République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l »Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Yahia Farés de MÉDÉA



Faculté de Technologie
Département de Génie Mécanique

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du diplôme de Master 2
Filière : Génie mécanique
Spécialité : Energétique

Contribution à l'Etude des transfert thermiques dans une cavité en présence d'un milieu fluide non Newtoniens-simulation Numérique

Soutenue le : 04/07/2020

Présenté par :

YKHLEF CHAOUCH CHAHRAZAD
DJELLAKH LEYLA

Promoteur :

Dr. REBHI Redha
Dr. ALLICHE Mounir

Année universitaire: 2019-2020

Remerciements

Avant tous, nos remercions dieu qui nous donne le courage et la patience de faire ce travail, malgré toutes les difficultés. Prière et Salutation pour le plus honorable Messager le maitre de la création notre prophète "Mohamed"

Commençons par les enseignants. Notre promoteur **Dr. REBHI Redha**, et notre Co- promoteur **Dr. ALLICHE Mounir.**

Donnez-nous une chance de travailler sur ce sujet merveilleux, et deux tous les remerciements et son appréciation.

Nos remerciements vont également à tous ceux qui nous ont apporté Ou indirectement des conseils et du soutien et de l'assistance dans la réalisation de ce travail, en particulier Enfin une pensée pleine de reconnaissance à tous les enseignants du Faculté des Sciences et technique pour leurs efforts et leur Collaboration lors de notre cursus.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À très mon chère père, que dieu le protège

À ma très chère mère qui a enluminé mon parcours

À mes très chers frères

À toute ma famille sans exception

À tous les professeurs et enseignants

À mon binôme chahra

À tous mes amis

À tous mes collèges de la promotion de génie mécanique

LAYLA

Dédicaces

Merci Allah; mon dieu de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la patience d'aller jusqu'au bout du rêve.

J'ai le grand honneur de dédier ce modeste travail :

- *À mes parents*

Qui m'ont donné la possibilité d'arriver la ou je suis. Je souhaite que dieu leur octroie une longue vie.

- *À mes chères sœurs et mes frères*
- *À mes familles*
- *À mes enseignants (e)*
- *À tous mes collègues et mes amies surtout mon binôme Leila*

CHAHRAZAD

Résume

Ce travail porte sur les études numériques et analytiques de la convection naturelle des fluides non-Newtoniens dans un milieu fluide. Le modèle de Carreau-Yasuda (CY) a été retenu pour modéliser le comportement rhéologique du fluide non-Newtonien. Dans ce travail, nous avons utilisé la méthode des différences finies pour la résolution des équations gouvernantes : de continuité, de mouvement ,de l'énergie et de la masse. Le modèle physique opté c'est une cavité rectangulaire saturée par un fluide non-Newtonien tel que les parois supérieures et inférieures sont maintenues à des flux uniforme de chaleur et de la masse, tandis que les parois verticales sont imperméables et adiabatique. Les paramètres régissant dans cette étude sont le nombre de Rayleigh thermique, R_T , le rapport des force de volume,N, le nombre de Lewis,Le, le rapport d'aspect, Aet les paramètres rhéologique n, s, a, E. Les résultats obtenus montrent que la diminution des valeurs de $n, s,$ et a et l'augmentation de la valeur du nombre E entrainent une amélioration significative des taux de transports de chaleur et de masse.

Mot-clé : Convection naturelle, Fluide non-Newtonien, Modèle Carreau-Yasuda, milieu fluide, Méthode des différences finies,

ABSTRACT:

This Works concerns numerical and analytical studies of the natural convection of non-Newtonian fluids in a fluid medium. The Carreau-Yasuda (CY) model was chosen to model the rheological behavior of the non-Newtonian fluid. In this work, we used the finite difference method to solve the Goering equations: of continuity, movement, energy and mass. The physical model chosen is a rectangular cavity saturated by a non-Newtonian fluid such that the upper and lower walls are maintained at uniform fluxes of heat and mass, while the vertical walls are impermeable and adiabatic. The parameters governing in this study are the thermal Rayleigh number,, the volume force ratio, N, the Lewis number, Le, the aspect ratio, A and the rheological parameters n, s, a, E. The results obtained show that the decrease in the values of n, s, and a and the increase in the value of the number E lead to a significant improvement in the rates of heat and mass transport.

Keywords: Natural convection, Non-Newtonian fluid, Tile-Yasuda model, fluid medium, finite difference method,

ملخـــــــــــــــــــص

يتعلق هذا العمل بالدراسات العددية والتحليلية للحمل الحراري الطبيعي للسوائل غير النيوتونية في وسط مائع.تم اختيار نموذج Carreau-Yasuda لنمذجة السلوك الانسيابي للسائل غير النيوتوني. استخدمنا في هذا العمل طريقة الفروق المحدودة لحل المعادلات الحاكمة: الاستمرارية والحركة والطاقة والكتلة. النموذج المادي المختار هو تجويف مستطيل مشبع بسائل غير نيوتوني بحيث يتم الحفاظ على الجدران العلوية والسفلية في تدفقات موحدة للحرارة والكتلة ، في حين أن الجدران العمودية غير منفذة. كما أنها تخضع لعدة عوامل مختلفة مثل عدد رايلي R_T ، ونسبة قوة الحجم ، N ، عددلويس ، Le ، نسبة أبعاد التجويف، A والمعلمات الريولوجية n، s، a، E.كما أظهرت النتائج التي تم الحصول عليها أن انخفاض قيم n و s و a وزيادة قيمة عددE تؤدي إلى تحسن كبير في الحمل الحراري والكتلة.

الكلمات المفتاحية: الحمل الحراري الطبيعي، السوائل غير النيوترونية، نموذج Carreau-Yasuda، وسط السوائل، طريقة الفروق المحدودة.

TABLE DES MATIÉRES

Tables des matières

Liste des Figures

Liste des Tableaux

Liste des Symboles et des abréviations

Introduction général……..... 1

CHAPITRE I : GENERALITE ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1: Introduction ……...…..3

I.2 : Modes de transfert thermique……...….....…3

I.3 :Les différents modes de transfert de chaleur……...…..…..4

I.3.1 :Transfert de chaleur par conduction ……...……....……..4

I.3.2: Transfert de chaleur par convection ……...……....……...6

I.3.3 : Transfert de chaleur par Rayonnement …….……...……7

I.4 : le phénomène de transfert de masse .....……8

I.4.1 : le type de phénomènes de transfert de masse ……...9

I.4.1.1 : Phase immobile……...…….....9

I.4.1.2 : Phase mobile……...……..... .10

I.4.2 : la première loi de fick……....10

I.5 : Fluides Newtoniens et non-Newtoniens …….....11

I.5.1 : La Comportement rhé……....…….…..11

I.5 .2 : Fluides Newtoniens……...……....…....11

I.5.3 : Fluides non-Newtoniens ……..……..……..……11

I.5.3.1 : Fluides non newtonien au comportement indépendant du temps 12

I.5.3.1.1 : Fluides rhé fluidifiants (pseudo-plastiques) :…… 13

I.5.3.1.2 Fluides rhéoépaissisants (dilatants) : ……..…..13

I.5.3.1.3 : Fluides à seuil (viscoplastiques) :……..…….. 13

I.5.3.2 : Fluides non newtonien au comportement dépendant du temps :…… 13

I.5.3.2.1 : Fluides thixotropes :……..….. 14

I.5.3.2.2 :Fluides rhé pectine (anti thixotropes) :……..…….. 14

I.5.3.3 :Les fluides viscoélastiques (rhé plastiques) :…….……..……...……...…. 14

I.5.4 : Modèles rhéologiques pour le fluide rhé fluidifiant :……..……..… 15

I.6 Revue Bibliographique :……..…….... 18

Conclusion……23

CHAPITRE II : FORMULATION MATHÉMATIQUE

II.1 : Introduction……. 24

II.2 : Description du modèle physique……. 24

II.3: Hypothèses simplificatrices…….…..25

II.4 : Équations gouvernant le problème……...26

II.4.1 : Équation de conservation de la masse……..……26

II.4.2 : Équation de conservation de la quantité de mouvement……..……....26

II.4.3 : Équation de conservation de l'énergie……..…..…….. 27

II.4.4 : Équation constitutive (comportement rhéologique)…….…… 28

II.5 : Formulation mathématique en coordonnées cartésiennes……...…… 28

II.6 : Conditions aux limites hydrodynamiques et thermiques……...……. 29

II.6.1 : Conditions aux limites hydrodynamiques……...……. 29

II.6.2 : Conditions aux limites thermiques…….…….. 30

II.7 : Les Mise sous forme adimensionnelle…….. 30

II.7.1 : Équation de transport adimensionnelles en formulation (ψ,Ω) …… 33

II.7.2 : Conditions aux limites adimensionnelles…….....34

II.8 Transfert thermique…….....35

II.9 Conclusion …….. 36

CHAPITRE III :METHODE NUMÉRIQUE

III.1 Introduction…….....…...37

III.2 Discrétisation des équations de conservation……..... 38

III.2.1 Les termes diffusifs et non diffusifs……...…. 38

III.2.2 Les termes convectifs…….. 38

III.2.3 Les termes temporels…….. 39

III.2.4 Discrétisation de l'équation de mouvement :……...… 39

III.2.5 Discrétisation de l'équation d'énergie……..….. 39

III.2.6 Discrétisation de l'équation de concentration……..…..... 42

III.3 Résolution de l'équation de la fonction de courant……..….... 43

III.4 Discrétisation des conditions aux limites……..... 44

III.5 Algorithme de résolution ……46

III.6 Solution semi-analytique ……..……47

CHAPITRE IV: Résultats et Discussion

IV.1 Validation du code numérique…….....…...49

IV.2 Effet de l'indice de la loi de puissance, n, sur la structure de l'écoulement pour $A = 10$:……...…….…50

IV.3 Effet de l'indice de la loi de puissance, n, sur la structure de l'écoulement pour $A = 1$:……..…..……51

IV .4 Effets des paramètres rhéologiques sur les profils de la fonction de courant, isothermes, iso concentrations et la viscosité apparente……..……..…...54

IV.5 Effets de l'indice de la loi de puissance, n,e nombre de Rayleigh, R_T,sur les courbes de bifurcation……..……..……...…….60

IV.6 Effets de l'indice de la loi de puissance, n,et le rapport des forces de volume, N, sur les courbes de bifurcation…….....…..61

IV.7 Effets de rapport d'aspect, A, et le nombre de Rayleigh, R_T, sur les courbes de bifurcation……...……..62

IV.8 Effets du nombre de Lewis, Le,et le nombre de Rayleigh, R_T, sur les courbes de bifurcation……..……..…….63

IV.9 Effets des paramètres rhéologiques sur le nombre de Rayleigh critique,R_{TC}^{sosu} : ……...64

IV .10Conclusion :……..…… 67

CONCLUSIONSGÉNÉRALES:……..……....68

RÉFÉRENCE

LISTE DES FIGURES

Figure I.1 : illustration des trois modes du transfert de la chaleur [2]…….……4

Figure I.2 : transfert thermique par conduction**. [6]**……5

Figure I.3 : transfert thermique par convection forcée(a), convection naturelle(b), convection mixte (c). [8]……...……7

Figure I.4 : transfert thermique par Rayonnement. [6]……..8

Figure I.5 : schéma présentatif de phénomène de (a) diffusion (b) convection……...10

Figure I.6 : Rhé gramme fluides non-Newtonien indépendants du temps. [10]……..12

Figure I.7 : Rhéogramme des fluides non-Newtoniens dependants du temps.[11]……..14

Figure I.8 : Variation de la viscosité en fonction du taux de cisaillement à 25°C. les traits plein sont ajustés par le model de Carreau Yasuda [14]……...17

Figure II.1 : Représentation schématique de la cavité et système de coordonnées.....……...25

Figure II.2 : Evolution de la viscosité en fonction du taux de cisaillement. Les points correspondent au modèle de Carreau-Yasuda, le trait continu au modèle de Carreau-Bird avec *n*= 0.66, *E'* = 45.8 *s*, μ_0 = 4.22 *Pa s*et μ_∞ = 0.00372 *Pa s*. Les pointillés correspondent au modèle de Carreau-Bird mais avec $\mu_\infty = 0$ ……..28

Figure III.1 : Eléments de maillage du domaine de calcul en (i, j)……..……...37

Figure IV.1: Effet de n sur les lignes de courant, isothermes, iso concentrations et la viscosité apparente pour $A = 10$, $R_T = 800$, $Le = 10$, φ = 0,05, E = 0,1, a = 2, $s = 10^{-2}$:……..…51

Figure IV.2: Effet de n sur les lignes de courant, isothermes, isoconcentrations et la viscosité apparente pour condition de Neumann, $A = 1$, $R_T = 2000$, $Le = 10$, $\varphi = 0.05$, $E = 0.1$, $a = 2$, $s = 10^{-2}$:……...53

Figure IV.3: Effet de n sur les lignes de courant, isothermes, isoconcentrations et la viscosité apparente pour condition de Dirichlet $A = 1$, $R_T = 2000$, $Le = 10$, $\varphi = 0.05$, $E = 0.1$, $a = 2$, $s = 10^{-2}$:……..….54

Figure IV.4: Effet de l'indicateur n de la loi de puissance sur les profils de la fonction de courant, ψ, de la température, T, de la concentration, S, et de la viscosité apparente, μ, dans le plan médian vertical pour $R_T = 1000$, $Le = 10$ et $\varphi = -0.1$ ……...56

Figure IV. 5: Effet de constante de temps, E, sur les profils de la fonction de courant, ψ, de la température, T, de la concentration, S, et de la viscosité apparente, μ, dans le plan médian vertical pou $R_T = 1000$, $Le = 10$ et $\varphi = -0.1$ ……...57

Figure IV.6: Effet de paramètre, a, sur les profils de la fonction de courant, ψ, de la température, T, de la concentration, S, et de la viscosité apparente, μ, dans le plan médian vertical pour $R_T = 1000$ $Le = 10$ et $\varphi = -0.1$ ……...….58

Figure IV.7: Effet de paramètre, s, sur les profils de la fonction de courant, ψ, de la température, T, de la concentration, S, et de la viscosité apparente, μ, dans le plan médian vertical pour $R_T = 1000$, $Le = 10$ e $\varphi = -0.1$ …….…....59

Figure IV. 8: Effets du nombre de Rayleigh, R_T , et les indicateurs de loi de puissance, n, sur l'intensité de l'écoulement, ψ, le nombre de Nusselt , Nu, le nombre de Sherwood, Sh et la viscosité apparente , μ, pour $Le = 10$, $\varphi = 0.05$, $E = 0.1$, $a = 2$ et $S = 10^{-2}$ …….61

Figure IV.9: Effets du nombre de Rayleigh, R_T , et le rapport des forces de volume, N, sur l'intensité de l'écoulement, ψ, le nombre de Nusselt.., Nu, le nombre de Sherwood, Sh, et la viscosité apparente, μ, verser $Le = 10$, $n = 0.4$, $E = 0.1$, $a = 2$ et $s = 10^{-2}$ ……....62

Figure IV .10: Effets du nombre de Rayleigh, R_T , et le rapport d'aspect, A, sur l'étendue de l'écoulement, ψ, le nombre de Nusselt, Nu, le nombre de Sherwood, Sh, et la viscosité apparente, μ , pour $Le = 10$, $\varphi = 0.05$, $n = 0.4$, $E = 0.1$, $a = 2$ et $s = 10^{-2}$ ……....63

Figure IV.11: Effets du nombre de Rayleigh, R_T , et le nombre de Lewis, Le, sur l'intensité de l'écoulement, ψ, le nombre de Nusselt, Nu, le nombre de Sherwood, Sh, et la viscosité apparente, μ, pour $\varphi = 0.05$, $n = 0{,}4$, $E = 0{,}1$, $a = 2$ et $s = 10^{-2}$ ……..…..64

Figure IV.12: Effets des paramètres rhéologiques sur le nombre de Rayleigh sous critique, R_{TC}^{sous} , pour $\varphi = 0.05$ et Le = 10……..…..66

LISTE DES TABLEAUX

Tableau I.1 : Conductivité thermique de certains matériaux**. [7]**…….……5

Tableau I.2 : Les paramètres rhéologiques du modèle de Carreau-Yasuda pour les solutions de tylose et CMC. [16]……...18

Tableau IV.1 : Validation du code numérique en termes du nombre de Nusselt moyen, Nu_m dans le cas d'une cavité carrée remplie d'air pour $A=1$, $P_r=0.71$ et $\varphi=0$ …….....49

Tableau. IV.2 : Sensibilité de la solution numérique en termes de l''intensité de l'écoulement, ψ_0, du nombre de Nusselt local, *Nu*, du Nusselt moyen, Nu_m, du nombre de Sherwood local, *Sh*, et de Sherwood moyen, Sh_m, au centre de la cavité pour $A=10$, $P_r=10$, $R_T=10^3$, $\varphi=0.2$, $Le=10$, $n=0.6$, $E=0.2$, $a=2$ et $S=10^{-2}$ ……..50

LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

A : Rapport de forme de la cavité, $A = H' / L'$

C_T : Gradient de température dans la direction x

g : Accélération de la pesanteur, m/s^2

H' : Hauteur de la cavité, m

j' : Flux de masse $kgm^{-1}s^{-1}$

K : conductivité thermique du fluide,W/mK

L' : Largeur de la cavité, m

Le : Nombre de Lewis

λ : Conductivité thermique du fluide, W/mK

n : Indice de la loi en puissance, paramètre réel

n, E, s, a : Les paramètres rhéologiques

N : Le rapport des forces de Volumes

P : pression hydrodynamique $Kgm^{-1}s^{-1}$

q' : Flux de chaleur constant par unité de surface, W/m^2

Nu (x) : Nombre de Nusselt local

Nu_m : Nombre de Nusselt moyen

Pr : Nombre de Prandtl ; $Pr = \dfrac{\mu_0}{\rho_0 \alpha}$

Ra_T : Nombre de Rayleigh thermique ; $Ra_T = \dfrac{\rho_0 g \beta \Delta T' H'^3}{\mu_0 \alpha}$

Ra_T^{sous} : Nombre de Rayleigh sous-critique

Ra_T^{sup} : Nombre de Rayleigh supercritique

Ra_{TC} : Nombre de Rayleigh critique

S : concentration dimensionnelle

S' : $Concentration$ adimensionnelle

S_0' : Concentration de référence

T : Température adimensionnelle

T' : Température du milieu k

T_0' : Température de référence

$\Delta T'$: Différence de température

u', v' : Vitesse adimensionnelle

u, v : vitesse dimensionnelle $m.s^{-1}$

x, y : Coordonnées cartésiennes à partir du centre de la cavité

Symboles Grecs

α : Diffusivité thermique du fluide, m^2 / s

β : Coefficient d'expansion thermique, K^{-1}

$\Delta T'$: Température caractéristique

$\Delta S'$: Concentration caractéristique

ψ : Fonction du courant adimensionnelle,

ρ : Masse volumique du fluide, Kg / m^3

Ω : Vorticité adimensionnelle

η : Viscosité apparente adimensionnelle

μ : Viscosité dynamique d'un fluide Newtonien, *Pa s*

τ : Tenseur des contraintes

INTRODUCTION GÉNÉRALES

INTRODUCTIONGÉNÉRALES

Le transfert de chaleur est une science qui contient plusieurs concepts pratiques de base utilisés dans de nombreuses applications industrielles. Le transfert de chaleur peut s'effectuer au moyen de trois mécanismes différents, la conduction, la convection et le rayonnement. Les connaissances de base dans ce domaine, sont donc indispensables pour comprendre et maîtriser l'utilisation pratique de ces phénomènes.

Dans les écoulements avec les transferts de chaleur et de masse, la convection peut se présenter sous trois modes, à savoir la convection naturelle, la convection forcée et la convection mixte. Cette dernière qui s'implique dans de nombreux phénomènes naturels ou processus industriels trouve son application dans les échangeurs de chaleur destinés au chauffage ou au refroidissement des fluides, dans les procédés chimiques, dans les industries alimentaires, ainsi que dans le refroidissement des réacteurs nucléaires et des systèmes électroniques

La convection thermique naturelle dans la configuration de Rayleigh-Bénard semble être bien maîtrisée dans les fluides Newtoniens en raison d'énormes travaux de recherche entrepris dans ce domaine. Les travaux consacrés à la convection thermique des fluides non-Newtoniens de meurent peu nombreux à cause des facteurs suivants:

- La complexité de l'écoulement qui dépend fortement de la viscosité qui est fonction du taux de cisaillement pour certain fluide.
- Le manque de connaissance du comportement de bifurcation de l'état de repos qui reste toujours en cours de recherches expérimentales et numériques.

L'intérêt porté à la compréhension et la maitrise du comportement rhéologique des fluides dans les écoulements convectifs est indispensable afin d'apporter des solutions aux problèmes rencontrés dans les divers branches d'activités telles que; les processus industriels, chimiques, pétrochimiques, pharmaceutiques et particulièrement dans l'industrie agro-alimentaires.

La présente étude porte une simulation numérique par la méthode des différences finis de la convection naturelle au sein d'une cavité rectangulaire. Cette cavité est soumise à un gradient de température vertical. Ce gradient de température vertical est obtenu soit en imposant des flux de chaleur constant (type de Neumann) ou des températures constantes (type Dirichlet) sur les parois actives horizontales, tout en maintenant isolées les parois verticales

Cette étude s'articule sur Cinq (04) chapitres essentiels et une conclusion.

- Le premier chapitre, est une généralité sur les phénomènes des transferts de chaleur et de masse.
- Le second chapitre, nous allons présenter la modélisation mathématique, en présentant le problème physique de notre étude, suivi par une formulation mathématique des équations de continuité, de la quantité de mouvement, de l'équation de l'énergie et de l'équation de masse.
- Le troisième chapitre est réservé à la présentation de l'outil numérique de calcul, en
- précisant les différentes étapes pour résoudre le problème physique par la méthode des différences finies.
- Dans le quatrième chapitre, nous avons développé une solution analytique basée sur la méthode du concept de l'écoulement parallèle dans le cas d'une couche poreuse élancée
- Le dernier chapitre sera consacré à l'interprétation des différents résultats.
- On termine ce travail par une conclusion générale qui résume les principaux résultats obtenus avec des recommandations.

CHAPITRE I

GENERALITE ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1 Introduction

Un phénomène de transfert (ou phénomène de transport) est un phénomène irréversible durant lequel une grandeur physique est transportée par le biais de molécules et qui a pour origine l'inhomogénéité d'une grandeur intensive. C'est la tendance spontanée des systèmes physiques et chimiques à rendre uniformes ces grandeurs qui provoquent le transport.

L'étude de chaque phénomène de transport se réfère à une certaine entité (caractéristique) transférée, par exemple : la quantité de mouvement nécessaire pour augmenter la vitesse d'un fluide, la chaleur afin de vaporiser un liquide et la masse du liquide transportée dans une conduite ou la dispersion d'un liquide coloré au sein d'un autre liquide transparent.

Les grandeurs physiques transférées les plus connues sont la chaleur (transfert thermique), la matière (transfert de masse) et la quantité de mouvement.

I.2 Modes de transfert thermique:

De tous temps, les problèmes de transmission d'énergie, et en particulier de la chaleur, ont eu une importance déterminante pour l'étude et le fonctionnement d'appareils tels que les générateurs de vapeur, les fours, les échangeurs, les évaporateurs, les condenseurs, etc., mais aussi pour des opérations de transformations chimiques. En effet, dans certains systèmes réactionnels, c'est la vitesse des échanges de chaleur et non la vitesse des réactions chimiques qui détermine le coût de l'opération (cas de réactions fortement endon- exothermique).

En outre, de nos jours, par suite de l'accroissement relatif du prix de revient de l'énergie, on recherche dans tous les cas à obtenir le rendement maximal d'une installation pour une dépense d'énergie minimale. Les problèmes de transfert de chaleur sont nombreux, et on peut essayer de les différencier par les buts poursuivis dont les principaux sont:

L'augmentation de l'énergie transmise ou absorbée par une surface,

- L'obtention du meilleur rendement d'une source de chaleur,
- La réduction ou l'augmentation du passage d'un débit de chaleur d'un milieu à un autre.

Le potentiel qui provoque le transport et le transfert de l'énergie thermique est la température. Si deux points matériels placés dans un milieu thermiquement isolé sont à la même température, on peut affirmer qu'il n'existe aucun échange thermique global entrées deux points dits en équilibre thermique (il s'agit bien d'un équilibre thermique car cachundés points matériels émet une énergie thermique nette de même module, mais de signe opposé). [1]

Le transfert de chaleur au sein d'une phase où, plus généralement, entre deux phases, se fait suivant 3 modes:

- Par conduction.
- Par rayonnement.
- ET par convection.

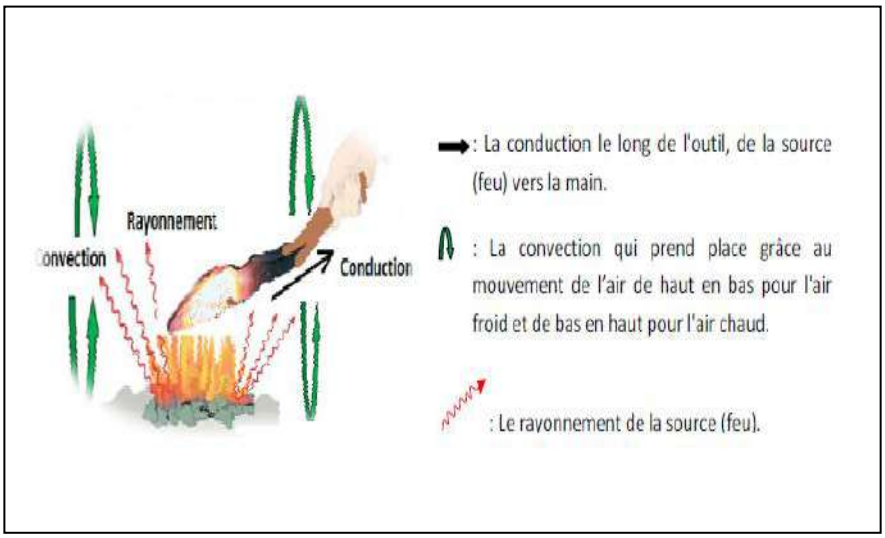


Figure I.1 : illustration des trois modes du transfert de la chaleur. [2]

I.3 Les différents modes de transfert de chaleur

La théorie des échanges thermiques a pour objet l'étude de la propagation de la chaleur. Cette propagation se présente sous trois formes fondamentales qui sont la conduction, la convection et le rayonnement. [3]

I.3.1 Transfert de chaleur par conduction :

La conduction thermique est la propagation de la chaleur, de molécule vers une entre, dans un corps ou dans plusieurs corps contigus et non réfléchissants, sans qu'il y ait mouvement du milieu ou que ce mouvement intervienne dans la transmission. Ce mode de transmission caractérise essentiellement les transferts de chaleur dans les solides où entre corps solides contigus. La conduction intervient également dans les liquides et les gaz mais, sauf dans le cas des liquides très visqueux ou des gaz emprisonnés dans des matériaux poreux, son effet, est marginal par rapport à celui de la convection [4,5].

La loi fondamentale de la conduction (Loi de Fourier) exprime le flux de chaleur transmis dans un milieu de conductivité thermique λ à travers une surface S, elle s'écrit :

$$\varphi = -\lambda \overrightarrow{Sgrad}(T) \qquad (1.1)$$

Où :

λ : Est le coefficient de conductivité thermique du milieu de transmission $w/m.c$

φ : Flux de chaleur transmis par conduction (w)

S : Air de la section de passage du flux de chaleur (m^2)

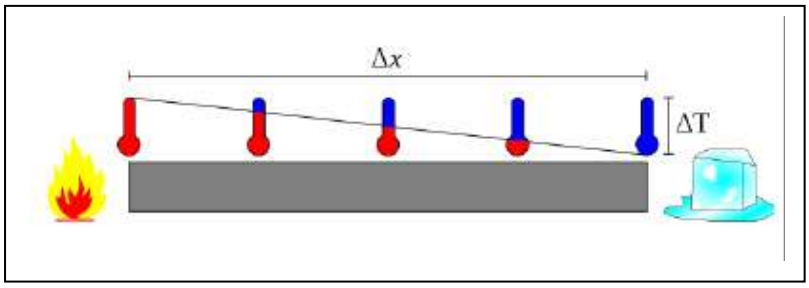


Figure I.2 : transfert thermique par conduction**. [6]**

On trouvera dans le (tableau 1.1) les valeurs de la conductivité thermiqueλ de certains matériaux parmi les plus courants.

Tableau I.1 : Conductivité thermique de certains matériaux**. [7]**

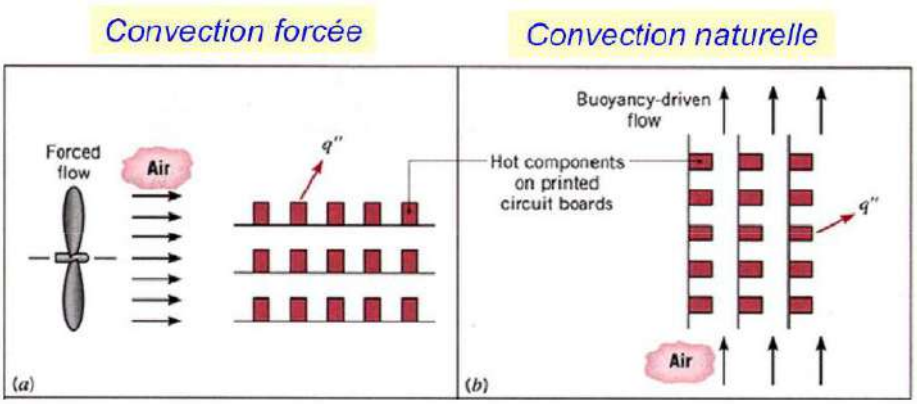
Matériau	λ(W.m-1. °C-1)	Matériau	λ(W.m-1. °C-1)
Argent	419	Plâtre	0.48
Cuivre	386	Amiante	0.16
Aluminium	204	Bois (feuillu-résineux)	0.12-0.23
Acier doux	45	Liège	0.044-0.049
Acier inox	15	Laine de verre	0.035-0.051
Verre	1.0	Polystyrène expansé	0.028
Eau	0.60	Air	0.026

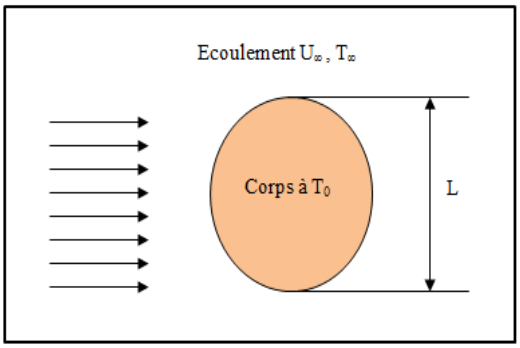
I.3.2 Transfert de chaleur par convection :

La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, l'accumulation de l'énergie et le mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Le transfert d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes. D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux particules fluides adjacentes. L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces particules. Ensuite ces dernières vont se mélanger avec d'autres particules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie, celle-ci est à présent emmagasinée dans les particules fluides et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement.

Il existe trois modes de transfert de chaleur par convection : convection naturelle, convection forcée et convection mixte :

- **La convection naturelle :** Ce type résulte des variations de masse volumique du fluide, il en résulte une convection laminaire ou turbulente, suivant la valeur du nombre de Grachof ou de Rayleigh.
- **La convection forcée :** Ce type est un résultat quand le mouvement du fluide est créé par une différence de pression. Compte tenu du lien entre le transfert de masse et le transfert de chaleur, il est nécessaire déconsidérer la nature du régime d'écoulement (régime turbulent ou régime laminaire).
- **Convection mixte :** correspond au couplage des deux phénomènes précédents (convection naturelle et forcée) quand les vitesses d'écoulement, fictives, dues aux deux types de convections sont considérées séparément, du même ordre dégradeur.





(c)

Figure I.3 : transfert thermique par convection forcée(a), convection naturelle(b), convection mixte (c). [8]

I.3.3 Transfert de chaleur par Rayonnement :

Le rayonnement thermique est de l'énergie émise par la matière à une température finie. Le rayonnement peut provenir d'un solide, d'un liquide ou d'un gaz. L'énergie du champ radiatif est transportée par les ondes électromagnétiques (ou, ce qui es équivalent, par les photons). Alors que la conduction requiert la présence d'un médium, le rayonnement, lui, est plus efficace dans le vide.

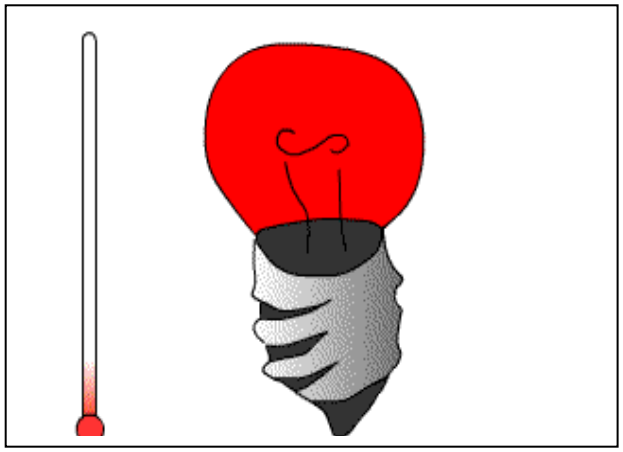


Figure I.4 : transfert thermique par Rayonnement. [6]

I.4. Le phénomène de transfert de masse :

Le transfert de matière (ou transfert de masse) joue un rôle très important dans les opérations unitaires de base mises en œuvre au cours de la transformation des aliments ou de produits biologiques (séchage, salage, sucrage, absorption, adsorption, cristallisation, extraction, distillation, ...), Au cours de ces opérations, le transfert de matière est classiquement le facteur limitant la vitesse du procédé, même si le transfert de chaleur et le flux du produit peuvent aussi être en cause.

Le transfert de matière a aussi un rôle très important lors de l'emballage des produitset de leur entreposage**,** (transfert d'humidité, de gaz, de composés de saveur à travers le matériau d'emballage).

Le transfert de matière consiste en la migration de composés à l'intérieur d'une phase ou entre des phases. Cette migration résulte d'un changement dans l'équilibre d'un système causé par une/des différences de potentiel(s) : différence de concentration d'une espèce d'un point à un autre, différence de température et/ou différence de pression.

Toute différence de potentiel entraîne une évolution spontanée vers l'uniformité : une différence de concentration d'un composé entre deux points d'un système entraine donc un transfert de matière jusqu'à atteindre l'uniformité de concentration.

Le transfert de matière peut être caractérisé par différentes grandeur :

- Le taux de transfert de matière, qui correspond à la quantité de matière transférée par unité de temps :

$$Q = \frac{m}{t} \tag{1.2}$$

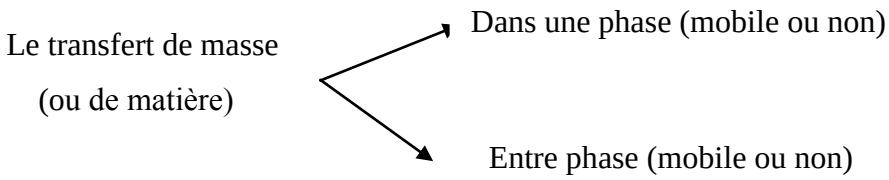
- Le flux de matière, qui correspond à la quantité de matière par unité de temps et de surface (normale à la direction du transfert) :

$$N = \frac{m}{s.t} \tag{1.3}$$

Avec : Q le taux de transfert de matière, m la Quantité de matière transféraient est le temps, N le flux de matière.

I.4.1 le type de phénomènes de transfert de masse :

Lorsqu'on s'intéresse au transfert de matière, on doit distinguer deux cas, selon que le transfert se fait au sein d'une phase ou entre deux phases partiellement ou totalement immiscibles. En outre, chacune des phases peut être mobile ou immobile.



I.4.1.1 Phase immobile:

Une phase immobile ne signifie pas qu'il n'y a pas de mouvement d'ensemble des molécules, mais au niveau de la phase, le transport se fait uniquement par diffusion moléculaire, et il n'existe pas dans la phase de tourbillons provoquant avec une dégradation d'énergie mécanique et de quantité de mouvement le brassage d'agrégats de fluide ayant des compositions différentes.

a. **Le transfert de masse par diffusion :** La diffusion est un processus lent les molécules migrent dans un solide ou dans un fluide considéré comme immobile (écoulement laminaire).

I.4.1.2 Phase mobile :

Par opposition, dans le cas d'une phase mobile, le transport par diffusion des constituants n'est pas dû uniquement à la diffusion moléculaire mais aussi à la diffusion turbulente (Convection).

- Diffusion moléculaire
- Diffusion turbulente : tourbillons provoquant le brassage d'agrégats de fluides de différentes compositions.

b. Convection : La convection est un processus rapide : les molécules sont entraînées dans un courant de fluide naturel ou forcé (convection naturelle ou forcée).

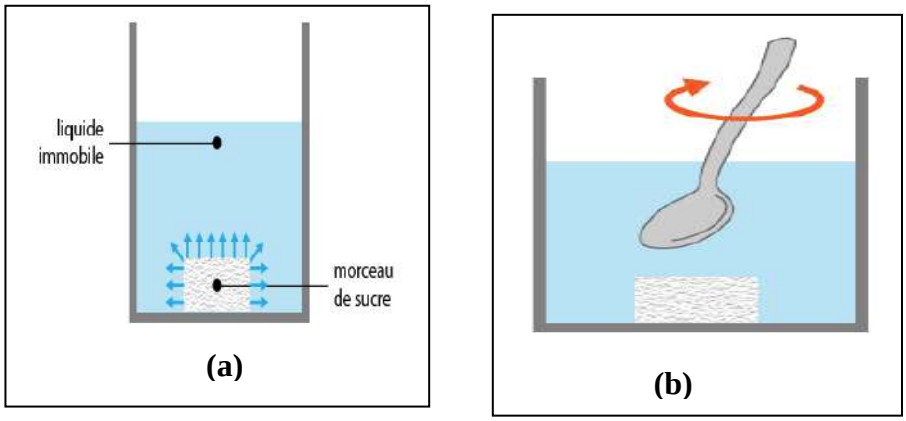


Figure I.5 : schéma présentatif de phénomène de (a) diffusion (b) convection.

I.4.2 La première loi defick :

La première loi de fick est la loi qui rapporte le flux d'un composant au son gradient de composition, pour le calcul d'un flux diffusif assume que la diffusion de matière résulte uniquement d'un gradient de concentration. En réalité, la diffusion peut aussi résulter d'un gradient de température, de pression ou d'une force externe. Cependant, dans la plupart des cas, ces effets sont négligeables et la force motrice dominante est le gradient de concentration.

$$\overrightarrow{J_A} = -D_{AM}\,\overrightarrow{grad}\left(\rho_A\right) \tag{1.4}$$

La formule pour un flux unidirectionnel (ici suivant l'axe *y*) :

$$\overrightarrow{J_A} = -D_{AM}\frac{d\rho_A}{dy} = -D_{AM}\frac{\Delta\rho_A}{\Delta y} \tag{1.5}$$

Avec :J_A le flux de diffusion du composé A,D_{AM} coefficient de diffusion du composé A dans le milieu,ρ_A la Concentration en composé A ,ΔS_A la variation de concentration composé A ,ΔY est la Distance de transfert ou épaisseur (m)

I.5 Fluides Newtoniens et non-Newtoniens :

I.5.1 La Comportement rhéologique :

Dans le cadre de la mécanique des fluides, étude du comportement des matériaux lié aux contraintes et aux déformations. Le comportement rhéologique est exprimé par une loi de comportement : expression mathématique reliant les contraintes locales aux vitesses de déformation (notamment vitesse de cisaillement) dans le fluide. La rhéologi**e** qualifie la science des déformations et écoulements de la matière, des contraintes qui en résultent et des efforts qu'il faut lui appliquer pour les obtenir. La rhéologie est ainsi une branche de la mécanique des milieux continus qui a trait aux relations entre la contrainte, la déformation et l'écoulement de la matière

I.5 .2 Fluides Newtoniens :

Un fluide newtonien est un fluide dont la viscosité ne dépend pas des contraintes qui lui sont appliquées. Autrement dit sa viscosité ne varie pas quand on agite le fluide. Elle peut néanmoins dépendre d'autres facteurs tels que la température. Plus le fluide est chaud moins celui-ci est visqueux, car les molécules sont plus agitées et par conséquent les liaisons entres elles sont moins fortes. A l'inverse plus le fluide est froid, plus il se solidifie, car ses molécules se figent et leur liaisons sont donc plus fortes.

Pour ce type de fluide, l'équation d'évolution est une équation de Navier- Stokes. Pour donner un exemple, dans le cas d'un fluide incompressible et homogène (à masse volumique constante), cette équation s'écrit, dans sa version massique :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left(\vec{V}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{V} = \frac{\overrightarrow{grad\rho}}{\rho} + \overrightarrow{f}_m + \nu\Delta\vec{v} \qquad (1.6)$$

I.5.3 Fluides non-Newtoniens :

Un bon nombre de flui des d'usage très courant présentent un comportement qui s'écarte plus ou moins de la loi de Newton. Ce type de fluides sont appelés : fluides non-Newtoniens.

Ces derniers possèdent un comportement non-linéaire dans le sens où leur viscosité dite apparentées influencée par l'écoulement et dépend considérablement du taux de déformation. Cet état de fait peut être expliqué par la complexité observée dans la structure interne de ces fluides. [9]

La compréhension des caractéristiques d'écoulement de ces fluides constitue une discipline appelée la rhéologie: c'est la science des déformations et des écoulements de la matière, des contraintes qui en résultent et des efforts qu'il faut appliquer pour les obtenir.

On peut classer ces fluides en trois grandes catégories:

- Fluides à viscosité indépendantes du temps.
- Fluides à viscosité dépendantes du temps.
- Les fluides viscoplastiques**.**

I.5.3.1 Fluides non newtonien au comportement indépendant du temps :

Le comportement des fluides non-Newtoniens indépendant du temps ne peut plus être représenté par la formule simple. Du fait que la relation entre la contrainte de cisaillement τ' et le taux de déformation $\dot{\gamma}'$ est plus complexe et peut prendre plusieurs formes. Dans ce type de fluide, la viscosité dite apparente μ dépend toujours de la température et de la pression mais aussi du taux de déformation ou de la contrainte de cisaillement. Cette catégorie comporte à son tour les trois types de fluides suivants :

- Le fluide rhé fluidifiant (pseudo-plastiques)
- Les fluides rhéoépaissisants (dilatants)
- Les fluides à seuil (viscoplastiques)

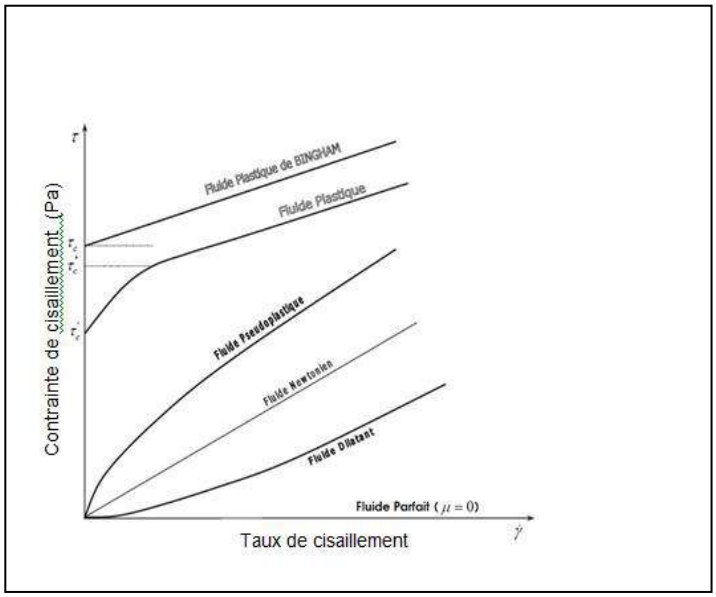


Figure I.6 : Rhé gramme fluides non-Newtonien indépendants du temps. [10]

I.5.3.1.1 Fluides rhé fluidifiants ou pseudo-plastiques :

Il s'agit du comportement rhéologique le plus répandu. Dans un tel fluide, la viscosité apparente diminue avec l'augmentation de la contrainte de cisaillement. Plus l'agitation est importante, plus les viscosités faible. Ce phénomène peut être expliqué par les modifications de la structure interne du fluide entre les états de repos et d'écoulement :

- Au repos, l'ordre interne irrégulière ces fluides provoque une résistance interne importante ce qui implique une viscosité élevée.
- À la suite de l'augmentation de la contrainte de cisaillement, la structure moléculaire du fluide devient régulière, par conséquence un meilleur glissement et donc une baisse de la viscosité.

I.5.3.1.2 Fluides rhéoépaissisants ou dilatants :

A l'inverse du fluide rhé fluidifiant, les fluides rhéoépaissisants possèdent une viscosité apparente qui croit avec l'augmentation du cisaillement. Ce comportement est moins fréquent que celui du rhé fluidifiant. On le rencontre dans les suspensions fortement concentrées, dans lesquelles la phase liquide n'occupe pratiquement que les espaces entre les particules solides. [11]

I.5.3.1.3 Fluides à seuil ou viscoplastiques :

Pour ces fluides, aucun écoulement ne se produit tant que la contrainte appliquée ne dépasse pas une valeur critique appelée contrainte seuil. Au-delà de cette valeur seuil, on peut retrouver, suivant le fluide, les comportements Newtoniens, pseudo-plastiques ou dilatants.

I.5.3.2 Fluides non Newtonien au comportement dépendant du temps :

Certains fluides non-Newtoniens possèdent un comportement qui varie en fonction du temps et du taux de cisaillement. Ces fluides se caractérisent par une viscosité apparente qui dépend de la durée d'application de la contrainte sans interruption. Cette catégorie de fluide peut se subdiviser en deux classes :

- Les fluides thixotropes.
- Le fluide rhé pectine (anti thixotropes).

I.5.3.2.1 Fluides thixotropes :

Les fluides thixotropes ont une viscosité apparente qui diminue avec le temps lorsqu'ils sont soumis à une contrainte constante .L'application d'une contrainte constante détruit certaines parties du fluide, conduisant ainsi, à une diminution de la viscosité apparente dans le temps. Après la suppression de cette contrainte, le fluide retrouve sa viscosité initiale.

I.5.3.2.2 Fluides rhé pectine ou anti thixotropes :

L'anti thixotropie est le phénomène inverse de la thixotropie, c'est un comportement rare auquel le fluide durcit par agitation, par exemple : les suspensions aqueuses de gypse et le ciment.

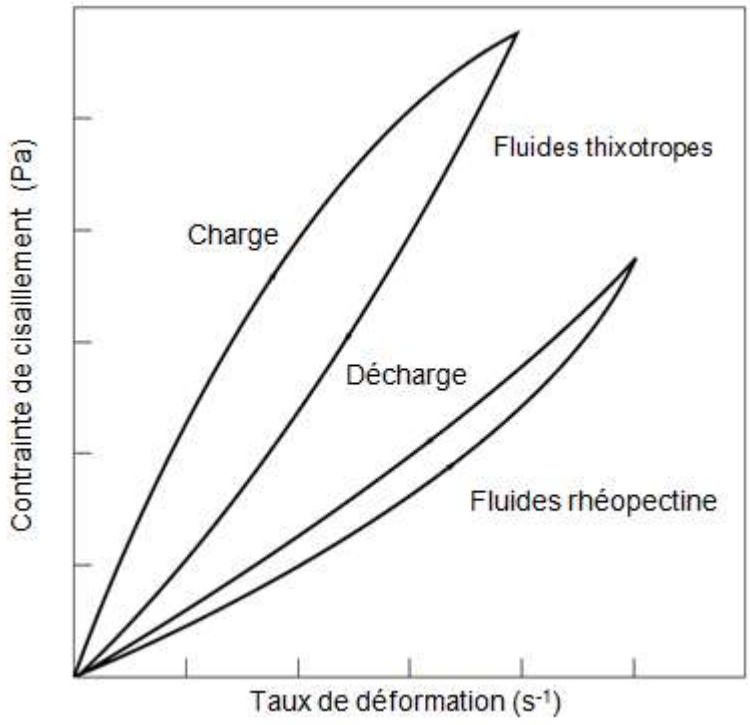


Figure 1.7 : Rhéogramme des fluides non-Newtoniens dependants du temps.[10]

I.5.3.3 Les fluides viscoélastiques ou rhé plastiques :

Les fluides viscoélastiques possèdent à la fois des propriétés de viscosité et d'élasticité. Ils se manifestent sous l'effet d'une contrainte. Leur comportement dépend à la fois de la déformation, du taux de cisaillement et du temps. Ainsi, après la suppression des contraintes, ces fluides peuvent récupérer une partie de leurs déformations. L'importance du caractère solide pour ces fluides dépend de la manière dont la contrainte est appliquée. Si

cette contrainte est brutale alors ces fluides se comportent comme des solides, par contre si elle est régulière, ils se comportent comme des fluides.

Si on prend à guise d'exemple le sailli-putti (élastomère à base de silicone), on le posant sur une table, il s'étale en forme de boule, si on le jette, il rebondit. Si on le frappe avec un marteau, il se brise comme du verre (à la température ambiante)

I.5.4 Modèles rhéologiques pour le fluide rhé fluidifiant :

Différentes lois permettant de modéliser les fluides non-Newtoniens peuvent être trouvée dans la littérature (Biard et al.[12]Bairdet al.[13]), y compris certaines recommandations et les limitations d'emplois. Dans l'après ente étude, on s'est intéressé au cas des fluides non-Newtoniens les plus répandus dans les procédés industriels et dont leur viscosité diminue avec le taux de cisaillement.

Il s'agit éventuellement du comportement rhé fluidifiant. Dans ce paragraphe, on s'est limité à citer les modèles rhéologiques les plus utilisés savoir :

- **Le modèle d'Oswald-de-Weale ou de la loi de puissance** : C'est un mathématique simple permettant de modéliser facilement un fluide non-Newtonien sans seuil par la relation:

$$\mu = K\,\dot{\gamma}^{n-1} \tag{1.7}$$

Avec :(μ)La viscosité apparent, (*K*) l'indice de consistance, (*n)* l'indice rhéologique, si :

- 0 <*n*< 1, le fluide est rhé fluidifiant ou pseudo plastique ;
- *n*= 1, il est Newtonien;
- *n*> 1, il est rhéoépaississant ou dilatant.

- **Le modèle de Sisko**[14] **:**

$$\mu = \mu_{\infty} + \mathrm{K}\,\dot{\gamma}^{n-1} \tag{1.8}$$

Avec :(μ) la viscosité apparent, (K) l'indice de consistance, (n) l'indice rhéologique, μ_{∞} la viscosité à taux de cisaillement élevé.

- **Le modèle de Cross**[15] **:** Le modèle de Cross a l'avantage de présenter le plateau Newtonien à faible taux de cisaillement:

$$\mu - \mu_{\infty} = \frac{\mu_0 - \mu_{\infty}}{1 + \left(E'\dot{\gamma}'\right)^n} \tag{1.9}$$

avec :(E') représenta la tempe caractéristique de l'enchevêtrement, (μ_0) la viscosité du premier plateau Newtonien à faible taux de cisaillement, (n) l'indice rhéologique, (μ_{∞}) la viscosité du deuxième plateau à taux de cisaillement élevé.

- **Le modèle d'Ellis :**

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \left(\tau / \tau_{1/2}\right)^{n-1}} \tag{1.10}$$

Avec :(μ_0) Représente la viscosité apparente à taux de cisaillement nul, ($\tau_{1/2}$) la contrainte à laquelle $\mu = \frac{\mu_0}{2}$ et n $\left(n > 1\right)$ représente le degré du comportement rhéfluidifiant du fluide ;

- **Le modèle de Carreau-Bird :** Généralement, pour un grand nombre de polymère, on choisit la valeur de a=2, on parle alors du modèle de Carreau-Birdàquatre paramètres, le paramètre a fut ajoute plus tard par Carreau-Yasuda. [12]

$$\left[\mu = \mu_{\infty} + \left(\mu_0 - \mu_{\infty}\right)\left[1 + \left(E'\dot{\gamma}\right)^2\right]^{\frac{n-1}{2}}\right. \tag{1.11}$$

Avec :(E') Le temps caractéristique de l'enchevêtrement, (μ_0) la viscosité du palier Newtonien à faible taux de cisaillement, (μ_{∞}) la viscosité du deuxième plateau Newtonien à taux de cisaillement élevé et (n) représente l'indice de puissance.

- **Le modèle de Carreau-Yasuda** : Ce modèle est largement utilisé pour décrire avec précision la viscosité du fluide rhé fluidifiant pour les faibles et fort taux de cisaillement. Il est donné par la relation suivante:

$$\mu = \mu_{\infty} + \left(\mu_0 - \mu_{\infty}\right)\left[1 + \left(E'\dot{\gamma}\right)^a\right]^{\frac{n-1}{a}} \tag{1.12}$$

Avec :E' : le temps caractéristique de relaxation du fluide

μ_0 : la viscosité du fluide à cisaillement nulou faible

μ_∞ : La viscosité du fluide à cisaillement infinie ou fort

$\dot{\gamma}$: représente le second du tenseur de déformation.

a : décrit la région de transition entre la viscosité à taux de cisaillement nul et la viscosité de la loi de puissance.

La figure 1.8 représente l'évolution de la viscosité apparente de différentes solutions de polymères en fonction du taux de cisaillement. Une excellente concordance est observée entre les valeurs de la viscosité apparente mesurées par le rhéomètre, représentées par des symboles

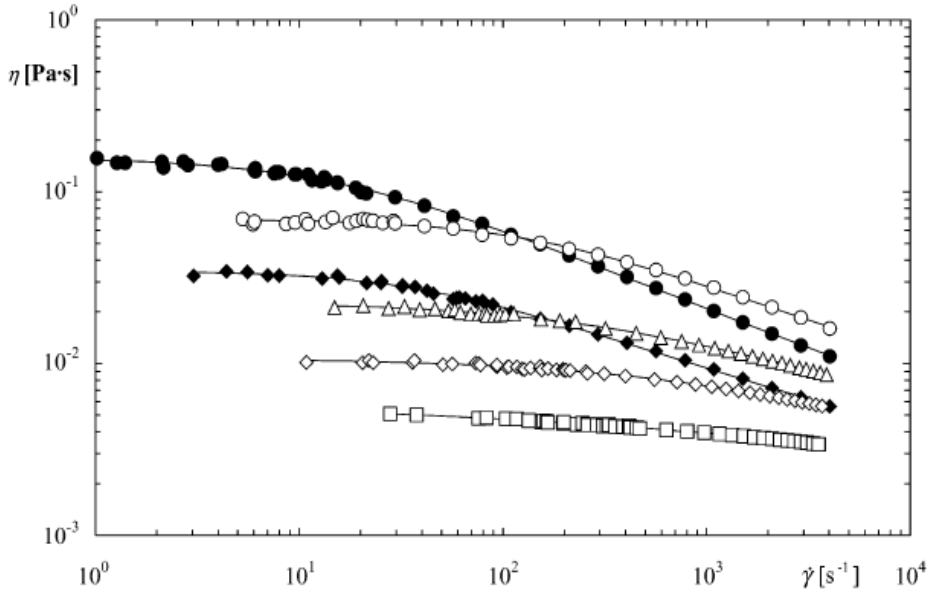


Figure I. 8 : Variation de la viscosité en fonction du taux de cisaillement à 25°C.

Les traits plein sont ajustés par le model de Carreau Yasuda. [14]

Tableau I.2 : Les paramètres rhéologiques du modèle de Carreau-Yasuda. [16]

Solution	μ_0 $(Pa.s)$	μ_∞ $(Pa.s)$	E' (s)	a	n	$\dot{\gamma}$ (s^{-1})
0.4% CMC	0.1598	0.0008	0.0681	0.991	0.513	1-4000
0.2% CMC	0.0358	0.0008	0.0271	1.043	0.581	30-4000
0.6% tylose	0.0705	0.0008	0.00720	1.006	0.558	5-4000
0.4% tylose	0.0227	0.0010	0.00304	0.741	0.608	10-4000
0.3% tylose	0.0107	0.0010	0.00095	0.653	0.594	10-4000
0.2% tylose	0.00614	0.0008	0.00011	0.290	0.631	20-4000

I.6 Revue Bibliographique :

L'étude de la convection naturelle à double diffusion à travers une enceinte remplie de fluides newtoniens ou non newtoniens a de nombreuses applications dans une variété d'applications d'ingénierie ou environnementales telles que; astrophysique, océanographie, génie chimique, transport des boues et traitement des aliments, géophysique, croissance des cristaux, forage pétrolier, hydrologie, pétrochimie, conception de réacteurs chimiques, génie des polymères, systèmes géophysiques, certains processus de séparation, stockage de gaz, extraction de pétrole, génie thermique, etc. divers processus industriels, etc. [17-23]

De nombreux chercheurs ont étudié le phénomène de la convection double diffusive dans les fluides newtoniens, mais les études portant sur la convection thermosolutale dans les fluides non newtoniens sont relativement peu nombreuses.

Un résumé très détaillé du travail effectué dans le passé est présenté dans les livres de NieldetBejan [24] et IngrametPop [25].

Plusieurs études de la convection double diffusive induite dans des cavités carrées et rectangulaires remplies de fluides non newtoniens, on peut citer l'étude numérique du transfert thermique de fluides pseudo plastiques dans une cavité carrée chauffé ont été étudié par Ohta et al. [26].

Kim et al. [27] ont étudié numériquement la convection flottante transitoire d'un fluide non newtonien dans une cavité carrée chauffée différentillement sur côtés verticaux.

Périlleuse [28] a étudié numériquement l'écoulement et le transfert de chaleur des fluides d'Ostwald-de-Walé dans une carrée chauffée de manière isotherme à partir des parois latérales.

Le nombre de Nusselt a été obtenu pour une gamme des valeurs de l'indice de loi de puissance pour les régimes pseudo plastiqués et dilatants. Cependant, cet auteur a supposé que les fluides non-Newtoniens avaient la propriété physique de l'air, de sorte que les résultats peuvent ne pas être réalistes. Le même problème a été reconsidéré parTura et al. [29] ont traité numériquement la convection bidimensionnelle à l'état stationnaire des fluides d'Ostwald-de-Waele confinés dans une cavité carrée avec des parois latérales chauffées de manière différentielle soumises à des températures constantes.

Lamsaadi et al. [30] ont étudié la convection naturelle dans une cavité rectangulaire verticale, chauffée par les côtés par des flux de chaleur constants tandis que les autres parois sont maintenues adiabatiques, remplies d'un fluide de loi de puissance non-Newtonien. Unbon accord a été trouvé entre une analyse d'échelle et les résultats numériques, la corrélation du nombre de Nusselt à l'état d'équilibrées proposée dans cette étude.

Benouared et al. [31] ont réalisé une étude numérique de la convection sous-critique non Newtonien au sein d'une configuration Rayleigh-Bénard chauffée par le bas avec un flux de chaleur constant ou des températures constantes. Le modèle Carreau-Yasuda a été utilisé pour caractériser le comportement rhéologique des fluides non Newtoniens, en plus une solution semi-analytique a été dérivée dans cette étude en supposant un comportement d'écoulement parallèle. Un bon accord a été trouvé entre les prédictions de l'approximation d'écoulement parallèle et les résultats numériques.

Une étude similaire a été présentée par Allouai et Vasseur [32] considérant la convection naturelle des fluides non Newtoniens de Carreau-Yasuda dans une cavité verticale chauffée par les côtés. Les résultats montrent un fort effet des paramètres rhéologiques de Carreau-Yasudasur les profils de vitesse, de température et de la viscosité apparente à l'intérieur de la cavité. Une comparaison entre les solutions numériques et semi-analytiques a été effectuée. Compte tenu du même problème, une comparaison entre les modèles de loi de puissance et de Carreau-Yasuda a été discutée.

L'effet des paramètres rhéologiques sur la convection thermique naturelle dans une couche poreuse peu profonde remplie d'une couche non newtonienne et chauffée par le bas a été

étudié par Khechiba et al. [33]. Le fluide d'amincissement par cisaillement a été modélisé selon le modèle Carreau-Yasuda.Il a été constaté que les paramètres rhéologiques ont un impact significatif sur le transfert de chaleur convectif. De plus, cette étude montré un fort effet des paramètres rhéologiques sur le seuil de début de convection sous-critique et de bifurcation de Hopf, qui a joué un rôle d'effet stabilisant ou déstabilisant.

Vera Krishna et Subra Reddy [34] ont étudié numériquement le flux magnétohydrodynamique de convection forcée à travers un milieu poreux perméable avec l'utilisation de la méthode de Boltzmann.Un modèle simple de loi de puissance avec un indice de loi de puissance et un coefficient de cohérence a été adopté par les auteurs pour caractériser le fluide non Newtonien.Une analyse d'échelle, menée pour délimiter les caractéristiques des fluides de loi de puissance, s'est avérée en bon accord qualitatif avec leurs résultats numériques. La corrélation du nombre de Nusselt à l'état stationnaire est proposée.

Wu et al. [35] ont proposé une étude numérique de la convection naturelle dans une enceinte cylindrique refroidie par le bas et chauffée sur le reste du mur, L'effet des paramètres physiques et rhéologiques sur le transfert de chaleur a été discuté.

Khellaf et Lauriat [36] ont effectué l'écoulement et le transfert de chaleur dans un petit espace vertical avec un cylindre intérieur chauffé et rotatif.L'enceinte était remplie d'une viscosité non Newtonienne d'amincissement par cisaillement modélisée par l'équation constitutive de Carreau. L'effet de la viscosité apparente du fluide sur le début des écoulements oscillatoires est analysé.

Ozoe et Churchill [37]ont analysé la convection naturelle des fluides d'amincissement et d'épaississement par cisaillement dans une chambre rectangulaire horizontale. Leurs résultats ont montré que le nombre critique de Rayleigh augmente avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance.

Shahmardan et Norouzi [38] ont traité un écoulement de fluide non-Newtonien dans un canal avec une enceinte.Le modèle Carreau-Yasuda est utilisé pour décrire la dépendance des contraintes à la vitesse de déformation. Les résultats numériques ont montré qu'avec la diminution de l'indice de loi de puissance la durée totale de développement augmente.

Guha et Pradhan [39] ont étudié la convection naturelle de fluides non newtoniens sur une plaque horizontale.Les résultats présentés indiquent que les fluides non newtoniens épaississants par cisaillement ont un meilleur transfert de chaleur par rapport aux fluides newtoniens et fluidifiants par cisaillement.

Kefayati [40] a examiné le transfert de chaleur d'un polymère fondu non-Newtonien en utilisant la méthode de Boltzmann dans une cavité carrée. Les résultats ont montré que la méthode de Boltzmann est une méthode appropriée pour résoudre ce problème.

Bihiche et al [41] ont analysé l'effet du taux de flottabilité sur la convection naturelle et sur le transfert de chaleur et de masse dans une enceinte rectangulaire horizontale. Les résultats sont présentés et analysés en termes de lignes de courant, d'isothermes, d'iso-concentrations, de fonction du courant et des nombres moyens de Nusselt et Sherwood pour diverses valeurs de paramètres directeurs. L'apparition et le développement de la convection à double diffusion, pour les écoulements coopérants et opposés, sont également étudiés. De plus, l'existence de multiples solutions en régime permanent a été démontrée dans le cas de convection à double diffussion.

Une étude analytique et numérique de la convection naturelle de fluides non Newtoniens dans une enceinte rectangulaire poreuse inclinée a été analysée par Bian et al. [42], la cavité est exposée à un flux thermique constant sur le côté. Le problème a été résolu sur la base d'une équation de Darcy modifiée. Les champs de l'écoulement, de température et les résultats de transfert de chaleur à travers la couche poreuse sont obtenus pour différentes valeurs d'indice de loi de puissance, l'angle d'inclinaison et le nombre de Rayleigh.

Mehta et Rao [43] ont analysé l'écoulement induit par la flottabilité des fluides non Newtoniens dans un milieu poreux devant une plaque verticale avec un flux de chaleur de surface non uniforme.

Une autre étude analytique et numérique de la convection naturelle à double diffusion au sein d'une cavité poreuse rectangulaire saturée par un fluide non Newtonien et caractérisée par un modèle de loi de puissance, a été réalisée par Getachew et al. [44].

L'effet du comportement non-Newtonien sur le début de la convection, l'écoulement des fluides, le champ de température et le transfert de chaleur a été examiné par Lamsaadi et al. [45] ont étude analytique et numérique un écoulement bidimensionnel entraîné par la

flottabilité d'un fluide non Newtonien dans une cavité horizontale rectangulaire peu profonde chauffée uniformément par le bas.

Ben Khelifa et al. [46] ont étudié numériquement et analytiquement la convection naturelle dans une cavité poreuse verticale remplie d'un fluide binaire non Newtonien. Un modèle de loi de puissance a été utilisé pour caractériser le comportement des fluides non Newtoniens. L'analyse à l'échelle a également été présentée dans cette étude pour les deux cas extrêmes de convection naturelle entraînée par la chaleur et par la masse.

I.7 Conclusion :

L'étude des phénomènes de transferts (transfert de chaleur, transfert de masse)dans milieu fluide continue d'évoluer malgré l'existence de certains problèmes complexes et nouveaux, le chercheur dispose d'un ensemble de connaissances (résultats, modèles) et d'outils expérimentaux et numériques que permettent des prédictions pour un grand nombre de problèmes et sont principalement liés aux connaissances acquises sur les flux et transferts conducteurs et porteurs ,que ce soit en termes expérimentaux ou théoriques ,ces connaissances ont encore des difficultés à déterminer les caractéristique de transports et de transaction optiques efficaces et des difficultés liées à la mesure locale d'un grand nombre de variables .

CHAPITRE II

FORMUL ATION MATHÉMATIQUE

II.1 Introduction

La convection thermique fait intervenir le transport de chaleur par un mouvement de la matière sous l'effet de la pesanteur. Cependant, les équations nécessaires à la modélisation de ce processus doivent décrire d'une part le mouvement de la matière, et d'autre part le transport de la chaleur. C'est précisément ce que font les équations de mouvement couplées avec l'équation de la chaleur. Dans le cas de la convection naturelle, ces équations peuvent être simplifiées, mais même après leurs simplifications, elles resteront toujours non-linéaires. Cette non-linéarité rendu leur résolution par voie analytique impossible d'où le recours à des méthodes numériques savoir, les méthodes des différences finies, les volumes finis, les éléments finis ou les méthodes spectrales.

Dans un premier temps, on présentera la formulation mathématique du problème de convection naturelle d'un fluide non-Newtonien confiné dans une cavité rectangulaire. Dans un second temps, on donnera sous formes dimensionnelle, dans un système de coordonnées cartésien, les équations gouvernantes associées aux conditions aux limites appropriées. Ensuite, on déterminera les échelles caractéristiques de la longueur, la vitesse et le temps dans le but de mettre ces équations sous formes adimensionnelles. Cette étape de travail, nous permettra de ressortir des nombres sans dimension dans le système d'équations. Enfin on se basera sur des hypothèses simplificatrices pour faciliter le traitement numérique.

II.2 Description du modèle physique

Dans ce travail, la configuration géométrique qui a suscité notre intérêt est une cavité rectangulaire remplie d'un fluide non-Newtonien dont le comportement rhéologique obéit au modèle de Carreau-Yasuda. Comme il est illustré sur la figure (II.1), il s'agit d'une cavité rectangulaire de hauteur H' de largeur L'. L'origine du système de coordonnées cartésiens considéré est située au centre de la cavité .Les parois horizontales sont soumises soit des flux de chaleur et de masse constante, ou maintenues des températures et des concentrations constantes. Par ailleurs, Les parois verticales sont toujours adiabatiques.

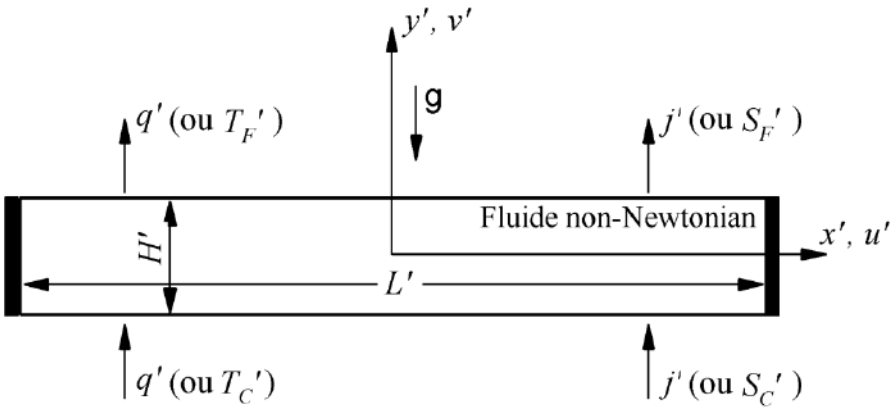


Figure II.2 : Représentation schématique de la cavité et système de coordonnées.

II.3 Hypothèses simplificatrices

Afin de simplifier la formulation mathématique du modèle, on a considéré quelques approximations qui sont largement utilisées par de nombreux auteurs dans leurs études sur la convection naturelle. On a supposé que

- La troisième dimension est suffisamment grande par rapport aux deux autres dimensions (*L*' et *H*') rendant les effets de bords négligeables et ramenant la configuration à un problème bidimensionnel;
- Le fluide non-Newtonien confiné à l'intérieur de la cavité est supposé incompressible;
- L'écoulement engendré est supposé laminaire.
- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.
- Le travail des forces visqueuses et de pressionnés négligeable. [47]

$$\rho = \rho_0\left[1-\left(\beta_T\left(T'-T_0'\right)+\beta_S\left(S'-S'_0\right)\right)\right] \tag{2.1}$$

ρ_0 : représente la densité du fluide donnée à la température référence$T_0^{'}$.

β_T, β_S : Les coefficients d'expansion thermique et massique pression constantes.

II.4 Équations gouvernant le problème

Les équations de conservation, couplées décrivant le mouvement et les transferts de chaleur et de masse misent sous forme tensorielle, sont formulées de la manière suivante:

II.4.1 Équation de conservation de la masse.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{V}) = 0 \tag{2.2}$$

Comme le fluide considéré est incompressible (ρ = Coste), l'équation (2.3) se simplifie pour donner :

$$\vec{\nabla}\vec{V}' = 0 \tag{2.3}$$

II.4.2 Équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{D\vec{V}'}{Dt} = \rho\vec{g} + \vec{\nabla}\,\overline{\overline{\Sigma}} \tag{2.4}$$

Où:

$\vec{V}'$: représente la vectrice vitesse ($\vec{V}' = u'\vec{i} + v'\vec{j}$);

$\vec{g}$: Le vecteur de l'accélération de la pesanteur selon l'axe *y';*

$\overline{\overline{\Sigma}}$: Le tenseur des contraintes, qui se décompose en deux termes :

- $\overline{\tau'}$: tenseur des extra-contraintes (ou tenseur déviateur des contraintes), qui se rapporte aux contraintes tendant à déformer le fluide ;
- P' : la pression hydrostatique

$$\overline{\overline{\Sigma}} = \overline{\overline{\tau'}} - P'\overline{I} \tag{2.5}$$

Et $\overline{I}$: représente le tenseur identité.

L'équation (2.5) s'écrit comme suit :

$$\rho \frac{D\vec{V}'}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial \vec{V}'}{\partial t'} + \vec{V}'\vec{\nabla}\vec{V}'\right) = -\vec{\nabla}P' + \rho\vec{g} + \vec{\nabla}\overline{\overline{\tau'}} \tag{2.6}$$

P' : représente la pression qui contient la contribution de la pesanteur ;

$\overline{\overline{\tau}}'$: Le tenseur déviateur des contraintes définit par

$$\overline{\overline{\tau}}' = 2\mu(\dot{\gamma})\overline{\overline{\dot{\gamma}}}' \tag{2.7}$$

Ou encore en termes de convention d'Einstein

$$\tau'_{ij} = 2\mu(\dot{\gamma}')\dot{\gamma}'_{ij} \tag{2.8}$$

$\overline{\overline{\dot{\gamma}}}'$: représente le tenseur du taux de déformation défini comme la partie symétrique du tenseur du gradient de vitesse:

$$\overline{\overline{\dot{\gamma}}}' = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\nabla}}\vec{V}' + \left(\overline{\overline{\nabla}}\vec{V}'\right)^T\right) \tag{2.9}$$

Où:

$\overline{\overline{\nabla}}\vec{V}'$: représente le gradient de vitesse dont ses composantes sont données par :

$$\dot{\gamma}'_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial V'_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.10}$$

Et μ: représente la viscosité apparente du fluide, exprimée en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}'$ et définit parla formule suivante:

$$\dot{\gamma}' = \sqrt{\frac{1}{2}\overline{\overline{\dot{\gamma}}}' : \overline{\overline{\dot{\gamma}}}'} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{ij}\dot{\gamma}'^2_{ij}} \tag{2.11}$$

II.4.3 Équation de conservation de l'énergie

$$\rho c_P \frac{DT'}{Dt'} = \rho c_p\left(\frac{\partial T'}{\partial t'} + \vec{V}\vec{\nabla}T'\right) = \vec{\nabla}\left(\lambda\vec{\nabla}T'\right) + \overline{\overline{\tau}}' : \vec{\nabla}\vec{V}' \tag{2 .12}$$

Où :

λ: représente la conductivité thermique ;

c_p : La chaleur calorifique à pression constante ;

Et ($\overline{\overline{\tau}}' : \overline{\overline{\nabla}}\vec{V}'$): représente la dissipation visqueuse de l'énergie.

II.4.4 Équation constitutive ou comportement rhéologique

Dans le présent travail, le fluide considéré est un fluide purement visqueux, c'est un fluide rhé fluidifiant dont sa viscosité, μ, obéit au modèle de Carreau-Yasuda[11-37]

$$\mu = \mu_\infty + (u_0 - u_\infty)\left[1 + (E'\dot{\gamma}')^a\right]^{\frac{n-1}{a}} \tag{2.13}$$

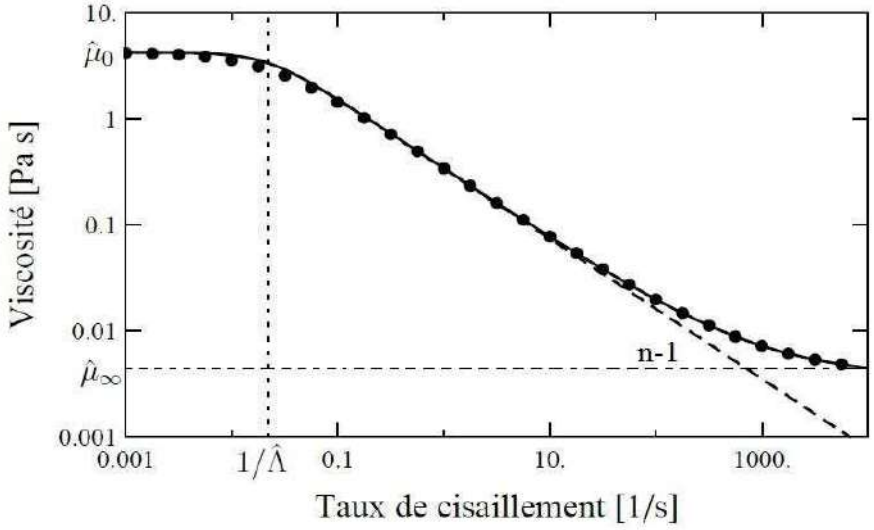


Figure II.2 : Evolution de la viscosité en fonction du taux de cisaillement. [48]

II.5 Formulation mathématique en coordonnées cartésiennes

- **Équation de continuité :**

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial V'}{\partial y'} = 0 \tag{2. 14}$$

- **Équation de mouvement suivant x' :**

$$\rho_0\left(\frac{\partial u'}{\partial t'} + u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'}\right) = -\frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\partial \tau'_{xx}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y'} \tag{2 .15}$$

- **Équations de mouvement suivant y' :**

$$\rho_0\left(\frac{\partial v'}{\partial t'} + u'\frac{\partial v'}{\partial x'} + v\frac{\partial v'}{\partial x'}\right) = -\frac{\partial P'}{\partial y'} - \rho_0\beta\left(T' - T'_0\right)g + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau'_{yy}}{\partial y'} \tag{2.16}$$

où :

$$\tau'_{xx} = 2\mu \frac{\partial u'}{\partial x'}$$

$$\tau'_{xy} = \tau'_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v}{\partial x'}'\right) \tag{2.17}$$

$$\tau'_{yy} = 2\mu \frac{\partial v'}{\partial y'}$$

- **Équations de l'énergie :**

$$\rho_0 c_p\left(\frac{\partial T'}{\partial t'} + u'\frac{\partial T'}{\partial x'} + v'\frac{\partial T'}{\partial y'}\right) = \lambda\left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2}\right) \tag{2.18}$$

- **Equations de la masse :**

$$\frac{\partial S'}{\partial t'} + u'\frac{\partial S'}{\partial x'} + v'\frac{\partial S'}{\partial y'} = D\left(\frac{\partial^2 S'^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 S'^2}{\partial y'^2}\right) \tag{2.19}$$

II.6 Conditions aux limites hydrodynamiques et thermiques

La configuration la plus simple permettant d'étudier le phénomène de la convection de Rayleigh-Bénard concerne une cavité horizontale soumise à des gradients de température et de concentration verticaux. Les conditions aux limites dimensionnelles sont données par

II.6.1 Conditions aux limites hydrodynamiques

- **<u>Parois horizontales :</u>**

$$u' = v' = 0 \text{ pour } x' = \pm\frac{H'}{2} \tag{2.20}$$

- **<u>Parois verticales :</u>**

$$u' = v' = 0 \quad \text{pour} \quad x' = \pm\frac{L'}{2} \tag{2.21}$$

II.6.2 Conditions aux limites thermiques

- **Parois verticales :**

Les parois verticales de la cavité sont supposées adiabatiques (pas d'échange de chaleur avec le milieu extérieur), ce qui se traduit par :

$$q' = j' = 0, \qquad \frac{\partial T'}{\partial x'} = \frac{\partial S'}{\partial x'} = 0 \text{ pour } y' = \pm \frac{L'}{2} \tag{2.22}$$

- **Les parois horizontales :**

Dans le cas où les parois horizontales sont supposées maintenues à des flux de et de masse constants (condition de Neumann), on a :

$$q' = -\lambda \frac{\partial T'}{\partial y}, \; j' = -\rho D \frac{\partial S'}{\partial y'} \text{ Pour } y' = \pm \frac{H'}{2} \tag{2.23}$$

Alors, lorsque ces parois horizontales sont supposées isothermes (condition de Dirichlet), on a :

$$T' = T'_H, \; S' = S'_H \text{ pour } y' = -\frac{H'}{2} \tag{2.24}$$

$$T' = T'_C, \; S' = S'_C \text{ pour } y' = +\frac{H'}{2} \tag{2.25}$$

II.7 Les équations adimensionnelle

Équations (2.14) à (2.19) avec les conditions aux (2.20) à (2.25) sont rendues adimensionnelles en considérant les échelles caractéristiques suivantes :

- La hauteur (H') de la cavité comme échelle de longueur ;
- Le temps de diffusion thermique $\left(H'^2/\alpha\right)$ comme échelle de temps. Ce temps caractéristique convient parfaitement pour des fluides dont le temps de diffusion thermique est plus élevé que le temps de diffusion visqueuse. C'est le cas des fluides dont le nombre de Prandtl est supérieur à 1 ;
- La vitesse de diffusion thermique $\left(H'/\left(H'^2/\alpha\right)\right)$ comme échelle de vitesse.
- $\left(\Delta T' = T'_H - T'_C\right)$, $\left(\Delta S' = S'_H - S'_C\right)$ ou bien $(\Delta T' = q' H' / \lambda)$, $(\Delta S' = j'/\rho D)$ suivant le cas considéré ;

- $\left(\rho_0\alpha^2/H'^2\right)$ comme échelle de pression.

Ainsi, les variables sans dimension associées sont :

$$(x,y)=\frac{(x'y')}{H'},\qquad t=\frac{t'a}{H'^2},\qquad (u,v)=\frac{(u',v')}{\alpha}H',\qquad \psi=\frac{\Psi'}{a},\qquad \mu=\frac{\mu'}{\mu_0},$$

$$T=\frac{T'-T'_0}{\Delta T'},\qquad S=\frac{S'-S'_0}{\Delta S'} \tag{2.26}$$

où : $\alpha=\dfrac{\lambda}{\rho_0 c_P}$ représente la diffusivité thermique

En vertu des variables adimensionnelles données par la relation (2.26), les équations de conservation (2.14)-(2.19) peuvent se réécrire sous la façon suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{2.27}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+P_r\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right) \tag{2.28}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}+pr\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+R_a T\right) \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xx}&=2\eta\frac{\partial u}{\partial x}\\ \tau_{xy}=\tau_{yx}&=\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\ \tau_{yy}&=2\eta\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+u\frac{\partial S}{\partial x}+v\frac{\partial S}{\partial y}=\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \tag{2.32}$$

Compte tenu de l'équation (2.13), la viscosité apparente adimensionnelle du modèle de Carreau-Yasuda se réduit à :

$$\mu(\dot\gamma)=S+(1-S)\left[1+(E\dot\gamma)^a\right]^{\frac{n-1}{a}} \tag{2.33}$$

où :

$s = \mu_\infty / \mu_0$: représente le rapport de la viscosité taux de cisaillement infini sur taux de cisaillement nul;

$E = E'\alpha / H'^2$: représente le temps caractéristique adimensionnelle du fluide.

$\dot{\gamma}$: représente le second invariant du tenseur de taux de déformation (taux de cisaillement) définit par :

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} \tag{2.34}$$

Le problème considéré fait intervenir le groupement de paramètres adimensionnels suivants

- Le rapport de forme *A* ;
- Le nombre de Prandtl *Pr* qui caractérise les propriétés thermiques du fluide. C'est le rapport du temps caractéristique de diffusion thermique sur le temps caractéristique de diffusion visqueuse :

$$P_r = \frac{\mu_0}{\rho_0 \alpha} \tag{2.35}$$

  - Le nombre de Rayleigh thermique *Ra*
  - *T*qui exprime le transfert de chaleur à l'intérieur d'un fluide. C'est le rapport entre les effets déstabilisants (force d'Archimède) qui provoquent la mise en mouvement du fluide et les effets stabilisants (force visqueuse et diffusion thermique) :

$$Ra_T = \frac{\rho_0 g \beta \Delta T' H'^3}{\mu_0 a} \tag{2.36}$$

- Les paramètres rhéologiques *n, E, s*et *a.*

II.7.1 Équation de transport adimensionnelles en formulation (ψ,Ω)

Dans la plupart des travaux relatifs à la convection naturelle, l'étude de la pression ne présente pas un intérêt majeur. L'utilisation de la formulation fonction de courant-verticité

(ψ, Ω) fait non seulement réduire le nombre d'équation mais elle présente aussi l'avantage de tracer directement les lignes de courant qui apportent d'importantes informations sur la structure de l'écoulement.

Ainsi, l'équation de mouvement peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t}+\frac{\partial(u\Omega)}{\partial x}+\frac{\partial(v\Omega)}{\partial y}=\mathrm{Pr}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tau_{xy}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\tau_{yy}-\tau_{xx}\right)+R_T\left(\frac{\partial T}{\partial x}+N\frac{\partial s}{\partial x}\right)\right] \quad (2.37)$$

où, Ω : représente la verticité adimensionnelle definie comme suit :

$$\Omega=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.38)$$

avec :

$$u=\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad v=-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.39)$$

$$\tau_{xx}=2\eta\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}, \qquad \tau_{xy}=\tau_{yx}=\eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \quad (2.40)$$

et :

$$\dot{\gamma}=\sqrt{4\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right)^2} \quad (2.41)$$

En substituant les composantes du tenseur de déformation par ses valeurs respectives, et après manipulation algébrique, l'équation de mouvement (2.36)s'écrit comme :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t}+\frac{\partial(\partial\Omega)}{\partial x}+\frac{\partial(\partial v)}{\partial y}=P_r\left[\mu\nabla^2\Omega+2\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial\Omega}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)\right]+$$
$$P_r\left[\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)-2\frac{\partial^2\mu}{\partial xy}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+R_T\left(\frac{\partial T}{\partial X}+N\frac{\partial S}{\partial X}\right)\right] \quad (2.42)$$

- **L'équation d'énergie**

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial(uT)}{\partial x}+\frac{\partial(vT)}{\partial y}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{2.43}$$

- **L'équation de la masse**

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial(uS)}{\partial x}+\frac{\partial(vS)}{\partial y}=Le^{-1}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right) \tag{2.44}$$

Et la fonction de courant (équation de poisson) s'écrit comme :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}=-\Omega \tag{2.45}$$

II.7.2 Conditions aux limites adimensionnelles

Les conditions hydrodynamiques sur les parois horizontales sont définies de la manière suivante :

$$u=v=\Psi=\frac{\partial \Psi}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial y}=0 \text{ Pour } y=\pm\frac{1}{2} \tag{2.46}$$

Deux cas se présentent pour les parois verticales:

$$u=v=\Psi=\frac{\partial \Psi}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial y}=0 \text{ Pour } x=\pm\frac{A}{2} \tag{2.47}$$

Cependant, les conditions thermiques et solutés sur les parois horizontales sont :

- pour le cas des flux de chaleur et de masse constants (type de Neumann)

$$\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial T}{\partial y}=-1 \text{ Pour } x=\pm\frac{A}{2} \tag{2.48}$$

- pour le cas des températures et des concentrations constants (type de Dirichlet) on a :

$$T=S=\pm\frac{1}{2} \text{ Pour } y=\mp\frac{1}{2} \tag{2.49}$$

et sur les parois verticales on a:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \text{ Pour } x = \pm \frac{A}{2} \tag{2.50}$$

où $A = \frac{L'}{H'}$: représente le rapport de forme de la cavité.

II.8 Transfert thermique et massique

Dans la présente étude, nous nous intéressons particulièrement aux calculs du taux de transfert de chaleur et de masse à une position x donnée, qui sont exprimés en termes des nombres de Nusselt et Sherwood définis par :

$$Nu_x = \frac{q'}{k_P \frac{\Delta T'}{H'}} = \frac{1}{T(x,-1/2) - T(x,1/2)} \tag{2.51}$$

$$Sh_x = \frac{j'}{D \frac{\Delta S'}{H'}} = \frac{1}{S(x,-1/2) - S(x,1/2)} \tag{2.52}$$

Les valeurs moyennes des nombres de Nusselt et de Sherwood sur les parois actives sont exprimées par :

$$Nu_m = \frac{1}{A} \int_{-A/2}^{A/2} Nu_x dx \tag{2.53}$$

$$Sh_m = \frac{1}{A} \int_{-A/2}^{A/2} Sh_x dx \tag{2.54}$$

II.9 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté la formulation de notre problème :

- La géométrie du problème et les conditions aux limites

- Les équations dimensionnelles de continuité, de quantité de mouvement, d'énergie, de masse et les équations de comportement rhéologue
- Le modèle mathématique adimensionnel
- Le nombre adimensionnel qui gouvernent l'écoulement

Dans le chapitre suivant nous présentons la méthode numérique des différences finies.

CHAPITRE III

METHODE NUMÉRIQUE

III.1 Introduction.

Dans ce chapitre on va exposer la méthode numérique qu'on a été utilisés pour la résolution des équations adimensionnelles modélisâtes qui ne possèdent pas de solutions analytiques. Et dans ce sens, on exposera aussi la discrétisation du domaine de calcul et l'algorithme utilise pour résoudre le système d'équations discrétisées obtenues.

On a choisi la méthode des différences finies en vue de la géométrie du problème et les capacités de calcul. Cette méthode a été développée pour résoudre les problèmes de transfert de chaleur et d'écoulement des fluides, Son principe est de fractionner le domaine physique en un nombre dévolues dits nœuds, ensuite d'intégrer les équations de conservation dans chaque volume de contrôle. Le résultat de cette intégration, est l'obtention des équations algébriques, dites équations discrétisées. Les avantages primaires de cette méthode sont la robustesse numérique par l'obtention des principes (minimum) maximum discrets, l'applicabilité sur les mailles non structurées très générales et les propriétés locales intrinsèques de conservation des arrangements résultants [12].

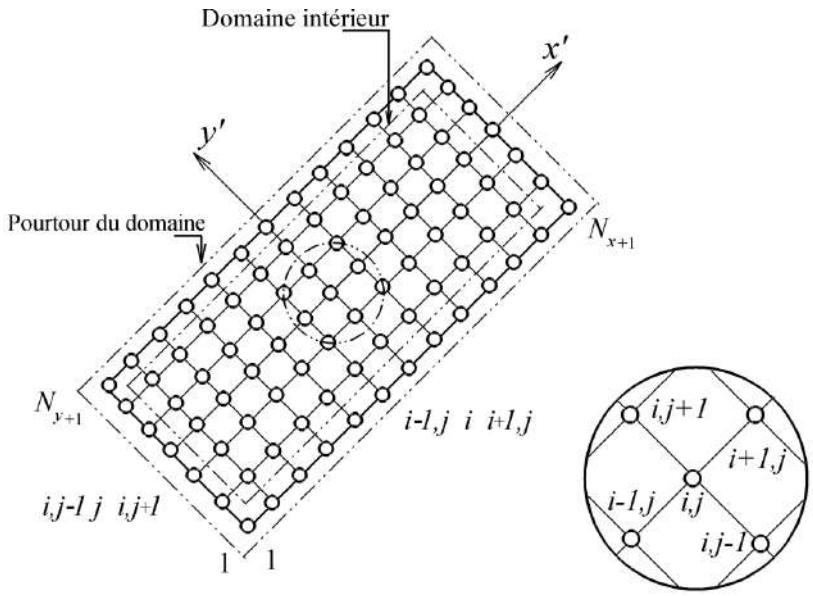


Figure III.2 : Eléments de maillage du domaine de calcul en (i, j).

III.2 Discrétisation des équations de conservation

A l'intérieur du domaine, les dérivées partielles spatiales, apparaissant dans les équations de conservation (2.42) et (2.43.) sont discrétisées selon un schéma centré aux différences finies. Ce choix est lié la nature du problème considéré où les informations sont connues à l'amont et à l'aval (cavité fermée).

III.2.1 Les termes diffusifs et non diffusifs

A l'intérieur du domaine, les dérivées partielles de premier et deuxième ordre sont approchées selon un schéma centré aux différences finies :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i.j} = \frac{f_{i+1.j} - f_{i-1.j}}{2(\Delta y)}$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i.j} = \frac{f_{i.j+1} - f_{i.j-1}}{2(\Delta y)} \qquad (3.1)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 f}\right)_{i.j} = \frac{f_{i+1.j} - 2f_{i.j} + f_{i-1.j}}{\Delta y^2}$$
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 f}\right)_{i.j} = \frac{f_{i.j+1} - 2f_{i.j} + f_{i-1.j}}{\Delta y^2} \qquad (3.2)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{i.j} = \frac{f_{i+1.j+1} - f_{i+1.j-1} - f_{i-1.j+1} + f_{i-1.j-1}}{4(\Delta x)(\Delta y)} \qquad (3.3)$$

où :

f : représente soit la température T soit la fonction de courant ψ ou soit la viscosité apparente μ ;

(Δx) et (Δy) : représentent respectivement l'espacement entre deux nœuds voisins.

III.2.2 Les termes convectifs

Les termes convectifs des équations de verticité et de l'énergie sont approximées de la manière suivante :

$$\left(\frac{\partial uf}{\partial x}\right)_{i.j} = \frac{u_{i+1.j} f_{i+1.j} - u_{i-1.j} f_{i-1.j}}{2(\Delta x)}$$

(3.4)

III.2.3 Les termes temporels

L'avancement dans le temps de la fonction f entre les instant $t_m = m\Delta t$ et $t_{m+t} = t_m + \Delta t$ est approché par :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{i.j}^{m+1} = \frac{f_{i.j}^{m+1} - f_{i.j}^{m}}{\Delta t} \tag{3.5}$$

Les équations de conservation de mouvement (2.42) de l'énergie (2.43) et de la masse (2.44) sont résolues numériquement par la méthode implicite aux directions alternées (A.D.I). Son principe consiste, comme son nom l'indique, à écrire au cours d'un premier déminas de temps les équations de conservation dont les inconnues sont respectivement Ω , T et S de manière implicite dans la direction des x , puis implicite dans la direction des y au cours du second demi pas de temps, en utilisant à chacune de ces étapes les derniers résultats obtenus.

III.2.4 Discrétisation de l'équation de mouvement

La discrétisation de l'équation de mouvement (2.42) suivant un schéma implicite en x et explicite en y est écrite comme suit :

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{u_{i-1.j}^{m}}{} - \frac{P_r\mu_{i.j}^{m}}{(\Delta x)^2} + \frac{P_r\left(\mu_{i+1.j}^{m} - \mu_{i-1.j}^{m}\right)}{2(\Delta x)^2}\right)\Omega_{i-1.j}^{m+1/2} + \left(\frac{2}{\Delta t} + \frac{2P_r\mu_{i.j}^{m}}{(\Delta x)^2}\right)\Omega_{i.j}^{m+1/2} + \\
&\left(\frac{u_{i+1.j}^{m}}{2(\Delta x)} - \frac{P_r\mu_{i.j}^{m}}{(\Delta x)^2} - \frac{P_r\left(\mu_{i+1.j}^{m} - \mu_{i-1.j}^{m}\right)}{2(\Delta x)^2}\right)\Omega_{i+1.j}^{m+1/2} = \\
&\left(\frac{v_{i.j-1}}{2(\Delta y)} + \frac{P_r\mu_{i.j}^{m}}{(\Delta y)^2} - \frac{P_r\left(\mu_{i.j+1}^{m} - \mu_{i.j-1}^{m}\right)}{2(\Delta y)^2}\right)\Omega_{i.j-1}^{m} + \\
&\left(\frac{2}{\Delta t} - \frac{2P_r\mu_{i.j}^{m}}{(\Delta y)^2}\right)\Omega_{i.j}^{m} + \left(\frac{-v_{i.j+1}^{m}}{2(\Delta y)} + \frac{P_r\mu_{i.j}^{m}}{(\Delta y)^2}\frac{P_r\left(\mu_{i.j+1}^{m} - \mu_{i.j-1}^{m}\right)}{2(\Delta y)^2}\right)\Omega_{i.j+1}^{m} + \\
&P_r\left(\frac{\mu_{i+1.j}^{m} - 2\mu_{i.j}^{m} + \mu_{i-1.j}^{m}}{(\Delta x)^2} - \frac{\mu_{i.j+1}^{m} - 2\mu_{i.j}^{m} + \mu_{i.j-1}^{m}}{(\Delta y)^2}\right)\left(\frac{u_{i+1.j}^{m} - u_{i.j-1}^{m}}{2(\Delta y)} + \frac{v_{i+1.j}^{m} - v_{i.j-1}^{m}}{2(\Delta x)}\right) + \\
&2P_r\left(\frac{\mu_{i+1.j}^{m} - \mu_{i+1.j-1}^{m} - \mu_{i-1.j+1}^{m} + \mu_{i-1.j-1}^{m}}{4(\Delta x)(\Delta y)}\right)\left(\frac{u_{i+1.j}^{m} - u_{i-1.j}^{m}}{2(\Delta x)} - \frac{v_{i.j+1}^{m} - v_{i.j-1}^{m}}{2(\Delta y)}\right) + \\
&R_T P_r\left(\frac{T_{i+1}^{m} - T_{i+1.j}}{2(\Delta x)} + N\frac{S_{i+1}^{m} - S_{i+1.j}}{2(\Delta x)}\right)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

L'équation(3.6)peut s'écrire sous la forme généralisée comme suit :

$$A_{i-1.j}^{m+1/2} + B_i \Omega_{i.j}^{m+1/2} + c_{i+1.j}^{m+1/2} = D_i \tag{3.7}$$

Ainsi, La discrétisation de l'équation mouvement (2.42) suivant un schéma implicite en y et explicite en x est écrite comme

$$\left(-\frac{v_{i.j-1}^{m+1/2}}{2(\Delta y)} - \frac{P_r \mu_{i.j}^{m+1/2}}{(\Delta y)^2} + \frac{P_r\left(\mu_{i.j+1}^{m+1/2} - \mu_{i.j+1}^{m+1/2}\right)}{2(\Delta y)^2}\right)\Omega_{i.j-1}^{m+1} + \left(\frac{2}{\Delta t} + \frac{2P_r \mu_{i.j}^{m+1/2}}{(\Delta y)^2}\right)\Omega_{i.j}^{m+1} +$$
$$\left(\frac{v_{i.j+1}^{m+1/2}}{2(\Delta y)} - \frac{P_r \mu_{i.j}^{m+1/2}}{(\Delta y)^2} - \frac{P_r\left(\mu_{i.j+1}^{m+1/2} - \mu_{i.j-1}^{m+1/2}\right)}{2(\Delta y)^2}\right)\Omega_{i.j+1}^{m+1} =$$
$$\left(\frac{u_{i-1.j}^{m+1/2}}{2(\Delta x)} + \frac{P_r \mu_{i.j}^{m+1/2}}{(\Delta x)^2} - \frac{P_r\left(\mu_{i+1.j}^{m+1/2} - \mu_{i-1.j}^{m+1/2}\right)}{2(\Delta x)^2}\right)\Omega_{i-1.j}^{m+1/2} +$$
$$\left(\frac{2}{\Delta t} - \frac{P_r \mu_{i.j}^{m+1/2}}{(\Delta x)^2}\right)\Omega_{i..j}^{m+1/2} + \left(\frac{-u_{i+1.j}^{m+1/2}}{2(\Delta x)} + \frac{P_r \mu_{i.j}^{m+1/2}}{(\Delta x)^2} + \frac{P_r\left(\mu_{i+1.j}^{m+1/2} - \mu_{i-1.j}^{m+1/2}\right)}{2(\Delta x)^2}\right)\Omega_{i+1.j}^{m+1/2} +$$
$$P_r\left(\frac{\mu_{i+1.j}^{m+1/2} - 2\mu_{i.j}^{m+1/2} + \mu_{i-1.j}^{m+1/2}}{(\Delta x)^2} - \frac{\mu_{i.j+1}^{m+1/2} - 2\mu_{i.j}^{m+1/2} + \mu_{i.j-1}^{m+1/2}}{(\Delta y)^2}\right)\left(\frac{u_{i.j+1}^{m+1/2} - u_{i.j-1}^{m+1/2}}{2(\Delta y)} + \frac{v_{i+1.j}^{m+1/2} - v_{i-1.j}^{m+1/2}}{2(\Delta x)}\right) -$$
$$2P_r\left(\frac{\mu_{i+1.j+1}^{m+1/2} - \mu_{i+1.j-1}^{m+1/2} - \mu_{i-1.j+1}^{m+1/2} + \mu_{i-1.j-1}^{m+1/2}}{4(\Delta x)(\Delta y)}\right)\left(\frac{u_{i+1.j}^{m+1/2} - u_{i-1.j}^{m+1/2}}{2(\Delta x)} - \frac{v_{i.j+1}^{m+1/2} - v_{i.j-1}^{m+1/2}}{2(\Delta y)}\right) +$$
$$R_T P_r\left(\frac{T_{I+1.J}^{m+1/2} - T_{i-1.j}^{m+1/2}}{2(\Delta x)} + N\frac{S_{I+1.J}^{m+1/2} - S_{i-1.j}^{m+1/2}}{2(\Delta x)}\right)$$

(3.8)

L'équation (3.8) peut s'écrire sous la forme généralisée comme suit :

$$A_j \Omega_{i.j-1}^{m+1} + B_{i.j} \Omega_{i.j}^{m+1} + C_{i.} \Omega_{i.j+1}^{m+1} = D_j \tag{3.9}$$

III.2.5 Discrétisation de l'équation d'énergie

L'équation d'énergie étant parabolique par rapport au temps et elliptique par rapport aux coordonnées spatiales, la méthode implicite aux directions alternées ADI est choisie comme outil de résolution. Compte tenu de l'équation de l'énergie cette dernière se réécrit de la façon suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial(uT)}{\partial x}+\frac{\partial(vT)}{\partial y}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{3.10}$$

- **Schéma implicite en *x* et explicite en *y***

C'est un schéma aux différences centrées, au temps $(n+1/2)$ pour les dérivées en x et au temps (n) pour les dérivées en y , chaque terme de l'équation (3.10) est discrétisé comme suit :

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{i,j}=\frac{T_{i+1,j}^{n+1/2}-2T_{i,j}^{n+1/2}+T_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2},\ \left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{i,j}=\frac{T_{i,j+1}^{n}-2T_{i,j}^{n}+T_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^2} \tag{3.11}$$

$$\left.\frac{\partial(uT)}{\partial x}\right|_{i,j}=\frac{u_{i+1,j}^{n}T_{i+1,j}^{n+1/2}-u_{i-1,j}^{n}T_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x},\ \left.\frac{\partial(vT)}{\partial y}\right|_{i,j}=\frac{v_{i,j+1}^{n}T_{i,j+1}^{n}-v_{i,j-1}^{n}T_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y} \tag{3.12}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial T}\right|_{i,j}=2\frac{T_{i,j}^{n+1/2}-T_{i,j}^{n}}{\Delta t} \tag{3.13}$$

En substituant les équations (3.11)-(3.13) dans l'équation (3.10), on obtient un système de la forme:

$$A_i T_{i+1,j}^{n+1/2}+B_i T_{i,j}^{n+1/2}+C_i T_{i-1,j}^{n+1/2}=D_i \tag{3.14}$$

Avec :

$$A_i=\left[\frac{u_{i+1,j}^{n}}{2\Delta x}-\frac{1}{\Delta x^2\Gamma_L}\right],\quad B_i=2\left[\frac{\Gamma_\varepsilon}{\Delta t}+\frac{1}{\Delta x^2\Gamma_L}\right],\quad C_i=-\left[\frac{u_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x}+\frac{1}{\Delta x^2\Gamma_L}\right]$$

$$D_i=\left[-\frac{v_{i,j+1}^{n}}{2\Delta y}+\frac{1}{\Delta y^2\Gamma_L}\right]T_{i,j+1}^{n}+2\left[\frac{\Gamma_\varepsilon}{\Delta t}-\frac{1}{\Delta y^2\Gamma_L}\right]T_{i,j}^{n}+\left[\frac{v_{j,j-1}^{n}}{2\Delta y}+\frac{1}{\Delta y^2\Gamma_L}\right]T_{i,j-1}^{n}$$

- **Schéma implicite en *y* et explicite en *x***

C'est un schéma aux différences centrées, au temps $(n+1/2)$ pour les dérivées en x et au temps $(n+1)$ pour les dérivées en y . La discrétisation des dérivées partielles est donnée par :

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}, \left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{i,j} = \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \quad (3.15)$$

$$\left.\frac{\partial (uT)}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j}^{n} T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-1,j}^{n} T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x}, \left.\frac{\partial (vT)}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{v_{i,j+1}^{n} T_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n} T_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \quad (3.16)$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{i,j} = 2\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} \quad (3.17)$$

En substituant les équations (3.15)-(3.17) dans l'équation (3.10), on obtient un système de la forme :

$$A_i' T_{i,j+1}^{n+1} + B_i' T_{i,j}^{n+1} + C_i' T_{i,j-1}^{n+1} = D_i' \quad (3.18)$$

$$A_i' = \left[-\frac{v_{i,j+1}^{n}}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta y^2 \Gamma_L} \right], \quad B_i' = 2\left[\frac{\Gamma_\varepsilon}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta y^2 \Gamma_L} \right], \quad C_i = -\left[\frac{v_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y} - \frac{1}{\Delta y^2 \Gamma_L} \right]$$

$$D_i' = \left[-\frac{u_{i+1,j}^{n}}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2 \Gamma_L} \right] T_{i+1,j}^{n+1/2} + 2\left[\frac{\Gamma_\varepsilon}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x^2 \Gamma_L} \right] T_{i,j}^{n+1/2} + \left[\frac{u_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2 \Gamma_L} \right] T_{i-1,j}^{n+1/2}$$

III.2.6 Discrétisation de l'équation de concentration

De même pour l'équation de concentration (3.19), nous exposons dans ce qui suit sa discrétisation en suivant exactement les mêmes démarches que le paragraphe précédent.

L'équation de concentration (3.19) se réécrit de la façon suivante:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial (uS)}{\partial x} + \frac{\partial (vS)}{\partial y} = Le^{-1}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right) \quad (3.19)$$

- **Schéma implicite en *x* et explicite en *y***

Similairement aux démarches précédentes, l'équation algébrique correspondant à la discrétisation de l'équation de concentration donne :

$$A_i S_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + B_i S_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_i S_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = D_i \tag{3.20}$$

Avec :

$$A_i = \left[\frac{u_{i+1,j}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{\Delta x^2 Le}\right], \quad B_i = 2\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x^2 Le}\right], \quad C_i = \left[\frac{u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2 Le}\right]$$

$$D_i = \left[\frac{v_{i,j+1}^n}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta y^2 Le}\right] S_{i,j+1}^n + 2\left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta y^2 Le}\right] S_{i,j}^n + \left[\frac{v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta y^2 Le}\right] S_{i,j}^n$$

- **Schéma implicite en *y* et explicite en *x***

$$A_i' S_{i,j+1}^{n+1} + B_i' S_{i,j}^{n+1} + C_i' S_{i,j-1}^{n+1} = D_i' \tag{3.21}$$

$$A'_i = \left[-\frac{v_{i,j+1}^n}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta x^2 Le}\right], \quad B_i' = 2\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta y^2 Le}\right], \quad C_i = \left[\frac{v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta y^2 Le}\right]$$

$$D'_i = \left[-\frac{u_{i+1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2 Le}\right] T_{i+1,j}^{n+1/2} + 2\left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x^2 Le}\right] T_{i,j}^{n+1/2} + \left[\frac{u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2 Le}\right] T_{i-1,j}^{n+1/2}$$

III.3 Résolution de l'équation de la fonction de courant

L'équation de courant (2.44), une fois discrétisée à l'aide d'un schéma centré du deuxième ordre est calculée par la méthode de sur-relaxation (S.O.R) qui n'est qu'une méthode itérative de Gauss Seidel relaxée. À chaque nœud, les nouvelles valeurs de la fonction de courant sont relaxées de la manière suivante :

$$\Psi_{i.j}^l = (1-\omega)\Psi_{i.j}^l + \frac{\omega}{2(1+b^2)}\left(\Psi_{i-1.j}^{l+1} + \Psi_{i+1.j}^l + b^2\Psi_{i.j}^{l+1} + b^2\Psi_{i.j+1}^{l+1} + \Delta x^2 \Omega_{i.j}\right) \tag{3.22}$$

Où : l'exposant l indique le nombre d'itération ;

b : représente le rapport : $\Delta x / \Delta y$

et ω: représentée coefficient de sur-relaxation, compris entre 1 et 2, son rôle est d'accélérer le processus de converge et donc diminuer le nombre d'itérations. Sa valeur optimale, pour un maillage rectangulaire uniforme, est donnée par les paramètres suivants :

$$\omega_{opt} = \frac{2}{\zeta^2}\left(1-\sqrt{1-\zeta^2}\right) \tag{3.23}$$

Avec :

$$\zeta = \frac{\cos(\pi/Nx)+b^2\cos(\pi/Ny)}{1+b^2} \tag{3.24}$$

Nx , Ny désignent respectivement le nombre d'intervalles selon les directions des x et y .

A chaque pas de temps Δt , la fonction de courant ψ est déduite de la verticité Ω , et comparée à celle obtenue de l'itération précédente. Cette opération est répétée jusqu'à ce que le critère de convergence ci-dessous soit satisfait :

$$\frac{\sum_{i.j}\Psi_{i.j}^{l+1}-\sum\Psi_{i.j}^{l+1}}{\sum_{i.j}\Psi_{i.j}^{l}} \le 10^{-8} \tag{3.25}$$

Après, les champs de vitesse et de viscosité apparente seront déduits :

$$u_{i.j}^{l+1} = \frac{\Psi_{i.j+1}^{l+1}+\Psi_{i.j-1}^{l+1}}{2\Delta y} \tag{3.26}$$

$$v_{i.j}^{l+1} = \frac{\Psi_{i-1}^{l+1}-\Psi_{i+1.j}^{l+1}}{2\Delta x} \tag{3.27}$$

$$\mu_{i.j}^{l+1} = s+(1-s)\left[1+\left(E\dot{\gamma}_{i.j}^{\,l+1}\right)^a\right]^{\frac{n-1}{a}} \tag{3.28}$$

avec:

$$\dot{\gamma}_{i.j}^{\,i+1} = 2\left(\left(\frac{u_{i+1.j}^{l+1}-u_{i-1.j}^{l+1}}{2\Delta x}\right)^2+\left(\frac{v_{i.j+1}^{l+1}-v_{i.j-1}^{l+1}}{2\Delta y}\right)^2\right)+\left(\frac{u_{i.j+1}^{l+1}-u_{i.j-1}^{l+1}}{2\Delta y}+\frac{v_{i+1.j}^{l+1}-v_{i-1.j}^{l+1}}{2\Delta x}\right)^2 \tag{3.29}$$

III.4 Discrétisation des conditions aux limites

Les conditions aux limites de type Neumann sont discrétisées suivant un schéma décentré en amont ou en aval selon les conditions frontières considérées.

Amont :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i.j} = \frac{f_{i-2.j} + f_{i-1.j} + 3f_{i.j}}{2(\Delta x)}$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i.j} = \frac{f_{i.j-2} + f_{i.j-1} + 3f_{i.j}}{2(\Delta y)} \qquad (3.30)$$

Avec:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i.j} = \frac{4f_{i+1.j} - f_{i+2.j} - 3f_{i.j}}{2(\Delta x)}$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i.j} = \frac{4f_{i.j+1} - f_{i.j+2} - 3f_{i.j}}{2(\Delta y)}$$

(3.31)

L'utilisation des équations (3.30) et (3.31) conduit à discrétiser les conditions aux limites comme suit :

- **Paroi horizontale inferieure** ($y = -\frac{1}{2}$)

$$T_{i.1} = \frac{4T_{i.2} - T_{i.3} + 2\Delta y}{3}$$

- **Paroi horizontale inferieure** ($y = +\frac{1}{2}$)

$$T_{i.Nny+1} = \frac{4T_{i.Nny-1} - T_{i.Nny-2} - 2\Delta y}{3}$$

- **Paroi horizontale supérieur** ($y = -\frac{1}{2}$)

$$S_{i.j} = \frac{4S_{i.2} - S_{i.3} + 2\Delta y}{3}$$

- **Paroi horizontale supérieur** ($y = +\frac{1}{2}$)

$$S_{i.Nny} = \frac{4S_{i.Nny-1} - S_{i.Nny-2} - 2\Delta y}{3}$$

- **Paroi verticale gauche** $\left(x = -\frac{A}{2} \right)$

$$u_{1.j} = v_{1.j} = \psi_{1.j} = 0$$

$$T_{1.j} = \frac{4T_{2.j} - T_{3.j}}{3}$$

- Paroi verticale droite **(** $x = \frac{A}{2}$ **)**

$$u_{Nnx.j} = v_{Nnx.j} = \psi_{Nnx.j} = 0$$

$$T_{Nnx-1.j} = \frac{4T_{Nnx-1.j} - T_{Nnx-2.j}}{3}$$

III.5 Algorithme de résolution

L'algorithme de calcul à chaque étape de temps se résume comme suit :

1. Introduction des paramètres de contrôle
2. Génération de maillage
3. Calcul du facteur de sur-relaxation
4. Introduction des conditions initiales et aux limites des champs des températures, des concentrations, de la fonction de courant, des vitesses et de la viscosité apparente.
5. Début de la boucle de temps
6. Résoudre l'équation de la fonction de courant par la méthode S.O.R et calcul la fonction de courant.
7. Déduire le champ de la viscosité apparente.
8. Résoudre l'équation d'énergie par la méthode TDMA.
9. Résoudre l'équation de la masse par la méthode TDMA.
10. Calcule du nombre de Nusselt local et moyen par la méthode de Boole.

11. Calcule du nombre de Sherwood local et moyen par la méthode de Boole.
12. Déduire le champ des vitesses.
13. Traitement et affichage des résultats.

III.6 Solution semi-analytique

L'apparition du mouvement résultant peut être soit supercritique ou sous critique. Une solution semi-analytique, valable pour une couche infinie $A >> 1$ en supposant un écoulement parallèle, est dérivée.

Pour une couche poreuse horizontale infinie $(A >> 1)$, les équations gouvernant (2.42)-(2.44) peuvent être simplifiées considérablement en utilisant l'approximation d'écoulement parallèle.

Lorsque la cavité présente un grand rapport de forme $L' >> H'$, les lignes de courant au centre de la cavité, deviennent relativement parallèles à l'axe des *x*. Autrement dit, la fonction de courant Ψ devient une fonction de l'ordonnée, seulement. On peut alors écrire :

$$\Psi(x, y) \approx \Psi(y) \tag{3.32}$$

En injectant cette approximation (3.32) dans les équations de conservation de la quantité de mouvement (2.43) et (2.44), nous pouvons montrer que les profils de la température et de la concentration sont donnés par la somme de deux termes; un définissant une variation longitudinale linéaire et l'autre donnant la distribution transversale :

$$\left.\begin{aligned} T(x, y) &\approx C_T x + \theta_T(y) \\ S(x, y) &\approx C_S x + \theta_S(y) \end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

où C_T et C_S sont des constantes exprimant les gradients de température et de concentration selon la direction.

En introduisant les approximations dans les équations (2.42)-(2.44), pour les conditions aux frontières (2.46) et (2.50) nous obtenons pour les équations différentielles suivantes :

$$\frac{d^2}{dy^2}\left(\mu_{CY}\frac{d^2\psi}{dy^2}\right) = R_T(C_T + \varphi C_S) \tag{3.34}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta_T}{\mathrm{d}y^2} = C_T \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}y} \tag{3.35}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta_S}{\mathrm{d}y^2} = LeC_S \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}y} \tag{3.36}$$

où la viscosité apparente, μ, Eq. (2.33), se réduit alors à:

$$\mu(\dot{\gamma}) = S + (1-S)\left[1 + (E\dot{\gamma})^a\right]^{\frac{n-1}{a}} \tag{3.37}$$

Où le coefficient de cisaillement se réduite : $\dot{\gamma} = \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right|$

Dans le cas des flux de chaleur et de masse imposés, les bilans d'énergie et de matière dans le volume de contrôle s'écrivent sous les formes suivantes:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial T}{\partial x}\, dy = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} T dy \tag{3.38}$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial S}{\partial x} dy = Le \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} S dy \tag{3.39}$$

Les équations (3.35) et (3.36) peuvent être combinées avec les équations (3.38) et (3.39) afin d'obtenir les expressions suivantes de C_T et C_S :

$$C_T = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}y} \theta_T \,\mathrm{d}y \text{ et } C_S = Le \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}y} \theta_S dy \tag{3.40}$$

Chapier IV

Résultats et Discussion

IV.1 Validation du code numérique

L'algorithme numérique a été testé pour le problème classique de convection naturelle dans le cas d'une cavité carréd avec un fluide Newtonien $(n=1)$. Le nombre de Nusselt moyen est calculé à partir de la méthode numériques comparés à ceux donnés par différents auteurs pour $A=1$, $P_r=0.71$, $\varphi=0$ et diverses valeurs de R_T comme indiqué dans le tableau IV.1. On constate que la taille de maille uniforme de (101×101) donne un bon accord avec les données rapportées par les études précédentes. L'erreur relative est inférieure à 0,55% pour $R_T=10^4$, 0,66% pour $R_T=10^5$ et 0,96% pour $R_T=10^6$, ce qui reflète l'exactitude des présents résultats.

Tableau IV.1 : Validation du code numérique en termes du nombre de Nusselt moyen, Nu_m dans le cas d'une cavité carrée remplie d'air pour $A=1$, $P_r=0.71$ et $\varphi=0$.

	Nu_m		
	$R_T=10^4$	$R_T=10^5$	$R_T=10^6$
Benouared et al. [15]	2.163	3.934	6.379
Turan et al. [30]	2.154	3.907	6.363
Quertataniet al. [31]	2.158	3.910	6.309
Présent étude	2.151	3.934	6.318

De plus, le test de l'indépendance du maillage est réalisé en utilisant une taille de maillage allant de 50×25 à 200×150, et les résultats sont présentées dans le tableau IV.3 pour une enceinte rectangulaire chauffée par le bas ayant un rapport d'aspect de $A=10$. Les résultats numériques sont calculés et comparés avec les résultats analytique pour $P_r=10$, $R_T=10^3$, $\varphi=0.2$, $Le=10$, $n=0.6$, $E=0.2$, $a=2$ et $S=10^{-2}$. Les résultats indiquent que, pour un maillage de 200× 150, il y a une différence relative de 0.12% pour la fonction de courant, de 0,43% pour les taux de transfert de chaleur et de masse et de 0,0% pour la viscosité apparente. Donc, une grille de 200×150 s'est avérée suffisante pour simuler avec précision le flux convectif.

Tableau .IV.2 : Sensibilité de la solution numérique en termes de l''intensité de l'écoulement, ψ_0, du nombre de Nusselt local, *Nu*, du Nusselt moyen, Nu_m, du nombre de Sherwood local, *Sh*, et de Sherwood moyen, Sh_m, au centre de la cavité pour $A=10$, $P_r=10$, $R_T=10^3$, $\varphi=0.2$, $Le=10$, $n=0.6$, $E=0.2$, $a=2$ et $S=10^{-2}$.

$N_x \times N_y$	Solution Numérique						Analytique
	50×25	75×50	100×75	150×100	200×150		
ψ_0	3.195	3.135	3.122	3.114	3.098		3.094
Nu	2.431	2.371	2.360	2.349	2.326		2.316
Nu_m	2.336	2.262	2.273	2.264	2.253		….
Sh	3.675	3.520	3.501	3.500	3.473		3.467
Sh_m	3.966	3.720	3.730	3.726	3.715		….
μ_{CY}	0.306	0.304	0.304	0.304	0.304		0.304

IV.2 Effet de l'indice de la loi de puissance, n, sur la structure de l'écoulement pour $A = 10$:

La confirmation de la solution analytique est présentée dans la Fig. IV.1pour $A=10$, $R_T=800$, $Le=10$, $\varphi=0.05$, $E=0.1$, $a=2$, $s=10^{-2}$ et diverses valeurs de l'indice de la loi de puissance ,n. Dans ces figures, les lignes de courant, ψ, isothermes ,T, iso concentrations ,S, et viscosité apparente, μ, sont illustrés de haut en bas, respectivement. Quand, $n=1$, correspondant au problème classique de la convection naturelle d'un fluide newtonien c'est à dire la viscosité apparente est donnée par $\mu=1$. La structure de l''écoulement se compose d'une cellule elliptique unicellulaire remplissant toute la cavité et l'écoulement dans la région centrale de la cavité est essentiellement parallèle, tandis que la température et la concentration dans le cœur de la cavité sont stratifiées linéairement dans les directions horizontales de la cavité. Les principaux effets de l'indice de la loi de puissance, n, sur la structure de l'écoulement pour différentes valeurs de$n$ = 1, 0,6 et 0,3, respectivement, on peut le voir sur les figures. IV.1(a)-(c). L'augmentation de l'indice de la loi de puissance, n, réduit considérablement la force du mouvement convectif dans la couche comme indiqué par la

valeur de la fonction de flux au centre de la cavité :$\psi_0 = 2.300$ pour $n = 0.3$et$\psi_0 = 0.746$ pour $n = 1$. On observe aussi que, les isothermes et iso concentrations sont moins déformées, ce qui indique que le transfert de chaleur a tendance à être diffusif et que les contours de la viscosité apparente semblent constants dans la partie centrale de la cavité, et il semble varier considérablement près des extrémités droite et gauche de la cavité où le taux de cisaillement varie considérablement comme le montre dans la figure IV.1(b).

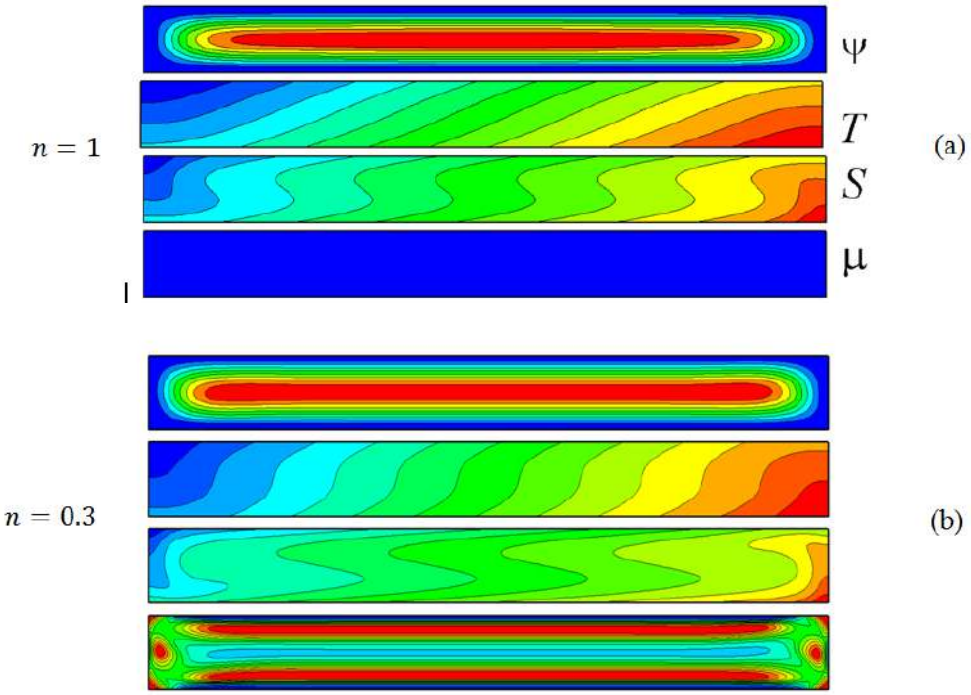


Figure IV .1: Effet de n sur les lignes de courant, isothermes, iso concentrations et la viscosité apparente pour $A = 10, R_T = 800, Le = 10$, φ = 0,05, E = 0,1, a = 2, $s = 10^{-2}$:

(a) $n = 1, \psi_0 = 0.746, Nu = 1.161, Sh = 2.835, \mu = 1.000,$

(b) $n = 0.3, \psi_0 = 2.300, Nu = 1.971, Sh = 3.522, \mu = 0.371.$

IV.3 Effet de l'indice de la loi de puissance, n, sur la structure de l'écoulement pour $A = 1$:

L'effet de l'indice de la loi de puissance, n,sur la convection double diffusion dans une cavité carrée, $A = 1$, sont illustrés dans les Figures IV.2(a)-(c) pour $R_T = 2000, Le = 10, \varphi = 0.05$

, $E = 0.1, a = 2$ and $s = 10^{-2}$. Les résultats sont obtenus pour différentes valeurs du nombre de l'indice de la loi de puissance, $n = 0.4,$ 0.6 et 1, respectivement. Dans les figures

,les lignes de courant, isothermes, iso concentrations et la viscosité apparente sont présentées de gauche à droite, respectivement. Les résultats présentés sur la Fig. 2 (a) sont obtenus pour $n = 1$, correspondant au fluide newtonien, c'est-à-dire $\mu = 1$.La structure de l'écoulement se compose d'une cellule unicellulaire remplissant la cavité. La direction de la circulation du fluide, qui peut être dans le sens horaire ou antihoraire et vice versa. Pour l'ensemble des paramètres de contrôle considérés ici, en général, on le voit sur la Fig. IV.2(a) la convection est relativement importante, comme l'indiquent la valeur de la fonction de courant au centre de la cavité et la grande distorsion des champs de température et de concentration. Les effets croissants de l'indice de la loi de puissance, n, sur le structure d'écoulement de la Fig.IV.2(a) sont illustrés sur les Fig.IV.2(b) et(c),pour $n = 0.4$ et 0,6 respectivement. Pour un nombre de Rayleigh donné une augmentation de l'indice de la loi de puissance, n, réduit considérablement la force du mouvement convectif dans la couche. Par conséquent, comme on peut être observé sur les Fig.IV.2(b) et (c), la température et la concentration sont considérablement inhibées avec une augmentation de l'indice de la loi de puissance, n.Par conséquence, le transfert de chaleur et de masse est presque purement conducteur, comme l'indiquent les isothermes et les iso concentrations presque verticales.

$\psi \; T \; S \; \mu$

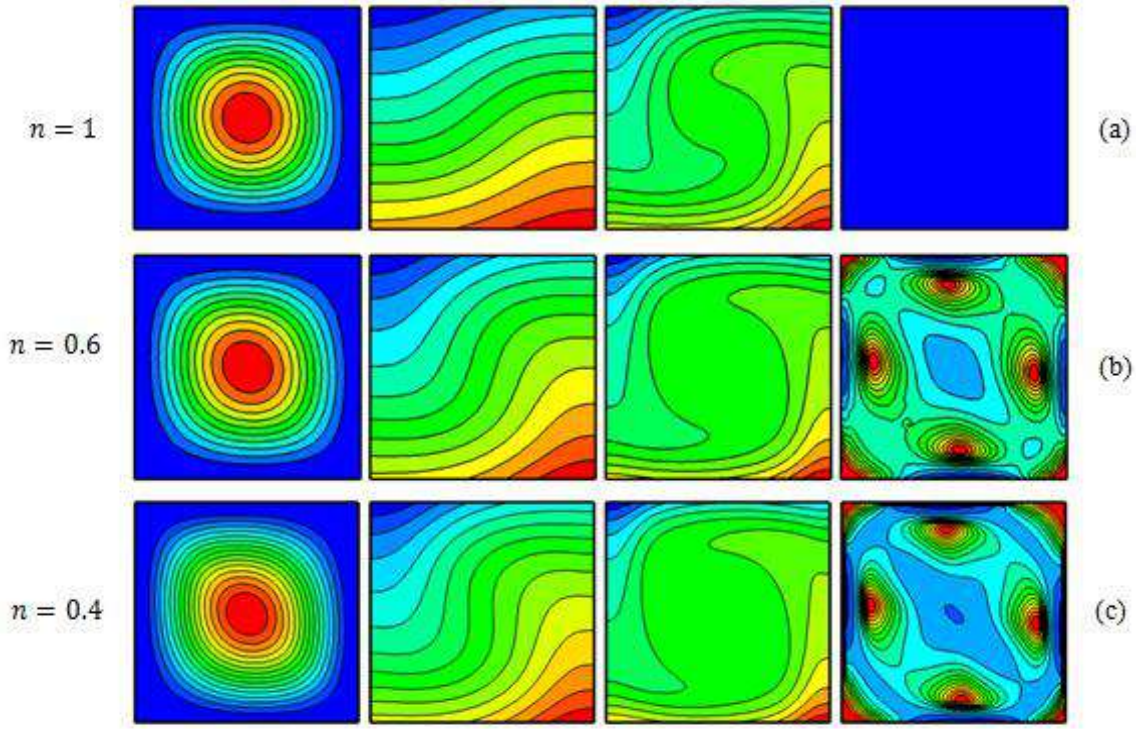


Figure IV .2: Effet de n sur les lignes de courant, isothermes, isoconcentrations et la viscosité apparente pour les conditions de Neumann, $A = 1$, $R_T = 2000, Le = 10, \varphi = 0.05, E = 0.1, a = 2$, $s = 10^{-2}$:

(a) n=1, $\psi_0 = 1.064$, $Nu = 1.171, Sh = 3.593, \mu = 1.000.$

(b) $n = 0.6, \psi_0 = 2.306, Nu = 1.697, Sh = 5.213, \mu = 0.468.$

(c) $n = 0.4, \psi_0 = 3.204, Nu = 2.117, Sh = 5.820, \mu = 0.265$

ψ T S μ

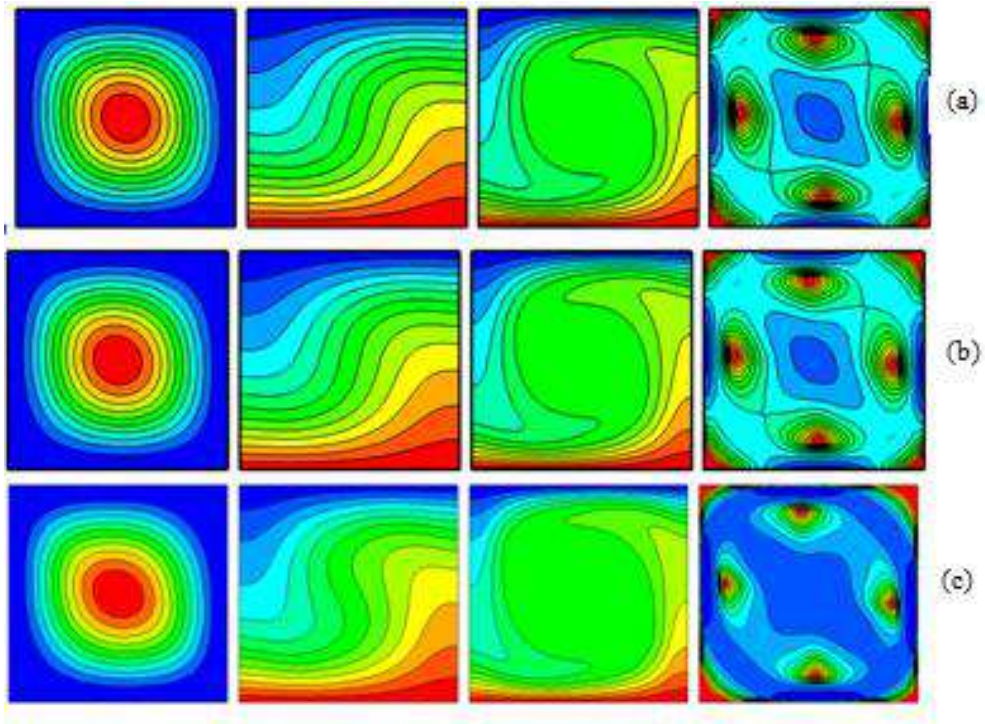


Figure IV .3: Effet de n sur les lignes de courant, isothermes, isoconcentrations et la viscosité apparente pour condition de Dirichlet, $A=1$, $R_T=2000$, $Le=10$, $\varphi=0.05$, $E=0.1$, $a=2$, $s=10^{-2}$:

(a) $n=0.8, \psi_0=0.503, Nu=0.028, sh=1.171, \mu=0.884$.

(b) $n=0.6, \psi_0=3.191, Nu=1.761, sh=5.038, \mu=0.409$.

(c) $n=0.4, \psi_0=5.662, Nu=2.423, sh=5.905, \mu=0.192$.

IV.4 Effets des paramètres rhéologiques sur les profils de la fonction de courant, isothermes, iso concentrations et la viscosité apparente.

Comparaison supplémentaire entre les analyses, basées sur l'approximation de l'écoulement parallèle et les solutions numériques sur les profils de l'intensité de la fonction, ψ, la composante de vitesse horizontale, u, la température, T, la concentration, S, et la viscosité apparente, μ, respectivement, à mi- largeur de la couche(c'est-à-dire x = 0)est illustrée dans les figures. IV.4- IV.7.Les résultats ont été obtenus pour $R_T=1000$, $Le=10$, $\varphi=-0.1$et diverses valeurs des paramètres rhéologiques, à savoir n, E, s et a. A partir de ces figures, il est clair que la solution d'écoulement parallèle qui est représentée en traits pleins est en excellent accord avec la solution numérique, présentée par des cercles pleins. Figure IV.4 (b)- IV.7(b) indiquent les profils verticaux de la vitesse horizontale,u, sont symétriques par

rapport à y.La vitesse est maximale sur le mur ($y=\pm 0.5$) où l'amincissement par cisaillement est annulé car les forces de flottabilité sont égales et opposées. Aussi la vitesse, u, diminue fortement ($u=u_{max}$) au niveau du mur($y=-0.5$)vers$u=0$ au centre de la cavité ($y=0$) puis retombe sur ($u=-u_{max}$) pour ($y=0.5$).En augmentant la valeur de l'indice de loi de puissance, on voit que la vitesse au voisinage des parois est considérablement réduite, car le fluide devient de plus en plus amincissant par cisaillement ($n<1$).L'effet de, n, sur les profils de la température et de la concentration est illustré sur les Figes. IV.4(c et d).L'évolution des profils de température et de concentration est assez similaire à celle discutée sur la figure IV.4(b) lors de l'étude de l'évolution de,u.Dans les Figs. IV.4(c) et IV.4(d) la température et la concentration près des parois solides sont favorisées avec une diminution de l'indice de loi de puissance, n .De plus, la différence de température (concentration) entre le long des parois verticales ($y=\pm 0.5$) diminue avec la diminution,n,qui provoquant une augmentation significative des taux de transfert de chaleur convective (Nu) et de masse (Sh).selon Eq(20). on voit que $\mu=1$ (correspondant au problème classique de convection naturelle d'un fluide Newtonien) quand, $n=1$, $E=0$ et $s=1$, respectivement s. En diminuant les valeurs de$n$ et$s$ ou en augmentant les valeurs de E et a on voit que l'effet d'amincissement par cisaillement devient significatif au centre de la cavité, ce

qui a provoqué une diminution significative de la viscosité du fluide, en raison du taux de cisaillement élevé.

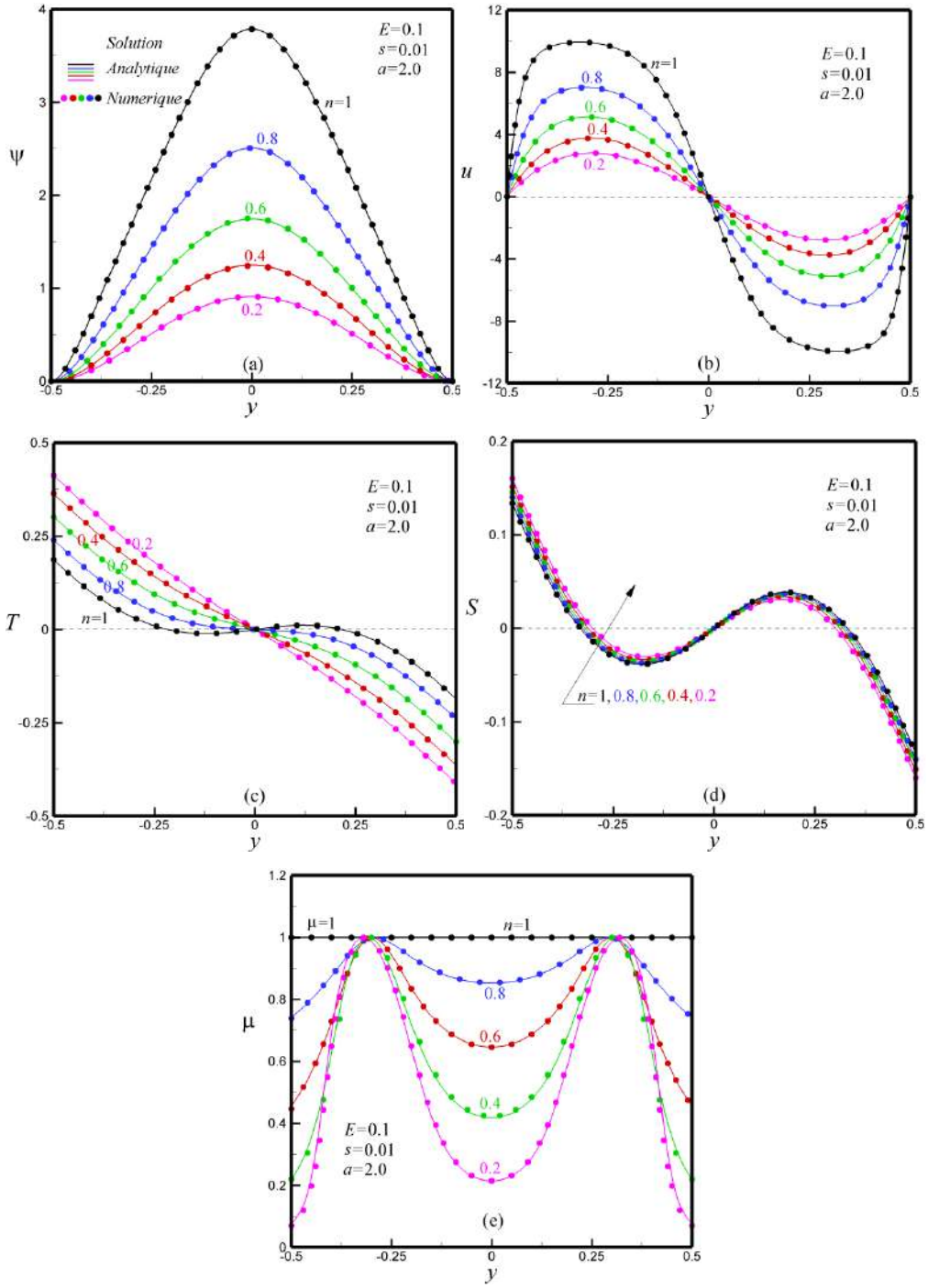


Figure IV.4: Effet de l'indice de la loi de puissance$n$sur les profils de la fonction de courant, ψ, de la température, T, de la concentration, S, et de la viscosité apparente, μ, dans le plan médian vertical pour $R_T = 1000$, $Le = 10$ et $N = -0.1$.

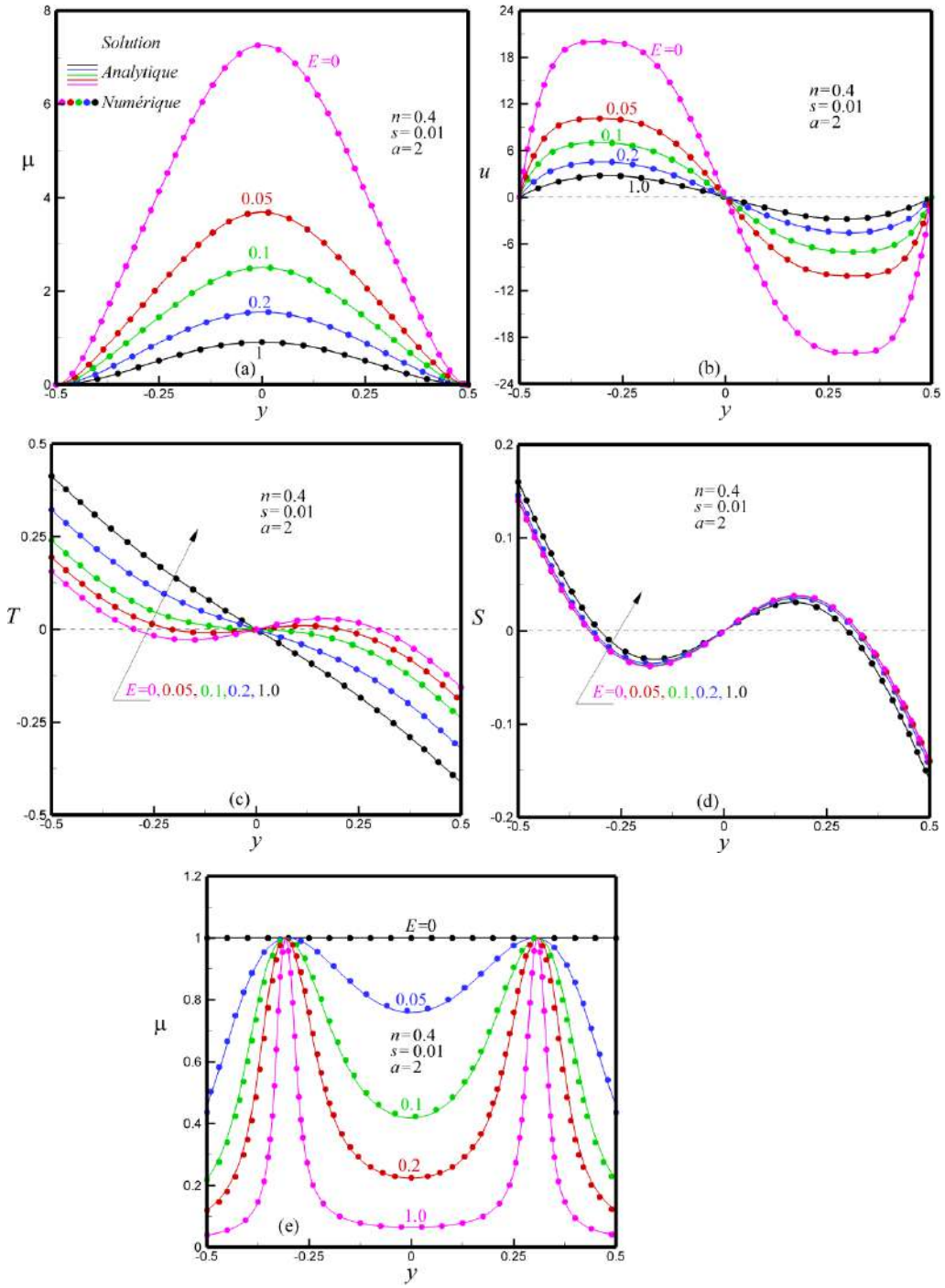


Figure IV .5: Effet de constante de temps, E, sur les profils de la fonction de courant, ψ, de la température, T, de la concentration, S, et de la viscosité apparente, μ, dans le plan médian vertical pour $R_T = 1000$, $Le = 10$ et $N = -0.1$.

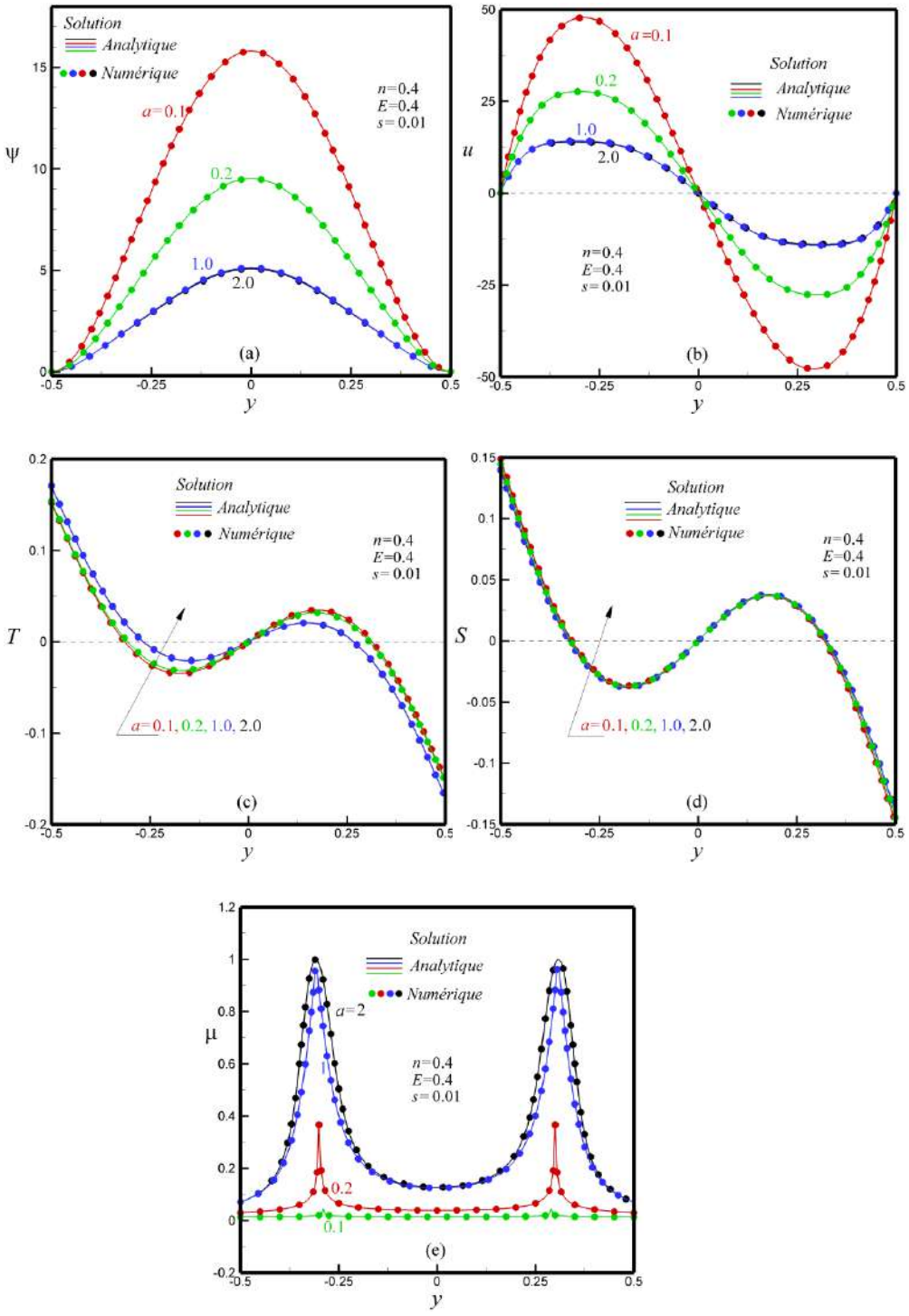


Figure IV.6: Effet de paramètre, a, sur les profils de la fonction de courant, ψ, de la température, T, de la concentration, S, et de la viscosité apparente, μ, dans le plan médian vertical pour $R_T = 1000$, $Le = 10$ et $N = -0.1$.

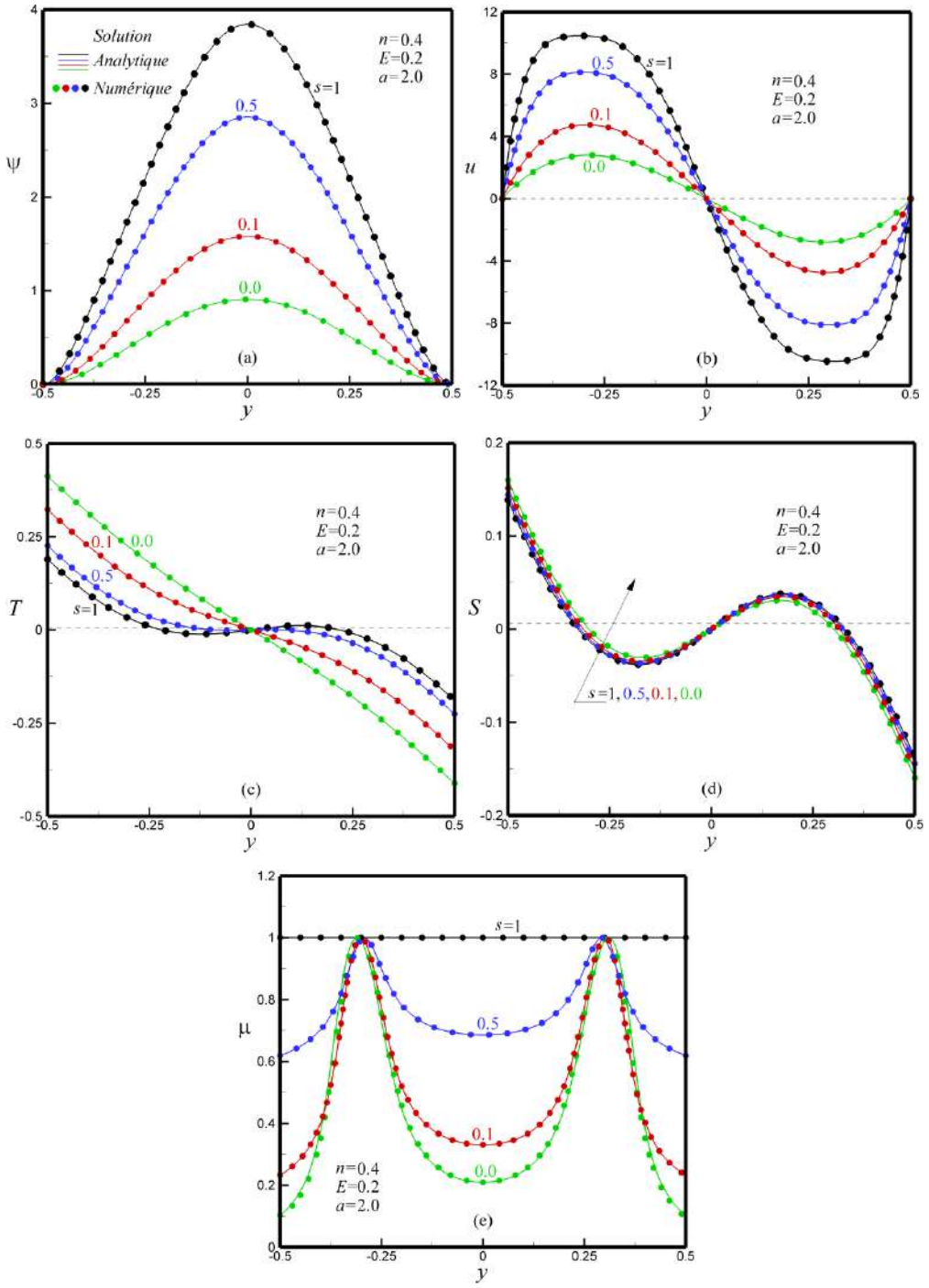


Figure IV.7 : Effet de paramètre, s, sur les profils de la fonction de courant, ψ, de la température, T, de la concentration, S, et de la viscosité apparente, μ, dans le plan médian vertical pour $R_T = 1000$, $Le = 10$ et $N = -0.1$.

IV.5 Effets de l'indice de la loi de puissance, n,et le nombre de Rayleigh, R_T,sur les courbes de bifurcation

Une vue plus complète des effets de n et R_T sur ψ_0 ,Nu, Shet μ est présentée sur la Fig. IV.8 pour $Le = 10$, $\varphi = 0.05$, $E = 0.1$, $a = 2$ et $s = 10^{-2}$. Les résultats sont obtenus pour les valeurs de l'indice de loi de puissance, n , comprises entre 1 (fluide newtonien) et $n = 0.2$ (fluide d'amincissement par cisaillement).En général, on le voit sur les Fig. IV.8 (a)-(d) que pour un nombre de Rayleigh donné, la force de convection (ψ_0) et les transferts de chaleur (Nu) et de masse (Sh) augmentent que l'indice de loi de puissance, n, diminue. Le graphique montre également clairement l'effet de n sur l'existence des différents types de courbes de bifurcation comme indiqué sur la figure 5.8.Ainsi, en augmentant la valeur de l'indice de loi de puissance n, on voit que les courbes de bifurcation évoluent d'un comportement sous-critique à un comportement supercritique. Comme le montre la figure, la région de bi stabilité s'est rétrécie et elle disparaît en diminuant l'indice de loi de puissance, n, car le fluide devient de plus en plus amincissant par cisaillement. En outre, on observe sur la figure IV.8 que le nombre de Rayleigh supercritique, $R_{Tc}^{\sup}$, n'est pas affecté par l'indice de loi de puissance .

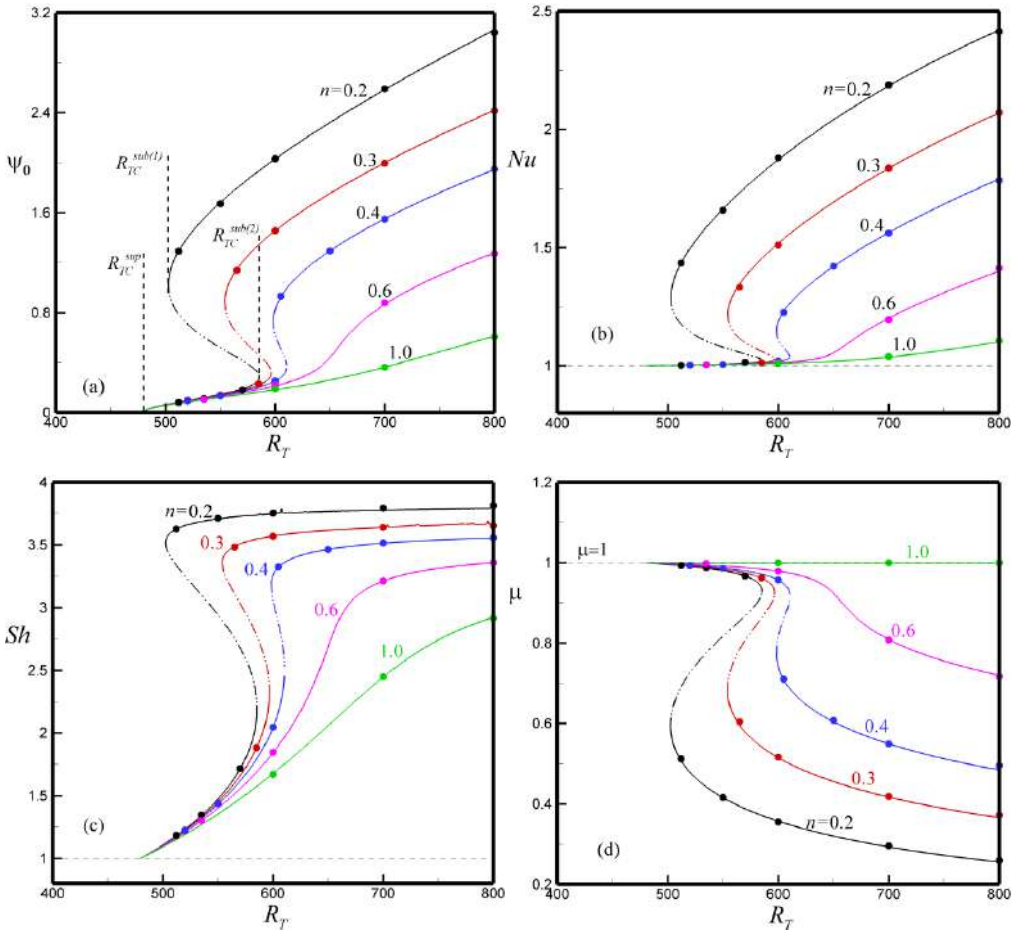


Figure IV.8: Effets du nombre de Rayleigh, R_T, et l'indice de la loi de puissance, n, sur l'intensité de l'écoulement, ψ, le nombre de Nusselt, Nu, le nombre de Sherwood, Sh et la viscosité apparente , μ, pour $Le = 10$, $\varphi = 0.05$, $E = 0.1$, $a = 2$ et $s = 10^{-2}$.

IV.6 Effets de l'indice de la loi de puissance, *n*,et le rapport des forces de volume, *N*, sur les courbes de bifurcation

Les figures IV.9(a)-(d) montrent les variations de ψ_0, Nu, Sh et μ en fonction de R_T et N pour $Le = 10$, $n = 0.4$, $E = 0.1$, $a = 2$ et $s = 10^{-2}$ .La courbe obtenue pour $N = 0.3$ correspond à la convection induite par les effets thermiques et massiques,elle donne lieu à une bifurcation de type fourche se produisant à un nombre de Rayleigh supercritique $R_{TC}^{\sup}$ .La courbe de bifurcation supercritique est affectée suivant la diminution de la valeur du rapport de la flottabilité, N.En effet, l'évolution des courbes de bifurcation avec le taux de flottabilité

est tout à fait semblable à celle décrite dans les figures IV.8(a)-(d) sur l'effet de l'indice de la loi de puissance, n.

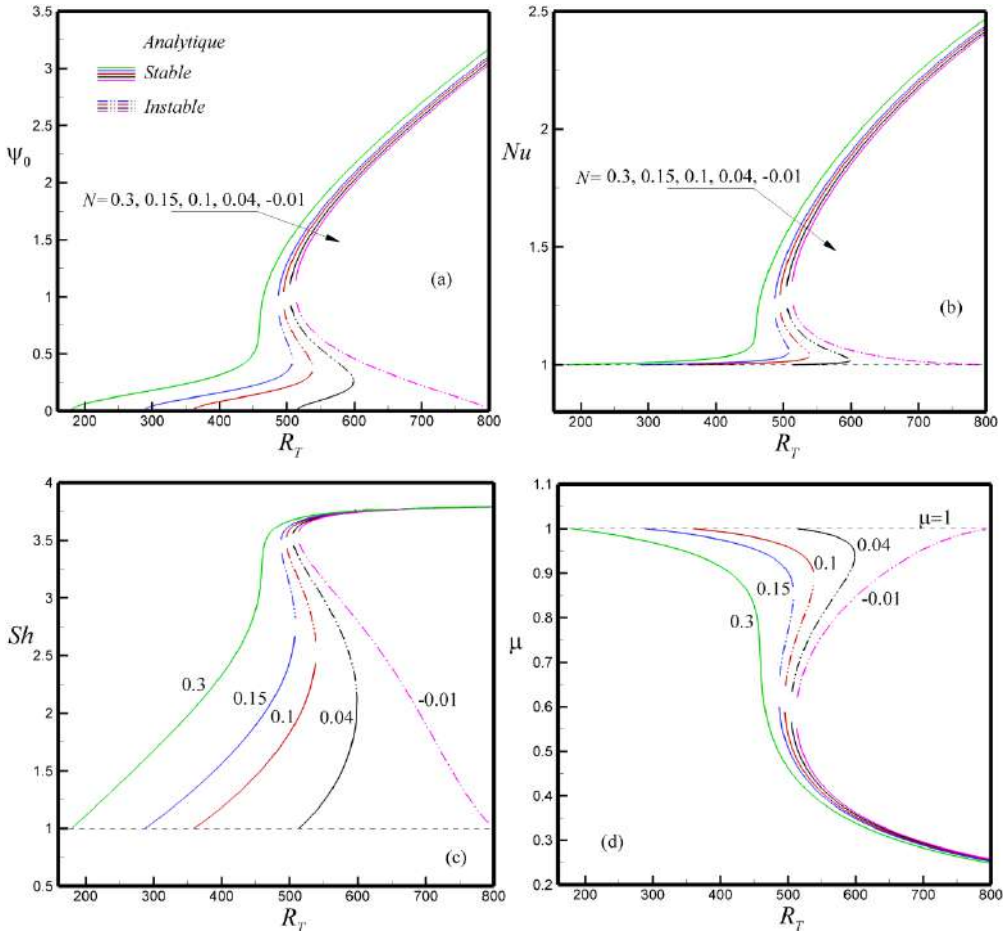


Figure IV.9: Effets du nombre de Rayleigh, R_T, et le rapport des forces de volume, *N*, sur l'intensité de l'écoulement, ψ, le nombre de Nusselt, *Nu*, le nombre de Sherwood, *Sh*, et la viscosité apparente, μ, verse $Le = 10$, $n = 0.4$, $E = 0.1$, $a = 2$ et $s = 10^{-2}$.

IV.7 Effets de rapport d'aspect, A, et le nombre de Rayleigh, R_T, sur les courbes de bifurcation

L'effet du rapport d'aspect de la cavité, *A*, sur la convection de bi-stabilité est illustré sur la figure IV.10.Le diagramme de bifurcation illustre l'évolution de, ψ_0, Nu, Sh et μ en fonction du nombre de Rayleigh normalisé R_T.Il est observé à partir de la figure 5.10 que la convection de bi-stabilité se produit quelque soient le rapport d'aspect et le type des conditions thermiques et solutales appliquées sur le système. D'après la figure IV.10, la région reste inchangée pour un rapport d'aspect important selon la solution semi-analytique corroborée par la solution numérique aux équations de gouvernance complètes.

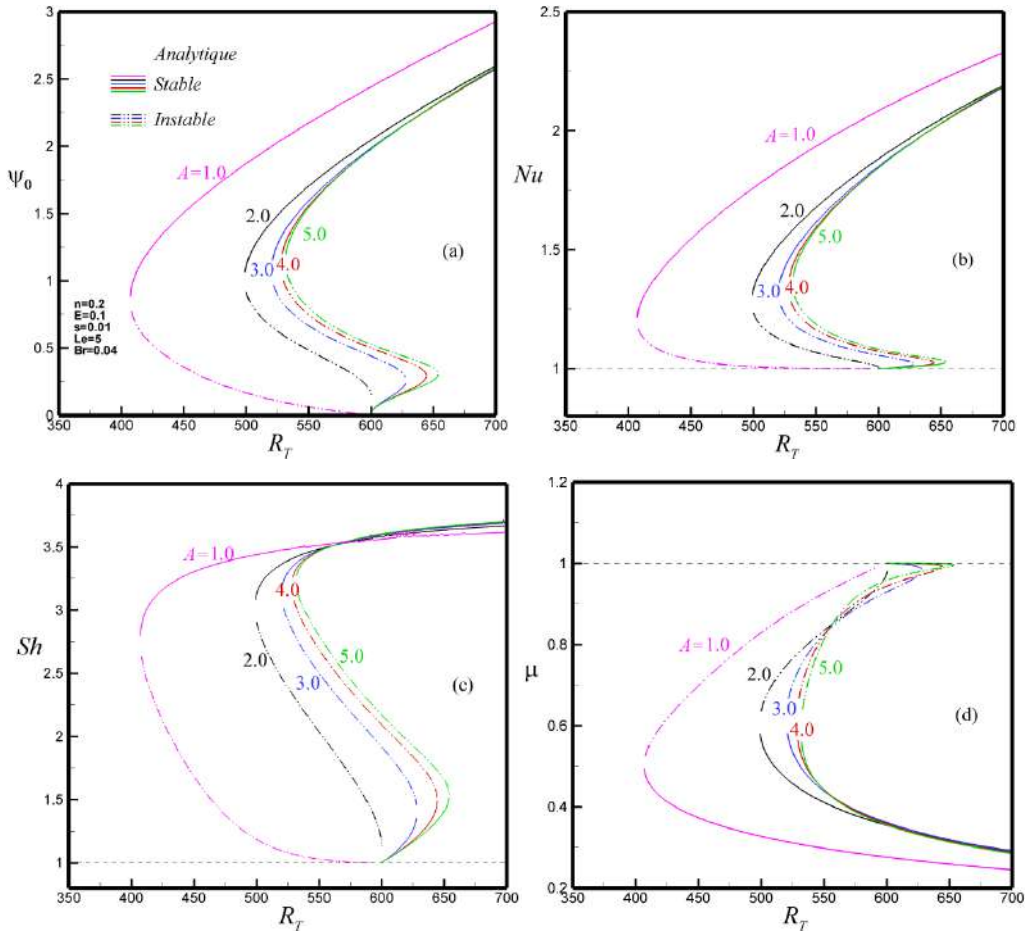


Figure IV .10: Effets du nombre de Rayleigh, R_T , et le rapport d'aspect, A, sur l'intensité de l'écoulement, ψ_0, le nombre de Nusselt, Nu, le nombre de Sherwood, Sh, et la viscosité apparente, μ , pour $Le = 10$, $N = 0.05$, $n = 0.4$, $E = 0.1$, $a = 2$ et $s = 10^{-2}$.

IV.8 Effets du nombre de Lewis, Le, et le nombre de Rayleigh, R_T, sur les courbes de bifurcation

Une autre vue de l'effet du nombre de Lewis, Le, sur ψ_0 ,Nu,Shet μ est illustrée sur la figure IV.11.Pour l'ensemble des paramètres de contrôle considérés ici, le modèle analytique prédit que la bifurcation de bi-stabilité n'est pas possible pour le cas $Le = 2$.Tandis que, dans le cas en augmentant le nombre de Lewis ($Le > 2$), la région de bi-stabilité apparaît mais elles sont petites, comme en témoignent les résultats obtenus pour Le = 5.De plus, il est noté sur la figure IV.11 que cette région est considérablement agrandie lorsque le nombre de Lewis devient très grand, c'est-à-dire que la concentration est presque uniforme dans le système, comme illustré sur la figure IV.11pour $Le = 10$.

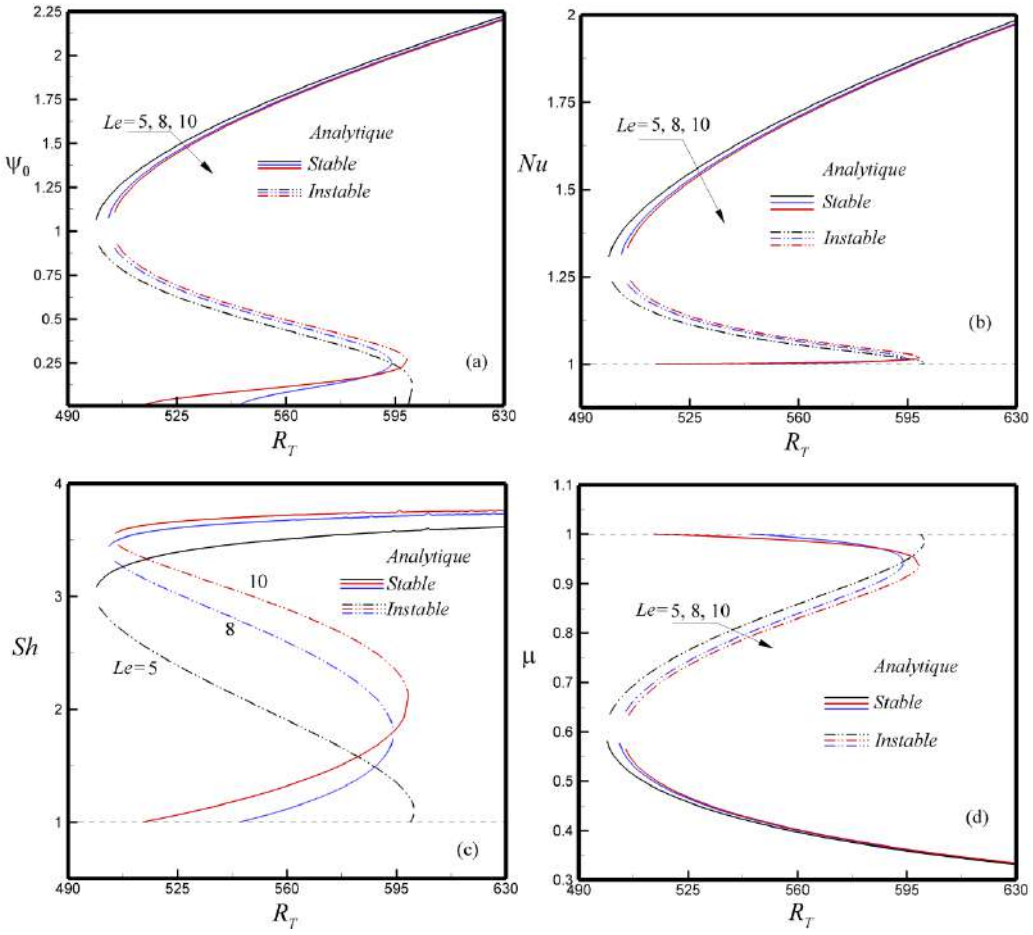


Figure IV.11: Effets du nombre de Rayleigh, R_T , et le nombre de Lewis, Le, sur l'intensité de l'écoulement, ψ, le nombre de Nusselt, Nu, le nombre de Sherwood, Sh, et la viscosité apparente, μ, pour $N = 0.05$, $n = 0{,}4$, $E = 0{,}1$, $a = 2$ et $s = 10^{-2}$.

IV.9 Effets des paramètres rhéologiques sur le nombre de Rayleigh critique, R_{TC}^{sosu} :

L'effet de la variation des paramètres rhéologiques du modèle Carreau-Yasuda sur le nombre de Rayleigh sous-critique (R_{TC}^{sous}) est décrit dans les Fig.12 (a)-(d) pour $N = 0.05$et $Le = 10$.Le nombre de Rayleigh sous-critique a été évalué à partir de la théorie analytique non linéaire en recherchant numériquement la valeur de R_T , l'inverse de la dérivée de Ψ_0 par rapport à R_T est égal à zéro. Les résultats présentés ici correspondent aux seuils d'un régime convectif unicellulaire sous-critique d'amplitude finie, $\psi_0 \neq 0$. Figues. 12(a)-(c) indiquent que, pour des valeurs données de l'indice de loi de puissance, n, la constante de temps sans dimension, E, et le rapport des viscosités de taux de cisaillement infini à zéro, s, le nombre de Rayleigh sous-critique $R_{TC}^{sous} \rightarrow 879.13$ lorsque $n = s = 1$ et $E = 0$ (c'est-à-dire fluide

newtonien) et ceci indépendamment des valeurs de n, E et s. La figure IV.12(a) montre que, l'indice de loi de puissance, n, a un effet de stabilisateur où la valeur du nombre de Rayleigh sous-critique, R_{TC}^{sous}, augmente avec l'augmentation de la valeur de l'indice de loi de puissance, n, pour différents valeurs de la constante de temps sans dimension, E. L'effet de la constante de temps sans dimension, E, sur le nombre de Rayleigh sous-critique, R_{TC}^{sous} , est illustré dans la figure IV.12(b). Comme déjà mentionné, pour une valeur donnée de l'indice de loi de puissance, n, la valeur de R_{TC}^{sous} décroît avec l'augmentation de la valeur de la constante de temps sans dimension, E. Cela découle du fait que l'augmentation de E entraîne un effet de déstabilisateur. En fait, l'évolution du R_{TC}^{sous} avec le rapport des taux de viscosité de cisaillement infini à zéro, s, est assez similaire à celle discutée dans la figure IV.12(a) tout en étudiant l'effet de n.Le nombre de Rayleigh sous-critique est affectée lors de l'augmentation de la valeur du paramètre, s. Il est noté à partir de la figure IV.12(d) que lorsque le paramètre, a, augmente le nombre de Rayleigh sous-critique, R_{TC}^{sous}, augmente de façon monotone et tend asymptotiquement vers une valeur constante qui dépend de la valeur de n, et qui joué un rôle de stabilisateur.

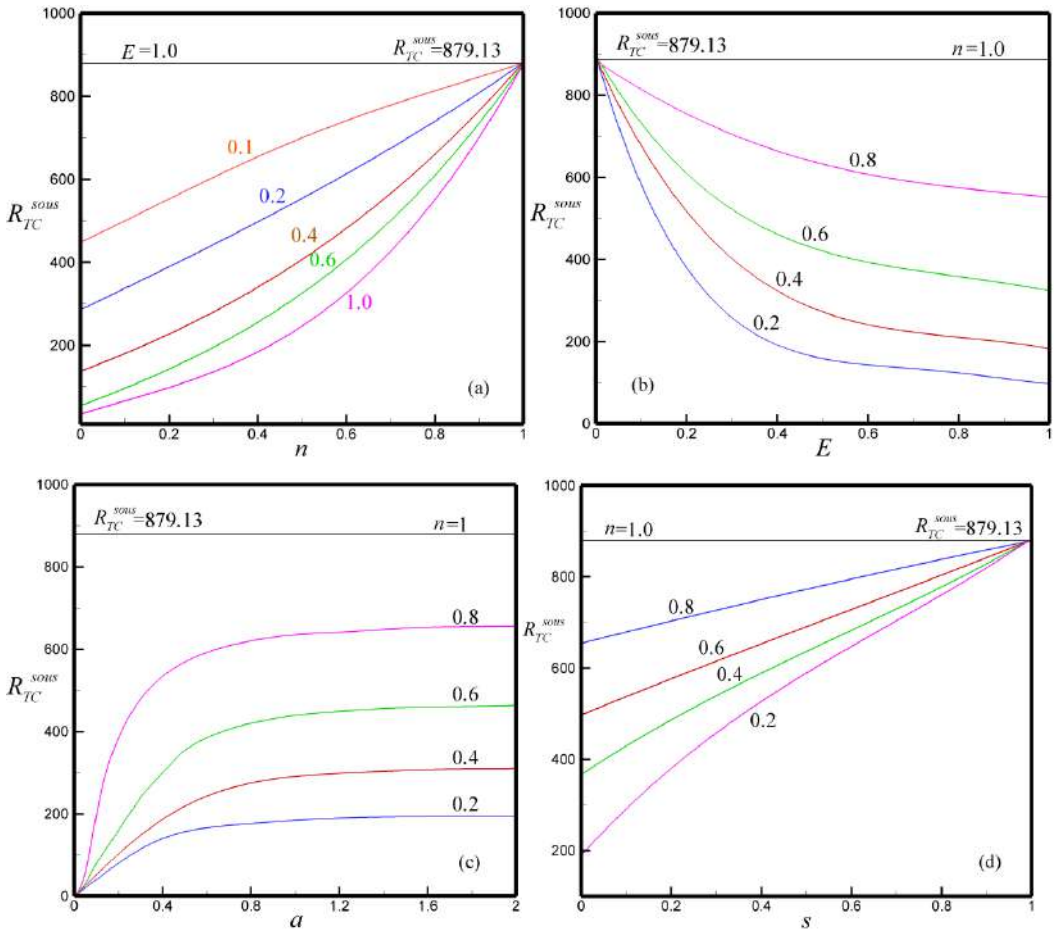


Figure IV.12: Effets des paramètres rhéologiques sur le nombre de Rayleigh sous-critique, R_{TC}^{sous}, pour $N = 0.05$ et $Le = 10$.

IV .10 Conclusion :

Dans ce chapitre, les résultats des simulation montrent que la circulation de l'écoulement et les taux de transfert de chaleur et de masse sont affectées par les paramètres rhéologiquesn, s, a, E pour le modèle C.Y et le l'apparition de la convection thermique et massique dépond aussi des paramètres rhéologiques.

Conclusion général

Le travail présenté dans ce mémoire nous a permis d'étudie numériquement les transferts de chaleur et de la masse dans un milieu fluide remplies d'un fluide non-Newtonien dans des cavités peu profondes rectangulaires chauffée et saluée par le bas. Des conditions aux frontières de type Neumann (flux de chaleur et de masse constants)ou Dirichlet (température et concentration constantes imposés) ont été considérées. Les résultats numériques nous ont permis de mieux appréhender les effets combinés des paramètres rhéologiques sur le phénomène de la convection thermosolutaleau sein du milieu fluide avec l'utilisation de modèle Carreau-Yasuda.

Le système d'équation gouvernant le problème est résolu numériquement par un code de calcul FOLTRAN77 basé sur la méthode des différences finies. L'intensité de l'écoulement et les transferts de chaleur et de masse sont exprimés en termes des paramètres de contrôle du problème. Ces paramètre étant le nombre de Rayleigh thermique R_T ,le rapport des forces de volume$N$, le nombre de Lewis Le ,Les paramètres rhéologiques n , E , $a$et s.

Les principales conclusions tirées dans cette étude sont résumées ci-dessous :

- ✓ Une diminution de l'indice de loi de puissance, n, et une augmentation de constant de temps, E , améliore le caractère rhé fluidifiant du fluide et provoque le déclenchement précoce de l'apparition de la convection sous-critique
- ✓ Les nombre de Nusselt et Sherwood sont sensibles à la fois à l'indice de loi de puissance, n , et la constante de temps adimensionnelle, E . Toutefois, une diminution de n, et une augmentation de E améliore considérablement le taux de transfert de chaleur par convection
- ✓ Une diminution des paramètres rhéologiques$a$et$d$éclenche une convection sous-critique, bien en dessous du seuil de convection supercritique. Cependant, l'effet de ces paramètres est moins important en comparaison avec ceux de $n$et.
- ✓ Une transition rapide vers un écoulement oscillatoire est observée pour les faibles valeurs du paramètre,n ,et les fortes valeurs du paramètre, E .
- ✓ Pour les fluides rhéfluidifiants obéissant au modèle de Carreau-Yasuda, le seuil de la convection supercritique est le même que celui des fluides Newtoniens.

Dans la présente étude, le modèle mathématique est basé sur de nombreuses hypothèses simplificatrices. Pour approfondir les connaissances dans ce domaine il serait intéressant de

reprendre la même étude pour un milieu anisotrope, en perméabilité, en conductivité thermique. Il sera aussi intéressant de considéré des configurations géométriques autres que celles étudiées dans ce mémoire. Il est recommandé de généraliser le modèle utilisé par une approche tridimensionnelle qui tient compte des géométries complexes et d'autres conditions aux limites. L'objectif important, sur lequel il conviendra sans doute de porter des efforts prioritaires, est la vérification des résultats obtenus par voie expérimentale.

Références

[1] S.Bensaada M.T.Bouziane, transfert de chaleur. Cour de transfert thermique jonnol.2005.

[2] M.Mustaphabordjane Maitre de conférences BMode de transfert thermique. Université de science et de la technologie d'Oran Mohamed Boudiaf .2017.

[3] **MOUMENI A,** Analyse thermique des ailettes : détermination des profils de températures et des rendements de quelques formes géométriques, Uni. KasdiMerbah-Ouargla, 2013.

[4] **NAIMA T, HADJILA T**, Dimensionnement d'une unité de récupération de GPL à partir de gaz associe, thèse d'ingéniorat, univ. De M'Hamed Bougera-Boumer dés, 2008.

[5] **BOUBAKER L**, Optimisation des paramètres de fonctionnement d'une débutaniseur, thèse d'ingéniorat, uni. de M'Hamed Bougara-Boumerdés, 2006.

[6] M.A.Boutra.Notions de phénomènes de transfert. Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene 2016-2017.

[7] w w w .patricebacchin . fr/images/ doc/ teach/ intro_tdm.pdf .

[8] Frank P. Incropera., Fundamentals of Heat and Mass Transfer , 6th ed, (2005) ,1070p.

[9] Ben Azouz Ahmed, K., Relation entre propriétés rhéologiques et structure microscopique de dispersions de particules d'argile dans des dispersions de polymères, Université de haute Alsace,Thése de Doctorat,(2010).

[10] Chhabra,R.P., Richardson, J.F., Fundamentals and Engineering Applications, Butterworth-Heinemann, (1999), 436 p.

[11] Koller, E., Transport et stockage des fluides dans l'industrie, Dunod, Paris, (2002), 416 p.

[12] Bird, B.R., Armstrong, R.C., Hassager, O., Dynamics of Polymeric Liquids, John Wiley and Sons Inc., New York, (1987), p.

[13] Baird, C.G., Collias, D.I., Polymer Processing: Principles and Design, John Wiley & Sons, New York, (1988), p.

[14] Barnes, H.A., Hutton, J.F., Walters, K., An Introduction to Rheology, Elsevier Science Publishers, (1989), 200 p.

[15] Cross, M.M., Rheology of Non-Newtonian Fluids. A new flow equation for pseudo-plastic systems, J. of Colloid Sciences,V.20,(1965), 417-437.

[16] Coelho, P.M., Pinho, F.T., "Vortex shedding in cylinder flow of shear-thinning fluids. III Pressure measurements", J. Non-Newtonian Fluid Mech,V.121,(2004), 55-68.

[17] Beghein C, Haghighat F, Allard F. Numerical study of double-diffusive natural convection in a square cavity, Int. J. Heat Mass Tran 35 (1992) 833-846.

[18] Nield DA, Bejan A. Convection in Porous Media, 4th ed., Springer-Verlag (2013).

[19] Trevisan O, Bejan A. Natural convection with combined heat and mass transfer buoyancy effects in a porous medium, Int. J. Heat Mass Transfer 28 (1985) 1597-1611.

[20] MP. Escudier, Poole RJ, Presti F, Dales C, Nouar C, Desaubry C, Graham L, PullumL. Observations of asymmetrical flow behaviour in transitional pipe flow of yield-stress and other shear-thinning liquids, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 127 (2005) 143-155.

[21] Benhadji K, Vasseur P. Double diffusive convection in a shallow porous cavity filled with a non-Newtonian fluid,IntCommun Heat Mass Transfer. 28 (2001) 763-772.

[22] LamsaadiM, Naïmi M and HasnaouiM. Natural convection of non-Newtonian power law fluids in a shallow horizontal rectangular cavity uniformly heated from below, Heat Mass Transfer 41 (2005) 239-249.

[23] Pop I, Ingham, DB. Convective Heat Transfer: Mathematical and Computational

[24] Nield DA, Bejan A, Convection in Porous Media, 2nd ed., Springer Verlag, New York, (1999).

[25] Ingham DB, Pop I, Transport Phenomena in Porous Media, Pergamon, (1998).

[26] OhtaM, OhtaM, AkiyoshiM, ObataE.A numerical study on natural convection heat transfer of pseudo-plastic fluids in a square cavity, Numer. Heat Transfer A 41 (4) (2002) 357-372.

[27] KimG.B, HyunJM,KwakHS.Transient buoyant convection of a power-law non-Newtonian fluid in an enclosure, Int. J. Heat Mass Transfer 46 (2003) 3605-3617.

[28] PericleousKA. Heat transfer in differentially heated non-Newtonian cavities, Int. J. Num. Methods Heat Fluid Flow. 4 (3) (1994) 229-248.

[29] TuranO, Sachdeva, ChakrabortyN, PooleRJ. Laminar natural convection of power-law fluids in a square enclosure with differentially heated walls subjected to constant temperatures, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 166 (2011) 1049-1063.

[30] LamsaadiM, NaimiM, HasnaouiM, MamouM. Natural convection in a vertical rectangular cavity filled with a non-Newtonian power-law fluid and subject to a horizontal thermal gradient, Numer. Heat Transfer A 49 (2006) 969-990.

[31] BenouaredO, MamouM, and MessaoudeneNA. Numerical nonlinear analysis of subcritical Rayleigh-Bénard convection in a horizontal confined enclosure filled with non-Newtonian fluids, Phys. Fluids26 (2014) 073101.

[32] AllouiZ, VasseurP. Natural convection of Carreau-Yasuda non-Newtonian fluids in a vertical cavity heated from the sides, Int. J. Heat and Mass Transfer 84 (2015) 912-924.

[33] KhechibaK, MamouM, HachemiM, DelendaN, RebhiR. Effect of Carreau-Yasuda rheological parameters on subcritical Lapwood convection in horizontal porous cavity saturated by shear-thinning fluid, Phys. Fluids. 29 (2017) 063101.

[34] Veera KrishnaM, Subba ReddyG. MHD Forced Convective flow of Non-Newtonian fluid through Stumpy Permeable Porous medium, Materials Today: Proceedings 5 (2018) 175-183.

[35] WuPY, LiuTJ, ChangHM. Natural convection of non-Newtonian liquids in a cylindrical enclosure, Numer. Heat Transfer A 25 (1994) 363-371.

[36] KhellafK, LauriatG. Numerical study of heat transfer in a non-Newtonian Carreau-fluid between rotating vertical cylinders, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 89 (2000) 45-61.

[37] H Ozoe, SW Churchill. Hydrodynamic stability and natural convection In Ostwald–de Waele and Ellis fluids: the development of numerical solution,AIChE J. 18 (1972) 1196-

[38] Shahmardan MM, Norouzi M. Numerical simulation of non-Newtonian fluid flows through a channel with a cavity,Modares. Mech. Eng. 14 (2014) 35-40.

[39] Guha A, Pradhan K. Natural convection of non-Newtonian power-law fluids on a horizontal plate,Int.J. Heat Mass Transf. 70 (2014) 930-8.

[40] KefayatiGHR. Simulation of non-Newtonian molten polymer on natural convection in a sinusoidal heated cavity using FDLBM, J .Mol. Liq. 195 (2014) 165-174.

[41] Bihiche K, Lamsaadi M and Hasnaoui M. Multiple steady state solutions for double-diffusive convection in a shallow horizontal rectangular cavity uniformly heated and salted from the side and filled with non-Newtonian power-law fluids JNNFM.(2019) 160.

[42] Turan O,ChakrabortyN, and Poole RJ.Laminar Rayleigh-Bénard convection of yield stress fluids in a square enclosure, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 171-172 (2012)83-96.

[43] A Raisi. The influence of pair constant temperature baffles on power-law fluids natural convection in square enclosure, Modares. Mech. Eng. 15(11) (2015) 215-24.

[44] Vinogradov I, Khezzar L, Siginer D. Heat transfer of non-Newtonian dilatant power law fluids in square and rectangular cavities, J. Appl. Fluid. Mech. 4 (2011) 37-42.

[45] Lamsaadi M, NaimiM, Hasnaoui M, Natural convection heat transfer in shallowhorizontal rectangular enclosures uniformly heated from the side and filled with non-Newtonian power law fluids, Ener. Conv. Manag. 47 (2006) 2535-2551.

[46] Ben KhelifaN, AllouiZ, BejiH, and VasseurP. Natural convection in a horizontal porous cavity filled with a non-Newtonian binary fluid of power-law type, J. Non-Newtonian Fluid Mech 15 (2012) 169-170,

[47] Roland, N., "Modélisation de la transition vers la turbulence d'écoulements en tuyau de fluides rhéofluidifiants par calcul numérique d'ondes non linéaires", Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy,These de Doctorat,(2010).

[48] Boussinesq, J., "Théorie analytique de la chaleur", Gauthier-Villars, Paris, (1903), 666 p.