République Algérienne Démocratique et populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

Université Dr. Yahia Farés de Médéa

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et de l'informatique



Projet de fin d'étude

Présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÈMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Thème

ETUDE DE LA COLORATION DE GRUNDY DANS LES GRAPHES

Par :

ZAIBAK ROMAISSA

Devant un jury composé de :

M. ZEMIME	Univ. Médéa	MCB	Président
N. IKHLE EESCHOUF	Univ. Médéa	MCA	Promoteur
R. LEMDANI	Univ. Médéa	MAA	Examinateur

Médéa,juin 2017

Table des matières

RESUME **5**

Abstract **6**

Remerciements **7**

Introduction **9**

1 Notions fondamentales sur la théorie des graphes **12**

1.1 Définitions et notations 12

1.1.1 Graphes 12

1.1.2 Voisinages 13

1.1.3 Degré d'un sommet 13

1.1.4 Graphes partiels et sous-graphes 14

1.1.5 Chaînes et cycles 14

1.1.6 Distances, excentricité, diamètres, rayons et centres 15

1.1.7 Ensemble minimal (resp.maximal) / minimum (resp.maximum) 15

1.1.8 Quelques invariants de graphes 15

1.1.9 Graphes particuliers 16

1.1.10 Graphe milieu et graphe total 18

1.1.11 Quelques opérations sur les graphes 19

1.2 Compléxité algorithmique 20

1.2.1 Problème de décision 20

1.2.2 Classes de complexité 20

1.3 Coloration propre, a-coloration, b-coloration et Grundy colorable 22

2 Quelques résultats existants sur la coloration de Grundy **27**

2.1 Théorème d'interpolation 27

2.2 Quelques bornes du nombre de Grundy 27

2.3 Quelques résultats existants sur le nombre de Grundy 29

2.3.1 Le nombre de Grundy de joint et l'union de deux graphes 29

2.3.2 Le nombre de Grundy de quelques graphes élémentaires 29

2.3.3 Le nombre de Grundy des graphes 4-réguliers sans C_4 29

2.3.4 Le nombre de Grundy du complémentaire d'un graphe biparti 29

2.3.5 Le nombre de Grundy pour les graphes critiques 30

2.3.6 Le nombre de Grundy du produit cartésien de deux graphes 30

2.3.7 Nombre de Grundy de la couronne d'un graphe 31

3 Nouveaux résultats sur la coloration de Grundy **33**

3.1 Nombre de Grundy de certains graphes particuliers 33

3.1.1 Nombre de Grundy du graphe milieu et du graphe total d'une chaîne . . 33

3.1.2 Nombre de Grundy du graphe milieu et du graphe total d'un cycle 37

3.1.3 Nombre de Grundy du graphe milieu et du graphe total d'une étoile . . . 40

3.2 Graphes arête Γ-critiques 42

3.2.1 Graphes arête Γ^{-}-critiques 42

Conclusion **46**

Table des figures

1.1 Exemple d'un graphe simple 12
1.2 Exemple d'un graphe G avec un graphe partiel et un sous graphe de G 14
1.3 Une chaine P_7 et un cycle C_7 15
1.4 Un graphe complet d'ordre 5 (K_5) 16
1.5 Un graphe G et son complémentaire 17
1.6 Un graphe biparti complet $K_{3,3}$ 17
1.7 Un arbre T 17
1.8 Une étoile $K_{1,n}$, ... 18
1.9 La couronne d'un C_4 18
1.10 Le graphe milieu d'une chaîne d'ordre 6 19
1.11 Le graphe total d'une chaîne d'ordre 6 19
1.12 Exemple d'une coloration propre optimale avec $\chi(G) = 3$ 23
1.13 Exemple d'une coloration a-chromatique optimale avec $\Psi(G) = 5$ 24
1.14 Exemple d'une coloration b-chromatique optimale avec $b(G) = 3$ 25
1.15 Exemple d'une coloration de Grundy optimale avec $\Gamma(G) = 4$ 26

3.1 Une coloration de Grundy optimale de $M(P_2)$ 34
3.2 Une coloration de Grundy optimale du graphe de $M(P_n)$ où $n \in \{3,4\}$, ... 35
3.3 Une coloration de Grundy optimale du graphe de $M(P_n)$, $n \geq 6$. 35
3.4 Une coloration de Grundy optimale du graphe de $T(P_2)$ 36
3.5 Une coloration de Grundy optimale du graphe de $T(P_3)$ 36
3.6 Une coloration de Grundy optimale du graphe de $T(P_n), n \geq 4$ 37
3.7 Une coloration de Grundy optimale du graphe de $M(C_3)$ 38
3.8 Une coloration de Grundy optimale du graphe de $M(C_n), n \geq 4$ 38

3.9 Une coloration de Grundy optimale du graphe de $T(C_3)$ 39
3.10 Une coloration de Grundy optimale du graphe de $T(C_n)$ 40
3.11 Une coloration de Grundy optimale du graphe de $M(K_{1,n})$ 41
3.12 Une coloration de Grundy optimale du graphe de $T(K_{1,n})$ 41
3.13 le graphes biparti arête Γ^--critiques 44

RESUME

Dans ce mémoire, notre étude est portée sur *la coloration de Grundy* et *le nombre de Grundy*. *Une coloration de Grundy* est une coloration propre de sommets d'un graphe G telle que tout sommet de couleur i est adjacent à au moins un sommet de colour j pour tout $j < i$, un tel sommet est dit *sommet de Grundy*. Le *nombre de Grundy* de G, noté Γ(G) est le plus grand entier k tel que G admet une coloration de Grundy avec k couleurs.

Nous présentons dans ce mémoire quelques résultats existants sur la coloration de Grundy, ensuite nous déterminons le nombre de Grundy des graphes milieu et total d'une chaîne, d'un cycle et d'une étoile, et enfin, nous donnons une condition nécéssaire pour qu'un biparti soit Γ^{-}-arête-critique.

Abstract

In this report, the aim of our work is to study the concept of the *Grundy coloring* and the Grundy number. The *Grundy coloring* is a proper coloring of vertices of a graph G such that each vertex of color i is adjacent to at least one vertex of color j, for all $j < i$, a such vertex is called *Grundy vertex*. The Grundy number of G, denoted Γ (G), is the largest integer k such that G admits a Grundy coloring with k colors.

We present in this report some existing results on the Grundy coloring, we next determine the exact value of the Grundy number of middle and total graphs of a path, a cycle and a star, and finally, we give a necessary condition for which a bipartite graph is a Γ^--edge -critical.

Remerciements

Avant tout je remercie ALLAH tout puissant de m'avoir donné le courage et la patience pour terminer ce travail

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Je voudrais tout d'abord, adresser toute ma gratitude à Monsieur Noureddine IKHLEF ESCHOUF, Maître de Conférences à l'université Dr. Yahia Farès de Médéa, d'avoir accepté d'encadrer mon mémoire, ainsi pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je voudrais également exprimer mes sincères remerciements à mademoiselle Amel BENDALI-BRAHAM pour ses précieux conseils, sa disponibilité et son aide.

Je remercie très sincèrement Monsieur Mohamed ZAMIME, Maître de conférences à l'université Dr. YAHIA FARES de Médéa, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie également Monsieur Rachid LEMDANI Maître de conférences à l'université Dr. YAHIA FARES de Médéa, pour avoir accepté de participer au jury de ce mémoire et pour leurs remarques judicieuses.

Mes sincères remerciements vont également à ma famille et surtout mes parents, ma sœur Fatima zohra et mes frères Rezkalleh Abd Fatah et Bachir, pour leurs encouragements et leur patience durant la réalisation de ce travail.

Je remercie chaleureusement mes amis Djamel IKHLEF ESCHOUF, Abdessamad MAACHOU réalisant aussi leurs mémoires de Master, pour l'entraide dans les moments difficiles. Je tiens à exprimer aussi ma profonde reconnaissance à Majda KRIBI , yousef BENKESSIRAT, Karim TAIBI et kamel MARZOUKI pour la fraternité qui y règne.

Enfin, merci d'avance à ceux ou celles qui voudront bien me lire ou m'écouter et surtout

m'aider à progresser.

Introduction

La *recherche opérationnelle* est la discipline des mathématiques appliquées qui traite des questions d'utilisation optimale des ressources dans l'industrie et dans le secteur public. Depuis une dizaine d'années, le champ d'application de la recherche opérationnelle s'est élargi à des domaines comme l'économie, la finance, le marketing et la planification d'entreprise. Plus récemment, la recherche opérationnelle a été utilisée pour la gestion des systèmes de santé et d'éducation, pour la résolution de problèmes environnementaux et dans d'autres domaines d'intérêt public.

L'histoire de la *théorie des graphes* débute avec les traveaux du mathématicien suisse *Leonard Euler* au$18^{ème}$ siècle, et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tel que celui des *ponts de Konigsberg*, quand il se demandait s'il est possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même point et revenir à son point de départ. Dès le début du $20^{\text{ème}}$ siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux traveaux de *Konig, Menger, Cayley* puis de *Berge* et *d'Erdös*.

Un des problèmes les plus connus de la théorie des graphes vient de la *coloration* des graphes, où le but est de déterminer combien de couleurs différentes suffisent pour colorer entièrement un graphe de telle façon qu'aucun sommet n'ait la même couleur que ses voisins. En 1852, le mathématicien anglais *Francis Guthrie* énonça le problème des quatre couleurs par une discussion à son frère, qui demandera à son professeur *Auguste De Morgan* si toute carte peut être coloriée avec quatre couleurs de façon que des pays voisins aient des couleurs différentes. Le problème de la coloration a suscité l'intérêt de grands chercheurs en théorie des graphes. Cet intérêt sans cesse croissant est largement motivé par le fait que beaucoup de problèmes concrets peuvent être modélisés en termes de coloration de graphes comme l'ordonnancement de tâches, l'allocation de fréquences et le problème

d'emploi de temps. La coloration des sommets est certainement le concept le plus ancien et le plus étudié. Il s'agit d'affecter des couleurs (entiers positifs) aux sommets de telle sorte que deux sommets adjacents ne doivent pas avoir la même couleur, une telle coloration est dite *propre* (*classique*). Ce n'est qu'en 1976, que deux chercheurs *K. Appel* et *W. Haken* ont pu répondre affirmativement à la conjecture des quatre couleurs. La recherches d'une réponse à ce problème est à l'origine de nombreux résultats relatifs à la coloration dans les graphes.

Soit G = (V, E) un graphe simple. Une *classe de couleur* i est un ensemble de sommets stable de V colorés avec la même couleur i. Le nombre minimum de classes de couleurs qui partitionnent l'ensemble V est le *nombre chromatique*, noté $\chi(G)$.

Beaucoup de variantes de coloration propre sont dérivées de la coloration classique, la plupart de ces colorations minimisent le nombre de couleurs nécessaires pour colorer un graphe. Il existe d'autres qui ont pour objet de maximiser le nombre de couleurs. Parmi eux, on cite la *coloration de Grundy* qui fait l'objet de ce mémoire. Un article de 1939 [36] de *Patrick Michael Grundy* (1917 – 1959) traitant de jeux combinatoires contenait des idées qui ont conduit à la notion de coloration de Grundy dans les graphes. Cette coloration a été nommée et introduite par *C. A. Christen* et *S. M. Selkow* [10] en 1979, dans le cadre de la théorie des jeux. La *coloration de Grundy* est une coloration propre vérifiant la propriété suivante : chaque sommet v, coloré par une couleur i doit être adjacent à au moins $i-1$ sommets colorés par chacune des couleurs j telles que $j < i$, un tel sommet est dit *sommet de Grundy*. *Le nombre de Grundy* d'un graphe G, noté $\Gamma(G)$, est le nombre maximum de couleurs nécessaires pour une coloration de Grundy de G.

Ce mémoire est développé en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions de théorie des graphes nécéssaires à la compréhension de ce mémoire. Nous donnons également un petit aperçu de quelques notions élémentaires de complexité algorithmique. Puis, nous précisons notamment les défnitions de la coloration classique, la a-coloration, la b-coloration et la coloration de Grundy.

Nous nous intéressons dans le deuxième chapitre au problème de la coloration de Grundy où nous citons quelques bornes et résultats existants sur le nombre Grundy d'un graphe. À

la fin de ce chapitre, nous donnons la définition des graphes dits arête Γ-critique.

Le troisième chapitre porte sur notre contribution dans le domaine de la coloration de Grundy, où nous déterminons la valeur exacte du nombre de Grundy des graphes milieu et total d'une chaîne, d'un cycle et d'une étoile. En outre, nous caractérisons les graphes bipartis arête Γ^{-}-critiques.

Ce mémoire s'achève par une conclusion.

Chapitre 1

Notions fondamentales sur la théorie des graphes

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques concepts de base de la théorie des graphes. D'où, la première partie est un rappel de quelques définitions nécéssaires qui seront utilisées tout au long de ce mémoire. Ainsi que, dans la dernière partie, on donne quelques types de coloration de graphes et leurs paramètres associés, comme la coloration classique, a-coloration, b-coloration et coloration de Grundy.

1.1 Définitions et notations

1.1.1 Graphes

Un graphe G = (V, E) est constitué d'un ensemble fini et non vide V d'éléments appelés *sommets,* et d'un ensemble E de paires de sommets, appelées *arêtes.*

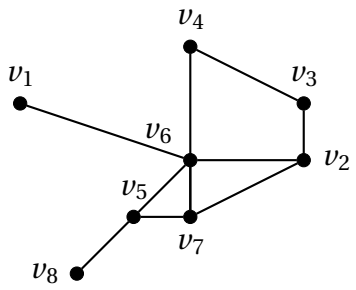


FIGURE 1.1 – Exemple d'un graphe simple

On appelle l'ordre du graphe G, noté n, le nombre de ses sommets et qui est égal au cardinal de V, et taille de G, noté m, le cardinal de E. Les sommets sont notés de manière usuelle par des lettres miniscules : u, v, x, y, a, b, etc.... Pour $u, v \in V$, on note par uv (ou vu) une arête entre u et v.

Deux sommets peuvent être liés par plusieurs arêtes : on les appelle arêtes *multiples*. Une arête peut avoir ses extrémités confondues : on parle de *boucle*. Un graphe est dit *simple* s'il est sans boucles et sans arêtes multiples.

Deux graphes G et $G^{'}$ sont isomorphes s'il existe une bijection $f : V(G) \longrightarrow V(G^{'})$ telle que pour tous $u, v \in V$, on a $uv \in E(G)$ si et seulement si $f(u)f(v) \in E(G')$.

1.1.2 Voisinages

— Deux sommets u et v sont *adjacents* si l'arête uv existe dans E. Les sommets u et v sont alors dits *voisins*.

— Deux arêtes sont dites adjacentes si elles ont une extrémité commune.

— Une arête est *incidente* à un sommet v, si v est l'une de ses extrémités.

— Le *voisinage ouvert* d'un sommet v de G, noté par $N_G(v)$, est défini par l'ensemble

$$N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E\}$$

et le *voisinage fermé* de v, noté par $N_G[v]$, est défini par

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

L'ensemble $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v)$ (resp. $N_G[S] = \cup_{v \in S} N_G(v) \cup S$) est le voisinage ouvert (resp. fermé) du sous ensemble $S \subseteq V$. Parfois pour alléger les notations et s'il n'y a aucune confusion sur le graphe G, les voisinages ouvert et fermé d'un sommet v seront notés par $N(v)$ et $N[v]$ respectivement. De même, nous utiliserons les notations $N(S)$ et $N[S]$ au lieu de $N_G(S)$ et $N_G[S]$ respectivement.

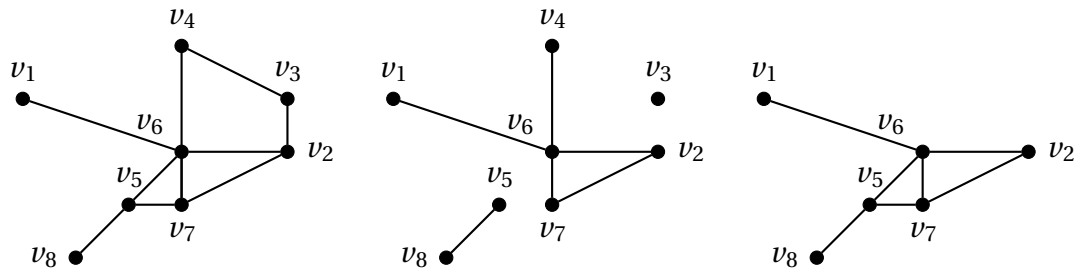
1.1.3 Degré d'un sommet

— Le *degré* d'un sommet v de G , noté par $d_G(v)$, est le nombre d'arêtes incidentes à v. Dans un graphe simple, $d_G(v) = |N(v)|$. Un sommet de degré nul est dit sommet *isolé* et un sommet de degré un est dit sommet *pendant*, et un sommet qui est adjacent à

un sommet pendant est dit *support*. On note par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ le degré maximum et le degré minimum de G respectivement. S'il n'y a aucun risque de confusion, on écrira $d(v)$, Δ, et δ pour désigner $d_G(v)$, $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ respectivement.

1.1.4 Graphes partiels et sous-graphes

Soit G = (V, E) un graphe. Un graphe partiel de G est un graphe H = (V, F) tel que F est un sous ensemble de E. Pour un sous-ensemble S ⊆ V, le *sous-graphe* induit par S, noté par G[S], est le graphe $G' = (S, E(S))$, dont l'ensemble des sommets est S et l'ensemble des arêtes E(S) est formé de toutes les arêtes de G ayant leurs deux extrémités dans S.



Graphe G Graphe partiel de G sous graphe de G

FIGURE 1.2 – Exemple d'un graphe G avec un graphe partiel et un sous graphe de G

1.1.5 Chaînes et cycles

Soit G = (V, E) un graphe.

— Une *chaîne* P de G est une séquence finie de sommets $v_1, v_2, \ldots, v_k$, où pour tout $i \in \{1, ..., k-1\}$, $v_i v_{i+1}$ est une arête de G. Les sommets v_1 et v_k sont les *extrémités* de la chaîne P, et les sommets $v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}$ sont les *sommets intérieurs* de P.

— Une chaîne P est *simple* si chaque arête de P est empruntée une seule fois.

— Une chaîne P est *élémentaire* si elle ne passe pas deux fois par le même sommet.

— Dans une chaîne P, une arête qui relie deux sommets non consécutifs est dite une *corde*.

— Une chaîne minimale induite par n sommets, notée par P_n , est une chaîne élémentaire sans corde.

— Un *cycle* est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues. On note par C_n le cycle induit par n sommets. De la même manière, on définit un *cycle simple* et un *cycle élémentaire*.

La *longueur* d'un cycle est le nombre de ses arêtes.

La *maille* d'un graphe G, notée $g(G)$, est la longueur du plus petit cycle dans G.

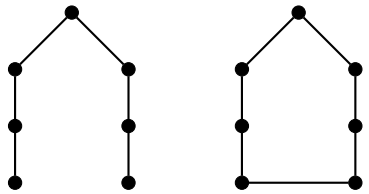


FIGURE 1.3 – Une chaine P_7 et un cycle C_7

1.1.6 Distances, excentricité, diamètres, rayons et centres

Soit G = (V, E) un graphe et u, v deux sommets de V. La *distance* entre u et v, notée $d(u,v)$ est la longueur de la plus courte chaîne joignant u et v.

L'excentricité de v , noté $exc(v)$, est définie par $exc(v) = \max\{d(v,w) : w \in V\}$.

Le *diamètre* de G est $diam(G) = \max\{exc(v) : v \in V\}$.

Le *rayon* de G est $rad(G) = \min\{exc(v) : v \in V\}$.

Un sommet de G ayant une excentricité minimale est appelé *centre*.

1.1.7 Ensemble minimal (resp.maximal) / minimum (resp.maximum)

Soit G = (V, E) un graphe, on dit qu'un sous-ensemble A de V est *minimal* (resp. *maximal*) par rapport à une propritée $\mathscr{P}$, s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq A$ (resp. $B \supseteq A$) tel que G[B] vérifie $\mathscr{P}$. On dit qu'un sous-ensemble A de V est *minimum* ou de *taille minimale* (resp. *maximum* ou de *taille maximale*) par rapport à une propriété $\mathscr{P}$, s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq V$ tel que G[B] vérifie $\mathscr{P}$ et $|A| > |B|$ (resp.$|B| > |A|$) où |A| est le cardinal de l'ensemble A, c'est-à-dire le nombre de ses éléments.

1.1.8 Quelques invariants de graphes

Soit G = (V, E) un graphe simple.

— Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est un *dominant* de G, si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S, est le cardinal minimum noté par $\gamma(G)$.

— Une *clique* dans G est un sous ensemble de sommets de G qui engendre un graphe complet. Le cardinal d'une clique maximum de G est noté par $\omega(G)$.

— *Un stable* dans un graphe G, appelé aussi (*ensemble indépendant),* est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents. Le cardinal d'un stable maximum de G , noté $\alpha(G)$ est appelé *nombre de stabilité* de G.

— Un sommet x est dit saturé par un couplage M si x est l'extrémité d'une arête de M. Dans le cas contraire, x sera dit est insaturé par M. Un couplage qui sature tous les sommets de G est appelé couplage *parfait* de G, et on noté $\beta(G)$.

1.1.9 Graphes particuliers

— Un graphe G est dit complet si, pour toute paire de sommets (x, y), il existe une arête les reliant, (tous les sommets sont deux à deux adjacents). Un graphe simple complet d'ordre n est noté K_n.

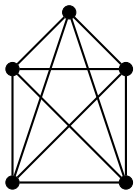


FIGURE 1.4 – Un graphe complet d'ordre 5 (K_5)

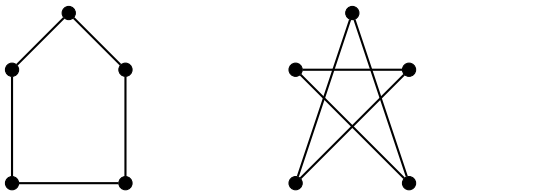
— Un graphe $G = (V, E)$ est dit *connexe* si pour chaque paire de sommets distincts $u, v \in V$, il existe une chaîne joignant v et u. Une *composante connexe* d'un graphe est un sous-graphe maximal connexe.

— Un graphe $G = (V, E)$ est dit *planaire* s'il peut être déssiné dans la plan de sorte que ses arêtes ne se croisent pas.

— Un graphe *discret,* noté D_n, est un graphe sans arêtes.

— *Le graphe complémentaire* d'un graphe simple $G = (V, E)$ noté $\overline{G} = (V, \overline{E})$, est le graphe défini par $V(\overline{G}) = V(G)$ et $\overline{E} = E(\overline{G}) = \{uv : u, v \in V(G) \text{ et } uv \notin E(G)\}$.

— Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est dit *régulier*. Si le degré est égal à d pour tout sommet, alors on dit que le graphe est *d-régulier*. Un graphe 3-



Graphe G complémentaire $\overline{G}$

FIGURE 1.5 – Un graphe G et son complémentaire

régulier est aussi appelé cubique.

— Un graphe G = (V, E) est dit *biparti* si V peut se partitionner en deux sous-ensembles stables V_1 et V_2, de sorte que toutes les arêtes du graphe relient un sommet de V_1 à un sommet de V_2. *Un graphe biparti complet* est un graphe biparti ayant la propriété supplémentaire suivante : tous les sommets de V_1 sont adjacents à tous les sommets de V_2. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$, alors le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$.

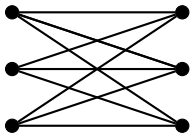


FIGURE 1.6 – Un graphe biparti complet $K_{3,3}$

— On appelle *arbre* à n sommets, et on note par T, un graphe connexe et sans cycles. Un arbre comporte exactement $(n-1)$ arêtes. Un arbre est dit trivial (resp. non trivial) s'il contient un seul sommet (resp. au moins deux sommets). On appelle *feuille* d'un arbre, un sommet de degré 1 (sommet pendant).

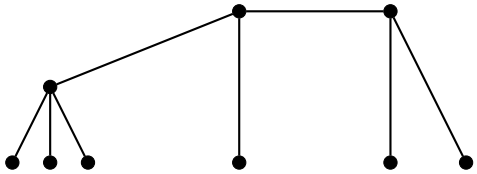


FIGURE 1.7 – Un arbre T

— On appelle *étoile*, et on note par $K_{1,n}$, $(n \geq 3)$, l'arbre à $n+1$ sommets ayant n feuilles.

— Un *cactus* est un graphe où chaque arête appartient à au plus un cycle, de plus un

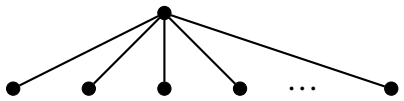


FIGURE 1.8 – Une étoile $K_{1,n}$,

cactus qui contient un seul cycle est dit *unicycle*.

— Un graphe est dit *sans griffe* (ou sans $K_{1,3}$) s'il ne contient pas $K_{1,3}$ comme sous-graphe induit.

— On appelle *couronne d'un graphe* G , notée $Cr(G)$ ou $G \circ K_1$, le graphe obtenu en attachant à chaque sommets de G un sommet pendant, et donc il est évident que l'ordre de $Cr(G)$ est égal à $2|V(G)|$.

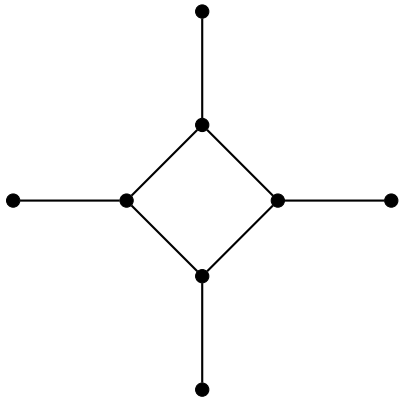


FIGURE 1.9 – La couronne d'un C_4

— Soit $G = (V,E)$ un graphe. Le *graphe adjoint* de G (ou *graphe de ligne*) est le graphe obtenu en associant un sommet à chaque arête de G et en reliant deux sommets par une arête si les arêtes de G correspondant à ces deux sommets sont adjacentes.

1.1.10 Graphe milieu et graphe total

Définition 1.1.1 *(Hamada et Yoshimura)[25] Soit* $G = (V(G), E(G))$ *un graphe simple. Le graphe milieu de* G*, noté* $M(G)$ *est défini comme suit : L'ensemble des sommets de* $M(G)$ *est* $V(G) \cup E(G)$,: *et deux sommets* x, y *de* $M(G)$ *sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

— $x; y \in E(G)$ *et* x *est adjacent à*y *dans* G.

— $x \in V(G)$, $y \in E(G)$ *et* x *est incident à* y *dans* G :

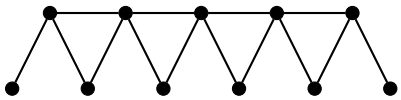


FIGURE 1.10 – Le graphe milieu d'une chaîne d'ordre 6

Définition 1.1.2 *(Behzad)[26] Le graphe total de* G, *noté* T(G), *est défini comme suit. L'ensemble des sommets de* T(G) *est* V(G) ∪ E(G), *et deux sommets* x, y *de* T(G) *sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

— $x, y \in$ V(G) *et* x, y *sont adjacents dans* G.

— $x; y \in$ E(G) *et* x *est adjacent à*y *dans* G.

— $x \in$ V(G), $y \in$ E(G) *et* x *est incident à* y *dans* G :

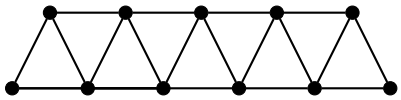


FIGURE 1.11 – Le graphe total d'une chaîne d'ordre 6

1.1.11 Quelques opérations sur les graphes

Soit G = (V, E) un graphe simple.

— Soient v et e un sommet et une arête de G respectivement. En note par G − v le sous-graphe engendré par l'ensemble V − {v}. En d'autres termes, G − v est le graphe obtenu à partir de G en supprimant le sommet v et toutes les arêtes incidentes à v. On note aussi par G − e le graphe G′ = (V, E − {e}). Donc G − e est le graphe obtenu à partir de G en supprimant l'arête e (les sommets incidents à e ne sont pas supprimés). Pour un sous-ensemble de sommets S ⊆ V , on note G − S le sous-graphe engendré par V − S.

— La somme cartésienne (ou produit cartésien) de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, noté $G_1 \square G_2$, est le graphe G = (V, E) tel que V(G) = $\{(u, v) : u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ et deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont adjacents si $u_1 = u_2$ et $v_1 v_2 \in E_2$ ou $v_1 = v_2$ et $u_1 u_2 \in E_1$.

— Soient G et H deux graphes. L'*union* de G et H est le graphe G + H dont l'ensemble des sommets est V(G) ∪ V(H) et l'ensemble des arêtes est E(G) ∪ E(H). Pour un entier k donné, l'union de k copies de G est notée par kG.

— Le *joint* de G et H est le graphe noté $G \vee H$ obtenu à partir de $G + H$ en ajoutant toutes les arêtes entre G et H.

1.2 Compléxité algorithmique

La théorie de la compléxité s'intéresse à l'étude formelle de la difficulté des problèmes en informatique et plus précisément à leur résolution de façon éfficace, en tenant compte du temps de calcul et les données stoquées en mémoire.

1.2.1 Problème de décision

Chaque problème informatique peut se réduire à un problème de *décision*, c'est-à-dire un problème formulé comme une question dont la réponse est Oui ou Non. Un problème qui n'est pas formulé de cette manière peut être très simplement transformé en un problème de décision équivalent. Le problème du voyageur de commerce, qui cherche, dans un graphe, à trouver la taille du cycle le plus court passant une fois par chaque sommet, peut s'énoncer en un problème de décision comme suit : Existe-t-il un cycle passant une et une seule fois par chaque sommet tel que la somme des coûts des arcs utilisés soit inférieure à k, avec $k \in \mathbb{N}$. Ce problème est équivalent au problème du voyageur de commerce au sens où si l'on sait résoudre efficacement l'un, on sait aussi résoudre efficacement l'autre.

1.2.2 Classes de complexité

La théorie de la complexité repose sur la définition de classes de complexité qui permettent de classer les problèmes en fonction de la complexité des algorithmes qui existent pour les résoudre.

Classe P

Un problème p est dit Polynomial (ie. $p \in \mathrm{P}$), s'il peut être résolu par un algorithme déterministe en un temps polynomial.

Prenons par exemple le problème de la connexité dans un graphe. Etant donné un graphe à n sommets, il s'agit de savoir si toutes les paires de sommets sont reliées par une chaîne. Pour le résoudre, on dispose de l'algorithme de parcours en profondeur qui va construire

un arbre couvrant du graphe à partir d'un sommet. Si cet arbre contient tous les sommets du graphe, alors le graphe est connexe. Le temps nécessaire pour construire cet arbre est au plus n^2, donc le problème est bien dans la classe P.

Les problèmes dans P correspondent en fait à tous les problèmes facilement solubles.

Classe NP

Un problème p est NP, s'il est résoluble par un algorithme Non déterministe en un temps polynomial par rapport à la taille de l'instance.

De façon équivalente, c'est la classe des problèmes qui admettent un algorithme dans P qui, étant donné une solution du problème NP, est capable de répondre oui ou non.

Intuitivement, les problèmes dans NP sont tous les problèmes qui peuvent être résolus en énumérant l'ensemble des solutions possibles et en les testant avec un algorithme polynomial.

Par exemple, la recherche de cycle hamiltonien dans un graphe peut se faire avec deux algorithmes :

— le premier génère l'ensemble des cycles (ce qui est exponentiel) ;

— le second teste les solutions (en temps polynomial).

On constate, immédiatement, que P $\subset$ NP.

Problème NP-Complet

Un problème est NP-difficile si ce problème est au moins aussi dur que tous les problèmes dans NP. Formellement, on définit une notion de réduction : Soient p et p' deux problèmes. Une réduction de $p^{'}$ à p est un algorithme transformant toute instance de $p^{'}$ en une instance de p. Ainsi, si l'on a un algorithme pour résoudre p, on sait aussi résoudre $p^{'}$, p est donc au moins aussi difficile à résoudre que $p^{'}$. Les problèmes les plus étudiés sont les problèmes NP-complets, parce qu'on ne sait pas les résoudre éfficacement à cause de leur indéterminisme. Il est clair que P $\subset$ NP, puisqu'un algorithme déterministe est un algorithme non déterministe particulier.

Le problème p est alors NP-difficile si pour tout problème $p^{'}$ de NP, $p^{'}$ se réduit à p. Quand on parle de problèmes NP-difficiles on s'autorise uniquement des réductions dans P, c'est-à-dire que l'algorithme qui calcule le passage d'une instance de $p^{'}$ à une instance

de p est polynomial.

Classe NP-complet :

Le problème étant dans NP et NP-difficile, il est NP-complet, autrement dit, les problèmes NP-complets sont les plus difficiles de la classe NP.

1.3 Coloration propre, a-coloration, b-coloration et Grundy colorable

En 1852, le jeune anglais *Francis Guthrie* s'est demandé s'il est toujours possible de colorer une carte de géographie à l'aide de quatre couleurs, en respectant la condition que deux pays voisins ne soient pas recouverts par la même couleur.

Ce n'est qu'en 1976, que deux chercheurs américains, *K. Appel* et *W. Haken* [32, 33], de l'Université de l'Illinois, ont pu répondre affirmativement à cette conjecture des quatre couleurs, en utilisant un calcul par ordinateur.

Le problème des quatres couleurs est l'un des problèmes de coloration de graphes, qui ont suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs, et qui ont fait l'objet de nombreuses études engendrant une littérateure très dense en théorie des graphes. La coloration des sommets est sans doute le concept le plus connu et le plus étudié en théorie des graphes.

Graph coloring is arguably the most popular subject in graph theory.

Noga Alon (1993)

Généralement, il s'agit de trouver une coloration optimale des sommets d'un graphe simple de manière que deux sommets adjacents soient de couleurs distinctes.

Définition 1.3.1 (Coloration propre) *Une coloration propre d'un graphe* G *consiste à affecter une couleur à chaque sommet de* G *de telle sorte que deux sommets adjacents ne reçoivent pas la même couleur. Si le graphe est coloré avec k couleurs, on dit qu'il est k-coloriable.*

Définition 1.3.2 *Une classe de couleur i est un sous-ensemble stable de sommets de* V *ayant la même couleur i.*

Une condition naturelle est que le nombre de couleurs utilisées soit minimal.

Définition 1.3.3 *Le nombre chromatique d'un graphe* G*, noté* χ (G)*, est le plus petit entier k tel que* G *soit k-coloriable.*

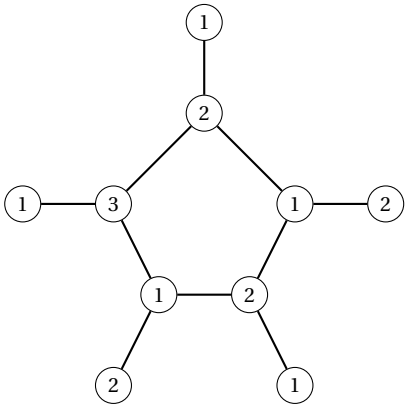


FIGURE 1.12 – Exemple d'une coloration propre optimale avec $\chi(G) = 3$

Le problème de décision lié à ce paramètre est NP-complet [34] dans le cas général. Pour cette raison, beaucoup de travaux ont été consacrés à la recherche des bornes du nombre chromatique en fonction d'autres paramètres. L'un de ces résultats, est celui de R. Brooks [6], où il a montré que pour un graphe G, de degé maximum $\Delta(G)$, qui n'admet pas comme composante connexe un graphe complet d'ordre $\Delta(G)+1$ ni, si $\Delta(G) = 2$, un cycle d'ordre impaire, on a

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Pour la clique $K_{\Delta(G)+1}$, on a $\chi(K_{\Delta(G)+1}) = \Delta(G)+1$, et pour le cycle impaire C_n on a,

De ce fait, on a toujours le résultat suivant :

Théorème 1.3.1 *[6] Pour tout graphe* G *de degré maximum* Δ(G)*,*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Dans [4], C. Berge a montré les deux résultats suivants.

Théorème 1.3.2 *[4] Tout graphe* G *d'ordre n, satisfait*

$$\chi(G)\alpha(G) \geq n \;\; et \;\; \chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1.$$

L'inégalité suivante est due à Gaddum et Nordhaus [18].

Théorème 1.3.3 *[18] Soit* G *un graphe d'ordre n et* $\overline{G}$ *son complémentaire. Alors*

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1.$$

Proposition 1.3.1 *Le nombre chromatique d'un cycle élementaire d'ordre n est* 2 *si n est pair et* 3 *sinon.*

Plusieurs paramètres de coloration sont découlés du nombre chromatique $\chi(G)$, la majorité de ces paramètres ont pour objet la minimisation du nombre de couleurs requis pour colorer un graphe, tandis que d'autres paramètres cherchent à maximiser le nombre de couleurs, comme le nombre a-chromatique, noté $\psi(G)$, le nombre b-chromatique, noté $b(G)$, et le nombre de Grundy noté $\Gamma(G)$ qui fera l'objet de notre étude dans ce mémoire.

Une façon de minimiser le nombre de couleurs d'un graphe consiste, à partir d'une coloration propre donnée, de réduire le nombre de classes de couleurs en fusionnant des classes de couleurs différentes. Cette technique de coloration est impossible s'il existe une arête entre toute paire de stables, d'où l'introduction de la a-coloration et du nombre a-chromatique par Harary, Hedetniemi et Prins en 1967 [11].

Définition 1.3.4 *Une a-coloration est une coloration propre telle que pour toute paire de couleurs différentes i et j, le sous-graphe engendré par les deux classes de couleur i et j, contient au moins une arête. Le nombre a-chromatique, noté* $\psi(G)$, *est le nombre maximum de classes de couleur dans une a-coloration.*

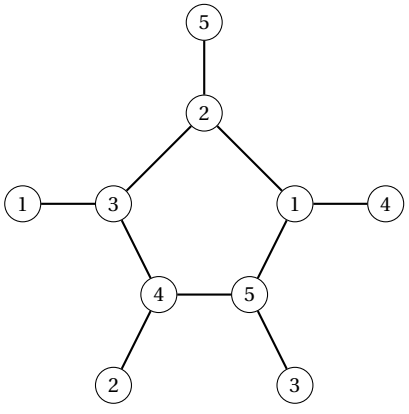


FIGURE 1.13 – Exemple d'une coloration a-chromatique optimale avec $\Psi(G) = 5$

Une autre manière de réduire le nombre de couleurs consiste à essayer, à partir d'une coloration propre donnée du graphe, de réduire le nombre de couleurs en transférant les

sommets de la même classe vers les autres classes de couleur, d'où la définition de la *b*-coloration. Ce concept a été introduit en 1999 par Ervinge etManlove [30, 29].

Définition 1.3.5 *Une b-coloration, appelée aussi coloration dominante, est une coloration propre telle que toute classe de couleur i contient un sommet adjacent à au moins un sommet de chaque classe de couleur $j \neq i$. Ce sommet est dit sommet b-dominant de couleur i (ou b-sommet). Le nombre b-chromatique est le nombre maximum de classes de couleur dans une b-coloration.*

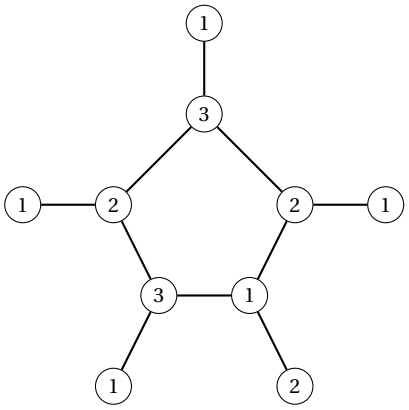


FIGURE 1.14 – Exemple d'une coloration b-chromatique optimale avec $b(G) = 3$

Toute $\chi(G)$-coloration satisfait la définition de la *b*-coloration, et cette dernière vérifie la définition de la *a*-coloration, alors le résultat suivant est immédiat.

$$\chi(G) \leq b(G) \leq \psi(G).$$

Un article publié en 1939 [36] de Patrick Michael Grundy (1917 – 1959) traitant de jeux combinatoires contenait des idées qui ont conduit à la notion de coloration de Grundy dans les graphes. Cette coloration a été définie et introduite par C. A. Christen et S. M. Selkow [10] en 1979, dans le cadre de la théorie des jeux. Cette coloration cherche à maximiser le nombre de couleurs nécéssaires pour colorer les sommets d'un graphe sous certaines conditions.

Définition 1.3.6 *Une coloration de Grundy d'un graphe* G *est une coloration propre de sommets de* G *telle que tout sommet de couleur i est adjacent à au moins un sommet de colour j, pour tout $j < i$; un tel sommet est dit sommet de Grundy. Le nombre de Grundy de* G, *noté* $\Gamma(G)$ *est le plus grand entier k tel que* G *admet une coloration de Grundy avec k couleurs.*

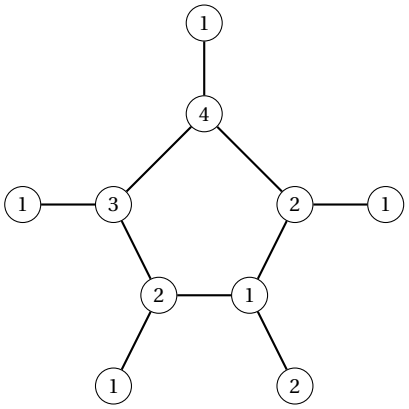


FIGURE 1.15 – Exemple d'une coloration de Grundy optimale avec $\Gamma(G) = 4$

Notons qu'une coloration de Grundy d'un graphe peut être obtenue par un algorithme "*glouton*" (*greedy algorithm* en anglais, parfois appelé aussi *algorithme gourmand*) de recherche du nombre chromatique du graphe. En effet, l'algorithme va chercher toutes les colorations possibles des sommets du graphe. Le nombre chromatique sera alors donné par la coloration qui minimise le nombre de couleurs utilisées et le nombre de Grundy sera donc donné par celle qui maximise le nombre de couleurs. Le nombre de Grundy est défini par P.M. Grundy qui a étudié un concept analogue pour des graphes orientés en 1939 [14].

En 1987, Erdös et al. [37] ont prouvé que le nombre de Grundy d'un graphe est en fait le même que le *nombre ochromatique* d'un graphe qui été défini et étudié indépendamment par Simmons [27, 28], en 1982.

Le nombre de Grundy et la coloration de Grundy sont définis aussi comme le nombre maximum de couleurs obtenus par d'autres algorithmes de coloration dits *en ligne* et *first-fit*, ce [38]. Pour plus de détail sur ces concepts voir [1, 39, 40].

Chapitre 2

Quelques résultats existants sur la coloration de Grundy

Le problème de la détermination du nombre de Grundy pour un graphe quelconque est un problème NP-complet [10], même restreint aux graphes biparti [22]. Dans [21] , Hedetniemi et al. ont donné un algorithme linéaire pour déterminer le nombre de Grundy d'un arbre, en outre ils ont établi une relation entre le nombre chromatique, le nombre de Grundy et le nombre a-chromatique :

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Gamma(G) \leq \psi(G).$$

2.1 Théorème d'interpolation

Le résultat suivant est l'un des résultats majeurs dans la coloration de Grundy et qui dû a C. A. Christen et S. M. Selkow [10].

Théorème 2.1.1 *[10] Pour tout graphe* G *et pour tout* r *avec* $\chi(G) \leq r \leq \Gamma(G)$*, il existe une coloration de Grundy de* G *avec* r *couleurs.*

2.2 Quelques bornes du nombre de Grundy

La NP-complétude de ce paramètre a incité nombreux chercheurs à l'encadrer. Dans cette section, nous allons présenter quelques bornes sur le nombre de Grundy. Le résultat suivant est dû à A. Mansouri et M. Salim Bouhlel.

Proposition 2.2.1 *[2] Tout graphe* G *satisfait*

$$\Gamma(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Dans [5], les auteurs ont parvenu à majorer le nombre de Grundy.

Théorème 2.2.1 *[5] Soit* G *un graphe connexe d'ordre n et de nombre de stabilité* α. *Alors*

$$\Gamma(G) \leq n + 1 - \alpha.$$

Une autre borne a été déterminé, dans [17].

Proposition 2.2.2 *[17] Soit* G *un graphe connexe. Alors*

$$\Gamma(G) \leq \max \min_{(v,u)\in E} \{d(v), d(u)\} + 1.$$

Proposition 2.2.3 *[15] Si* H *est un sous-graphe induit de* G *alors :*

$$\Gamma(G) \geq \Gamma(H).$$

Dans [24], les auteurs ont trouvé une borne supérieure de $\Gamma(G)$.

Théorème 2.2.2 *[24] Pour tout graphe* G *d'ordre* $n \geq 1$, $\Gamma(G) \leq \frac{n+\omega(G)}{2}$.

Les mêmes auteurs ont caractérisé tous les graphes sans triangle avec $\Gamma(G) = \frac{n+2}{2}$, dans [24].

Une autre borne de $\Gamma(G)$ a été déterminé par N. Ikhlef Eschouf dans [23] pour les graphes sans P_4. Alors

Théorème 2.2.3 *[23] Si* G *est un graphe sans* P_4, *alors* $\Gamma(G) \leq b(G)$.

M. Zaker [16] a prouvé que le nombre de Grundy d'un graphe G satisfait $\Gamma(G) \geq t$ si et seulement si G induit un sous-graphe dit t-atome. La structure des atomes est simillaire à la structure des graphes critiques (pour la coloration obtenue par un algorithme de coloration en ligne), cette notion de criticité a été introduite par Gyàrfàs et al. [39]. Un graphe G avec $\Gamma(G) = t$ est dit graphe t-critique si $\Gamma\left(G \diagdown v\right) < \Gamma(G)$ pour tout sommet v de G. Il est été observé dans [16] qu'un graphe t-critique n'est pas nécessairement un t-atome.

Dans [39], les auteurs ont prouvé qu'il y a un nombre fini (51) de graphes connexes 4-critiques mais un nombre infini qui sont non connexes.

2.3 Quelques résultats existants sur le nombre de Grundy

2.3.1 Le nombre de Grundy de joint et l'union de deux graphes

Les résultats suivants dus à N. Ikhlef Eschouf [23], où il a déterminé le nombre de Grundy de joint et l'union de deux graphes.

Lemme 2.3.1 *[23] Soit* G *un graphe. Si* G *est le joint de deux graphes* G_1 *et* G_2 *de sommets disjoints. Alors*

$$\Gamma(G) = \Gamma(G_1) + \Gamma(G_2).$$

Lemme 2.3.2 *[23] Soient* G_1 *et* G_2 *deux graphes de sommets disjoints, et soit* $G = G_1 + G_2$. *Alors*

$$\Gamma(G) = max\{\Gamma(G_1), \Gamma(G_2)\}.$$

Dans [5], l'auteur a donné le nombre de Grundy de quelques graphes élémentaires.

2.3.2 Le nombre de Grundy de quelques graphes élémentaires

Proposition 2.3.1 *[5] Soient* S_n, K_n, P_n, C_n, *et* $K_{n,p}$ *un stable, un graphe complet, une chaîne, un cycle à n sommets et un graphe biparti complet à n + p sommets, respectivement. Alors*

$$\Gamma(S_n) = 1, \Gamma(K_n) = n, \Gamma(K_{n,p)} = 2 \text{ et } \Gamma(P_n) = \begin{cases} 2 \text{ si } 2 \leq n \leq 3 \\ 3 \text{ si } n \geq 4 \end{cases}, \Gamma(C_n) = \begin{cases} 2 \text{ si } n = 4 \\ 3 \text{ si } n \neq 4 \end{cases}.$$

2.3.3 Le nombre de Grundy des graphes 4-réguliers sans C_4

Dans [31], l'auteur a déterminé la valeur exacte du nombre de Grundy de la famille des graphes 4-réguliers sans C_4.

Théorème 2.3.1 *[31] Soit* G *un graphe* 4*-régulier. Si* G *est sans* C_4 *induit, alors* $\Gamma(G) = 5$.

Corollaire 2.3.1 *[31] Soit* G *un graphe cubique. Si* G *est sans* C_4 *induit, alors* $\Gamma(G) = 4$.

2.3.4 Le nombre de Grundy du complémentaire d'un graphe biparti

Dans [26], l'auteur a prouvé qu'une coloration de Grundy du complémentaire d'un graphe biparti peut être obtenu à partir d'une clique de taille maximum du graphe, puis il a donné

une valeur exacte du nombre de Grundy du complémentaire d'un tel graphe, en outre il a montré que la détermination de ce paramètre est NP-complet pour cette famille de graphes.

Théorème 2.3.2 *[16] Soit* G *le complémentaire d'un graphe biparti. Alors, une coloration de Grundy avec* $\Gamma(G)$ *couleurs de* G *peut être obtenue à partir d'une clique de taille maximum de* G.

Théorème 2.3.3 *[16] Soit* G *le complémentaire d'un graphe biparti* H. *Alors* $\Gamma(G) = n - m$, *où* n *est l'ordre de* G *et* m *la taille minimale d'un ensemble d'arêtes dominant dans* H.

Les résultats suivants ont été prouvés dans [41].

Théorème 2.3.4 *[41] Soit* G *est un graphe biparti. Alors*

$$\Gamma(\overline{G}) = \alpha(T(G)).$$

Théorème 2.3.5 *[41] Soit* G *le complémentaire d'un graphe biparti. Alors*

$$\Gamma(G) \leq \frac{3\omega(G)}{2}.$$

2.3.5 Le nombre de Grundy pour les graphes critiques

Lemme 2.3.3 *[16] Pour tout graphe* G *et un sommet* v *de* G, *on a :*

$$\Gamma(G) \leq \Gamma(G \setminus v) + 1.$$

Définition 2.3.1 *[16] Un graphe* G *est dit critique si pour tout sommet* v, *on a*

$$\Gamma(G) = \Gamma(G \setminus v) + 1$$

2.3.6 Le nombre de Grundy du produit cartésien de deux graphes

Dans cette partie, nous présentons quelques travaux sur le nombre de Grundy du produit cartésien de deux graphes.

Proposition 2.3.2 *[5] Soit* $G = (V, E)$ *un graphe biparti. Soit* P_n *une chaîne d'ordre* $n \geq 3$ *et* C_m *un cycle d'ordre* $m \geq 4$. *Alors*

$$\begin{cases} \Gamma(G \square P_n) \geq \Gamma(G) + 2 \\ \Gamma(G \square C_m) \geq \Gamma(G) + 2 \end{cases}$$

Proposition 2.3.3 *Soit* G *un graphe non biparti d'ordre* n_G. *Soient* P_n *une chaîne d'ordre* $n \geq 4$ *et* C_m *un cycle d'ordre* $m \geq 4$. *Alors*

$$\begin{cases} \Gamma(G \square P_n) \geq \Gamma(G) + 1, \\ \Gamma(G \square C_m) \geq \Gamma(G) + 1. \end{cases}$$

Le résultat suivant a été prouvé par les mêmes auteurs de [5].

Corollaire 2.3.2 *[5] Soient* P_n *et* P_m *deux chaînes d'ordre* n *et* m *respectivement, et soient* C_n, C_m *et* C_k *trois cycles d'ordre* n, m *et* k *respectivement. Alors*

(a) $\Gamma(P_n \square P_m) = \begin{cases} (\leq)4 \text{ si } n = 2 \text{ ou } n = m = 3 \\ 5 \text{ sinon} \end{cases}$

(b) $\Gamma(P_n \square C_k) = \begin{cases} 4 \text{ si } n = 2 \text{ ou } n = k = 3 \\ 5 \text{ sinon} \end{cases}$

(c) $\Gamma(C_n \square C_m) = \begin{cases} (\leq)4 \text{ si } n = 3 \text{ et } m = 4 \text{ ou } n = m = 3 \\ 5 \text{ sinon} \end{cases}$

Théorème 2.3.6 *[5] Soit* G *un graphe biparti d'ordre* n_G. *Soit* K_p *un un graphe complet à* p *sommets, avec* $p \geq 3$.*Alors*

$$\Gamma(G) + p - 1 \leq \Gamma(K_p \square G) \leq p + \Delta(G).$$

Les mêmes auteurs ont parvenu à prouver d'autres résultats dans [5], on cite par exemple le nombre de Grundy du produit cartésien de plusieurs graphes.

2.3.7 Nombre de Grundy de la couronne d'un graphe

Proposition 2.3.4 *[35] Soit* $Cr(G)$ *la couronne d'un graphe* G. *Alors*

$$\Gamma(Cr(G)) = \Gamma(G) + 1.$$

Dans *[7, 8], C. Germain and H. Kheddouci* ont étudié la coloration Grundy pour les graphes de puissance où ils ont donné des bornes sur $\Gamma(G)$ pour les graphes de puissance d'une chaîne, d'un cycle, d'une chenille et d'un arbre binaire complet. Cette coloration est également explorée pour d'autres graphes comme l'échiquier [9].

Chapitre 3

Nouveaux résultats sur la coloration de Grundy

Dans ce chapitre, nous donnons les valeurs exactes du nombre de Grundy de certains graphes particuliers ensuite nous donnons une condition nécéssaire sur les graphes bipartis arête Γ^--critiques, dont la suppression d'une arête quelconques du graphe fait de diminuer son nombre de Grundy.

Le travail présenté dans ce chapitre a été réalisé en collaboration avec A. Bendali-Braham et sous la direction de N. Ikhlef Eschouf.

3.1 Nombre de Grundy de certains graphes particuliers

Dans cette section, nous donnons les valeurs exactes du nombre de Grundy du graphe milieu et du graphe total d'une chaîne P_n, d'un cycle C_n et d'une étoile $K_{1,n}$

3.1.1 Nombre de Grundy du graphe milieu et du graphe total d'une chaîne

Proposition 3.1.1 *Pour toute chaîne* P_n *d'ordre* $n \geq 2$.

$$\Gamma(M(P_n)) = \begin{cases} 2 \text{ si } n = 2 \\ 3 \text{ si } n = 3,4 \\ 4 \text{ si } n \geq 5 \end{cases}.$$

Preuve. Posons $V(P_n) = v_1, v_2, ..., v_n$ et $E(P_n) = e_1, e_2, ..., e_{n-1}$ avec $e_j = v_j v_{j+1}$, $1 \leq j \leq n-1$. Soit $G = M(P_n)$. Par définition de G, on a $V(G) = V(P_n) \cup E(P_n)$. Pour $n = 2$, on a par la

Proposition 2.3.1, $\Gamma(G) = 2$ puisque $G = P_3$. (Voir la Figure 3.1).

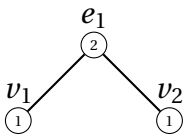
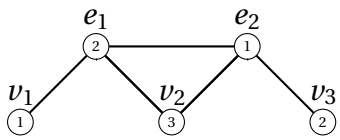


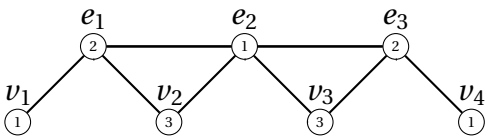
FIGURE 3.1 – Une coloration de Grundy optimale de $M(P_2)$

Soit c de G avec k couleurs. Pour $n \in \{3,4\}$, il facile de vérifier que $\omega(G) = 3$, et donc $k \geq \omega(G) = 3$. Montrons maintenant que $k \leq 3$. Fixons d'abord $n = 3$ et supposons au contraire que $k \geq 4$. Comme $\Delta(G) = 3$, la Proposition 2.2.1 implique que $k = 4$. La structure de G et la définition de la coloration de Grundy impliquent que les sommets de G qui peuvent avoir la couleur 4 sont e_1 et e_2 car ils sont de degré 3. Sans perte de généralité, supposons que $c(e_1) = 4$. Par conséquent, tous les voisins de e_1 sont de couleurs distinctes, et $c(v_1) = 1$ puisque v_1 est une feuille adjacente à un sommet support de couleur 4. Dans ce cas, le sommet v_2 ne peut pas avoir la couleur 3 car sinon il ne sera plus un sommet de Grundy. Donc $c(v_2) = 2$ et par suite $c(e_2) = 3$ car tous les voisins de e_1 sont de couleurs distinctes. Mais dans ce cas v_2 n'est pas un sommet de Grundy puisque il n'a pas un voisin de couleur 1, contradiction. D'où $k = 3$. Pour $n = 4$, supposons aussi que $k \geq 4$. Le Théorme d'interpolation (Théorème 2.1.1) indique que G admet une coloration de Grundy avec 4 couleurs. De ce fait, on peut supposer, sans perte de généralité, que $k = 4$. Il est à souligner que G possède un seul sommet e_2 de degré 4, deux sommets e_1 et e_3 de degré 3, deux sommets v_2 et v_3 de degré 2 et deux sommets v_1 et v_4 de degré 1. Si $c(e_1) = 4$ ou $c(e_3) = 4$, alors le même raisonnement précédent conduit à une contradiction. Supposons alors que $c(e_2) = 4$. Vu que v_2 et v_3 sont de degré 2 et ils sont adjacents à e_2 (sommet de couleur 4), alors ces deux sommets ne peuvent pas avoir la couleur 3 car sinon ils ne seront pas des sommets de Grundy. De ce fait, l'un des deux sommets e_1, e_3, disons e_1 est de couleur par 3. Par conséquent $c(v_1) = 1$ et $c(v_2) = 2$. Mais dans ce cas, v_2 n'est pas un sommet de Grundy puisque il ne possède pas de sommet de couleur 1, contradiction. En conséquence, $k = 3$.

Pour $n \geq 5$, une coloration de Grundy de G avec 4 couleurs est obtenue de la façon suivante. Pour tout $i \in \{1,...,n\}$, $c(v_i) = 1$ et $c(e_1) = c(e_4) = 2$, $c(e_2) = 3$, $c(e_3) = 4$ et pour $j \in \{5,...,n-1\}$, $c(e_j) = 3$ si j est impair et $c(e_j) = 2$ si j est pair. Ceci implique que $k \geq 4$. Montrons maintenant que $k \leq 4$. Supposons au contraire que $k \geq 5$. Vu que $\Delta(G) = 4$, la Proposition 2.2.1 implique que $k = 5$. Il est à noter que les sommets qui peuvent avoir la couleur



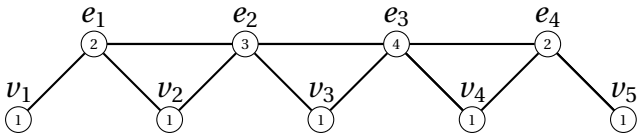
Graphe $M(P_3)$



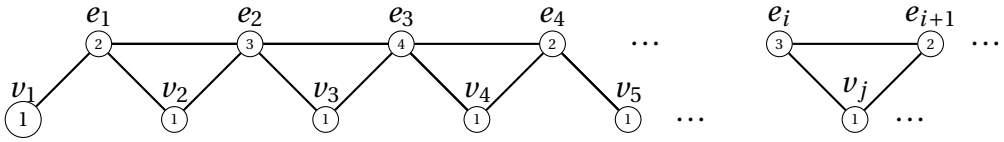
Graphe $M(P_4)$

FIGURE 3.2 – Une coloration de Grundy optimale du graphe de $M(P_n)$ où $n \in \{3,4\}$,

5 sont les sommets e_i tel que $i \neq 1, n-1$ puisque ils sont les seuls sommets de degré au moins 4. Vu que $d_G(e_i) = 4$, $(i \neq 1, n-1)$, alors tous les voisins de e_i sont de couleurs distinctes. Les mêmes arguments cités ci-dessus montrent que les sommets v_i et v_{i+1} ne peuvent prendre que les couleurs 1 ou 2. Sans perte de généralité, supposons que $c(v_{i+1}) = 2$. Comme les voisins de e_i sont de couleurs distinctes et $d_G(v_{i+1}) = 2$, alors $c(e_{i+1}) = 3$ ou 4, mais dans ce cas v_{i+1} n'est plus un sommet de Grundy, contradiction. Donc $k = 4$ pour tout $n \geq 5$.



Graphe $M(P_5)$



Graphe $M(P_n)$, $n \geq 5$.

FIGURE 3.3 – Une coloration de Grundy optimale du graphe de $M(P_n)$, $n \geq 6$.

■

Proposition 3.1.2 *Pour toute chaîne* P_n *d'ordre* $n \geq 2$.

$$\Gamma(T(P_n)) = \begin{cases} 3 \text{ si } n = 2 \\ 4 \text{ si } n = 3 \\ 5 \text{ si } n \geq 4 \end{cases}$$

Preuve. Comme précédemment, on pose $G = T(P_n)$ avec $V(G) = V(P_n) \cup E(P_n)$ où $V(P_n) = v_1, v_2, ..., v_n$ et $E(P_n) = e_1, e_2, ..., e_{n-1}$ tel que $e_j = v_j v_{j+1}$, $1 \leq j \leq n-1$. Si $n = 2$, alors la Propostion 2.3.1 (1) donne $\Gamma(G) = 3$ puisque $G = K_3$.

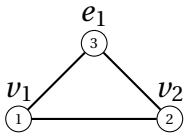


FIGURE 3.4 – Une coloration de Grundy optimale du graphe de $T(P_2)$

Si $n \geq 3$, posons $G = T(P_n)$ et $k = \Gamma(G)$. Pour $n = 3$, G possède un seul sommet v_2 de degré 4, deux sommets e_1 et e_2 de degré 3 et deux sommets v_1 et v_3 de degré 2. Une coloration de Grundy de G avec 4 couleurs est obtenue de la manière suivante. Affecter les couleurs 2, 3 et 4 aux sommets e_1, e_2 et v_2 respectivement et affecter la couleur 1 aux sommets v_1 et v_3.

Montrons maintenant que $k \leq 4$. Supposons au contraire que $k \geq 5$. Comme $\Delta(G) = 4$, alors $k = 5$. Il est clair que la couleur 5 est assignée au sommet v_2 puisque il est le seul sommet de degré 4. La même raison implique que tous les voisins de v_2 sont de couleurs distinctes. Egalement, vu que $d_G(e_1) = d_G(e_2) = 3$ et $d_G(v_1) = d_G(v_3) = 2$, alors la couleur 4 est assignée à l'un des deux sommets e_1, e_2, disons e_1. Par suite, le sommet v_1 est coloré par 1 car sinon il ne sera pas un sommet du Grundy. Par ailleurs, v_3 sera forcément coloré 2 ou 3; dans les deux cas v_3 n'est pas un sommet de Grundy car il lui manque la couleur 1 dans son voisinage. contradiction. D'où, $k = 4$.

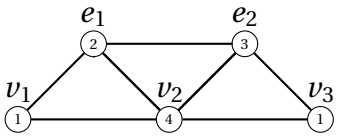


FIGURE 3.5 – Une coloration de Grundy optimale du graphe de $T(P_3)$

Si $n \geq 4$, alors comme $\Delta(G) = 4$, la Proposition 2.2.1 donne $\Gamma(G) \leq 5$. Pour montrer que $\Gamma(G) \geq 5$, il suffit d'exhiber une coloration de Grundy de G avec 5 couleurs de la façon suivante. Assigner les couleurs 3, 4, 5 aux sommets e_2, v_2, et v_3 respectivement, la couleur 1 aux sommets v_1 et e_3 et la couleur 2 aux sommets v_4 et e_1 ; et pour tout $i \geq 1$, colorer le reste des sommets du graphe comme suit $c(v_{3i+2}) = 1$, $c(v_{3i+3}) = 3, c(v_{3i+4}) = 2$ et $c(e_{3i+1}) = 3$, $c(e_{3i+2}) = 2, c(e_{3i+3}) = 1$. D'où $k = 5$ pour $n \geq 4$.

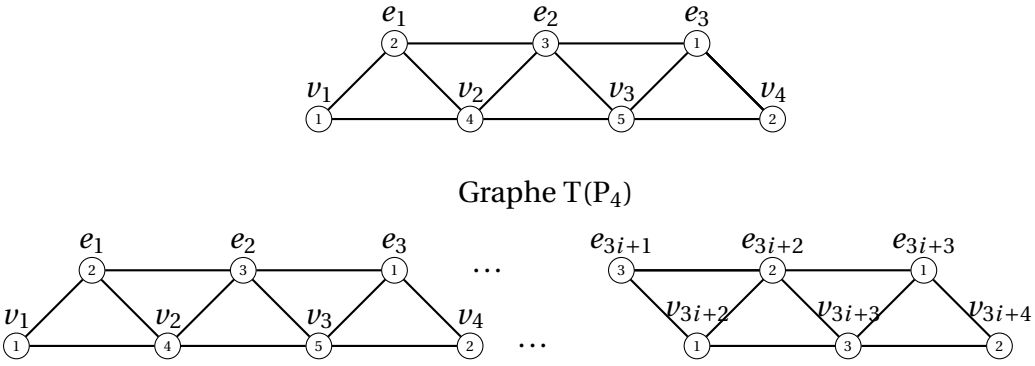


FIGURE 3.6 – Une coloration de Grundy optimale du graphe de T(P_n), $n \geq 4$

■

3.1.2 Nombre de Grundy du graphe milieu et du graphe total d'un cycle

Proposition 3.1.3 *Pour tout cycle* C_n *d'ordre* $n \geq 3$*, on a* $\Gamma(M(C_n)) = 4$.

Preuve. Posons $G = M(C_n)$ et $k = \Gamma(G)$. Pour $i \in \{1, ..., n\}$, notons par v_i et e_i les sommets et les arêtes de C_n respectivement, et posons $V(G) = V(P_n) \cup E(P_n)$ où $V(P_n) = v_1, v_2, ..., v_n$ et $E(P_n) = e_1, e_2, ..., e_n$ tel que $e_j = v_j v_{j+1}$.

Pour $n = 3$, une coloration de Grundy de G avec 4 couleurs est obtenue comme suit. Pour tout $i = 1, 2, 3$, coloré v_i par 1 et e_i par $i + 1$. D'où $k \geq 4$. Montrons que $k \leq 4$. Supposons au contraire que $k \geq 5$. Puisque le degré maximum de G est égal à 4, alors $k = 5$. Etant donnée une coloration de Grundy de G avec k couleurs, la structure de G implique que l'un des trois sommets e_1, e_2, e_3, disons e_1 est coloré 5, et par suite et pour la même raison, l'un des deux sommets e_2, e_3, disons e_2 est coloré 4. De ce fait, v_1, v_2 et v_3 ne peuvent être colorés par 3 sinon ils ne seront des sommets de Grundy piusque il y a toujours la couleur 1 ou 2 qui manque dans leurs voisinages. Par conséquent, e_3 est coloré par 3. Mais dans ce cas et pour la même raison, les sommets v_1 et v_2 ne peuvent pas aussi recevoir la couleur 2, contradiction avec le fait que e_3 est un sommet de Grundy. D'où $k = 4$.

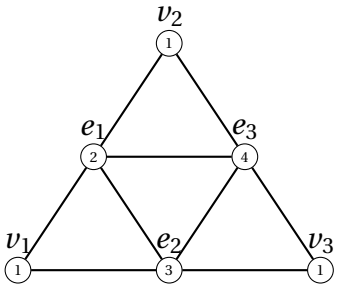
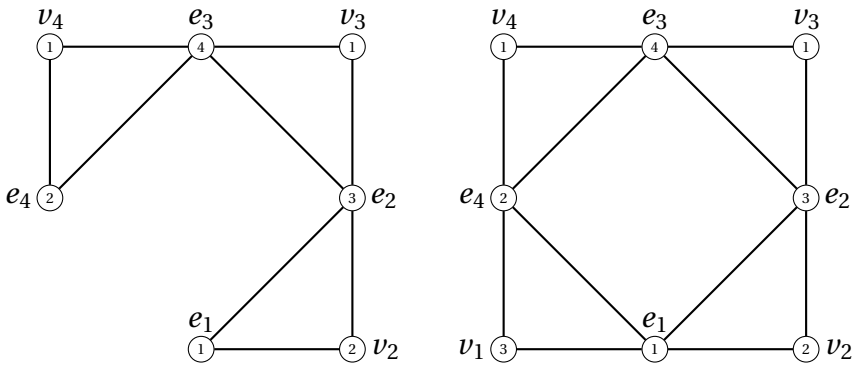


FIGURE 3.7 – Une coloration de Grundy optimale du graphe de M(C_3)

Pour $n \geq 4$, soit H un sous-graphe de G induit par les sommets $e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, e_4, v_4$. Soit c une coloration de H (coloration partielle de G) avec 4 couleurs définie comme suit. Colorer les sommets e_1, v_3, v_4 par 1, v_2, e_4 par 2, et colorer e_2, e_3 par 3,4 respectivement. Il est facile vérifier que c est une coloration de Grundy de G avec 4 couleurs ; d'où $\Gamma(G) \geq 4$. Par la Proposition 2.2.3, $k \geq \Gamma(H) \geq 4$. Montrons maintenant que $k \leq 4$. Supposons au contraire que $k \geq 5$. Vu que $\Delta(G) = 4$, alors $k = 5$. Les sommets de couleurs 5 sont les sommets e_i puisque les autres sommets sont de degré 2. Notons que les voisins de e_i sont $v_i, v_{i+1}, e_{i+1}, e_{i-1}$. Les sommets v_i, v_{i+1} ne peuvent être colorés 4 ou 3 car sinon ils ne seont des sommets de Grundy. Donc, par symétrie, on peut supposer que e_{i+1}, e_{i-1} sont colorés 3 et 4 respectivement. Par conséquent, l'un des deux sommets v_i, v_{i+1}, disons v_i est coloré 2 ; mais dans ce cas v_i n'est plus un sommet de Grundy car il lui manque la couleur 1 dans son voisinage, contradiction. D'où $k = 4$.



Graphe H est un sous graphe de G Graphe G

FIGURE 3.8 – Une coloration de Grundy optimale du graphe de M(C_n), $n \geq 4$

■

Proposition 3.1.4 *Pour tout cycle* C_n *d'ordre* $n \geq 3$*, on a*

$$\Gamma(T(C_n)) = \begin{cases} 3 \text{ si } n = 3 \\ 5 \text{ si } n \geq 4 \end{cases}$$

Preuve. Posons $G = T(C_n)$ et $k = \Gamma(G)$. Pour $i \in \{1, ..., n\}$, notons par v_i et e_i les sommets et les arêtes de C_n respectivement, et posons $V(G) = V(P_n) \cup E(P_n)$ où $V(P_n) = v_1, v_2, ..., v_n$ et $E(P_n) = e_1, e_2, ..., e_n$ tel que $e_j = v_j v_{j+1}$.

Pour $n = 3$, on a $\omega(G) = 3$, et donc d'où $k \geq 3$. Il reste à prouver que $k \leq 3$. Supposons au contraire que $k \geq 4$. Vu que $\chi(G) = 3$, alors par le théorème d'interpolation, G possède une coloration de Grundy avec 4 couleurs. Remarquons que G est un graphe 4-régulier dont tous les sommets jouent le même rôle et cela à cause de la symétrie. De ce fait, on peut supposer que e_1 est coloré 4 et par conséquent v_1, v_2, e_2 sont colorés $2, 3, 1$ respectivement. Le sommet e_3 et v_3 ne peuvent pas recevoir la couleur 1 car ils sont adjacents à e_2 déjà coloré 1. Mais dans ce cas, la couleur 1 est manquante dans le voisinage de v_1, contradiction. D'où $k = 3$.

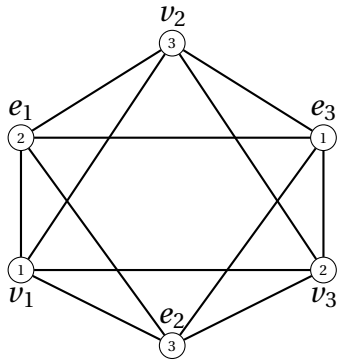


FIGURE 3.9 – Une coloration de Grundy optimale du graphe de $T(C_3)$

Si $n \geq 4$, alors puisque $\Delta(G) = 4$, la Proposition 2.2.1 donne $k \leq 5$. Montrons maintenant que $k \geq 5$. Pour cela, considérons un sous-graphe H de G induit par les sommets $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4$. Soit c une coloration de H définie comme suit. $c(v_1) = 1$, $c(e_1) = 2$, $c(v_2) = 5$, $c(e_2) = 4$, $c(v_3) = 3$, $c(e_3) = 1$, $c(v_4) = 2$. Il n'est pas difficle de vérifier que c est une coloration de Grundy de H avec 5 couleurs. Par conséquent, le Théorème 2.2.3 implique que $k \geq \Gamma(H) = 5$. D'où $k = 5$.

■

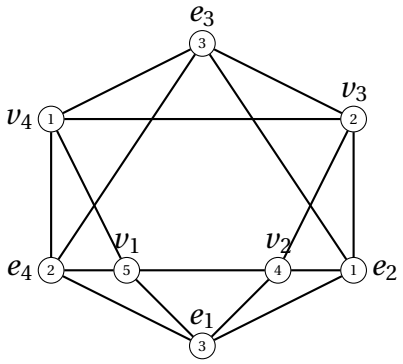


FIGURE 3.10 – Une coloration de Grundy optimale du graphe de $T(C_n)$

3.1.3 Nombre de Grundy du graphe milieu et du graphe total d'une étoile

Proposition 3.1.5 *Soit* $K_{1,n}$ *une étoile d'ordre* $n \geq 2$. *Alors* $\Gamma(M(K_{1,n})) = n+1$.

Preuve. Posons $G = M(K_{1,n})$ et $k = \Gamma(G)$. Par définition, G possède un sommet x de degré n, n sommets $v_1, v_2, ..., v_n$ de degré 1 et n sommets $e_1, e_2, ..., e_n$ de degré $n+1$ tel que e_i est adjacent à v_i et x pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Vu que $\omega(G) = \Delta(G) = n+1$ alors $n+1 \leq k \leq n+2$. Supposons que $k = n+2 \geq 4$ et considérons une coloration de Grundy de G avec k couleurs. Clairement l'un des sommets $e_1, e_2, ..., e_n$, disons e_1 est coloré par $n+2$. Ceci implique que v_1 est forvément coloré par 1 car sinon il ne sera pas un sommet de Grundy. Notons que les sommets $x, e_1, e_2, ..., e_n$ induisent un sous graphe complet de G ; par conséquent, tous ces sommets ont des couleurs distinctes. Vu que tous les voisins de e_1 sont de couleurs distinctes, il s'en suit que x est de couleur différente de 1. Mais dans ce cas, x ne serait pas un sommet de Grundy puisque il lui manque la couleur 1 dans son voisinage, contradiction. D'où $k = n+1$.

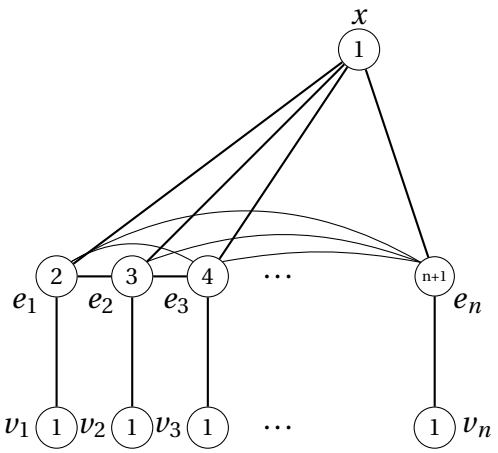


FIGURE 3.11 – Une coloration de Grundy optimale du graphe de $M(K_{1,n})$

■

Proposition 3.1.6 *Soit* $K_{1,n}$ *une étoile d'ordre* $n \geq 2$. *Alors* $\Gamma(T(K_{1,n}) = n+2$.

Preuve. Supposons que $G = T(K_{1,n})$, il est à soulugner que $G = K_1 \vee Cr(K_n)$. En utilisant la Propositions 2.3.4 obtient, $\Gamma(G) \leq n+2$. Pour prouver que $\Gamma(G) \geq n+2$, on affecte les couleurs aux sommets du graphe G_n comme suit : $c(x) = n+2$, pour tout $i \in \{1,...,n\}$ $c(y_i) = i+1$ et $c(z_i) = 1$, (voir Figure 3.12). Alors $\Gamma(G) = n+2$, on trouve $\Gamma(T(K_{1,n})) = n+2$.

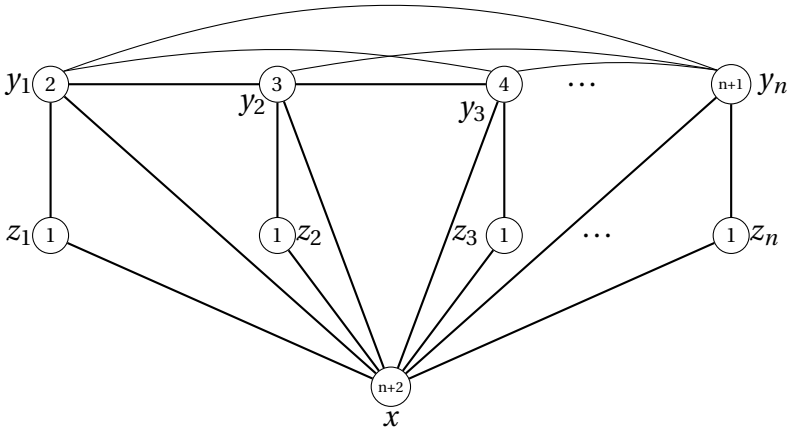


FIGURE 3.12 – Une coloration de Grundy optimale du graphe de $T(K_{1,n})$

■

3.2 Graphes arête Γ-critiques

Cette partie est consacrée à l'étude des graphes dont la suppression d'une arête quelconque du graphe fait diminuer son nombre de Grundy.

Lemme 3.2.1 *[15]Soit* G *est un graphe. Alors pour toute arête e :*

$$\Gamma(G) - 1 \leq \Gamma(G \backslash e) \leq \Gamma(G) + 1.$$

On peut classer les graphes arête Γ-critiques en trois classes comme suit :
La classe des graphes arête $\Gamma^{=}$-critiques : $\forall$ l'arête $e \in E$, $\Gamma(G-e) = \Gamma(G)$.
La classe des graphes arête Γ^{-}-critiques : $\forall$ l'arête $e \in E$, $\Gamma(G-e) < \Gamma(G)$.
La classe des graphes arête Γ^{+}-critiques : $\forall$ l'arête $e \in E$, $\Gamma(G-e) > \Gamma(G)$.
Vu la définition ci-dessus et le Lemme 3.2.1, on a immédiatement la définition suivante.

Définition 3.2.1 *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe. Alors* G *est dit*

— *arête* $\Gamma^{=}$*-critiques, si* $\forall e \in E$, $\Gamma(G-e) = \Gamma(G)$ *;*

— *arête* Γ^{+}*-critiques, si* $\forall e \in E$, $\Gamma(G-e) = \Gamma(G) + 1$ *;*

— *arête* Γ^{-}*-critiques, si* $\forall e \in E$, $\Gamma(G-e) = \Gamma(G) - 1$.

En utilisant la définition des arête Γ-critiques et le nombre de Grundy de joint de deux graphes on peut facilement prouver le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.1 *Le joint de deux graphe arête* Γ*-critiques est un graphe arête* Γ*-critique.*

3.2.1 Graphes arête Γ^{-}-critiques

Cette partie est destinée aux graphes arête Γ^{-}-critiques, où nous donnons quelques propriétés d'un tel graphe G, ensuite nous donnons une condition nécéssaire pour les graphes bipartis arête Γ^{-}-critiques. Commençons notre étude par le théorème suivant.

Théorème 3.2.1 *Soient* $G = (V, E)$ *un graphe arête* Γ^{-}*-critique, c une coloration de Grundy de* G *avec* $\Gamma(G)$ *couleurs. Alors,*

1. *Tout sommet* $x \in V(G)$ *de couleur* $i \in \{2, \ldots, \Gamma\}$*, a exactement un seul voisin de couleur* j*, pour tout* $j \in \{1, \ldots, i-1\}$ *;*

2. *Pour tour* $i \in \{2,\dots,\Gamma-1\}$, *tout sommet de* $x \in C_i$ *a au moins un voisin dans* $\bigcup_{j=i+1}^{\Gamma} C_j$ *tel que* $\left|N(x) \cap C_j\right| \leq 1$).
3. G *est connexe.*

Preuve. Soient $G = (V,E)$ un graphe arête Γ^--critique, c une coloration de Grundy de G avec k couleurs.

(1) Soit x un sommet de Grundy de couleur i adjacent à au moins deux sommets ayant la même $j < i$ tel que l'un d ces deux sommets est noté y. Alors $\Gamma(G \setminus xy) \geq \Gamma(G)$, contadiction.

(2) Soit $x \in C_i$, $i \in \{2,\dots,\Gamma-1\}$, supposons que x n'a aucun voisin dans $\cup_{j=i+1}^{\Gamma} C_j$. Alors la suppression d'une arête quelconque incidente á x n'a aucun effet sur $\Gamma(G)$, contradiction.

(3) Supposons que G est non connexe tel que $G = G_1 + G_2$. D'après le Lemme 2.3.2, $\Gamma(G) = \max\{\Gamma(G_1),\Gamma(G_2)\}$. Sans perte de généralité, supposons que $\Gamma(G) = \Gamma(G_1)$. Dans ce cas, la suppression d'une arête quelconque $e \in E(G_2)$ n'a aucun effet sur $\Gamma(G)$, c'est-à-dire $\Gamma(G \setminus e) \geq \Gamma(G) = \Gamma(G_1)$, contradiction. ■

Le corollaire suivant est un résultat direct du théorème précédent.

Corollaire 3.2.2 *Soit* G *un graphe arête* Γ^-*-critique, c une coloration de Grundy de* G *avec* $\Gamma(G)$ *couleurs. Pour* $i \in \{1,\dots,\Gamma\}$, *soit* C_i *la classe de couleur i de c. Alors,* $|C_\Gamma| = |C_{\Gamma-1}| = 1$ *et pour tout* $i \in \{1,\dots,\Gamma-2\}$ $1 \leq |C_i| \leq \sum_{j=i+1}^{\Gamma} |C_j| \leq 2^{\Gamma-i-1}$.

Preuve. D'après le Théorem 3.2.1 (1) et (2), implique que $1 \leq |C_i| \leq \sum_{j=i+1}^{\Gamma} |C_j|$ et par conséquent pour tout $i \in \{1,...,\Gamma\}$ on a $1 \leq |C_i| \leq 2^{\Gamma-i-1}$. ■

Maintenant, on va donner une condition nécéssaire pour les graphes bipartis arête Γ^--critiques. Pour cela, on se ramène à définir une famille de graphes bipartis $\mathscr{G}$ comme suit.

Définition 3.2.2 (Class $\mathscr{G}$) *Soit* $G = (A \cup B, E)$ *un graphe biparti connexe, et soit* $k \geq 2$ *un entier natural. Alors* $G \in \mathscr{G}$ *s'il vérifie les quatre conditions suivantes.*

(i) $A = \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$ *et* $B = \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i$ *tels que*

$$|A_{k-1}| = |B_{k-1}| = 1 \text{ et } |A_{k-2}| = |B_{k-2}| = 1$$

et pour tout $i \in \{1,\dots,k-3\}$

$$1 \leq |A_i| \leq \sum_{j=i+1}^{k-1} |B_j| \text{ et } 1 \leq |B_i| \leq \sum_{j=i+1}^{k-1} |A_j|;$$

(*ii*) *l'unique sommet de* A_{k-1} *est adjacent à l'unique sommet de* B_{k-1} *; et pour tout* $i \in \{1,\dots,k-2\}$, $A_i \cup B_i$ *est un ensemble stable ;*

(*iii*) *Pour tout* $i \in \{2,\dots,k-1\}$, *tout sommet de* A_i *(resp.,* B_i*) a exactement un seul voisin dans* B_j *(resp.,* A_j*) pour tout* $j \in \{1,\dots,i-1\}$ *;*

(*iv*) *Tout sommet* $a \in A_i$, $i \in \{2,\dots,k-1\}$, *(resp.,* $b \in B_i$*) possède au moins un voisin dans* $\bigcup_{j=i+1}^{k-1} B_j$ *tel que* $\left|N(a) \cap B_j\right| \leq 1$ *(resp.,* $\bigcup_{j=i+1}^{k-1} A_j$ *tel que* $\left|N(b) \cap A_j\right| \leq 1$*).*

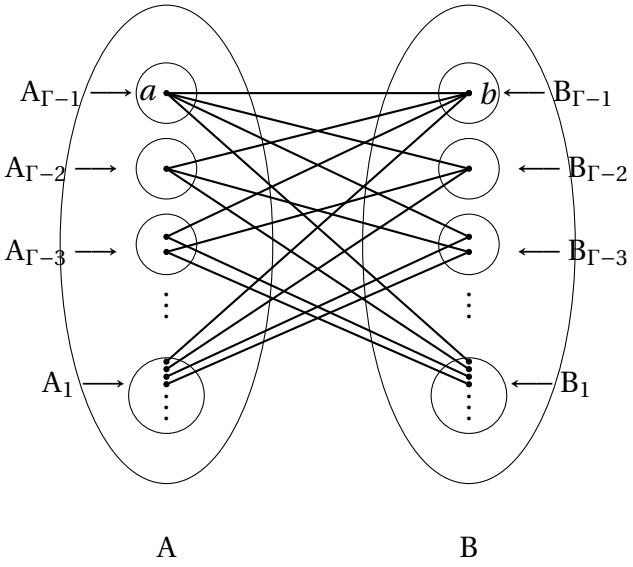


FIGURE 3.13 – le graphe biparti arête Γ^--critiques

Théorème 3.2.2 *Si* $G = (V,E)$ *est graphe biparti* Γ^-*-arête-critique, alors* $G \in \mathscr{G}$.

Preuve. Posons $k = \Gamma(G)$. Soient $G = (A \cup B, E)$ un graphe biparti arête Γ^--critique et c une coloration de Grundy de G avec k couleurs. Soit C_i la classe de couleur $i \in \{1,\dots,k\}$. Le Théorème 3.2.1 (3) implique que G est connexe. D'après le Corollaire 3.2.2, $|C_k| = |C_{k-1}| = 1$ et par conséquent l'unique sommet de C_k est adjacent à l'unique sommet C_{k-1} et inversemment. Posons alors $C_k = \{a\}$ et $C_{k-1} = \{b\}$. Vu que G est biparti et a est adjacent à b, alors on peut supposer sans perte de généralité, que $a \in A$ et $b \in B$. Comme a est un sommet de Grundy de couleur k, alors a a besoin de $k-1$ couleurs dans son voisinage, et par suite B contient au mois $k-1$ sommets de couleurs distinctes. Soit $B_i \subset B$ l'ensemble des sommets de couleur i. Egalement et pour le même argument, A possède au moins $k-1$ sommets de couleurs distinctes. Pour $i \in \{1,...,k-2\}$, soit $A_i \subset A$ et $B_i \subset B$ l'ensemble des sommets de couleur i, alors $A_i \cup B_i$ est un stable et $C_i = A_i \cup B_i$. Soit $a_i \in A_i$ (resp. $b_i \in B_i$). Comme a_i et b_i sont

des sommets de Grundy, alors chacun de ses deux sommets a un voisin dans B_j (resp. A_j) pour $j < i$. Le Théorème 3.2.1 (1) implique que pour tout $i \in \{2,\dots,k-1\}$, tout sommet de A_i (resp., B_i) a exactement un seul voisin dans B_j (resp., A_j) pour tout $j \in \{1,\dots,i-1\}$, il en résulte donc que pour tout $i \in \{1,\dots,k-3\}$, $1 \leq |A_i| \leq \sum_{j=i+1}^{k-1} |B_j|$ et $1 \leq |B_i| \leq \sum_{j=i+1}^{k-1} |A_j|$. Le fait que G est un graphe biparti et le Théorème 3.2.1 (2), impliquent que tout sommet $a \in A_i$, $i \in \{2,\dots,k-1\}$, (resp., $b \in B_i$) possède au moins un voisin dans $\bigcup_{j=i+1}^{k-1} B_j$ tel que $\left|N(a) \cap B_j\right| \leq 1$ (resp., $\bigcup_{j=i+1}^{k-1} A_j$ tel que $\left|N(b) \cap A_j\right| \leq 1$). En conséquence, $G \in \mathscr{G}$. ■

Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce mémoire à la notion de la coloration de Grundy, et le nombre de Grundy. La détermination de $\Gamma(G)$ est un problème NP-complet pour un graphe quelconque. De ce fait, nous avons déterminé la valeur exacte de ce parmètre pour des classes particulières des graphes, à savoir, les graphes milieu et total d'une chaîne, d'un cycle et d'une étoile. Ensuite, nous avons donné une condition nécéssaire pour que les graphes bipartis soient arête Γ^{-}-critiques.

Bibliographie

[1] Gyàrfàs, J. Lehel, On-line and first-fit coloring of graphs, J. Graph Theory 12(1988)217 – 227.

[2] A. Mansouri, M. salim bouhlel. On the equality of the Grundy numbers of a graph. International Journal of Next-Generation Networks (IJNGN) Vol.5, No.4, December 2013.

[3] A. Gyárfás, Z. Király, J. Lehel, On-line 3-chromatic graphs-II critical graphs, Discrete Math. 177(1997)99–122.

[4] C. Berge. *Graphs*. North Holland, 1985.

[5] B. Effantin and H.Kheddouci, Grundy number of graph. Discussiones Mathematicae. Graph Theory, 27 (2007) 5-18.

[6] R. Brooks. On coloring the nodes of a network. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 37 : 194 – 197, 1941.

[7] C. Germain and H. Kheddouci, Grundy coloration for power caterpillars, Proceedings of International Optimization Conference LNOC 2003, 243-247, October 2003 Evry/Paris France.

[8] C. Germain and H. Kheddouci, Grundy coloration for power of graphs, to appcar in Discrete Math. 2006.

[9] C. Parks and J. Rhyne, Grundy coloring for Chessboard Graphs, Seventh North Carolina Mini-Conference on Graph Theory, Combinatorics, and Computing (2002).

[10] C.A.Christer and S.M. Selow, Some perfect coloring properties of graphs, J. Combin. Theory B27 (1979) 49-59.

[11] F. Harary, S. Hedetniemi and G. Prins. An Interpolation theorem for graphical homomorphisms, Port. Math. 26 : 453 – 462, 1967.

[12] H.A. Kierstead, W.T. Trotter, On-line graph coloring, in : L.A. McGeoch, D.D. Sleator (Eds.), On-Line Algorithms : Proceedings of DIMACS Workshop, February 11–13, 1991, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992, pp. 85–92.

[13] N. Ikhlef Eschouf. Etude de la b-coloration dans les graphes : graphes extrémaux et graphes critiques. Université SAAD DAHLEB de Blida 2012.

[14] P. M. Grundy, Mathematics and Games. Eureka 2(1939)6-8.

[15] M. Aste, F. Havet, C. Linhares-Sales. Grundy number and products of graphs. [Research Report] RR-6672, INRIA. 2008.

[16] M. Zaker. Results on the Grundy chromatic number of graphs. Discrete Mathematics, 306 : 31663173, 2006

[17] M. Zaker, Inequalities for the Grundy chromatic number of graphs. July 2007 Available online 23 August 2007.

[18] E. A. Nordhaus, J. W. Gaddum. On complementary graphs. Ann. Math. Monthly, 63 : 175 – 177, 1956.

[19] F. Havet and L. Sampaio. On the Grundy and b-chromatic numbers of a graph. Algorithmica, 65 : 885899, 2013.

[20] F. Roussel et I. Rusu(1999). Holes and dominoes in Meyniel graphs. International Journal of Foundations of computer Science 10, pp. 127-146.

[21] S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi and T. Beyer, A linear algorithm for the Grundy (coloring) number of a tree, conge. Numer. 36 (1982) 351-363.

[22] Z. Shi, W. Goddard, S. T. Hedetniemi, K. Kennedy, R. Laskar, and A. McRae. An algorithm for partial Grundy number on trees. Discrete Mathematics, 304 : 108116, 2005.

[23] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf, F. Maffray. Characterization of b_γ-perfect graphs AKCE Int. J. Graphs Comb., 9, No. 1 (2012), pp. 21 – 29.

[24] Z. Tang, B. Wu, L. Hu. More bounds for the Grundy number of graphs. arXiv : 1507.0108v2 [math. CO] 8 Dec 2015.

[25] T. Hamada, I. Yoshimura : Traversability and connectivity of the middle graph of a graph. Discrete Math. 14 : 247 – 256 ; 1976.

[26] M. Behzad : A criterion for the planarity of the total graph of a graph. Proc. Camb.Philos. Soc. 63 : 679 - 681 ; 1967.

[27] G.J. Simmons, The ochromatic number of graphs, Graph Theory Newslett. 11 (6) (1982) 2 – 3.

[28] G.J. Simmons, The ochromatic number of planar graphs, in : F. Harary (Ed.), Proceedings of the First Colorado Symposium on Graph Theory, Wiley, New York, 1985, pp. 295 – 316.

[29] D.F. Manlove.Minimaximal and maximinimal optimization problems : a partial order-based approach. PhD thesis, technical report tr-1998 – 27 of the Computing Science Department of Glasgow University, 1998.

[30] R.W. Irving, D.F. Manlove. The b-chromatic number of graphs. Discrete Appl. Math. 91 ; 127 – 141 ; 1999.

[31] N. Gastineau. Partitionnement, recouvrement et colorabilité dans les graphes. Thèse de doctorat. Universitéde Bourgogne. 2014.

[32] K. Appel et W. Haken. Every planar map is four colorable : Part 1, discharging. Illinois. J. Maths., 21 : 429-490 ; 1977.

[33] K. Appel et W. Haken. Every planar map is four colorable : Part 2, reducibility. Illinois. J. Maths., 21 : 491-567 ; 1977.

[34] M. R. Garey, D. S., Johnson. Computers and Intractibility : A guide to the Theory of NP-completeness, W. H. Freman and Company, New York, 1979.

[35] G. Chartrand, F. Okamoto, Zs. Tuza and P. Zhang, A note on graphs with prescribed complete coloring numbers. J. Combin. Math. Combin. Comput. To appear.

[36] P. M. Grundy, Mathematics and games. Eureka 2 (1939) 6 – 8.

[37] P. Erdös, W.R. Hare, S.T. Hedetniemi, R. Laskar, On the equality of the Grundy and Ochromatic numbers of a graph, J. Graph Theory 11 (1987) 157 – 159.

[38] H. Al-Omari and K. E. Sabri. New Graph Coloring Algorithms. American Journal of Mathematics and Statistics 2 (4) : 739-741, 2006.

[39] Gyàrfàs, Z. Király, J. Lehel, On-line 3-chromatic graphs—II critical graphs, Discrete Math. 177 (1997) 99–122.

[40] H.A. Kierstead, W.T. Trotter, On-line graph coloring, in : L.A. McGeoch, D.D. Sleator (Eds.), On-Line Algorithms : Proceedings of DIMACS Workshop, February 11 – 13, 1991, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992, pp. 85 – 92.

[41] M. Zaker, Grundy chromatic number of the complement of bipartite graphs. Australasian journal of combinatorics. Volume 31(2005), Pages 325 – 329.