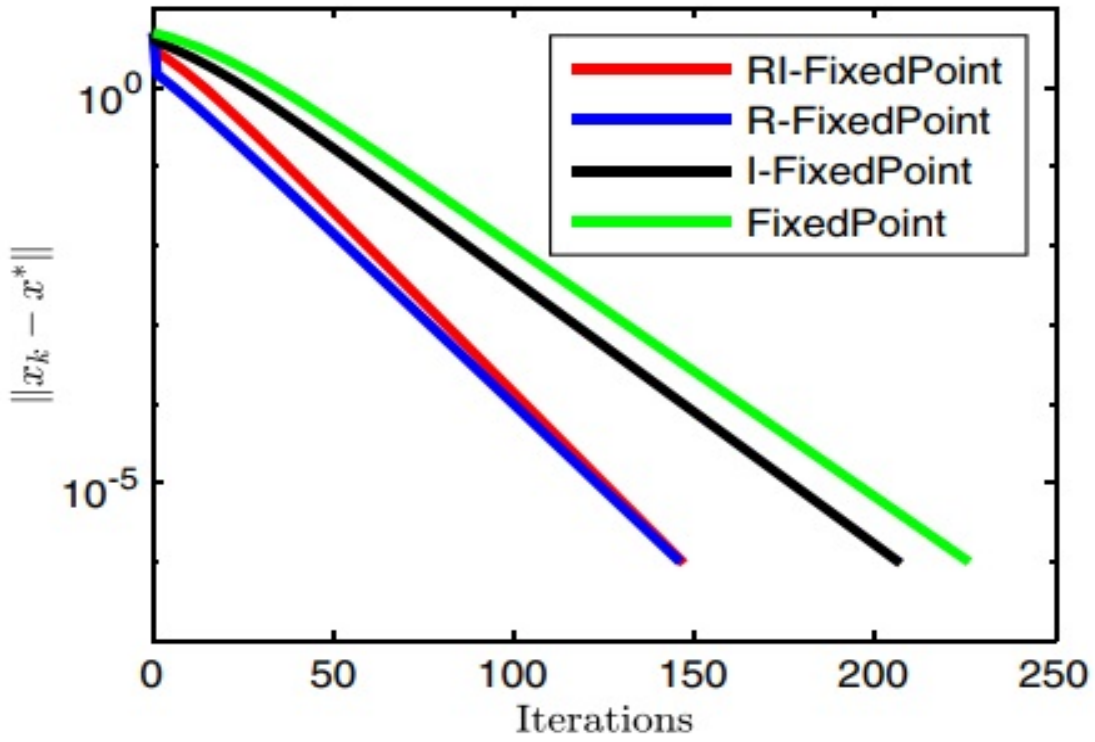


FIGURE 3.5: Comparaison de l'algorithme inertiel détendu avec l'algorithme inertiel, l'algorithme détendu et l'algorithme de point fixe pour le problème 3 avec un point de départ aléatoire

Conclusion

Dans ce mémoire, nous présentons un système dynamique projeté d'ordre deux pour étudier les problèmes d'équilibre. Nous avons établi l'existence de la solution et l'unicité des trajectoires et la convergence exponentielle globale du système dynamique proposé. Une version discrète du système dynamique et sa convergence linéaire ont été également présentés.

Enfin, quelques expériences numériques sont rapportées dans le dernier chapitre pour illustrer les résultats théoriques obtenus tout au long de ce document.

Bibliographie

[1] B. Alleche and V. D. Rădulescu. Further on set-valued equilibrium problems and applications to browder variational inclusions. *J. Optim. Theory Appl.*, 175(1) :39–58, 2017.

[2] B. Alleche and V. D. Rădulescu. Further on set-valued equilibrium problems in the pseudo-monotone case and applications to browder variational inclusions. *Optim. Lett.*, 12(8) :1789–1810, 2018.

[3] B. Alleche and V.D. Rădulescu. Set-valued equilibrium problems with applications to browder variational inclusions and to fixed point theory. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 28 :251–268, 2016.

[4] G. Bigi, M. Castellani, M. Pappalardo, and M. Passacantando. Existence and solution methods for equilibria. *European Journal of Operational Research*, 227(1) :1–11, 2013.

[5] Radu Ioan Bot and Erno Robert Csetnek. Second order forward-backward dynamical systems for monotone inclusion problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 54(3) :1423–1443, 2016.

[6] H. Breziz. *Analyse fonctionnelle.* Masson, Paris, 1987.

[7] Ky Fan. A generalization of tychonoff's fixed point theorem. *Mathematische Annalen*, 142(3) :305–310, 1961.

[8] Willi Hock and Klaus Schittkowski. Test examples for nonlinear programming codes. *Journal of optimization theory and applications*, 30 :127–129, 1980.

[9] G. Kassay. On Equilibrium Problems. In A. Chinchuluun, P. M. Pardalos, R. Enkhbat, and I. Tseveendorj, editors, *Optimization and Optimal Control : Theory and Applications*, volume 39 of *Optimization and Its Applications*, pages 55–83. Springer, 2010.

[10] D Kinderleher and G. Stampacchia. *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications.* Siam, Philadelphia, 1980.

[11] Giandomenico Mastroeni. On auxiliary principle for equilibrium problems. In *Equilibrium problems and variational models*, pages 289–298. Springer, 2003.

[12] Le D Muu and Tran Dinh Quoc. Regularization algorithms for solving monotone ky fan inequalities with application to a nash-cournot equilibrium model. *Journal of optimization theory and applications*, 142 :185–204, 2009.

[13] A. Nagurney and D. Zhang. *Projected dynamical systems and variational inequalities with applications.* Springer, New York, 1996.

[14] Massimo Pappalardo, Mauro Passacantando, et al. Stability for equilibrium problems : from variational inequalities to dynamical systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2002.

[15] Tran Dinh Quoc and Le Dung Muu. Iterative methods for solving monotone equilibrium problems via dual gap functions. *Computational Optimization and Applications*, 51 :709–728, 2012.

[16] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe : cours et exercices*. Dunod, 1998.

[17] Dang Van Hieu. New inertial algorithm for a class of equilibrium problems. *Numerical Algorithms*, 80 :1413–1436, 2019.

[18] L. V. Vinh, V. N. Tran, and P. T. Vuong. A second-order dynamical system for equilibrium problems. *Numerical Algorithms*, 91 :327–351, 2022.

[19] Phan Tu Vuong and Jean Jacques Strodiot. A dynamical system for strongly pseudo-monotone equilibrium problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 185 :767–784, 2020.