**République Algérienne Démocratique et Populaire**
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**
**Université Yahia Farès de Médéa**
**Département des Mathématiques et de l'Informatique**

# MÉMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

par

Allag Hanâa

# Étude de quelques types d'équations différentielles fractionnaires via l'intégrale de Henstock-Kurzweil-Pettis

Soutenu publiquement le ..... devant le jury composé de

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Président :* | S, Rafa | *M.C.A* | Université de Médéa |
| *Examinateur :* | K, Maloum | *M.A.A* | Université de Médéa |
| *Encadreur :* | N, Mekdache | *M.A.A* | Université de Médéa |

**Année universitaire : 2022-2023**

Le : 15 juin 2023

# Table des matières

**Remeciements** **II**

**Dédicace** **III**

**Résumé** **IV**

**Notations** **V**

**Introduction générale** **1**

**1 Préliminaires** **4**
1.1 Notions et définitions . . . . . 4

**2 Calcul fractionnaire** **13**
2.1 Fonction factorielle : . . . . . 13
2.2 Fonctions Gemma et Bêta . . . . . 13
2.3 L'intégrale et la dérivée fractionnaires au sens de Riemann-Liouville . . . . . 17
2.4 Dérivée fractionnaire de Caputo . . . . . 21

**3 Les équations intégrales sous intégrabilités Henstock-Kurezweil-Pettis** **24**
3.1 Préliminaires . . . . . 24
3.2 Résultat principale . . . . . 26

**Conclusion** **39**

**Bibliography** **40**

# Remeciements

*Je remercie avant tout "Le Dieu" qui m'a donnée la force et la volonté pour achever ce travail.*

*J'exprime ma reconnaissance à mon encadreur, monsieur "N .Mekdache", pour la confiance qu'il ma accordée en acceptant d'encadrer ce travail, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacré á diriger cette recherche .*

*Je remercie vivement monsieur "S .Rafa", de l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.*

*Je remercie également monsieur "Kh .Maloum" membres de jury pour l'honneur qu'il m'ont accordé en acceptant de juger mon travail.*

*J'adresse un grand merci à toute ma famille qui a toujours été présente lorsque j'en ai eu besoin, en particulier à mon père , ma mère et mon mari .*

*Enfin, je remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin á la réalisation de ce mémoire*

# Dédicace

*Je dédie ce travail :*

*A ma chère mère et à mon chèr père qui n'ont jamais cessé*

*et à mon chèr mari*

*de me supporter, me soutenir et m'encourager durent mes années d'études. Qu'ils trouvent ici le témoignage*

*de ma profonde gratitude et*

*reconnaissance.*

*A mes frères "Samir. Youcef. Faycel. Mouhammed. et Taki eddine"*

*mes sœurs " Safia. Raouia. Leila. Ikram"*

*A tous ceux qui m'ont aidé-de près ou de loin*

*et ceux qui ont partagé avec moi les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail et qui m'ont chaleureusement supporté et encouragé tout au long de mon parcours.*

*A tous mes copines qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de succès.*

*Merci !*

# Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions l'ensemble des solutions faibles des équations intégrales non linéaires de type Volterra dans les espaces de Banach, en utilisant l'intégrale de Henstock-Kurzweil-pettis et le théorème de point fixe. La condition principale est exprimée en termes de mesure de non -compacité faible. Nous avons également appliqué le calcul fractionnaire sur ce type d'équations.

**Mots-clés** : Calcul fractionnaire, point fixe, mesure de non compacité, espace de Banach, l'intégrale de Henstock-Kurzweil-pettis, l'ensemble des solutions faibles.

# Abstract

In this paper, we investigate the set of weak solutions for nonlinear Volterra type intégrale equations in Banach spaces, using the Henstock-Kurzweil-pettis intégrale and fixed point theorem. The main condition is expressed in terms of measure of weak noncompatness. We have also applied the fractional calculation on this type of équations.

**Keywords** : Fractional calculation, fixed point, measure of weak noncompatness, Banach space, the Henstock-Kurzweil-pettis intégrale, the set of weak solutions.

**ملخص**

في هذه المذكرة، قمنا بدراسة مجموعة الحلول الضعيفة لمعادلات تكاملية غير خطية من نوع فولتيرا في فضائات باناخ، باستعمال تكامل هنستوك ـ كوريتسوال ـ بيتيس و نظرية النقطة الصامدة، يتم التعبير عن الشرط الرئيسي بدلالة مقياس عدم التراص الضعيف . بالاضافة الى ذلك قمنا بتطبيق الحساب الكسري على هذا النوع من المعادلات.

**الكلمات المفتاحية** : الحساب الكسري . النقطة الصامدة . مقياس عدم التراص الضعيف . فضاء باناخ .تكامل هنستوك ـ كوريتسوال ـ بيتيس . مجموعة الحلول الضعيفة.

# Notations

| | |
|---|---|
| $E$ | Espace de Banach. |
| $E^{'}$ | Le dual de $E$. |
| $(M,d)$ | Espace metrique. |
| $C(K,E)$ | L'espace de tous fonctions continues de $K$ à $E$. |
| $\mathscr{M}$ | La famille de tous les sous-ensembles bornés non vide de $E$. |
| $conv(A)$ | L'enveloppe convexe de $A$. |
| $\overline{conv}(A)$ | L'enveloppe convexe fermé de $A$. |
| $\Gamma(\cdot)$ | La fonction gamma. |
| $\beta(\cdot,\cdot)$ | La fonction bêta. |
| $L_p[a,b]$ | Espace des fonctions mesurables de puissance $p$ intégrable sur $[a,b]$. |
| $L_\infty[a,b]$ | Espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur $[a,b]$. |
| $AC^1([a,b])$ ou $AC([a,b])$ | Espace des fonctions absolûment continues sur $[a,b]$. |
| $AC^n([a,b])$ | Espace des fonctions $y:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ telles que $y^{(n-1)}\in AC^1([a,b])$. |
| | et $y^{(k)}\in C([a,b])$, $k=1,...,n-1$. |
| $D_a^\alpha y$ | Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha>0$. |
| ${}^cD_a^\alpha y$ | Dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha>0$. |
| $BV(I,\mathbb{R})$ | L'espace des fonctions de variation bornées réelles. |
| $\|\cdot\|_{BV}$ | La norme classique de l'espace des fonctions de variation bornées. |
| $(\rightharpoonup)$ | La convergence faible. |

# Introduction

Le calcul fractionnaire est une extension des notions classique de permitive et des dérivées d'ordre non entier non nulle à tout ordre réel. Comme il est bien connu, cette théorie a été initiée par Liouville. Depuis quelques décennies, le calcul fractionnaire est appliqué dans un domaines scientifique nombreux et variés tel que la physique, la chimie, la mécanique, l'électricité, la biologie, l'économie, la théorie du contrôle ,... ect.

Bien que le concept de la dérivation d'ordre fractionnaire ne soit pas nouveau, ces origines remontaient à la fin de $17^{ieme}$ siècle, parlant de la réponse de "G.W.Leibniz" concernant la question de "l'Hôpitale", posée sur la signification de $\frac{d^n y}{dx^n}$ si $n=\frac{1}{2}$. Son intérêt n'est reconnu que durant les deux dernières décennies du $20^{eme}$ siècle où de nombreuses applications ont été dévloppées en utilisant ce concept. Le calcul fractionnaires a été intensivement dévloppé depuis la première conférence sur ce domaine en 1974.[26].

Dans les années soixante, "Jaroslav Kurzweil" et "Ralph Henstock" ont présentés, séparément, une autre théorie d'intégration à peine plus compliquée à exposer que l'intégrale de Riemann, mais au moins aussi puissant que l'intégrale de Lebesgue. Elle est équivalente aux intégrales de Denjoy ou de Perron [14] datant des années 1910, mais dont la présentation était assez lourde et qui est tombée en desuétude dans les années 1940. Par rapport à l'intégrale de Lebesgue, la KH-intégrale présente l'avantage que toute fonction dérivée est intégrable.

Les problèmes différentiels, intégraux et intégro-différentiels dans les espaces de Banach ont été largement étudies par nombreux auteurs. Récemment, pour des problèmes impliquant des fonction fortement oscillantes, de nombreux auteurs ont examiné l'existence de solution sous intégrabilité Henstock-Kurezweil-Pettis [[22],[11]-[15],[23],[24],[18]-[25]].
Dans ce mémoire, motivés par ces examens nous nous concentrons sur l'existence de solution au sens faible pour l'équation intégrale non linéaire de type Volterra dans les espaces de Banach

$$x(t)=h(t)+\int_0^t G(t,s)f(s,x(s),\int_0^s k(s,\tau)x(\tau)d\tau)ds, \tag{1}$$

impliquant l'intégrale de Henstock-Kurezweil-Pettis. Les principaux outils utilisés dans

notre étude sont associés aux techniques de mesure de non-compacité faible, de propriétés et de théorèmes de convergence principalement de type Vitali pour les intégrales de Henstock-Kurezweil-Pettis basés sur la notion d'équi-intégrabilité (voir[19]). En utilisant ces outils, nous pouvons prouver non seulement l'existence de solution de l'équation intégrale considérée, mais aussi nous pouvons obtenir une structure topologique de l'ensemble de ces solutions.

Les dernières années, plusieurs articles ont été consacrés à l'étude de l'existence de solutions pour les équations différentielles fractionnaires, de plus, l'existences de solutions faibles pour les équations différentielles fractionnaires à été examiné sous les intégrales de Henstock-Kurzweil-Pettis.

Notre travail est basé principalement sur l'article intitulé **On an integrale equation under Henstock-Kurzweil-Pettis integrability**, réaliser par l'auteur **Afif Ben Amar**, publié dans **Department of Mathematices, Faculty of Sciences, Sfax University, Tunisia (2015)**. [27]

Ce travail est réparti en trois chapitres :

**Le premier chapitre** : Intitulé **Préliminaires**, Se contient des rappels de quelques résultat théoriques, et des notions qui seront utilisées dans les chapitre qui suivent. Il est divisé comme suit :

La section 1 : nous présentons quelque définition et notions générales.

La section 2 : sera réservée à un petit rappel sur la fonction à variation bornée et la compacité et la convexité.

La section 3 : nous citons la définition de Espaces $L^p$ et les fonction absolument continuée.

La section 4 : nous allons voire des généralités de la convergence faible et l'équcontinutée.

La section 5 : posons la définition de la distance de Hausdorff, et le théorème de convergence de Vitali, et le théorème du point fixe.

**Le deuxième chapitre** : Intitulé **Calcul fractionnaire**, nous donnons quelques définitions importants liée de la théorie de calcul fractionnaire. Il est divisé comme suit :

La section 1 : présentons les définition de la fonction factorielle.

La section 2 : nous allons voire les définitions et quelques propriétés des fonctions Gamma et Bêta.

La section 3 : nous présentons l'intégrale et la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et leur propriétés.

La section 4 : nous présentons la définition et quelques propriétés de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

**Le troisième chapitre** : Intitulé **Les équations intégrales sous intégrabilités Henstock-Kurzweil-Pettis**, dans ce chapitre nous pouvons obtenir une structure topologique de l'ensemble des solutions faibles de l'équation intégrale suivante :

$$x(t)=h(t)+\int_0^t G(t,s)f(s,x(s),\int_0^s k(s,\tau)x(\tau)d\tau)ds.$$

Et même aussi nous pouvons prouver l'existence de solutions de l'équations avec intégrale de Henstock-Kurzweil-Pettis, le chapitre organisé comme suit :

La section 1 : nous rappelons quelques définitions et théorèmes importants pour le travail.

La section 2 : intitule **Résultat principale**, nous donnons un théorème et sont démonstration pour discutons l'ensembles des solutions faibles de le problème qui est au dessus.

La section3 : intitulé **Application sur une équation différentielle fractionnaire**, dans cette section nous avons appliqué le calcul fractionnaire sur l'équation de type Volterra est donnée alors sous la forme :

$$x(t)=h(t)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1}x(\tau)d\tau)ds.$$

CHAPITRE 1

# Préliminaires

Ce chapitre contient toutes notions qu'on va utiliser dans la suite de ce mémoire.

## 1.1 Notions et définitions

**Définition 1.1** *:*

*Un espace metrique est un ensemble au sien duquel une notion de distance entre les élement de l'ensemble est définie. Les élement seront, en générale appelés des points Soit $M$ désinge un ensemble, on appelle distance sur $M$ tout application $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :*

*i)* $\forall (x, y) \in M^2, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

*ii)* $\forall (x, y) \in M^2, d(x, y) = d(y, x)$.

*iii)* $\forall (x, y, z) \in M^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

$(M, d)$ *s'appelle alors un espace métrique.*

**Définition 1.2** *:*

*On dit qu'un espace métrique $(M, d)$ est un espace métrique complet, si tout suite de Cauchy de $M$ est convergente dans $M$.*

**Définition 1.3** *:*

*On appelle espace de Banach $E$ un espace vectoriel normé sur un sous corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$ (en générale $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$) complet pour la distance issue de sa norme, c'est- à- dire tout suite de cauchy dans $E$ et convergente (par rapport à la topologie définie par la distance associée à la norme)[1].*

**Définition 1.4** *:*

*L'ensemble des formes linéaires continues est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ qu'on appelle le dual de $E$ et que l'on note $E'$. $E'$ est de même dimension que $E$ si $E$ est de dimension finie.*

**Définition 1.5** *:*

*Une partie $A$ d'un espace métrique $M$ est dite relativement compacte si son adhérence est une partie compact de $M$.*

**Définition 1.6** *:*

*Soient $X$ un espace topologique et $M$ un espace metrique. Une partie $A$ de $C(X,M)$ est dite équicontinue en un point $x_0$ de $X$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V_{x_0}$ de $x_0$ dans $X$ tel que $f(V_{x_0}) \subset B(f(x_0),\varepsilon)$ pour tout $f \in A$ i.e.*

$$\forall x \in V_{x_0}, \forall f \in A, d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

*Une partie $A$ de $C(X,M)$ est dite équicontinue si elle équicontinue en tout point de $X$.*

**Théorème 1.1 (Hahn-Banach, forme analytique)** *:[2] soit $D$ un espace vectoriel, et $Q$ une semi-norme et positivement homogéne, i.e. $Q : D \longrightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait l'inégalité triangulaire :*

$$Q(x+y) \leq Q(x) + Q(y), \forall x, y \in D.$$

$$Q(\lambda x) = \lambda Q(x), \forall x \in D, \forall \lambda > 0.$$

*Soit $L \subset D$ un sous-espace vectoriel et $g : L \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire telle que :*

$$g(x) \leq Q(x), \forall x \in L,$$

*Il existe alors un forme linéaire $f$ définit sur $D$ qui prolonge $g$, i.e :*

$$f(x) = g(x), \forall x \in L.$$

*et telle que :*

$$f(x) \leq Q(x), \forall x \in D.$$

### 1.1.1 Fonction à variation bornée

**Définition 1.7** *:*

*Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $\delta = \{x_0 = a, x_1, ..., x_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$, on note par :*

$$var_\delta(f) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|.$$

*on pose :*

$$V_a^b(f) = \sup_{\delta \in sub([a,b])} var_\delta(f).$$

*$V_a^b(f)$ est appelée la variation totale de $f$ sur $[a,b]$.*

*On dit que $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ est à variation bornée sur $[a,b]$, si $V_a^b(f)<\infty$.*

**Définition 1.8** *:*

*On note $BV$ l'ensemble des fonctions à variation bornées. Et $BV$ muni de la norme $\|\cdot\|_{BV}$ est un espace de Banach.*

### 1.1.2 La compacité et la convexité

**Définition 1.9** *: Soit $F$ un espace vectoriel normé, et $A$ une partie de $F$, l'enveloppe convexe de $A$ noté $(conv(A))$ est l'intersection des parties convexes contenant $A$. C'est elle-même un convexe, et c'est le plus petit convexe contenant $A$.*

L'enveloppe convexe est donnée par :

$$conv(A)=\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i : n\in\mathbb{N}^*, x_i\in A, \lambda_i\geq 0, 1\leq i\leq n, \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1\right\}.$$

**Définition 1.10** *: l'enveloppe convexe fermé de $A$ est le plus petit convexe fermé contenant $A$, est noté par : $\overline{conv}(A)$.*

**Proposition 1.2** *: On a la relation : $\overline{conv}(A)=\overline{conv(A)}$, i.e. l'enveloppe convexe fermé est la fermeture de l'enveloppe convexe.*

### 1.1.3 Lemme de Mazur

**Lemme 1.1** *:[3]*
*Soient $E$ un espace de Banach et $(x_n)$ une suite d'élément de $E$ qui converge faiblement vers $x\in E$ alors :*

*(1) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe une suite $(y_n)$ dans l'enveloppe convexe de $\{x_k\}_{k\geq n}$ qui converge vers $x$ fortement.*

*(2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe une suite $(w_n)$ dans l'enveloppe convexe de $\{x_k\}_{k\geq n}$ qui converge vers $x$ fortement.*

### 1.1.4 Théorème d'Ascoli

**Théorème 1.3** *:[2] Soit $M$ un espace metrique compact, et soit $\mathcal{H}$ un sous-ensemble borné de $C(M)$.*
*On suppose que $\mathcal{H}$ est uniformement équicontinu i.e. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ tel que :*

$$d(x_1,x_2)<\delta\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,\forall f\in\mathcal{H}.$$

*Alors $\mathscr{H}$ est relativement compact dans $C(M)$.*

**Théorème 1.4** *:*
*Soit $X$ un espace topologique compact, $M$ un espace metrique. Alors une partie $A$ de $C(X,M)$ est relativement compact si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*
•*$A(x)=\{f(x)\backslash f\in A\}$ est relativement compact dans $M$ pour tout $x\in X$.*
•*$A$ est équicontinue.*

### 1.1.5 La mesure de non compacité

**Définition 1.11** *: [4] une fonction $\mu:\mathscr{M}\longrightarrow\mathbb{R}_+$ est dite mesure de non-compacité sur $E$ si :*

***1.*** *La famille* $\ker\mu=\{X\in\mathscr{M}:\mu(X)=0\}$ *est non vide, et :* $\ker\mu\subset\mathscr{M}$.

***2.*** $X\subset Y\rightarrow\mu(X)\leq\mu(Y)$.

***3.*** $\mu(\overline{X})=\mu(X)$, *pour* $X\in\mathscr{M}$.

***4.*** $\mu(conv X)=\mu(X)$, *pour* $X\in\mathscr{M}$.

***5.*** $\mu(\lambda X+(1-\lambda)Y)\leq\lambda\mu(X)+(1-\lambda)\mu(b)$, *pour* $X,Y\in\mathscr{M}$.

***6.*** *Si* $\{X_n\}_{n\geq1}$ *est une séquence d'ensembles classé de* $\mathscr{M}$ *tel que* $X_{n+1}\subset X_n$ *pour* $n=1,2,...$ *et si* $\lim_{n\longrightarrow\infty}\mu(X_n)=0$ *puis l'ensemble d'intersection* $X_\infty=\bigcap_{n=1}^{\infty}X_n$ *est non vide.*

*La notion ci-dessus est une généralisation du Well-Known De Blasi du mesure de non-compacité faible (voir[5]) définie sur chaque ensemble borné $X$ de $E$ par :*

$$\beta(X)=\inf\{\varepsilon>0:\text{ il existe un ensemble } D \text{ faiblement compact telle que :} X\subseteq D+\beta_\varepsilon(\theta)\},$$

*Notons pour tout sous-ensembles fermés $X,X_1,X_2$ de $E$,*

***7.*** $\beta(X_1\bigcup X_2)=\max\{\beta(X_1),\beta(X_2)\}$.

***8.*** $\beta(\lambda X)=|\lambda|\beta(X),\forall\lambda\in\mathbb{R}$.

***9.*** $\beta(X_1+X_2)\leq\beta(X_1)+\beta(X_2)$.

***10.*** $\beta(\bigcup_{|\lambda|\leq h}\lambda X)=h\beta(X)$.

### 1.1.6 Espaces $L^p$

**Définition 1.12** *:*

*Soit [a,b]* $(-\infty < a \leq b \leq \infty)$ *un intervalle fini ou infini de* $\mathbb{R}$*. Et soit* $p \in \mathbb{R}$*, avec :* $1 \leq p \leq \infty$.

*On note par* $L^p[a,b]$ *l'espace des classes d'équivalence des fonctions de puissance p-intégrable sur* $[a,b]$ *à valeurs dans* $\mathbb{C}$ *:*

$$L^p([a,b]) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C}; f \text{ mesurable, et} \| f \|_{L^p} < \infty \right\},$$

*avec*

$$\| f \|_{L^p([a,b])} = \left( \int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

*L'espace* $L^p[a,b]$ *muni de la norme* $\| \cdot \|_{L^p}$ *est un espace de Banach .*

*Si* $p = 2$*, alors* $L^2([a,b])$ *est l'espace des classes d'équivalence de fonction mesurable de carré intégrable sur* $[a,b]$.

*Le produit scalaire sur* $L^2([a,b])$ *est défini pour touts* $f, g \in L^2([a,b])$ *par :*

$$(f,g)_{L^2([a,b])} = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx.$$

*L'espace* $L^2([a,b])$*, muni de la norme :*

$$\| f \|_{L^2([a,b])} = \left( \int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

*est un espace de Hilbert.*

### 1.1.7 Fonctions absolûment continues

**Définition 1.13** *:*

*Soit* $[a,b], (-\infty < a < b < \infty)$ *un intervalle fini.*

*On dit que fonction* $f$ *dans* $AC([a,b])$ *si est seulement si :*

$$f \in AC([a,b]) \Leftrightarrow \exists \varphi \in L^1([a,b]) \text{ telle que } f = c + \int_a^x \varphi(t) dt.$$

*Ainsi, toute fonction f absolûment continue posséde une dérvée sommable $f' = \varphi$, presque partout sur $[a,b]$, et donc $c = f(a)$.*

**Définition 1.14** *:*

*On note par $AC^n([a,b]), n \in \mathbb{N}^* = 1,2,3...$, l'espace des fonction $f$ définit sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui ont des dérivées continues sur $[a,b]$ jusqu'à l'ordre $n-1$ et telle que $f^{n-1} \in AC([a,b])$ i,e.*

$$AC([a,b]) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} : f^k \in C([a,b]), k = 0...n-1, f^{n-1} \in AC([a,b]) \right\}.$$

**Remarque 1** *: On a : $AC^1([a,b]) = AC([a,b])$.*

*Une caractérisation des fonctions de cet espace est donnée par le lemme suivant :*

**Lemme 1.2** *: Une fonction $f \in AC^n([a,b]), n \in \mathbb{N}^*$, si est seulement si elle est représentée sous la forme :*

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^n(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!} (x-a)^k.$$

### 1.1.8 la convergence faible et l'équicontinuté

**Définition 1.15** *:*

*Soit E un espace de Banach de norme $\|\cdot\|$ et soit $K$ un espace compact et de Hausdorff. Dans ce qui suite, on note $C(K,E)$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de $K$ dans $E$, muni de la sup-norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\| E \|_\infty = \sup\{\| x(t) \|, t \in K\}$, pour tout $x \in C(K,E)$.*

**Définition 1.16** *:*

*Une fonction $f : E_1 \longrightarrow E_2$, où $E_1$ et $E_2$ sont des espaces de Banach, est dite faiblement-faiblement séquentiellement continue si pour tout $(x_n)_n \subset E_1$ avec $x_n \rightharpoonup x$, on a : $f\, x_n \rightharpoonup f\, x$ ici, $(\rightharpoonup)$ dénote la convergence faible .*

Pour caractériser la convergence faible dans $C(K,E)$, on utilise le théoréme de Dobrakov.

**Théorème 1.5** *:([6], théorème 9) :*

*Soit $K$ un espace de Housdorff compact et $E$ un espace de Banach. Soit $(x_n)$ une suite bornée dans $C(K,E)$, et $x \in C(K,E)$. Alors $(x_n)$ est converge faiblement vers $x$ si est seulement si $(x_n(t))$ est converge faiblement vers $x(t)$ pour chaque $t \in K$.*

Maintenant, nous énoncons le lemme de type Ambrosetti suivant qui sera utile dans la suite.

**Lemme 1.3** *: Soit $V \subseteq C(K,X)$ une famille de fonctions équicontinues. Alors.*

*(a)*

$$\beta(V) = \sup_{t\in K} \beta(V(t)) = \beta(V(K)),$$

*où $V(t) = \{x(t) : x \in V\}$ et $V(K) = \bigcup_{t\in K} \{x(t) : x \in V\}$ .*

*(b) La fonction $t \longrightarrow \beta(V(t))$ est continue .*

**Théorème 1.6** *:*

*Soit $K$ un espace de Hausdorff compact, $E$ est un espace de Banach avec $Q$ un sous-ensemble convexe fermé non vide de $C(K,E)$, et $(\Phi)$ est mesure de non-compacité faible sur $E$. Supposons $F : Q \longrightarrow Q$ satisfaisant :*

*(i) Si $\{x_n\}$ est une suite dans $Q$, avec : $x_n(t) \rightharpoonup x(t)$ pour tout $t \in K$. Alors :*

$$F x_n(t) \rightharpoonup F x(t),$$

*pour tout $t \in K$.*

*(ii) $F(Q)$ est bornée et $F$ est $\Phi$-condensante (i.e, $\Phi(F(Y)) < \Phi(Y)$, pour tout sous-ensemble borné $Y \subset Q$ tel que $\Phi(Y) \neq 0$ ).*

*Alors, l'ensemble des points fixes de $F$ est non vide et faiblement compact dans $C(K,E)$.*

***Preuve***.

*Soit $S$ l'ensemble des points fixes de $F$ dans $Q$. On affirme que $S$ est non vide .*

*En effet, soit $x_0 \in F(Q)$, et $G$ la famille de tous les sous-ensembles convexe fermés bornés dans $D$ de $C(K,E)$ tel que $x_0 \in D$ et $F(D) \subset D$.*

*Évidemment. $G$ est non vide. Puisque $\overline{conv}(F(Q)) \in G$ (l'enveloppe convexe fermée de $F(Q)$ dans $C(K,E)$.*

*On note $H = \bigcap_{D\in G} D$, Alors $H$ est fermé et convexe, et $x_0 \in H$.*

*Si $x \in H$, Alors $F(x) \in D$ pour tout $D \in G$, ainsi $F(H) \in H$.*

*donc, on a :*

$$H \in G.$$

*Nous affirmons que $H$ est un sous-ensemble faiblement compact de $C(K,E)$ .*

*On note : $H_* = \overline{conv}(F(H)\bigcup\{x_0\})$, on a : $H_* \in H$, ce qui implique que $F(H_*) \subset F(H) \subset H_*$. Donc $H_* \in G$, $H \subset H_*$, ainsi $H = H_*$, $H$ est borné et si $\Phi(H) \neq 0$, on obtient :*

$$\Phi(H) = \Phi(\overline{conv}F(H)\bigcup\{x_0\}) = \Phi(convF(H)\bigcup\{x_0\}) = \phi(F(H)) < \phi(H),$$

*qui est une contradiction ,*
*donc :*

$$\Phi(H) = 0.$$

*Puisque, $H$ est un sous-ensemble faiblement fermé de $C(K,E)$ (notez qu'un sous-ensemble convexe d'un espace de Banach est fermé ssi il est faiblement fermé), alors $H$ est un sous-ensemble compact de $C(K,E)$ .*

*Nous affirmons que $F$ est faiblement séquentiellement continue.*

*En effet, soit $\{x_n\}$ une suite dans $H$ telle que $x_n \rightharpoonup x$ dans $C(K,E)$ .*
*D'après le théorème (1.5), on a : $x_n(t) \rightharpoonup x(t)$ pour tout $t \in K$ et avec hypothèse (i), $Fx_n(t) \rightharpoonup Fx(t)$ pour tout $t \in K$, et pour même argument on obtient : $Fx_n \rightharpoonup Fx$ dans $C(K,E)$.*

*Donc. $F$ est faiblement séquentiellement continue.*

*Il s'ensuite en utilisant le théorème (1.5) que $F : H \longrightarrow H$ admet un point fixe et donc, $S \neq \emptyset$, puisque $S \subset F(Q)$, $F(S) = S$ et $F$ est $\Phi$-condensante, on a :*

$$\Phi(S) = 0,$$

*et donc $S$ est un sous-ensemble relativement faiblement compact de $C(K,E)$.*
*Aussi, par la continuité séquentiellement faible de $F$, l'ensemble $S$ est faiblement séquentiellement fermé.*

*Soit $x \in Q$, faiblement adhérente à $S$. Comme $\overline{s^w}$, la clôture faible de $S$ dans $C(K,E)$, est faiblement compacte, d'après le théorème d'Eberlein-Šmulien[[7], Théorème 8.12.4, p. 549], il existe une suite $\{x_n\} \subset S$ telle que $x_n \rightharpoonup x$, donc $x \in S$.*

*Ainsi $S$ est un sous-ensemble faiblement fermé de $Q$. Donc : $S$ est faiblement compact dans $C(K,E)$.*

***Remarque 2*** *: Le théorème (1.6) est un cas particulier de Théorème 12 de [8], à savoir où l'espace de Banach est $C(K,E)$.*

### 1.1.9 La distance de Hausdorff

**Définition 1.17** *:*
*Soit $(M,d)$ un espace metrique. Pour $A$ une partie de $M$, et $r>0$, on définit le voisinage de $A$ par :*

$$V(r,A)=\{x\in K; d(x,A)<r\}.$$

*Si $A$ et $B$ sont deux compact (non vides) de $M$, on appelle $H_d(A,B)$ distance de Hausdorff de $A$ et $B$ telle que :*

$$H_d(A,B)=\inf\{r>0; A\in V(r,B) e\, t\, B\in V(r,A)\}.$$

*La distance de Hausdorff et même donnée par :*

$$H_d(A,B)=\max\left\{\sup_{a\in A}(d(a,B)),\sup_{b\in B}(d(A,b))\right\}.$$

*telle que :*

$$d(A,b)=\inf_{a\in A}d(a,b).$$
$$d(a,B)=\inf_{b\in B}d(a,b).$$

### 1.1.10 Théorème de la convergence de Vitali

**Théorème 1.7** *:*
*Soit $(X,A,\mu)$ un espace mesuré avec $\mu$ finie. Soit $(f_n)$ une suite de fonctions de $L^1(X)$ et soit $f$ une fonction mesurable définie sur $X$. Alors $(f_n)$ converge vers $f$ dans $L^1$ si et seulement si :*

*(i) $(f_n)$ converge en mesure vers $f$.*

*(ii) La famille $(f_n)$ est uniformément intégrable.*

### 1.1.11 Théorème du point fixe :

**Théorème 1.8** *: Soit $V$ un espace topologique linéaire localement convexe métrisable et soit $C$ un sous-ensemble convexe faiblement compact de $V$. Alors toute application faiblement séquentiellement continue $F: C\longrightarrow C$ admet un point fixe.*

CHAPITRE 2

# Calcul fractionnaire

Dans ce chapitre, on introduira l'opérateur d'intégration fractionnaire ainsi que les deux définition les plus utilisées des dérivées fractionnaire à savoir celle de Reimann-Liouville et de Caputo, en donnant les propriétés les plus importantes de ces notions.

## 2.1 Fonction factorielle :

**Définition 2.1** *:*
*On définit la fonction factorielle par :*
*pour* $\alpha > 0$, *et* $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$$

## 2.2 Fonctions Gemma et Bêta

Les fonctions Gamma et Bêta jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

### 2.2.1 La fonction Gamma

**Définition 2.2** *:*
*On définit la fonction Gamma par :*
*Pour* $\alpha > 0$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt. \tag{2.1}$$

***Proposition 2.1*** *: La fonction* $\Gamma$ *est bien définie pour tout* $\alpha > 0$.

***Preuve****. On va montrer que l'intégrale* $\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt$ *existe.*

*Soit* $\alpha > 0$ *:*

• *Si* $\alpha = 1$ *on a :*

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1.$$

• *Si* $\alpha > 1$ *on a :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt = \int_0^A e^{-t}t^{\alpha-1}dt + \int_A^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt.$$

*la première intégrale existe car la fonction* $e^{-t}t^{\alpha-1}$ *est continue sur* $[0, A]$*, maintenant on a :*

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} t^2 t^{\alpha-1}e^{-t} = 0 \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \text{ il existe, } B(\varepsilon) > 0 : t < B(\varepsilon) \Rightarrow t^2 t^{\alpha-1}e^{-t} < \varepsilon,$$

*Pour* $\varepsilon = 1$ *: il existe* $B(1) > 0$ *tq :*$\forall\, t < B(1)$*, on a* $t^{\alpha-1}e^{-t} < \frac{1}{t^2}$ *; comme* $\int_A^\infty \frac{1}{t^2}dt$ *converge, il en résulte que l'intégrale* $\int_A^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt$ *converge, donc existe.*

*D'où* $\Gamma(\alpha)$ *est bien définie.*

• *Si* $0 < \alpha < 1$ *on a :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt = \int_0^A e^{-t}t^{\alpha-1}dt + \int_A^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt.$$

*l'intégrale* $\int_A^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt$ *existe (même preuve que* $\alpha > 1$*),*

*et pour l'intégrale* $\int_0^A e^{-t}t^{\alpha-1}dt$ *on a :* $e^{-t} \sim 1$ *au voisinage de* $0$*, d'ou* $e^{-t}t^{\alpha-1} \sim t^{\alpha-1}$*, donc les intégrale* $\int_0^A e^{-t}t^{\alpha-1}dt$ *et* $\int_0^A t^{\alpha-1}dt$ *sont de même nature.*

*comme*

$$\int_0^A t^{\alpha-1}dt = \left[\frac{t^\alpha}{\alpha}\right]_0^A = \frac{A^\alpha}{\alpha}.$$

*on en déduit que* $\int_0^A e^{-t}t^{\alpha-1}dt$ *existe, alors* $\Gamma(\alpha)$ *est définie pour tout* $\alpha > 1$.

***Proposition 2.2*** *:*
*La relation Récursive est donnée comme suite :*

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha).$$

***Preuve****. On remplace* $\alpha$ *par* $\alpha+1$ *dans* (2.1) *et on intégré par partie, on obtient :*

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\alpha}dt=\left[-t^{\alpha}e^{-t}\right]_0^{+\infty}+\alpha\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt=0+\alpha\Gamma(\alpha),$$

*alors*

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)\Rightarrow\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}.$$

**Remarque 3** *:*
*La fonction Gamma peut être représentée par la limite :*

$$\Gamma(\alpha)=\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n)}.$$

### 2.2.2 la fonction Bêta

**Définition 2.3** *:*
*On définit la fonction Bêta par :*

$$\beta(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt,p,q>0. \tag{2.2}$$

**Proposition 2.3** *:*
***(1)*** *La formule trigonométrique de Bêta est donnée par :*

$$\beta(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}d\theta.$$

***Preuve****.*
*Pour obtenir la formule trigonométrique de la fonction Bêta on pose :* $t=sin^2\theta$ *donc* $dt=2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$.
*si* $t=1,\theta=^{+}_{-}\frac{\pi}{2}$ *et si* $t=0,\theta=0$
*et on a :*

$$1-t=1-\sin^2\theta=\cos^2\theta. \tag{2.3}$$

*en remplace dans* (2.2) *on obtient*

$$\beta(p,q)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta)^{p-1}(\cos^2\theta)^{q-1}(2\sin\theta\cos\theta)d\theta.$$

$$\beta(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}(\sin\theta\cos\theta)d\theta,$$

*d'où*

$$\beta(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}d\theta.$$

***(2)*** *On a :*

$$\beta(p,q)=\beta(q,p). \tag{2.4}$$

***Preuve.***

*En posant*

$$x=1-t\Rightarrow dx=-dt,$$

*et*

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=-\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt$$

*d'où*

$$\beta(p,q)=\beta(q,p).$$

***(3)*** *La relation entre les fonction Gamma et Bêta est donnée par :*

$$\beta(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

***Preuve.***

*On a :*

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}t^{p-1}e^{-t}dt.$$

*Posons $t=y^2$ d'où, $dt=2ydy$*

*on a alors :*

$$\Gamma(p)=2\int_0^{+\infty}y^{2p-1}e^{-y^2}ydy.$$

$$=2\int_0^{+\infty}y^{2p-1}e^{-y^2}dy$$

*et posons $y=x$*

$$\Gamma(q)=2\int_0^{+\infty}x^{2q-1}e^{-x^2}dx$$

*Multiplions les deux membres des deux équations et passons en coordonnées polaires :*

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}x^{2q-1}y^{2p-1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

$$= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\theta)^{2q-1}(r\sin\theta)e^{-r^2} r\,dr\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{+\infty} r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}\,d\theta$$

$$= 4\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}\,dr\,2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{+\infty} r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}\,dr\,2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}\,d\theta$$

$$= \Gamma(p+q)\beta(p,q)$$

*Donc :*

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

## 2.3 L'intégrale et la dérivée fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

### 2.3.1 Intégrale de Riemann-Liouville

Considérons une fonction $f$ telle que $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, continue et intégrable, où $b$ pouvant être finie ou infini. Une primitive de $f$ est donnée par la formule[1] suivante :

$$(I_a^1 f)(t) = \int_a^t f(s)ds.$$

Selon l'approche de Riemman-Liouville sur le calcul fractionnaire, la notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha, (\alpha > 0)$ généralise la célèbre formule [1] répétées $n-fois$

$$(I_a^n f)(t) = \int_a^t ds_1 \int_a^{s_1} ds_2 ... \int_a^{s_{n-1}} f(s_n)ds_n \tag{2.5}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)ds, n \in \mathbb{N}^*,$$

qui réduire le calcul de la $n^{eme}$ primitive d'une fonction $f$ continue sur un intervalle $[a,b]$ à une seule intégrale de type convolution.

**Définition 2.4** *: Soit $f \in L^1([a,b])$ telle que : $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, on appelle*

*intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de $f$ l'intégrale suivant :*

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds,\ t > a. \tag{2.6}$$

*où $\alpha$ est un réel (ou même complexe) convenablement choisi ($\alpha > 0$)*

Une propriété importante de l'opérateur d'intégration fractionnaire $I_a^\alpha$, dite propriété du semi-groupe, est donnée par la proposition suivante :

**Proposition 2.4** *: [9] Si $\alpha > 0, \beta > 0$ alors l'équation :*

$$(I_a^\alpha (I_a^\beta f))(t) = (I_a^{\alpha+\beta} f)(t). \tag{2.7}$$

*est satisfaite presque partout sur $[a,b]$, pour toute $f \in L^p([a,b]), 1 \le p < \infty$*

**Preuve**.
On a :

$$I_a^\alpha (I_a^\beta f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (I_a^\beta f)(s)\,ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^s (s-x)^{\beta-1} f(t)\,dt\right) ds.$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^s (t-s)^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1} f(t)\,dt\,ds.$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(t) \left[\int_x^t (t-s)^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1} ds\right] dt$$

on pose $s = x + (t-x)\tau$, alors :

$$ds = (t-x)\,d\tau.$$

$$s = x \Rightarrow x + (t-x)\tau = x \Rightarrow \tau = 0.$$

$$s = t \Rightarrow x + (t-x)\tau = t \Rightarrow \tau = 1.$$

Alors :

$$\int_x^t (t-s)^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1} ds = \int_0^1 (t - (x + (t-x)\tau)^{\alpha-1} (x + (t-x)\tau - t)^{\beta-1} (t-x)\,d\tau$$

$$= \int_0^1 [(t-x)(1-\tau)]^{\alpha-1} [(t-1)\tau]^{\beta-1} (t-x)\,d\tau$$

$$= (t-x)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1}\,d\tau.$$

et la fonction Bêta est définie par :

$$\beta(\beta,\alpha)=\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}d\tau$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Retournons a la formule (2.7), ce qui nous donne :

$$(I_a^\alpha(I_a^\beta f))(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t f(t)\left[(t-x)^{\alpha+\beta-1}+\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right]dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t(t-x)^{(\alpha+\beta)-1}f(t)dt$$

$$=(I_a^{\alpha+\beta}f)(t).$$

### 2.3.2 Dérivée fractionnaire de Rieman-Liouville

**Définition 2.5** *:*
*La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha>0$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ est donnée par :*

$$(D_a^\alpha f)(t)=D^n I_a^{n-\alpha}f(t), \tag{2.8}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\int_a^t(t-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds,\ t>a,$$

*où $n=[\alpha]+1$, et $[\alpha]$ est la partie entière de $\alpha$ .*

***Preuve.***
*En particulier :*

- *Si $\alpha=0$, alors :*
$$(D_a^0 f)(t)=I_a^0 f(t)=f(t).$$
- *Si $\alpha=n\in\mathbb{N}$, alors :*
$$(D_a^n f)(t)=f^{(n)}(t).$$
- *Si $0<\alpha<1$, alors $n=1$, d'où :*
$$(D_a^n f)(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_a^t(t-s)^{-\alpha}f(s)ds,\ t>a.$$

**Proposition 2.5** *: Notons par $D^n$, $n \in \mathbb{N}$, l'opérateur de dérivation d'ordre $n$, alors on a*

$$D^n I_a^n = I, I_a^n D^n \neq I, \tag{2.9}$$

*où $I$ est l'opérateur d'identité.*

**Proposition 2.6** *: Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, alors :*

$$(D_a^\alpha f)(t) = 0 \Leftrightarrow f(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j (t-a)^{\alpha-j}, \forall c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$$

*En particulier, si $0 < \alpha < 1$, alors :*

$$(D_a^\alpha f)(t) = 0 \Leftrightarrow f(t) = c(t-a)^{\alpha-1}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

Énonçons maintenant quelques propriétés des opérateurs $I_a^\alpha$ et $D_a^\alpha$.

**Lemme 2.1** *: [10] L'opérateur d'intégration fractionnaire $I_a^\alpha, \alpha > 0$ est linéaire et borné de l'espace $L^p([a,b])$ $(1 \leq p \leq \infty)$ dans lui même, i,e : il existe $k > 0$ tel que :*

$$\| I_a^\alpha f \|_p \leq k \| f \|_p, \forall f \in L^p([a,b]),$$

*où*

$$k = \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)}.$$

*Le résultat suivant caractérise les conditions nécessaires pour l'existence de la dérivée fractionnaire $D_a^\alpha$.*

**Lemme 2.2** *: [10] Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f \in AC^n[a,b]$, alors la dérivée fractionnaire $D_a^\alpha f$ existe presque partout sur $[a,b]$ et elle est représentée sous la forme :*

$$D_a^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (t-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^n(s) ds.$$

Des propriétés importantes qui lie dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville avec l'intégrale fractionnaire est la suivante :

**Lemme 2.3** *: Pour $\alpha > 0$, et $f \in L^1([a,b])$ on a :*

$$(D_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) = f(t). \tag{2.10}$$

*presque partout sur $[a,b]$.*

*La propriété* (2.10) *signifie que l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemman-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de Riemman-Liouville du même ordre.*

## 2.4 Dérivée fractionnaire de Caputo

Les dérivées de Riemman-Liouville ont certains inconvénient lorsque on essaie de modéliser des phénomènes du mode réel. Les problèmes étudiés exigent une définition des dérivées fractionnaire permettant l'utilisation des condition initiales physiquement interprétables incluant $y(0)$, $y'(0)$, ect. Ces défaillances ont conduit vers la fin des années soixante, à une définition alternative des dérivées fractionnaire qui satisfait ces demandes ;
elle a été introduire par Caputo [20]. En fait, Caputo et Mainardi [21] ont utilisé cette définition dans leurs travaux sur la viscoélasticité.

Dans cette section on donne la définition de la dŕivée fractionnaire au sens de Caputo ainsi que quelques propriétés essentielles.

Soit $[a,b]$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$, et soit $I_a^\alpha$ et $D_a^\alpha$ les opérateur d'intégration et de dérivation fractionnaire données par (2.8) dans la section précédente.

**Définition 2.6** *: La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de Caputo d'une fonction $f$ définie sur, $[a,b]$ est donnée par :*

$$({}^cD_a^\alpha)f(t) = D_a^\alpha\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right). \tag{2.11}$$

*où*

$$n = ([\alpha]+1) si : \alpha \notin \mathbb{N}, et, n = (\alpha) si : \alpha \in \mathbb{N}^* \tag{2.12}$$

*Si $\alpha = 0$, alors :*

$$({}^cD_a^\alpha)f(t) = f(t).$$

*En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$, la relation* (2.11) *prend la forme :*

$$({}^cD_a^\alpha)f(t) = D_a^\alpha([f(t) - f(a)]).$$

*Donc*

*Si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $f$ est une fonction pour laquelle les dérivées fractionnaire de Coputo* (2.11)*, et*

*celle de Riemman-Liouville* (2.8) *existent, alors elles sont liées l'une à l'autre par la relation :*

$$({}^cD_a^\alpha)f(t)=(D_a^\alpha f)(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha},(n=[\alpha]+1). \tag{2.13}$$

*En particulier, lorsque* $0<\alpha<1$, *on a :*

$$({}^cD_a^\alpha)f(t)=(D_a^\alpha f)(t)-\frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^\alpha. \tag{2.14}$$

*D'après la relation* (2.13), *si* $\alpha\notin\mathbb{N}$, *alors la dérivée de Caputo* (2.11) *coincide avec la dérivée de Riemman-Liouville* (2.8) *si la fonction* $f$ *ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre* $n-1$ *telle que* $(n=[\alpha]+1)$ *s'annulent au point* $a$, *i,e.*

$$({}^cD_a^\alpha)f(t)=(D_a^\alpha f)(t)\Leftrightarrow f(a)=f'(a)=...=f^{(n-1)}(a)=0.$$

*Si* $\alpha=n\in\mathbb{N}$ *est la dérivée usuelle* $f^{(n)}(t)$ *existe, alors* $({}^cD_a^\alpha)f(t)$ *coincide avec* $f^{(n)}(t)$ *i,e*

$$({}^cD_a^\alpha)f(t)=f^{(n)}(t). \tag{2.15}$$

*La dérivée fractionnaire de Caputo est définie pour les fonction* $f(t)$ *pour les quelles la dérivée de Riemman-Liouville existe, en particulier, elle est définie pour les fonctions* $f(t)\in AC^n[a,b]$. *Ona le théorme suivant :*

**Théorème 2.7** *: [10] Soit* $\alpha>0$ *et soit* $n$ *donné par* (2.12). *Si* $f\in AC^n[a,b]$, *alors la dérivée fractionnaire de Caputo* $({}^cD_a^\alpha f)(t)$ *existe presque partout sur* $[a,b]$.

*(i) Si* $\alpha\notin\mathbb{N}$, *alors* ${}^cD_a^\alpha f(t)$ *est donnée par :*

$$\begin{aligned}({}^cD_a^\alpha)f(t)&=\frac{1}{\Gamma(n-1)}\int_a^t(t-s)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)ds \\ &=I_a^{n-\alpha}D^nf(t).\end{aligned} \tag{2.16}$$

*En particulier, lorsque* $1>\alpha>0$ *et* $f(t)\in AC^n[a,b]$, *alors :*

$$\begin{aligned}({}^cD_a^\alpha)f(t)&=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t(t-s)^{-\alpha}f'(s)ds \\ &=I_a^{1-\alpha}f'(t).\end{aligned} \tag{2.17}$$

*(ii) Si* $\alpha=n\in\mathbb{N}$ *alors :*

$$({}^cD_a^\alpha)f(t)=f^{(n)}(t).$$

**Théorème 2.8** *: [10] Soient* $\alpha>0$, $n$ *donnée par* (2.12) *et* $f\in AC^n[a,b]$. *Alors la dérivée frac-*

*tionnaire de Caputo* $({}^cD_a^\alpha)f$ *est continue sur* $[a,b]$

*(i) Si* $\alpha \notin \mathbb{N}$, *alors :* $({}^cD_a^\alpha f)(t)$ *est donnée par* (2.16). *En particulier, elle prend la forme* (2.17) *pour :* $1 > \alpha > 0$.

*(ii) Si* $\alpha = n \in \mathbb{N}$, *alors :*

$$({}^cD_a^\alpha)f(t) = f^{(n)}(t).$$

**Lemme 2.4** *: Soient* $\alpha > 0$, *et* $f \in L^\infty[a,b]$, *alors :*

$$({}^cD_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) = f(t).$$

**Lemme 2.5** *: Soit* $\alpha > 0$, *et* $f \in L^\infty([a,b])$, *alors :*

$$I^\alpha({}^cD)f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1}.$$

*pour certains constantes* $c_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,...,n-1, m = [\alpha]+1$

*On défini la dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction* $f$ *sur un intervall fini* $[a,b]$ *par* (2.11), *et on a vu le théorème* (2.7), *qu'elle peut être représentée par* (2.15) *et* (2.17) *à condition que* $f \in AC^n[a,b]$.
*En fait, la dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction* $f \in AC^n[0,\infty)$ *sur le demi axe* $\mathbb{R}^+$ *est donnée par :*

$$({}^cD_{0^+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds, t > 0.$$

*En particulier, lorsque* $0 < \alpha < 1$ *et* $f \in AC^1[0,\infty)$, *alors :*

$$({}^cD_{0^+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s)ds, t > 0.$$

CHAPITRE 3

# Les équations intégrales sous intégrabilités Henstock-Kurezweil-Pettis

Soit $I=[0,1]$ et $E$ un espace réel de Banach. Dans ce chapitre, nous étudions la structure topologique de l'ensemble des solution faibles de l'équation intégrale non linéaire de type Volterra suivante :

$$x(t)=h(t)+\int_0^t G(t,s)f(s,x(s),\int_0^s k(s,\tau)x(\tau)d\tau)ds. \tag{3.1}$$

si $x\in C(K,E)$ et appliquant l'intégrale de Henstock-Kurzweil-Pettis [11].[12].

## 3.1 Préliminaires

**Définition 3.1** *[14] :*
*Une partition de* $[0,T]$ *est une collection finie,* $\mathscr{P}=\{([c_k,d_k],t_k):1\leq k\leq n\}$ *telle que :* $\{[c_k,d_k],t_k):1\leq k\leq n\}$ *est une famille de sous-intervalles de* $[0,T]$ *contenant* $[a,b]$ *et* $t_k\in[c_k,d_k]$ *pour* $k=1,2,....,n$.

***Définition 3.2*** *[14] : Une application quelconque :*

$$\delta:[0,T]\longrightarrow(0,\infty).$$

*est appelée une jauge sur* $[0,T]$

***Remarque 4*** *: Une partition,* $\mathscr{P}=\{([c_k,d_k],t_k):1\leq k\leq n\}$ *est* $\delta$*-fine .*
*si* $[c_k,d_k]\subseteq[t_k-\delta(t_k),t_k+\delta(t_k)]$ *pour* $k=1,2,...,n$ .

**Définition 3.3** *[14] :(HK-intégrable)*
*Une fonction* $f:[0,T]\longrightarrow E$ *est dite HK-intégrable, sur* $[0,T]$ *s'il existe* $w\in E$ *avec la propriété*

*suivant : pour tous $\varepsilon > 0$ il existe une jauge $\delta_\varepsilon(\cdot)$ définie sur $[0,T]$ telle que :*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(d_k - c_k) - w \right\| < \varepsilon$$

*pour tout partition, $\mathscr{P} = \{([c_k, d_k], t_k) : 1 \leq k \leq n\}$ $\delta_\varepsilon$-fine, de $[0,T]$. On pose $w = (HK)\int_0^T f(s)ds$.*

**Remarque 5** *:*
*Cette définition inclut l'intégrale de Riemann généralisée définie par Gordon[13]. Dans un cas particulier, lorsque $\delta$ est une fonction constante, on obtient l'intégrale de Riemann.*

Nous utiliserons également la notion d'équi-intégrabilité suivante, spécifique à l'intégrabilité HK qui permet d'obtenir un résultat de convergence de type Vitali.

**Définition 3.4** *:*
*Une famille $\mathscr{F}$ de fonctions HK-intégrables définies sur $[0,T]$ est dite HK-équi-intégrable s'il existe $w \in E$ avec la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge $\delta_\varepsilon(\cdot)$ définie sur $[0,T]$ tel que :*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(d_k - c_k) - w \right\| < \varepsilon,$$

*pour tout partition $\mathscr{P} = \{([c_k, d_k], t_k) : 1 \leq k \leq n\}$ $\delta_\varepsilon$-fine, et tout $f \in \mathscr{F}$*

La généralisation de l'intégrale de Pettis obtenue en remplacent l'intégrabilité de Lebesgue des fonctions par l'intégrabilité de Henstock-kurzweil produit l'intégrale de Henstock-Kurzweil-Pettis (pour la définition de l'intégrale de Pettis, voir [17]).

**Définition 3.5** *:[12] :*
*Une fonction $f : [0,T] \longrightarrow E$ est dite Kurzweil-Henstock-Pettis intégrable, ou HKP-intégrable, sur $[0,T]$ s'il existe une fonction : $g : [0,T] \longrightarrow E$ avec les propriétés suivantes :*

*(i) $\forall x^* \in E'$, $x^* f$ est a Henstock-kurzweil intégrale sur $[0,T]$.*

*(ii) $\forall t \in [0,T], \forall x^* \in E'$, $x^* g(t) = (HK)\int_0^t x^* f(s)ds$.*

*Cette fonction $g$ sera appelée primitive de $f$ et, $g(T) = \int_0^T f(t)dt$ nous noterons le Henstock-kurzweil-Pettis de $f$ sur l'intervalle $[0,T]$.*

**Remarque 6** *:*
*(i) Toute fonction HK-intégrable est HKP-intégrable. L'inverse est faux (voire un exemple dans [16]). Ainsi, la famille de toutes les fonctions intégrables de Kurzweil-Henstock-Pettis est la plus grand que la famille de toutes les fonctions intégrables de Kurzweil-Henstock.*

*(ii) Puisque chaque fonction intégrable de Lebesgue est HK-intégrable, nous trouvons que toute fonction intégrable de Pettis est HKP-intégrable. La réciproque est faux (voire aussi [16]).*

*Pour $b > 0$, on note :*

$$B_b = \{y \in E, \text{pour tout}, \|y\| \leq b\},$$

$$D_b = \{z \in C(I,E), \text{pour tout}, \|z\| \leq b\}.$$

*telle que :*

*• $B_b$, $D_b$ est les boules unité fermées de $E$.*

*Et les intégrales sont prises au sens des intégrales (HKP). La boule unité fermée du dual $E'$ noté par $B(E')$*

**Lemme 3.1** *:*

*Soit $f : I \longrightarrow E$ est HKP-intégrable et, $g : I \longrightarrow E$.*

*• Si $g$ est une fonction à variation bornée (fonction absolument continue), alors $fg$ est HKP-intégrable.*

*• Si $g$ est HKP-intégrable pour tout $f$, alors $g$ est presque partout égale à une fonction à variation bornée.*

**Théorème 3.1 (Théorème de la valeur moyenne de l'intégrale HKP)** *:[12]*

*Si la fonction $f : I_\alpha \longrightarrow E$ est HKP-intégrable, alors :*

$$\int_I f(t)dt \in |I|.\overline{conv} f(I).$$

*où $\overline{conv} f(I)$ est l'enveloppe convexe fermée de $f(I)$, et $I$ est un sous-intervalle arbitraire de $I_\alpha$, et $|I|$ est la longueur de $I$.*

## 3.2 Résultat principale

**Théorème 3.2** *:*

*Soient $f : I \times E^2 \longrightarrow E, h : I \longrightarrow E$, et : $G, k : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ des applications vérifient les conditions suivantes :*

***(1)** $h$ est faiblement continue sur $I$.*

***(2)** Pour tout $t \in I, G(t,\cdot)$ est continue, $G(t,\cdot)$ et $k(t,\cdot) \in BV(I,\mathbb{R})$. Aussi les applications $t \longmapsto G(t,\cdot)$ et $t \longmapsto k(t,\cdot)$ sont $\|.\|_{BV}$-continues, ($BV(I,\mathbb{R})$ représente l'espace des fonctions réelles de variation bornées avec sa norme classique BV).*

***(3)*** *$f$ est faiblement-faiblement séquentiellement continue (pour chaque suite convergente $\{t_n\} \subset [0,1]$ et pour toute suites $\{x_n\} \rightharpoonup x$, et $\{y_n\} \rightharpoonup y \subset E$, la suite $\{f(t_n, x_n, y_n)\}$ est converge faiblement dans $E$ ), pour tout $r > 0$ et $\varepsilon > 0$ il existe $\delta_{\varepsilon,r} > 0$ tel que :*

$$\left\| \int_\tau^t f(s, x(s), \int_0^s k(s,\eta)x(\eta)d\eta)ds \right\| < \varepsilon, \forall |t-\tau| < \delta_{\varepsilon,r}, \forall x \in D_r. \tag{3.2}$$

***(4)*** *Il existe $b_0 > \max(1, \sup_{t\in I} \| k(t,.) \|_{BV}) \sup_{t\in I} \| h(t) \|$ tel que pour tout suite $(x_n)_n \subset D_{b_0}$ converge faiblement, l'ensemble*

$$\left\{ x^* f(\cdot, x_n(\cdot), \int_0^{(\cdot)} k(\cdot,\tau)x_n(\tau)d\tau), n \in \mathbb{N}, x^* \in B(E^{'}) \right\}, \tag{3.3}$$

*est HK-intégrable .*

***(5)*** *Il existe $b_1 > \sup_{t\in I} \| h(t) \|$, et une constante positive $\alpha$ telle que :*

$$\beta(k(J,J)V(J))) \leq \alpha\beta(V(J)),$$

*pour chaque intervalle fermé $J \subset I$, pour tout $V \subset D_{b_1}$, où $k(J,J)V(J) = \{k(t,s)x(r), t,s,r \in J, x \in V\}$.*

***(6)*** *Il existe une fonction positive $L(\cdot,\cdot)$ telle que :*

*(a) pour chaque sous-intervalle fermé $J$ de $I$ et les sous -ensembles bornés $Y, Z$ de $E$,*

$$\beta(f[J \times Y \times Z]) \leq \sup \{ L(t, \max(\beta(Y), \beta(Z))), t \in J \},$$

*Où $f[J \times Y \times Z] = \{ f(t,y,z) : t \in J, (y,z) \in Y \times Z \}$.*

*(b) La fonction $s \longmapsto L(s,r)$ est continué pour tout $r \in [0, \infty[$, et*

$$\sup_{t\in I} \left\{ (HK) \int_0^t |G(t,s)| L(s,r)ds \right\} < r, \tag{3.4}$$

*pour tout $r > 0$ Alors, il existe un intervalle $J = [0,a] \subset I$ tel que l'ensemble des solutions de (3.1) défini sur $J$ est non vide et faiblement compact dans l'espace $C(J,E)$.*

**Démonstration** :
Soit l'équation suivante :

$$x^* \int_0^t k(t,s)x(s)ds = (HK) \int_0^t x^* k(t,s)x(s)ds.$$

On note :

$$T x(t)=\int_0^t k(t,s)x(s)ds, b_1^{'}=\sup_{t\in I}\| k(t,.)\|_{BV}, c=\sup_{t\in I}\| h(t)\|.$$

laisser

$$c<b_2<\min(b_0,\frac{b_0}{b_1^{'}}).$$

Pour, $x\in D_{b_2}$ et $x^*\in B(E^{'})$, on a :

$$x^*\int_0^s k(s,\tau)x(\tau)d\tau=x^*(T x(s))$$

$$|x^*(T x(s))|=\left|(HK)\int_0^s x^*(k(s,\tau)x(\tau))d\tau\right|$$

$$\leq\sup_{t\in I}\| k(t,\cdot)\|_{BV}\int_0^1|x^*x(\tau)|d\tau\leq b_1^{'}$$

$$b_2\leq b_0.$$

D'ici

$$\sup\{|x^*T x(s)|, x^*\in B(E^*)\}\leq b_0,$$

$$\text{donc } T x\in D_{b_0}.$$

On remarque que pour $x\in C(I,E)$, la fonction $f(\cdot,x(\cdot),\int_0^{(\cdot)}k(\cdot,\tau)x(\tau)d\tau)$ est HKP- intégrable dans $[0,1]$ (hypothèse (4)).

Soit $\varepsilon>0$, il existe $\delta_{\varepsilon,b_2}>0$ telle que pour, $|t_2-t_1|\leq\delta$ et $x\in D_{b_2}$ on a :

$$\left\|\int_{t_1}^{t_2}f(s,x(s),T x(s))ds\right\|<\varepsilon. \tag{3.5}$$

Posons que, $d=\sup_{t\in I}\| G(t,\cdot)\|_{BV}$ et, $0<\mu<\dfrac{b_2-c}{d}$.
Par l'analyse précédente, il existe $a\leq 1$ avec : $\alpha a<1$ tel que :

$$\sup_{t\in[0,a]}\left\|\int_0^t f(s,x(s),T x(s))ds\right\|<\mu.$$

Pour tout $x\in C(I,E)$, vérifiant $\| x\|\leq b_2$.
Posons $J=[0,a]$, $C(J,E)$ c'est l'espace des fonctions continues $J\longrightarrow E$, muni de la topologie de convergence uniforme, et $\tilde{B}$ l'ensemble de toutes les fonction continues $J\longrightarrow B_{b_2}$.

Nous considérerons $\tilde{B}$ comme un sous-espace topologique de $C(J,E)$. $\tilde{B}$ est convexe et fermé. Définissons l'opérateur $F$ par :

$$F x(t) = h(t) + \int_0^t G(t,s) f(s, x(s), \int_0^s k(s,\tau) x(\tau) d\tau) ds, x \in C(I,E).$$

En remarque que pour $x \in C(I,E)$, la famille :

$$\left\{ x^* f(\cdot, x(\cdot), \int_0^{(\cdot)} k(\cdot,\tau) x(\tau) d\tau), x^* \in B(E^{'}) \right\},$$

est HK- équi-intégrable [voir (3.11)]. Puisque pour $t \in I$ la fonction $s \longmapsto G(t,s)$ est à variation bornée (voire [18]) la fonction :

$$G(t,s) f(\cdot, x(\cdot), \int_0^{(\cdot)} k(\cdot,\tau) x(\tau) d\tau)),$$

est HKP- intégrable dans $[0,t]$.

Donc l'opérateur $F$ est bien définit.

Alors $F : \tilde{B} \longrightarrow \tilde{B}$ est faiblement-faiblement-séquentiellement continue.

**Étape (1)**. Montrons que les valeurs de $F$ sont dans $\tilde{B}$. Pour tout $x^* \in B(E^{'})$, et pour tout $x \in \tilde{B}$ on a :

$$|x^* F_x(t)| = \left| x^* h(t) + x^* \int_0^t G(t,s) f(s, x(s), T x(s)) ds \right|.$$

Tout d'abord et comme $x^*$ linéaire alors :

$$|x^* F_x(t)| \leq |x^* h(t)| + \left| (HK) \int_0^t G(t,s) x^* f(s, x(s), T x(s)) ds \right|$$

$$\leq c + \| G(t,\cdot) \|_{BV} \left| (HK) \int_0^t f(s, x(s), T x(s)) ds \right|$$

$$\leq c + d \left\| \int_0^t f(s, x(s), T x(s)) ds \right\|$$

$$\leq c + d \sup_{t \in [0,a]} \left\| \int_0^t f(s, x(s), T x(s)) ds \right\|$$

$$\leq c + d\mu \leq b_2.$$

D'ici :

$$\sup \{ |x^* F_x(t)|, x^* \in B(E^*) \} \leq b_2.$$

Donc :

$$F_x(t) \in B_{b_2}.$$

**Étape (2)**. En va montres que $F(\tilde{B})$ est un sous-ensemble équicontinu.

Soit : $0 \leq t_1 < t_2 \leq a$ et $x \in \tilde{B}$.

On suppose que $F_x(t_1) = F_x(t_2)$. D'après le théorème de Hahn-Banach (1.1), il existe $x^* \in E^{'}$, tel que :

$$\| x^* \| = 1,$$

et

$$\| F_x(t_2) - F_x(t_1) \| = |x^*(F_x(t_2) - F_x(t_1)|.$$

On a :

$$\| F_x(t_2) - F_x(t_1) \| \leq |x^*(h(t_1)) - x^*(h(t_2))| + \left| (HK) \int_0^{t_1} (G(t_2,s) - G(t_1,s)) x^* f(s,x(s),Tx(s)) ds \right|$$

$$+ \left| (HK) \int_{t_1}^{t_2} G(t_2,s) x^* f(s,x(s),Tx(s)) ds \right|$$

Alors :

$$\| F_x(t_2) - F_x(t_1) \| \leq |x^*(h(t_2)) - x^*(h(t_1))| + \| G(t_2,\cdot) - G(t_1,\cdot) \|_{BV} \left| (HK) \int_0^{t_1} x^* f(s,x(s),Tx(s)) ds \right|$$

$$+ \sup_{\zeta \in I} \| G(\zeta,\cdot) \|_{BV} \left| \int_{t_1}^{t_2} x^* f(s,x(s),Tx(s)) ds \right|$$

Donc :

$$\| F_x(t_2) - F_x(t_1) \| \leq |x^*(h(t_1)) - x^*(h(t_2))| + \| G(t_2,\cdot) - G(t_1,\cdot) \|_{BV} \sup_{v \in J} \left\| \int_0^{v} f(s,x(s),Tx(s)) ds \right\|$$

$$+ d \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(s,x(s),Tx(s)) ds \right\|.$$

Ainsi, le résultat découle des hypothèse (1), (2) et de l'inégalité (3.5).

**Étape (3)**. Montrons maintenant que $F$ est faiblement-faiblement-séquentiellement continue.

Soit la suite $(x_n(\cdot))_n$ converge faiblement vers $x$ dans $\tilde{B}$. D'après le théorème(1.5), $x_n(t) \rightharpoonup$

$x(t)$ pour tout $t \in [0,a]$. Soient $s \in [0,a]$ et $x^* \in E^{'}$.
Alors :

$$|x^*k(s,\tau)x_n(\tau)| \leq b_2 \parallel x^* \parallel\!\!\parallel k(s,\cdot) \parallel_\infty,$$

Pour tout $\tau \in [0,s]$. et comme $x_n(t) \rightharpoonup x(t)$ on a :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} (HK)\int_0^s x^*k(s,\tau)x_n(\tau)d\tau = (HK)\int_0^s x^*k(s,\tau)x(\tau)d\tau.$$

Donc :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x^*\int_0^s x^*k(s,\tau)x_n(\tau)d\tau = x^*\int_0^s x^*k(s,\tau)x(\tau)d\tau.$$

$$\text{Alors, } Tx_n(s) \rightharpoonup Tx(s).$$

Par conséquent, l'opérateur $T$ est faiblement-faiblement-séquentiellement continue sur $\tilde{B}$, et comme $f$ est faiblement-faiblement-séquentiellement continue, on a :

$$f(s,x_n(s),Tx_n(s)) \rightharpoonup f(s,x(s),Tx(s)).$$

Pour tout $s \in [0,a]$. et $t \in [0,a]$.
D'après le théorème (5) de [19] et le lemme (25) de [18] à la suite $(G(t,\cdot)f(\cdot,x_n(.),T,x_n(\cdot)))_n$ on trouve que la fonction $G(t,\cdot)f(\cdot,x(\cdot),T,x(\cdot))$ est HKP-intégrable sur $[0,t]$ et :

$$\int_0^t G(t,s)f(s,x_n(s),T,x_n(s))ds \rightharpoonup \int_0^t G(t,s)f(s,x(s),T,x(s))ds$$

D'où, $F_{x_n}(t) \rightharpoonup F_x(t)$ , $\forall t \in [0,a]$, et d'après le théorème (1.5) l'opérateur $F$ est faiblement-faiblement séquentiellement continu.

Ensuite, nous considérons $Q = \overline{conv}F(\tilde{B})$, tel que $(Q)$ est un sous ensemble convexe fermé de non vide.

comme $F(\tilde{B})$ est bornée et équicontinue, donc $Q$ est un sous-ensemble faiblement fermé borné et équicontinu de $\tilde{B}$. Et il est clair que $F(Q) \subset Q$.

Nous affirmons que $F : Q \longrightarrow Q$ est $\beta$-condensante.

Soit $V$ un sous-ensemble de $Q$ tel que $\beta(V) \neq 0$, $v(t) = \{x(t), x \in V\}$ et $F(V)(t) = \{F_x(t), x \in V\}$.

Comme $V$ est bornée et équicontinue, on a d'après le lemme (1.3) (a) on a : $\sup_{t\in J}\beta(V(t))=\beta(V)=\beta(V(J))$.

Pour $t\in J$ fixé, on divise l'intervalle $[0,t]$ en $n$ parties : $0=t_0<t_1<...<t_n=t$ et pose $T_i=[t_{i-1},t_i]$. Par l'intégrale de Henstock-Kurzweil-Pettis, et théorème de la valeur moyenne [12], nous obtiens :

$$F_x(t)=h(t)+\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}G(t,s)f(s,x(s),\int_0^s k(s,\tau)x(\tau)d\tau)ds$$

$$F_x(t)\in h(t)+\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\overline{conv}\left\{G(t,s)f(s,x(s),\int_0^s k(s,\tau)x(\tau)d\tau),s\in T_i,x\in V\right\}$$

$$F_x(t)\in h(t)+\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\overline{conv}\left\{G(t,s)f(T_i,V(T_i),\overline{conv}k([0,s]\times[0,s])V([0,s]),s\in T_i\right\}$$

En utilisant les propriétés de la mesure de non-compacité faible, nous avons :

$$\beta(F(V)(t))\leq\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\beta(\overline{conv}\left\{G(t,s)f(T_i,V(T_i),\overline{conv}k([0,s]\times[0,s])V([0,s]),s\in T_i\right\})$$

$$\leq\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\beta(\overline{conv}\left\{G(t,s)f(T_i,V(T_i),\overline{conv}\left\{\bigcup_{w\in[0,t]}w((k([0,s][0,s])V([0,s]))\right\},s\in T_i\right\})$$

$$\leq\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\beta(\overline{conv}\left\{G(t,s)f(T_i,V(T_i),\overline{conv}\left\{\bigcup_{w\in[0,t]}w((k([0,t][0,t])V([0,t]))\right\},s\in T_i\right\})$$

On obtient :

$$\beta(F(V)(t))\leq\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\sup_{s\in T_i}|G(t,s)|$$

$$\beta(\overline{conv}\left\{G(t,s)f(T_i,V(T_i,\overline{conv}\left\{\bigcup_{|w|\in[0,a]}w((k((J,J))V((J)))\right\},s\in T_i\right\})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})\sup_{s\in T_i}|G(t,s)|\sup_{\tau\in T_i}L(\tau,\max(\beta(V(J)),\beta\left(\left\{\overline{conv}\left\{\bigcup_{|w|\in[0,a]} w((k((J,J))V((J)))\right\}\right\}\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})|G(t,s)|L(s_i,\max(\beta(V(J)),\beta\left(\left\{\overline{conv}\left\{\bigcup_{|w|\in[0,a]} w((k((J,J))V((J)))\right\}\right\}\right)$$

Ici pour chaque $i, \tau_i, s_i \in T_i$ sont des nombres tels que :

$$|K(t,\tau_i)| = \sup_{s\in T_i}|G(t,s)|$$

et

$$L(s_i,\max(\beta(V(J)),\beta\left(\left\{\overline{conv}\left\{\bigcup_{|w|\in[0,a]} w((k((J,J))V((J)))\right\}\right\}\right))$$

$$= \sup_{s\in T_i}|G(t,s)|\text{et}L(s_i,\max(\beta(V(J)),\beta\left(\left\{\overline{conv}\left\{\bigcup_{|w|\in[0,a]} w((k((J,J))V((J)))\right\}\right\}\right))$$

Ensuite, par la propriété $(vii)$ de $\beta$ et (3.11), on a :

$$\beta\left(\left\{\overline{conv}\left\{\bigcup_{|w|\in[0,a]} w((k((J,J))V((J)))\right\}\right\}\right) = a\beta(K(J,J)V(J)) \leq \alpha a\beta(V(J)) < \beta(V(J)),$$

Donc :

$$\beta(F(V)(t)) \leq \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})|G(t,s)|L(s_i,\beta(V)).$$

De la continuité des fonctions $s \longmapsto G(t,s)$ et $s \longmapsto L(s,\beta(V))$. sur $[0,t]$, il s'ensuite qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$|G(t,\tau)L(q,\beta(V)) - G(t,s)L(s,\beta(V))| < \varepsilon, \tag{3.6}$$

Si $|\tau - s| < \eta, |q-s| < \eta, q,s,\tau \in [0,t]$. Donc, en prenant $t_i$ de la manière que $|t_i - t_{i-1}| < \eta$ et d'après (3.6) en déduit que :

$$\beta(F(V)(t)) \leq \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})\left((HK)\int_{t_{i-1}}^{t_i}|G(t,\tau_i)L(s_i,\beta(V)) - G(t,s)L(s,\beta(V))|ds\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})\left((HK)\int_{t_{i-1}}^{t_i}|G(t,s)L(s,\beta(V))|ds\right)$$

Alors :

$$\beta(F(V)(t)) \leq \varepsilon t + (HK)\int_0^t |G(t,s)|L(s,\beta(V))ds$$

$$\leq \varepsilon t + \sup\left\{(HK)\int_0^{t'} |G(t,s)|L(s,\beta(V))ds, t' \in J\right\}.$$

Comme la dernière inégalité est satisfaite pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient :

$$\beta(F(V)(t)) \leq \sup\left\{(HK)\int_0^{t'} |G(t,s)|L(s,\beta(V))ds, t' \in J\right\}.$$

En appliquant le lemme(1.3)(a) pour le sous-ensemble équicontinu borné $F(V)$, on obtient que :

$$\beta(F(V)) = \sup_{t\in J} F(V)(t).$$

Par (3.14)

$$\beta(F(V)) \leq \sup\left\{(HK)\int_0^{t'} |G(t,s)|L(s,\beta(V))ds, t' \in J\right\} < \beta(V),$$

Donc, $F$ est $\beta$-condensante .

Et par le théorème (1.6), $F$ a un point fixe dans $Q \subset \tilde{B}$.

Ainsi de suite, $S$ l'ensemble de points fixes de $F$ dans $\tilde{B}$ est non vide.

Enfin, $F(S) = S \subset Q$, donc $\beta(F(S)) = 0$ et donc $S$ est un sous-ensemble relativement faiblement compact de $\tilde{B}$.

Comme, $F$ est faiblement -faiblement séquentiellement continu, donc $S$ est faiblement séquentiellement fermé.

L'utilisant du théorème d 'Eberlein-šmulian [[7], Theorem 8.12.4, p.549], prouve que $S$ est faiblement compact.

## Application sur une équation différentielle fractionnaire

Soit $I=[0,1]$ et $E$ un espace réel de Banach. on a l'équation suivante (3.1)
avec : $G,k$ deux fonctions définies par :

$$G(t,s)=(t-s)^{\alpha-1}, k(s,\tau)=(s-\tau)^{\alpha-1}$$

et $\alpha\in I=[0.1]$. Donc on définit l'équation fractionnaire suivante :

$$x(t)=h(t)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s(s-\tau)^{\alpha-1}x(\tau)d\tau)ds. \tag{3.7}$$

On pose que :

$$u(\tau)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s(s-\tau)^{\alpha-1}x(\tau)d\tau.$$

Donc :

$$x(t)=h(t)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s),u(\tau))ds.$$

Maintenant on pose que :

$$Q(s)=f(s,x(s),u(\tau))$$

L'équation est donnée sous la forme :

$$x(t)=h(t)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}Q(s)ds. \tag{3.8}$$

Soient $f: I\times E^2\longrightarrow E, vh: I\longrightarrow E$, et : $G,k: I\times I\longrightarrow\mathbb{R}$ des fonctions vérifient les conditions suivantes :

• h est faiblement continue sur $I$.

• Pour tout $t\in I, \alpha\in[0.1]$ on a :

$$\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}ds=\left[-\frac{1}{\alpha}(t-s)^{\alpha}\right]_0^t=\frac{1}{\alpha}(t-t)^{\alpha}+\frac{1}{\alpha}(t)^{\alpha}=\frac{(t)^{\alpha}}{\alpha}$$

$$\frac{(t)^{\alpha}}{\alpha}<\infty$$

La même chose pour $(s-\tau)^{\alpha-1}$

$$\int_0^s(s-\tau)^{\alpha-1}d\tau=\frac{(s)^{\alpha}}{\alpha}<\infty$$

Alors, $G(t,\cdot)$ et $k(t,\cdot)\in BV(I,\mathbb{R})$. Aussi les fonctions $t\longmapsto G(t,\cdot)$ et $t\longmapsto k(t,\cdot)$ sont $\|\cdot\|_{BV}$-continués.

• $f$ est faiblement-faiblement séquentiellement continue (pour chaque suite convergente $\{t_n\}\subset[0,1]$ et pour toute suites $\{x_n\}\rightharpoonup x$, et $\{y_n\}\rightharpoonup y\subset E$.
La suite $\{f(t_n,x_n,y_n)\}$ est converge faiblement dans $E$ ).

Pour tout $r>0$ et $\varepsilon>0$ il existe $\delta_{\varepsilon,r}>0$ tel que :

$$\left\|\int_\tau^t f(s,x(s),\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s(s-\eta)^{\alpha-1}x(\eta)d\eta)ds\right\|<\varepsilon, \tag{3.9}$$

$$\forall|t-\tau|<\delta_{\varepsilon,r},\forall x\in D_r.$$

On va calculer l'intégrale : $\int_0^s(s-\eta)^{\alpha-1}x(\eta)d\eta$.
En intégrer par partie tel que :

$$\int_0^s(s-\eta)^{\alpha-1}x(\eta)d\eta$$

En pose que :
$u'=(s-\eta)^{\alpha-1}$, $u=-\frac{1}{\alpha}(s-\eta)^\alpha$
et $v=x(\eta)$, $v'=x'(\eta)$
on a :

$$\int_0^s(s-\eta)^{\alpha-1}x(\eta)d\eta=\left[-\frac{1}{\alpha}(s-\eta)^\alpha x(\eta)\right]_0^s+\frac{1}{\alpha}\int_0^s(s-\eta)^\alpha x'(\eta)d\eta$$

Maintenant calcule l'intégrale : $\int_0^s(s-\eta)^\alpha x'(\eta)d\eta$
de même facon :

$$\int_0^s(s-\eta)^\alpha x'(\eta)d\eta=\left[-(s-\eta)^\alpha x(\eta)\right]_0^s-\alpha\int_0^s(s-\eta)^{\alpha-1}x(\eta)d\eta$$

Alors on a :

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^s(s-\eta)^{\alpha-1}x(\eta)d\eta=\left[-\frac{1}{\alpha}(s-\eta)^\alpha x(\eta)\right]_0^s-\int_0^s(s-\eta)^{\alpha-1}x(\eta)d\eta$$

Donc :

$$2\int_0^s(s-\eta)^{\alpha-1}x(\eta)d\eta=\left[-\frac{1}{\alpha}(s-\eta)^\alpha x(\eta)\right]_0^s+\left[-\frac{1}{\alpha}(s-\eta)^\alpha x(\eta)\right]_0^s=-\frac{2}{\alpha}\left[(s-\eta)^\alpha x(\eta)\right]_0^s$$

Alors :

$$\int_0^s (s-\eta)^{\alpha-1} x(\eta) d\eta = -\frac{1}{\alpha}\left[(s-\eta)^{\alpha} x(\eta)\right]_0^s.$$

Donc :

$$\left\| \int_\tau^t f(s, x(s), \frac{1}{\Gamma(\alpha)\alpha} s^{\alpha} x(0)) ds \right\| < \varepsilon. \tag{3.10}$$

• Il existe $b_0 > \max(1, \sup_{t\in I} \| k(t,\cdot) \|_{BV}) \sup_{t\in I} \| h(t) \|$ tel que :

Pour tout suite $(x_n)_n \subset D_{b_0}$ converge faiblement, l'ensemble

$$\left\{ x^* f(\cdot, x_n(\cdot), \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{(\cdot)} k(\cdot,\tau) x_n(\tau) d\tau), n \in \mathbb{N}, x^* \in B(E') \right\}, \tag{3.11}$$

est HK-intégrable.

• Il existe $b_1 > \sup_{t\in I} \| h(t) \|$, et une constante positive $\alpha$ telle que :

$$\beta(k(J,J)V(J))) \leq \alpha\beta(V(J)), \tag{3.12}$$

pour chaque intervalle fermé $J \subset I$, pour tout $V \subset D_{b_1}$,

Où

$$k(J,J)V(J) = \left\{ (t-s)^{\alpha-1} x(r), t, s, r \in J, x \in V \right\}.$$

• Il existe une fonction positive $L(\cdot,\cdot)$ telle que :

(a) pour chaque sous-intervalle fermé $J$ de $I$ et les sous -ensembles bornés $Y, \nu Z$ de $E$,

$$\beta(f[J \times Y \times Z]) \leq \sup \left\{ L(t, \max(\beta(Y), \beta(Z))), t \in J \right\}, \tag{3.13}$$

Où

$$f[J \times Y \times Z] = \left\{ f(t,y,z) : t \in J, (y,z) \in Y \times Z \right\}.$$

(b) La fonction $s \longmapsto L(s,r)$ est continue pour tout $r \in [0,\infty[$, et

$$\sup_{t\in I}\left\{(HK)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |(t-s)^{\alpha-1}|L(s,r)ds\right\} < r. \tag{3.14}$$

pour tout $r > 0$

Alors, il existe un intervalle $J = [0,a] \subset I$ tel que l'ensemble des solutions de (3.7) défini sur $J$ est non vide et faiblement compact dans l'espace $C(J,E)$.

# Conclusion

Enfin, des méthodes avancées telles que les dérivées fractionnaires et les intégrales comme l'intégrale de Henstock-Kurzweil-Pettis être utilisées pour développer des modèles matémathiques plus robustes dans plusieurs domaines.

Notre but principal, dans ce mémoire, est l'étude d'ensemble des solutions faibles d'une équation intégrale non linéaire de type Volterra. Ces résultat ont été obtenus par l'utilisations du théorème du point fixe pour les applications faiblement séquentiellement continues et la technique de la mesure de non-compacité faible et l'intégrale de Henstock-Kurzweil-Pettis. Dans un espace de Banach. et même l'applications de calcul fractionnaire sur cette équation.

Nous prévoyons dans le future, étudierons l'existence de solutions pour une équation fractionnaire dans les espaces de Banach munis de la topologie faible et intégrale de Henstock-Kurzweil-Pettis.

# Bibliographie


[1] J, Matos, Analyse fonctionnel, Université d'évry, Année 2014/2015.

[2] H. Bresiz, Analyse fonctionnele, Dunod (1999). l.

[3] S. Abbas. M. Benchohra and G. M. N'Guérékata. Topics in fractinal differential equations, Springer, New York, 2002.

[4] J. Banas, On measures of noncompactness in Banach spaces . Comment.Math.Univ. Carolinae 21(1980)131-143.

[5] De. Blasi, F. S. On a property of the unit shere in Banach space. Bull. Math. Soc. R. S. Roum.b21, 259-262(1977).

[6] I, Dobrakov : Sur la représentation des opérateurs linéaires sur $C_0(T,X)$. Tchéque .Mathématique. J. 20, 13-30(1971).

[7] RE, Edwards : analyse fonctionnelle, théorie et applications, Holt, Reinhart et Winston, New york, (1965).

[8] J, Garcia-Falset : Existence de points fixes et mesures de non-compacité faible. Anal non linéaire. T héorie Méthodes Appl. 71, 2625-2633(2009).

[9] I. Podlubny, Fractional differential equation, Academic Press, San Diego, 1999.

[10] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, j. j. Trujillo, Theory and application of fractional differntial, Nourth-Holland Mathematical studies 204. Ed Van Mill, Amsterdam, (2006).

[11] M, Cichon ; I, Kubiaczyk ; A, Sikorska : Intégrales de Henstock-Kurzweil et Henstock-Kurzweil-Pettis et une certaine existence théorèmes. Proc. ISCM Herlany 2000, 53-56(1999).

[12] M, Cichon ; I, Kubiaczyk ; A, Sikorska : Les intégrales de -Kurzweil-Pettis et les théorèmes d'existence pour Cauchy problème. Tchéque. Mathématiques. J. 54(129), 279-289(2004).

[13] RA, Gordon : Intégrale de Rienmann dans les espaces de Banach. Rocky Mt. J. Math. 21(3), 923-949(1991).

[14] RA, Gordon : Les intégrales de Lebesgue, Denjoy, Perron et Henstock. Diplômé. Étalon. Math, 4 AMS, Providence, (1994).

[15] M, Cichon : Sur les solutions d'équations différntielles dans les espaces de Banach. Anal non linéaire. Théorie. Méthodes Appl. 60(4), 651-667(2005).

[16] JL, Gamez ; Mendoza, J : Sur les intégrales Denjoy-Dunford et Denjoy-Pettis. Étalon. Mathématiques. 130, 115-133(1998).

[17] J, Diestel ; Uhl, JJ : Mesures vectorielles, Math. Surv, 15(1977).

[18] B, Satco : Un théorème de type kolmós pour les intégrales et les applications de Henstock-Kurzweil-Pettis à valeur d'ensemble. Tchéque. Mathématique. J. 56(131), 1029-1047(2006).

[19] L, Di Piazza : Intégration de type Kurzweil-Henstock sur les espaces de Banach. Véritable anale. Éch. 29(2), 543-555(2003).

[20] M. Caputo, Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, Part. II, Geophys. J. R. Astr. Soc, 13(1967), 529-539.

[21] M. Caputo and F. Mainardi, Linear models of dissipation in an elastic solids, Riv. Nuovo Cimento(ser, II), 1 (1971), 161-198.

[22] R, Agrwal, D, O'Regan ; Sikorska-Nowak, A : L'ensemble des solutions des équations intégrodifféretielles et le Henstock-intégrale de Kurzweil-Pettis dans les espaces de Banach.T aureau.Aust. Mathématiques. Soc. 78, 507-522(2008).

[23] Yu, L :Barbot, J.-P. ;Boulat, D. ;Benmerzouk, D : Formes d'observabilité pour les systèmes commmutés à phénomène zénon ou fréquence de commutation. Autom. Contrôle, IEEE Trans. 56(2), 436-441(2011).

[24] SB, Kaliaj ; Tato, Ad ; Gumeni, FD, thórèmes de convergences contrôlée pour l'intégrale de Henstock-Kurzweil-Pettis sur m intervalles compacts dimensionnels. Tchéque. Mathématiques. j. 62(1), 243-255(2012).

[25] A, Sikorska-Nowak : Équation intégrales non linéaires dans les espaces de Banach et intégrales de Henstock-Kurzweil-Pettis. Dyn. Syst. Appl. 17, 97-108(2008).

[26] S. Samko, A. Kilbas , and O. Marchev, Fractional integrals and derivatives : Theory and Applications, Gordon and Breach, London, 1993.

[27] A, Ben Amar : On an intégrale equation under Henstock-Kurzweil-Pettis integrability. Tunisia, 2015.