Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences -Département de Mathématiques & Informatique

MÉMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

Intitulé

Existence de la solution d'une équation différentielle fractionnaire avec deux dérivées d'ordre fractionnaire

par

LARDJOUM mounir & SABOUR youcef

Devant le jury Composé de :

N.IKHLEF ESCHOUF	MCA	UYF de Médéa	Président
K.TABLENNEHAS	MAA	UYF de Médéa	Examinateur
M. HOUAS	MCA	UDBKM de Khemis Miliana	Promoteur

Année Universitaire : 2019 – 2020

Remerciements

Nous tenons à saisir cette occasion pour adresser nos sincères remerciements et nos profondes reconnaissances à Dieu le tout qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second nous tenons à remercier *Mr.* **HOUAS Mohamed** notre encadreur, pour ses précieux conseils et son ficelée tout au long de notre recherche.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, nous tenons également à remercier toutes nos familles et nos ami(e)s qui ont participé de prés ou de loin à l'exécution de ce travail.

Résumé

Les théorèmes du point fixe ont beaucoup d'applications. Ils interviennent dans la résolution de plusieurs équations différentielles non linéaires, en particulier dans l'étude de l'existence et de l'unicité.

Dans ce mémoire on s'intéresse à l'applications des théorèmes du point fixe pour étudier un problème aux limites avec une et deux Dérivée fractionnaire au sens de Caputo dans un espace de Banach. On va étudier l'existence et l'unicité de la solution à l'aide de principe de contraction de Banach. Puis, en utilisant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, théorème Krasnosselski et le théorème de Schaefer, on va aborder la question de l'existence d'une solution au moins.

Abstract

The fixed point theorems has many applications. It intervenes in the resolution of several nonlinear differential equations in particular, in the study of existence and uniqueness.

In this thesis we are interested in the applications of fixed point theorems to study a boundary problem with one and two fractional derivative in the sense of Caputo in a Banach space. We will study the existence and the uniqueness of the solution using Banach's principle of contraction. Then, by using the nonlinear alternative of Leray-Schauder, Krasnosselski theorem and Schaefer's theorem, we will address the question of the existence of at least one solution.

Dédicace

*J*e dédie ce modeste travail, aux deux êtres les plus chers sur cette terre, symbole du courage et d'affection à qui je souhaite une longue vie pleine de joie et de bonheur :
A mon pére **Mr Lardjoum Belkacem** qui a cru en moi et m'a fait confiance et il m'a assuré
tout les moyens d'aller aussi loin que possible, merci beaucoup papa,
A ma mére **Lemdani Hadda** , Maman c'est sûr que tu ne comprendras pas grand-chose au sujet que j'ai traité dans ce document, mais saches que chaque mot, chaque phrase, que j'y ai inscrit ont une seule et même signification : tu es la meilleure des méres, je t'aime à l'éternité

A mes fréres : **Mohamed EL AMINE, CHAMCE EL DINNE et ABD EL KARIM**
A me soeure : **SIHEM** que j'aime beaucoup
qui m'ont soutenu durant toute cette période, je tiens a les remercie énormément pour tous ce qu'ils m'ont fait
A mo amie binome **SABOUR Youcef**
A tous mes cousins et cousines, et toute ma famille et les personnes
qui m'ont soutenu durant mon cursus universitaire
A tous ceux qui m'ont aimé et qui ne méritent pas d'être oubliés
A tous mes amis : **Mohamed baizid, Sofiane, Hakim, Boubakeur, Antar, Nadji, Rabeh et Youcef.**

LARDJOUM MOUNIR

Dédicace

*J*e dédie ce modeste travail, aux deux êtres les plus chers sur cette terre, symbole du courage et d'affection à qui je souhaite une longue vie pleine de joie et de bonheur :
A mon pére **Mr Sabour Difallah** que Dieu lui fasse miséricordre et le place ses havres qui a cru en moi et m'a fait confiance et il m'a assuré
tout les moyens d'aller aussi loin que possible, merci beaucoup papa,
A ma mére **Sabour Fatma** , Maman c'est sûr que tu ne comprendras pas grand-chose au sujet que j'ai traité dans ce document, mais saches que chaque mot, chaque phrase, que j'y ai inscrit ont une seule et même signification : tu es la meilleure des méres, je t'aime à l'éternité
A mes fréres : **OMAR, SMAIN, MAHMOUD et IBRAHIM**
A me soeure : **DJAMILA, DALILA, FOUZIA, ANISSA et DJAOUIDA** que j'aime beaucoup
qui m'ont soutenu durant toute cette période, je tiens a les remercie énormément pour tous ce qu'ils m'ont fait
A mo amie binome **LARDJOUM Mounir**
A tous mes cousins et cousines, et toute ma famille et les personnes qui m'ont soutenu durant mon cursus universitaire
A tous ceux qui m'ont aimé et qui ne méritent pas d'être oubliés
A tous mes amis : **Abd Elfetah, Omar, Zaki, Abd kader, Rabeh, Nour Eldine, Mahfoudh et Djamel .**

SABOUR YOUCEF

Table des matières

Remerciements **1**

Résumé **2**

Résumé **3**

Introduction **8**

1 Notions de calcul fractionnaire **9**
1.0.1 Fonctions spéciales 9
1.0.2 Fonction Gamma 9
1.0.3 Fonction Bêta 11
1.1 Intégration fractionnaire 12
1.1.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville 12
1.1.2 Exemples 13
1.2 Dérivation fractionnaire 14
1.2.1 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville 14
1.2.2 Exemples 14
1.2.3 Propriétés 15
1.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo 15
1.3.1 Propriétés 16
1.3.2 Exemples 16
1.4 Quelques théorèmes du point fixe 17

2 Étude de l'existence de la solution d'une équation différentielle fractionnaire **20**
2.1 Introduction 20
2.2 Lemmes Auxiliaires 20
2.3 Solution Intégrale 21
2.4 Hypothèses 22
2.5 Existence et Unicité de Solutions 22
2.5.1 Unicité de Solutions 22
2.6 Existence de Solutions 24

3 Étude de l'existence de la solution d'une équation différentielle avec deux dérivées fractionnaires **29**
3.1 Introduction 29

3.2 Solution générale 29
3.2.1 Problème du point fixe 31
3.3 Existence et unicité 31
3.3.1 L'unicitée de la solution du problème 31
3.3.2 Exemple 33
3.3.3 Existence d'une Solution au moins 34
3.3.4 Résultat d'existence via l'alternative non linéaire de Leray-Schauder . 34
3.3.5 Exemple 39
3.3.6 Résultat d'existence via le théorème du point fixe de Krasnosselski . . 40
3.3.7 Exemple 43

Conclusion **45**

Bibliographie **46**

Introduction

Le calcul fractionnaire est défini comme étant la branche mathématique qui étudie la généralisation des notions de dérivation et d'intégration à des ordres non nécessairement entiers, permettant le calcul de la dérivée d'ordre α réel ou complexe d'une fonction différentiable $f(t)$ soit :

$$(D^{\alpha} f)(t) = \frac{d^{\alpha}\ f(t)}{dt^{\alpha}}.$$

La théorie des équations différentielles fractionnaires est l'un des plus important champs d'applications de la théorie du calcul fractionnaire, en effet de nombreux phénomènes se modélisent par des équations différentielles fractionnaires et l'étude de ces dernières permet certainement une meilleure interprétation des phénomènes physiques. Les théorèmes du point fixes [9, 11, 13, 14, 15] est un outil éxtrèment important qui intervient dans l'étude des équations différentielles fractionnaires et permet d'établir des résultats d'existences et d'unicités.

Notre travail est réparti en trois chapitres. Le premier chapitre est consacré aux définitions et notations qui seront utiles dans la suite de travail.

Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude de l'existence de la solution de l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$$\begin{aligned} D^{\alpha} x(t) &= \theta - f(t, x(t)),\ \theta \in \mathbb{R},\ 0 < \alpha < 2, t \in J = [0,1], \\ x(0) &= \int_0^1 h(s)\, x(s)\, ds, \qquad x(1) = \theta, \end{aligned}$$

où D^{α} désigne la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo et $f : [0;1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Pour le troisième chapitre on étudie l'existence et l'unicité des solutions d'une équation différentielle fractionnaire avec deux dérivées fractionnaires de Caputo en utilisant l'approche de point fixe via l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et le théorème Krasnosselski. On considère alors le problème fractionnaire suivant :

$$\begin{aligned} D^{\alpha}\left(D^{\beta} + \lambda\right) x(t) + f(t, x(t)) &= \theta, \quad \lambda, \theta \in \mathbb{R}, t \in J = [0,1] \\ x(0) &= \int_0^1 \varphi(s)\, x(s)\, ds, \qquad x(1) = \theta, \end{aligned}$$

où D^{α} et D^{β} représentent les dérivées fractionnaires au sens de Caputo d'ordre α et β respectivement, avec $1 < \alpha, \beta \leq 2$, $J = [0,1]$, $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Chapitre 1

Notions de calcul fractionnaire

Cette section rassemblent les définitions et les propriétés essentielles correspondantes à la notion de l'intégration et la dérivation fractionnaire [6, 7, 8, 10, 12]. La dernière section est consacrée à la présentations de quelques théorèmes classiques de ponit fixe.

1.0.1 Fonctions spéciales

Dans ce paragraphe, on présente deux fonctions spéciales qui sont très utilisées dans l'intégration fractionnaire. Il s'agit de la fonction Gamma et de la fonction Bêta.

1.0.2 Fonction Gamma

La fonction Gamma est simplement la généralisation de la factorielle, cette fonction est l'un des outils de base du calcul fractionnaire.

Définition 1.1 *La fonction Gamma est définie par l'intégrale*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \ \ \mathrm{Re}\{z\} > 0. \tag{1.1}$$

Exemple 1.1 *Evaluons* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ *par définition*

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \tfrac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt.$$

Posons $t = v^2$ alors

$$dt = 2vdv.$$

D'où

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \tfrac{1}{v} e^{-v^2} 2v dv$$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-v^2} dv$$

Calculons $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$, on trouve

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \left[2\int_0^{+\infty} e^{-v^2}dv\right]^2$$

$$= \left[2\int_0^{+\infty} e^{-v^2}dv\right]\left[2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du\right]$$

$$= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)}dudv$$

On pose

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ \\ v = r\sin\theta,\ r \in [0,+\infty[\ ,\ \theta \in [0,\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

On aura

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{+\infty} e^{-r^2}rdrd\theta$$

$$= 4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty}d\theta$$

$$= 4\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}d\theta$$

$$= 4\tfrac{1}{2}\tfrac{\pi}{2} = \pi$$

$$\Rightarrow \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Propriétés de la fonction Gamma

Une propriété importante de la fonction $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \tag{1.2}$$

qu'on peut démontrer par une intégration par partie :

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t}dt = [-e^{-t}t^z]_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt = z\Gamma(z).$$

Puisque $\Gamma(1) = 1$, en utilisant la relation de récurrence, on obtient pour $z = 1, 2, 3...$

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3!$$

donc

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!. \tag{1.3}$$

1.0.3 Fonction Bêta

Définition 1.2 *La fonction Bêta est donnée par :*

$$B(x,y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} dt, \ \ \mathrm{Re}(x) > 0, \ \ \mathrm{Re}(y) > 0. \tag{1.4}$$

Propriétés de la fonction Bêta

1. La fonction Bêta est symétrique c'est-à-dire que :

$$B(x,y) = B(y,x). \tag{1.5}$$

2. Elle peut prendre aussi les formes intégrales :

$$B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta d\theta. \tag{1.6}$$

$$B(x,y) = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt. \tag{1.7}$$

Proposition 1.1 *Les fonctions Gamma et Bêta sont reliées par la relation :*

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{1.8}$$

Preuve. En effet si dans (1.1) on change t par u^2, on obtient l'intégrale de Gauss :

$$\Gamma(z) = 2\int_0^{+\infty} u^{2z-1} e^{-u^2} du.$$

qu'on va utiliser pour calculer $\Gamma(x)$ et $\Gamma(y)$ avec $\mathrm{Re}\, x > 0$, $\mathrm{Re}\, y > 0$, En effet :

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} t^{2x-1} e^{-t^2} dt.$$

$$\Gamma(y) = 2\int_0^{+\infty} v^{2y-1} e^{-v^2} dv.$$

Donc :

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(t^2+v^2)} t^{2x-1} v^{2y-1} dt dv.$$

Passons aux coordonnées polaires : $t = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_{r\geq 0, 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r^{2(x+y)-1} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta dr d\theta$$

$$= \left(2\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{2(x+y)-1} dr\right)\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta d\theta\right)$$

$$= (\Gamma(x+y))2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta d\theta.$$

D'où finalement :

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta d\theta.$$

En posant : $x = y = \frac{1}{2}$, on trouve $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi$ et donc $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.Intégration fractionnaire ■

1.1 Intégration fractionnaire

1.1.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

L'approche de Riemann - Liouville relative à la définition de l'intégrale fractionnaire s'appuie sur la formule de cauchy pour le calcul de l'intégrale répétée n fois qui est donnée par :

$$I^n[f(t)] = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau,\ t>0, n\in\mathbb{N}^*. \tag{1.9}$$

En généralisant cette formule à un ordre α réel positif et en remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma on aura la définition suivante :

Définition 1.3 *L'intégrale fractionnaire Riemann - Liouville d'ordre $\alpha \geq 0$ d'une fonction $f : [0,t] \to \mathbb{R}$, est définie par*

$$\begin{gathered} I^\alpha[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau,\ \alpha>0,\ t>0, \\ I^0[f(t)] = f(t). \end{gathered} \tag{1.10}$$

Proposition 1.2 *Pour tout $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $t > 0$, on a :*

$$I^\alpha[I^\beta f(t)] = I^{\alpha+\beta}[f(t)], \tag{1.11}$$

et

$$I^\alpha[I^\beta f(t)] = I^\beta[I^\alpha f(t)]. \tag{1.12}$$

Preuve. Par définition on a :

$$I^\alpha[I^\beta f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left(\int_0^\tau (\tau-\rho)^{\beta-1} f(\rho)d\rho\right)d\tau.$$

On pose :

$$\tau-\rho = s(t-\rho) \Rightarrow d\tau = (t-\rho)ds,$$

et

$$s = \frac{\tau-\rho}{t-\rho}\ alors,\ 1-s = \frac{t-\tau}{t-\rho}\ donc\ (t-\tau) = (1-s)(t-\rho).$$

$$\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}d\tau \int_0^\tau (\tau-\rho)^{\beta-1} f(\rho)d\rho = \int_0^t f(\rho)d\rho \int_\rho^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-\rho)^{\beta-1}d\tau$$

$$\int_0^t f(\rho)d\rho \int_0^1 [s(t-\rho)]^{\beta-1}\left[(1-s)(t-\rho)\right]^{\alpha-1}(t-\rho)ds$$

$$= \int_0^t (t-\rho)^{\alpha+\beta-1} f(\rho)d\rho \int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}ds = B(\alpha,\beta)\int_0^t (t-\rho)^{\alpha+\beta-1} f(\rho)dp.$$

Ainsi on a :

$$I^\alpha[I^\beta f(t)] = I^{\alpha+\beta}[f(t)] = I^{\beta+\alpha}[f(t)].$$

D'ou (1.6) et (1.7). ■

1.1.2 Exemples

1. Soit $f(t) = (t-a)^\beta$ où $\beta > -1$.

$$I^\alpha[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(x-a)^\beta dx.$$

En effectuant le changement de variable $x = a + \tau(t-a) \Rightarrow dx = d\tau(t-a)$, $(0 \leq \tau \leq 1)$ et en utilisant la fonction Bêta il résulte que

$$I^\alpha[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^\beta d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta} B(\alpha, \beta+1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\alpha+\beta}.$$

Donc

$$I^\alpha[f(t)] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\alpha+\beta}.$$

2. $f(x) = e^x$, on a alors :

$$I^\alpha[f(x)] = I^\alpha[e^x] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\tau)^{\alpha-1} e^\tau d\tau.$$

Si on pose $y = x - \tau$, on aura :

$$I^\alpha[f(x)] = \frac{e^x}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x y^{\alpha-1} e^{-y} dy.$$

Une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned} I^\alpha[e^x] &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k)} \\ &= \frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{x^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{x^{\alpha+3}}{\Gamma(\alpha+3)} + ... \end{aligned}$$

3. pour $f(x) = x$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$I^{\frac{1}{2}}[x] = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tau d\tau = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x \frac{\tau d\tau}{\sqrt{x-\tau}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{\tau d\tau}{\sqrt{x-\tau}}.$$

On pose

$$\sqrt{x-\tau} = t \Rightarrow d\tau = -2tdt.$$

$$I^{\frac{1}{2}}[x] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{-2t(x-t^2)}{t} dt = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} (x-t^2) dt = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} [xt + \frac{t^3}{3}]_0^{\sqrt{x}}.$$

$$I^{\frac{1}{2}}[x] = \frac{-4}{3\sqrt{\pi}} x\sqrt{x}.$$

4. On prend $f(x) = e^{\lambda x}$ on a :

$$I^\alpha_{-\infty}[e^{\lambda x}] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-\tau)^{\alpha-1} e^{\lambda\tau} d\tau.$$

On effectue le changement de variable $(x-\tau)=y$, on obtient :

$$I^{\alpha}_{-\infty}[e^{\lambda x}] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{+\infty}^{0} -y^{\alpha-1}e^{\lambda(x-y)}dy$$

$$= \frac{e^{\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{+\infty} y^{\alpha-1}e^{-\lambda y}dy,$$

Si on pose $x=\lambda y \Rightarrow dx=\lambda dy$, alors

$$I^{\alpha}_{-\infty}[e^{\lambda x}] = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \frac{e^{\lambda x}\Gamma(\alpha)}{\lambda^{\alpha}\Gamma(\alpha)} = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^{\alpha}}.$$

1.2 Dérivation fractionnaire

Il y a beaucoup d'approches pour la dérivation fractionnaire, on cite les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications.

1.2.1 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Soit f une fonction intégrable sur $[a,t]$, alors la dérivée fractionnaire d'ordre α (avec $n-1\leq\alpha<n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$$\begin{aligned} {}^{R}D^{\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau \\ &= \frac{d^n}{dt^n}(I^{n-\alpha}f(t)). \end{aligned} \tag{1.13}$$

1.2.2 Exemples

Exemple 1.2 ***1-La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville :***

En générale la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante, mais on a :

$${}^{R}D^{\alpha}c = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

Exemple 1.3 ***2-La dérivée de*** $f(t)=(t-a)^{\alpha}$ ***au sens de Riemann-Liouville :***

Soit p non entier et $0\leq n-1<p<n$ et $\alpha>-1$, alors on a :

$${}^{R}D^{p}(t-a)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha}\, d\tau.$$

En faisant le changement de variable $\tau=a+s(t-a)$, on aura :

$${}^{R}D^{p}(t-a)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n+\alpha-p}\int_a^t (1-s)^{n-p-1}s^{\alpha}ds$$

$$= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)B(n-p,\alpha+1)}{\Gamma(n-p)}(t-\alpha)^{\alpha-p}$$

$$= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-p+1)\Gamma(n+\alpha-p+1)}(t-\alpha)^{\alpha-p}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-\alpha)^{\alpha-p}$$

A titre d'exemple

$${}^{R}D^{0.5}t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5)$$

1.2.3 Propriétés

1. Composition avec l'intégrale fractionnaire

- L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire,

$$ {}^{R}D^{\alpha}\left(I^{\alpha}f\left(t\right)\right)=f\left(t\right), $$

en générale

$$ {}^{R}D^{\alpha}\left(I^{\beta}f\left(t\right)\right)={}^{R}D^{\alpha-\beta}f(t), $$

et si $\alpha-\beta<0$, alors

$$ {}^{R}D^{\alpha-\beta}f\left(t\right)=I^{\beta-\alpha}f\left(t\right), $$

En général la dérivation

et l'intégration fractionnaire ne commutent pas

$$ {}^{R}D^{-\alpha}\left({}_{a}^{R}D_{t}^{\beta}f(t)\right)={}^{R}D^{\beta-\alpha}f(t)-\sum_{k=1}^{m}\left[{}^{R}D_{t}^{\beta-k}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}, $$

avec $m-1\leq\beta<m$.

2. Composition avec les dérivées d'ordre non entier

La dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle (d'ordre entière) ne commutent que si $f^{(k)}\left(a\right)=0$ pour $k=0,1,2,....,n-1$.

$$ \frac{d^{n}}{dt^{n}}\left({}^{R}D^{\alpha}f\left(t\right)\right)={}^{R}D^{n+\alpha}f\left(t\right), $$

mais

$$ {}^{R}D^{\alpha}\left(\frac{d^{n}}{dt^{n}}f\left(t\right)\right)={}^{R}D^{n+\alpha}f\left(t\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(k-\alpha-n+1)}\ . $$

3. Composition avec les dérivées fractionnaires

Soit $n-1\leq\alpha<n$ et $m-1$ et $m-1\leq\beta<m$, alors

$$ {}^{R}D^{\alpha}\left({}^{R}D_{t}^{\beta}f\left(t\right)\right)={}^{R}D^{\alpha+\beta}f\left(t\right)-\sum_{k=1}^{m}\left[{}^{R}D^{\beta-k}f\left(t\right)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(-\alpha-k+1)}, $$

et

$$ {}^{R}D^{\beta}\left({}^{R}D^{\alpha}f\left(t\right)\right)={}^{R}D^{\alpha+\beta}f\left(t\right)-\sum_{k=1}^{m}\left[{}^{R}D^{\alpha-k}f\left(t\right)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\beta-k}}{\Gamma(-\beta-k+1)}, $$

par la suite deux opérateurs de dérivation fractionnaire ${}^{R}D^{\alpha}$ et ${}^{R}D^{\beta}$ $(\alpha\neq\beta)$, ne commutent que si $\left[{}^{R}D^{\alpha-k}f\left(t\right)\right]_{t=a}=0$ pour tout $k=1,2,....,n$ et $\left[{}^{R}D^{\beta-k}f\left(t\right)\right]_{t=a}=0$ pour tout $k=1,2,....,m$.

1.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.4 *Soit $\alpha>0$ avec $n-1<\alpha<n$, $(n\in\mathbb{N}^{*})$ et f une fonction telle que $\frac{d^{n}}{dt^{n}}f\in L_{1}\left[a,b\right]$. La dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Caputo est définie par*

$$ {}^{C}D^{\alpha}f\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}\left(t-\tau\right)^{n-\alpha-1}f^{(n)}\left(\tau\right)d\tau $$

$$ I^{n-\alpha}=\left(\frac{d^{n}}{dt^{n}}f\left(t\right)\right). $$

1.3.1 Propriétés

1. Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville

Soit $\alpha > 1$ avec $n-1 < \alpha < n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$, supposons que f est une fonction telle que ${}_a^C D_t^\alpha f(t)$ et ${}_a^R D_t^\alpha f(t)$ existent alors

$$ {}^C D^\alpha f(t) = {}^R D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} $$

On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, on aurra ${}^C D^\alpha f(t) = {}^R D^\alpha f(t)$.

2. Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

Si f est une fonction continue on a

$$ {}^C D^\alpha I_a^p f = f \text{ et } I_a^{\alpha C} D^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!} $$

donc l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droite.

1.3.2 Exemples

1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo.

La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

$$ {}^C D^\alpha c = 0. $$

2. La dérivée de $f(t) = (t-a)^\alpha$ au sens de Caputo .

Soit p un entier et $0 \leq n-1 < p < n$ avec $\alpha > n-1$, alors on a

$$ f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)} (\tau-a)^{\alpha-n}, $$

d'où

$$ {}^C D^p (t-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^{\alpha-n} d\tau, $$

Effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on obtient

$$ \begin{aligned} {}^C D^p (t-a)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^{\alpha-n} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} (t-a)^{\alpha-p} \int_a^1 (1-s)^{n-p-1} s^{\alpha-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)B(n-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p}. \end{aligned} $$

1.4 Quelques théorèmes du point fixe

Les théorèmes de point fixe consistent à transformer un problème donné en un problème du type $x = h(x)$, ainsi ils fournissent des conditions généralement suffisantes pour lesquelles l'équation $x = h(x)$ admet une solution. Dans ce paragraphe on présente les théorèmes de points fixes que on va utiliser tout au long de ce mèmoire en vu d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité.

Définition 1.5 *Soit E un espace vectoriel sur le corps des nombres réels ou sur le corps des nombres complexes. On appelle norme sur E une application de E dans $\mathbb{R}_+$ notée $x \to \|x\|$ satisfaisant les conditions suivantes :*

1.
$$\forall x \in E : \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E . \forall x \in E,$$

2.
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C}) : \|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \,,$$

3.
$$\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \,.$$

On dit alors que le couple $(E, \|.\|)$ est un espace vectorielle normé muni d'une norme.

Définition 1.6 *On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r, l'ensemble noté $B\,(a, r)$ telle que*
$$B\,(a, r) = \{x \in E / \, \|x - a\| < r\} \,.$$

Définition 1.7 *On appelle boule fermée de centre a et de rayon r, l'ensemble noté $B'\,(a, r)$ tele que*
$$B'\,(a, r) = \{x \in E / \, \|x - a\| \leq r\} \,.$$

Définition 1.8 *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur le même corps $\Bbbk$, alors l'espace produit $E \times F = \{(x, y) \, / x \in E \text{ et } y \in F\}$ est un espace vectoriel normé sur $\Bbbk$ par l'une des normes suivantes :*

(1) :
$$\|(x, y)\|_1 = \|x\|_E + \|y\|_F \,.$$

(2) :
$$\|(x, y)\|_p = (\|x\|_E^p + \|y\|_F^p)^{\frac{1}{p}} \,. 1 \leq p \leq \infty.$$

(3) :
$$\|(x, y)\|_\infty = \max \{\|x\|_E \,, \|y\|_F\} \,.$$

Définition 1.9 *On dit qu'un espace vectoriel normé $(E, \ \|.\|)$ est complet, ou que c'est un espace de Banach, si toute suite de Cauchy dans E est convergente.*

Remarque 1.1 *Soit (x_n) une suite de E. Alors (x_n) converge vers x dans $(E,\ \|.\|)$ si et seulement si*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|x_n - x\|_E = 0.$$

Définition 1.10 *On dit que A est une partie compact de $(E,\ \|.\|)$ si de toute suite de points de A on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de A).*

Définition 1.11 *Une partie A de $(E, \|.\|)$ est dite relativement compact si son adhérence est compact.*

Définition 1.12 *Soient E et F deux espace de banach, et $A : E \longrightarrow F$ une application lineaire. On dit que A et **borné** si elle envoie les parties bornées de E sur des parties bornées de F.*

Définition 1.13 *Soient E et F deux espaces de Banach. on appelle **opérateur borné** toute application linéaire continue de E dans F.*

Définition 1.14 *Soient E et F deux espaces de Banach et f une application définie de E à valeurs dans F. On dit que f est **complètement continue** si elle est continue et transforme tout borné de E en une ensemble relativement compact dans F. f est dite compact si $f(E)$ est relativement compact dans F.*

Définition 1.15 *Soit A un sous ensemble de $C(J, \mathbb{R})$, L'ensemble A est **equicontinue**. i.e pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$|t_1 - t_2| < \delta \Longrightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon \text{ pour tout } t_1, t_2 \in J \text{ et tout } f \in A.$$

Définition 1.16 *Soit E un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$ et $T : E \to E$ une application. Un élément x de E est un **point fixe** de T si $Tx = x$.*

Définition 1.17 *L'aplication Lipschitzienne f est dite une contraction si $L = 1$ dans le cas où $L \in [0, 1]$,f est dite une contraction stricte.*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|$$

Théorème 1.1 [3] *(Théorème du point fixe du type Banach) Soient X un espace de Banach, et $A : X \to X$ un opérateur contractant. Alors A admet un point fixe unique.i.e $\exists! x \in X$ tel que $Ax = x$.*

Théorème 1.2 [4] *(Théorème du point fixe de Arzela-Ascoli) Soit A un sous ensemble de $C(J,\mathbb{R})$, A est relativement compact dans $C(J,\mathbb{R})$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

i) L'ensemble A est borné. i.e il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$\|f(x)\| \leq k \text{ pour tout } x \in J \text{ et tout } f \in A \ ,$$

ii) L'ensemble A est equicontinue. i.e pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2| < \delta \Longrightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon \text{ pour tout } t_1, t_2 \in J \text{ et tout } f \in A \ ,$$

iii) Pour tout $x \in J$ l'ensemble $\{f(x), f \in A\} \subset E$ est relativement compact.

Théorème 1.3 [4, 5] *(Théorème de point fixe de Schaefer) Soit X un espace de Banach et $A : X \to X$ est un opérateur complètement continue.*

Si l'ensemble

$$\varepsilon = \{x \in X \ : \lambda Ax = x \text{ pour certain } \lambda \in]0,1[\} \ ,$$

est borné, alors A possède au moins une point fixe.

Théorème 1.4 [3] *(Théorème de point fixe de krasnosselski) Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach, et soit M une partie non vide, convexe et fermé de E. On suppose que $A, B : M \to S$ sont deux applications satisfaisants*

i. $Ax + By \in M, \forall x, y \in M$,

ii. A est continue et AM est contenue dans un ensemble compact,

iii. B est une contraction.

Alors $\exists x^* \in M$, $Ax^* + Bx^* = x^*$.

Théorème 1.5 [4, 5] *(Alternative non linéaire de Leray-Schauder). Soient X un espace de Banach et $C \subset X$ un convexe fermé. On suppose qu'il existe un ouvert U dans C tel que $0 \in U$, $A : \overline{U} \to C$ un opérateur complètement continu , alors on a l'alternative suivant : ou bien*

1. *A admet un point fixe ; ou bien*
2. *il existe $x \in \partial U$; $x = \lambda A(x)$ pour $\lambda \in]0;1[$.*

Chapitre 2

Étude de l'existence de la solution d'une équation différentielle fractionnaire

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour un problème fractionnaire au sens de Caputo. On considère alors le problème suivant :

$$\begin{gathered} D^{\alpha}x\left(t\right)=\theta-f\left(t,x\left(t\right)\right),\quad \theta\in\mathbb{R},\ 0<\alpha<2,t\in J=\left[0,1\right], \\ x\left(0\right)=\int_{0}^{T}h\left(s\right)x\left(s\right)ds,\ x\left(1\right)=\theta, \end{gathered} \tag{2.1}$$

où D^{α} représente la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α avec $1<\alpha<2, J=\left[0,1\right]$, $f:J\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard et $X=C\left(J,\mathbb{R}\right)$ est l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de J dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\left\|.\right\|$, $\left\|x\right\|=\sup\left\{\left|x\left(t\right)\right|:t\in J\right\}$. On prouvera l'unicité de la solution du problème en utilisant le théorème de Banach, aussi on montre l'existence de la solution du problème fractionnaire en appliquant les théorèmes de Krasnosselski et Schaefer.

2.2 Lemmes Auxiliaires

Dans la présente section, on présente quelques lemmes qui seront utilisés dans ce chapitre.

Lemme 2.1 *Soient $\alpha>0$ et f une fonction définie sur $\left[0,b\right]$,alors la solution générale de l'équation différentielle fractionnaire*

$$\left({}^{c}D_{a}^{\alpha}\right)\left(f(x)\right)=0 \tag{2.2}$$

est donnée par :

$$f(x)=a_{0}+a_{1}x+....+a_{n-1}x^{n-1}, \tag{2.3}$$

où $a_{i}\in\mathbb{R},i=0,1,2,...,n-1,n=\left[\alpha\right]+1$,avec $\left[\alpha\right]$ désigne la partie entière de α.

Lemme 2.2 *Soient $\alpha > 0$ et f une fonction définie sur l'intervalle $[0, b]$, alors*

$$\left(J_a^{\alpha}\right)\left({}^{c}D_a^{\alpha}\right)\left(f(x)\right) = f(x) + a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1}x^{n-1}. \tag{2.4}$$

où $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, ..., n-1, n = [\alpha] + 1$.

2.3 Solution Intégrale

On prouve le lemme auxiliaire suivant qui est important pour donner la solution intégrale de (2.1) :

Lemme 2.3 [2] *La solution du problème* (2.1) *est donnée par :*

$$\begin{aligned} x(t) &= (1-t)\int_0^1 g(\tau)\,x(\tau)\,d\tau + \theta\left(t - \frac{t}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \\ &\quad + \frac{t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau))\,d\tau - J^{\alpha} f(t, x(t)). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Preuve. On a

$$D^{\alpha}x(t) = \theta - f(t, x(t)), 0 \le t \le 1. \tag{2.6}$$

En appliquant l'opérateur J^{α} aux deux membres de (2.6), on trouve

$$J^{\alpha}D^{\alpha}x(t) = \theta J^{\alpha}(1) - J^{\alpha} f(t, x(t)) = \frac{\theta t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - J^{\alpha} f(t, x(t)). \tag{2.7}$$

Et comme

$$J^{\alpha}D^{\alpha}x(t) = x(t) + c_0 + c_1 t, \tag{2.8}$$

Alors

$$x(t) = \frac{\theta t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - J^{\alpha} f(t, x(t)) - c_0 - c_1 t. \tag{2.9}$$

Pour $t = 0$, on

$$c_0 = -\int_0^1 g(\tau)\,x(\tau)\,d\tau. \tag{2.10}$$

Et pour $t = 1$, on obtient

$$c_1 = -\theta + \frac{\theta}{\Gamma(\alpha+1)} + \int_0^1 g(\tau)\,x(\tau)\,d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(t))\,d\tau. \tag{2.11}$$

On remplace c_0 et c_1 dans (2.9),on trouve (2.5).

■

Maintenant, on transforme le problème (2.1) à un problème du point fixe. Pour cela, on considère l'opérateur $T : C(J, \mathbb{R}) \to C(J, \mathbb{R})$ défini par :

$$\begin{aligned} T(x) &= (1-t)\int_0^1 g(\tau)\,x(\tau)\,d\tau + \theta\left(t - \frac{t}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \\ &\quad + \frac{t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau))\,d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau))\,d\tau. \end{aligned} \tag{2.12}$$

2.4 Hypothèses

Pour établir l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1), on considère les hypothèses suivantes :

(H_1) :

$$\|f(t,x) - f(t-y)\| \leq k\|x-y\|, k > 0,\ x, y \in \mathbb{R},\ t \in [0,1], \tag{2.13}$$

(H_2) :

$$M + \frac{2k}{\Gamma(\alpha+1)} \leq d,\ \theta\left(1 + \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}\right) + \frac{2N}{\Gamma(\alpha+1)} \leq (1-d)\, r, \tag{2.14}$$

Où $r, d \in \mathbb{R}^+, 0 < d < 1, N = \sup_{t\in[0,1]} |f(t,0)|$ et $M = \sup_{t\in[0,1]} |g(t)| < 1$.

(H_3) :

$$\|f(t,x)\| \leq v(t), (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}, v \in C^1\left([0,1], \mathbb{R}^+\right).$$

(H_4) : Soit $f : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

2.5 Existence et Unicité de Solutions

2.5.1 Unicité de Solutions

En se basant sur le principe de contraction de Banach, l'unicité de la solution du problème (2.1) sera prouvée.

Théorème 2.1 [2] *Supposons que les conditions (H_1) et (H_2) sont vérifiées. Alors le problème (2.1) a une unique solution dans $C(J, \mathbb{R})$.*

Preuve. Pour démontrer le théorème 2.1 il suffit de montrer que l'opérateur T admet un point fixe sur

$$B_r := \{x \in \mathbb{R}, \|x\| \leq r, r > 0\}.$$

On montre que $T\ B_r \subset B_r$. Soit alors $x \in B_r$, on a :

$$\begin{aligned} &\|T(t,x)\| \qquad (2.15)\\ = &\| (1-t)\int_0^1 g(\tau)\, x(\tau)\, d\tau + \theta\left(t - \frac{t}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\\ &+\frac{t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau))\, d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau))\, d\tau \|. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & \|T(x)\| \qquad (2.16)\\ \leq\ & M\|x\|+\theta\left(1+\frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}\right)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}\|f(\tau,x(\tau))-f(\tau,0)\|\,d\tau\\ & +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}\|f(\tau,0)\|\,d\tau+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(1-\tau)^{\alpha-1}\|f(\tau,x(\tau))-f(\tau,0)\|\,d\tau\\ & +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(1-\tau)^{\alpha-1}\|f(\tau,0)\|\,d\tau. \end{aligned}$$

En utilisant la condition (H_1), on peut écrire

$$\begin{aligned} & \|T(x)\| \qquad (2.17)\\ \leq\ & M\|x\|+\theta\left(1+\frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}\right)+\frac{2K}{\Gamma(\alpha+1)}\|x\|+\frac{2N}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} & \|T(x)\| \qquad (2.18)\\ \leq\ & \left(M+\frac{2k}{\Gamma(\alpha+1)}\right)r+\theta\left(1+\frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}\right)+\frac{2N}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

En utilisant la première condition de (H_2), on récupère

$$\|T(x)\|\leq dr+(1-d)\,r. \qquad (2.19)$$

Cela implique $T\ B_r\subset B_r$, donc T est une application de B_r dans B_r.

■

Maintenant, on montrant que T est contractante :
Soient $x,y\in B_r$, pour tout $t\in[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} & \|T(x)-T(y)\| \qquad (2.20)\\ \leq\ & (1-t)\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}\|g(\tau)(x(\tau)-y(\tau))\|\,d\tau\\ & +\frac{t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}\|f(\tau,x(\tau))-f(\tau,y(\tau))\|\,d\tau\\ & +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\|f(\tau,x(\tau))-f(\tau,y(\tau))\|\,d\tau \end{aligned}$$

En utilisant (H_1) et le fait que $|g(\tau)|\leq M,\tau\in[0,t],0\leq t\leq 1$, on obtient alors

$$\begin{aligned} & \|T(x)-T(y)\| \qquad (2.21)\\ \leq\ & M\|x-y\|+\frac{2k}{\Gamma(\alpha+1)}\|x-y\|. \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant la première condition de (H_2), on trouve

$$\|T(x) - T(y)\| \leq d \|x - y\|. \tag{2.22}$$

Alors, l'opérateure T est une contraction. Donc T possède un point fixe unique qui est un solution du problème (2.1).

D'où la démonstration du Théorème 2.1.

2.6 Existence de Solutions

Le théorème suivant établit l'existence d'une solution au moins du problème (2.1) : La preuve du ce théorème est basé sur le théorème du point fixe de Krasnosselski [2].

Théorème 2.2 *Supposons que les hypothèses* (H_3) *et* (H_4) *sont satisfaites. Si* $M < 1$, *alors le problème* (2.1) *admet au moins une solution dans* $C(J, \mathbb{R})$.

Preuve. Soit r tel que :

$$r \geq (1 - M)^{-1} \left(\theta \left(1 + \frac{2}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) + \frac{2 \|v\|}{\Gamma(\alpha + 1)} \right),$$

où $\|v\| = \sup_{t \in [0,1]} |v(t)|$. ■

On définit les opérateurs R et S sur $B_r := \{x \in \mathbb{R}, \|x\| \leq r\}$ par :

$$R(x) = (1 - t) \int_0^1 g(\tau) x(\tau) \, d\tau + \theta \left(t - \frac{t}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \tag{2.23}$$

et

$$S(x) = \frac{t}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - \tau)^{\alpha - 1} f(\tau, x(\tau)) \, d\tau - J^\alpha f(t, x(t)). \tag{2.24}$$

Alors , pour $x, y \in B_r$ et $t \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} & \|R(t, x) + S(t, y)\| \qquad (2.25) \\ \leq \; & \left\| (1 - t) \int_0^1 g(\tau) x(\tau) \, d\tau + \theta \left(t - \frac{t}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \right\| \\ & + \left\| \frac{t}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - \tau)^{\alpha - 1} f(\tau, y(\tau)) \, d\tau - J^\alpha f(t, y(t)) \right\|. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|R(x) + S(y)\| \; \leq \; & M \|x\| + \theta \left(1 + \frac{2}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \qquad (2.26) \\ & + \left\| \frac{t}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - \tau)^{\alpha - 1} f(\tau, y(\tau)) \, d\tau \right\| \\ & + \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - \tau)^{\alpha - 1} f(\tau, y(\tau)) \, d\tau \right\|. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (H_3) el la condition (2.24), on obient

$$\begin{aligned} \|R(x)+S(y)\| &\leq M\|x\|+\theta\left(1+\frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}\right)+\frac{2\|v\|}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &\leq Mr+(1-M)r. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Donc

$$R(x)+S(y)\in B_r.$$

D'autre part, on a :

$$\|R(x)-R(Y)\|\leq M\|x-y\|. \tag{2.28}$$

Comme $M<1$, alors R est contractante.

Preuve. De plus, d'après (H_4) l'opérateur S est cintinue, et

$$\begin{aligned} \|S(x)\| &\leq \frac{t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}\|f(\tau,y(\tau))\|d\tau \\ &\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}\|f(\tau,y(\tau))\|d\tau. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Puisque $t\in[0,1]$, on peut alors écrire :

$$\|S(x)\|\leq\frac{2\|v\|}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{2.30}$$

Par conséquent, S est uniformément borné sur B_r.

■

Maintenant, on prend $t_1,t_2\in J$, $t_1>t_2$ et $y\in B_r$. Alors

$$\begin{aligned} &\|Sy(t_1)-Sy(t_2)\| \\ &\leq \left\|\frac{t_1-t_2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right\| \\ &\quad+\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-\tau)^{\alpha-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right. \\ &\quad\left.-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_2-\tau)^{\alpha-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right\|. \end{aligned} \tag{2.31}$$

D'après (H_3), on récupère l'inégalité :

$$\|Sy(t_1)-Sy(t_2)\|\leq\frac{\|v\|}{\Gamma(\alpha+1)}\left(|t_1-t_2|+|t_1^\alpha-t_2^\alpha|\right).$$

Le second membre de l'inégalité (2.34) est indépendant de y; donc S est equicontinue, et pour $t_1$tend vers t_2, l'inégalité (2.34) tend vers 0, donc $S(B_r)$ est relativement compacte. D'après le théorème d'Ascolli-Arzella, S est compact.Finalement d'après le théorème de Krasnosselski, le problème (2.1) admet au moin une solution sur $[0,T]$.

Théorème 2.3 *Supposons que les hypothèses* (H_3) *et* (H_4) *sont satisfaites, alors le problème* (2.1)*admet au moins une solution*

Preuve. Afin d'établir l'existence des solutions, on va montrer que admet un point fixe. Pour ce faire, on utilise le théorème du point fixe de Schaefer. D'abord, on montre que l'opérateur est complètement continu. En effet, on montre que l'opérateur envoie tout ensemble borné de $C(J,\mathbb{R})$ en un ensemble relativement compact dans $C(J,\mathbb{R})$.

Soit

$$B_r = \{x \in C(J,\mathbb{R}), \|x\| \leq r\}. \tag{2.32}$$

(a) : D'après l'hypothèse (H_4), l'opérateur T est continu.

■

(b) : Maintenant, on montre que est complètement continu. En effet, $T(B_r)$ est relativement compact, c'est à dire :

(b_1) : Pour tout $x \in B_r$ et $t \in J$, on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} & \|T(x)\| \\ \leq\ & M\|x\| + \theta\left(1 + \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}\right) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\|f(\tau, x(\tau))\|\, d\tau \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (1-\tau)^{\alpha-1}\|f(\tau, x(\tau))\|\, d\tau. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Par (H_3), on a :

$$\begin{aligned} & \|T(x)\| \\ \leq\ & M\|x\| + \theta\left(1 + \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}\right) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\|v\|\, d\tau \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (1-\tau)^{\alpha-1}\|v\|\, d\tau. \end{aligned} \tag{2.34}$$

D'où

$$\begin{aligned} & \|T(x)\| \\ \leq\ & Mr + \theta\left(1 + \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}\right) + \frac{2\|v\|}{\Gamma(\alpha+1)} := L. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Par conséquent $\|T(x)\| \leq L$ et donc $T(B_r)$ est uniformément borné.

Preuve. ■

(b_2) : $T(B_r)$ est équicontinu. En effet :

Soit $x \in B_r$ et $t_1, t_2 \in J$; tel que $t_1 < t_2$. Alors

$$\begin{aligned} & \|Tx(t_1) - Tx(t_2)\| \qquad (2.36) \\ \leq\ & \| (1-t_1) \int_0^1 g(\tau) x(\tau) d\tau + \theta \left(t_1 - \frac{t_1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \\ & + \frac{t_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \\ & - (1-t_2) \int_0^1 g(\tau) x(\tau) d\tau - \theta \left(t_2 - \frac{t_2}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t_2^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \\ & - \frac{t_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \Big\| . \end{aligned}$$

Compte tenu de l'hypothèse (H_3), on a :

$$\begin{aligned} & \|Tx(t_1) - Tx(t_2)\| \qquad (2.37) \\ \leq\ & (t_2 - t_1) Mr + \left(t_1 - t_2 + \frac{t_2 - t_1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t_1^\alpha - t_2^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) |\theta| \\ & + \frac{(t_2 - t_1)}{\Gamma(\alpha+1)} \|v\| + \frac{[t_1^\alpha - t_2^\alpha + (t_1 - t_2)^\alpha]}{\Gamma(\alpha+1)} \|v\| . \end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_2$ le membre de droite de (2.40) tend vers zéro. Par Conséquent, on conclut que $T(B_r)$ est équicontinu. Par le théorème d'Arzela-Ascoli, on peut conclure que T est un opérateur complètement continu.

Preuve. ■

(c) : Finalement, on montre que l'ensemble Ω défini par :

$$\Omega = \{ x \in C(J, \mathbb{R}) : x = \mu T(x), 0 < \mu < 1 \},$$

est borné. En effet, soit $x \in \Omega$, alors $x = \mu T(x)$ pour $0 < \mu < 1$. Donc pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned} x &= \mu T(x) \qquad (2.38) \\ &= \mu (1-t) \int_0^1 g(\tau) x(\tau) d\tau + \mu\theta \left(t - \frac{t}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \\ &\quad + \frac{\mu t}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau - \frac{\mu}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Grâce à (H_3), on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu} \|x\| \qquad (2.39) \\ \leq\ & M\|x\| + |\theta| \left(1 + \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)} \right) + \frac{2\|v\|}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

D'où

$$\|x\| \leq \frac{|\theta|}{1-M}\left(1+\frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}\right)+\frac{2\|v\|}{\Gamma(\alpha+1)(1-M)} := \Sigma.$$

Donc

$$\|x\| \leq \Sigma < \infty.$$

Ce qui prouve que Ω est borné.

Preuve. ■

On conclut par le théorème de point fixe de Schaefer que l'opérateur admet au moinsun point fixe qui est la solution du problème(2.1) .

Chapitre 3

Étude de l'existence de la solution d'une équation différentielle avec deux dérivées fractionnaires

3.1 Introduction

Ce chapitre, est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle avec deux dérivées fractionnaires au sens de Caputo. En effet, après avoir donné la solution générale du problème fractionnaire, on utilisera les théorèmes de point fixe du Banach, l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et Krasnosselski pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème posé. On considère alors :

$$\begin{aligned} D^{\alpha}\left(D^{\beta}+\lambda\right)x(t)+f(t,x(t)) &= \theta,\ \lambda,\theta\in\mathbb{R},t\in J=[0,1], \\ x(0) &= \int_0^1 \varphi(s)\,x(s)\,ds,\quad x(1)=\theta, \end{aligned} \tag{3.1}$$

où D^{α} et D^{β} représentent les dérivées fractionnaires au sens de Caputo d'ordre α et β respectivement, avec $0<\alpha,\beta\leq 1, J=[0,1]$, $f: J\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard.

3.2 Solution générale

On démontre le lemme suivant :

Lemme 3.1 *Soient $g\in C([0,1],\mathbb{R})$, alors la solution du problème aux limites fractionnaire suivant :*

$$\begin{aligned} D^{\alpha}\left(D^{\beta}+\lambda\right)x(t) &= g(t), t\in J,\ 0<\alpha,\beta\leq 1, \\ x(0) &= \int_0^1 \varphi(s)\,x(s)\,ds,\quad x(1)=\theta, \end{aligned} \tag{3.2}$$

est donné par :

$$\begin{aligned} x(t) &= I^{\alpha+\beta}g(t) - I^{\beta}\lambda x(t) - t^{\beta}\left[I^{\alpha+\beta}g(1) - I^{\beta}\lambda\, x(1) - \theta\right] \\ &\quad + \left(1-t^{\beta}\right)\int_0^1 \varphi(s)\, x(s)\, ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} g(s) - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1} x(s)\, ds \\ &\quad -t^{\beta}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} g(s)\, ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-s)^{\beta-1} x(s)\, ds - \theta\right] \\ &\quad + \left(1-t^{\beta}\right)\int_0^1 \varphi(s)\, x(s)\, ds. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Preuve. On a :

$$D^{\alpha}\left(D^{\beta}+\lambda\right)x(t) = g(t), \quad 0 \le t \le 1 \tag{3.4}$$

En appliquant l'opérateur I^{α} aux deux membres de (3.4), on trouve :

$$I^{\alpha}\left[D^{\alpha}\left(D^{\beta}+\lambda\right)\ x(t)\right] = I^{\alpha}g(t),$$

On utilise le Lemme 2, on trouve

$$\left(D^{\beta}+\lambda\right)x(t) + c_0 = I^{\alpha}g(t).$$

Alors

$$D^{\beta}x(t) = I^{\alpha}g(t) - \lambda x(t) - c_0. \tag{3.5}$$

Maintenant, en appliquant l'opérateur I^{β} aux deux membres de (3.5), on trouve :

$$I^{\beta}\left[D^{\beta}x(t)\right] = I^{\beta}\left[I^{\alpha}g(t) - \lambda x(t) - c_0\right] = I^{\alpha+\beta}g(t) - I^{\beta}\lambda x(t) - I^{\beta}c_0.$$

En ulisant le lemme 2, on obtient

$$x(t) + c_1 = I^{\alpha+\beta}g(t) - I^{\beta}\lambda x(t) - \frac{c_0}{\Gamma(\beta+1)}t^{\beta}.$$

Alors

$$x(t) = I^{\alpha+\beta}g(t) - I^{\beta}\lambda x(t) - \frac{c_0}{\Gamma(\beta+1)}t^{\beta} - c_1, \tag{3.6}$$

où c_0 et c_1 sont des constants arbitraire. ■

Maintenant, on cherche les constantes c_0 et c_1.

D'aprés la condition $x(0) = \int_0^1 \varphi(s)\, x(s)\, ds$, on peut écrire :

$$x(0) = \int_0^1 \varphi(s)\, x(s)\, ds = -c_1,$$

ce qui donne

$$c_1 = -\int_0^1 \varphi(s)\, x(s)\, ds.$$

On utilise la condition $x(1)=\theta$, on trouve

$$x(1)=\theta=I^{\alpha+\beta}g(1)-I^{\beta}\lambda x(1)-\frac{c_0}{\Gamma(\beta+1)}-c_1.$$

Alors

$$c_0=\Gamma(\beta+1)\left[I^{\alpha+\beta}g(1)-I^{\beta}\lambda x(1)-c_1-\theta\right].$$

On remplace c_0 et c_1 dans (3.6) on trouve (3.3).

3.2.1 Problème du point fixe

Soit $X=C(J,\mathbb{R})$ est l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de $J=[0,1]$ dans $\mathbb{R}$;

$$X=\{x: x(t)\in C([0,1],\mathbb{R})\}, \tag{3.7}$$

muni de la norme :

$$\|x\|=\sup\{|x(t)|: t\in J\}.$$

On définit l'opérateur $F: X\longrightarrow X$ par :

$$\begin{aligned} Fx(t) &= \theta\left(t^{\beta}+\frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)}-\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right) \\ &-\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta-1}f(s,x(s))\,ds-\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}x(s)\,ds \\ &+\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^1(1-s)^{\alpha+\beta-1}f(s,x(s))\,ds \\ &+\frac{\lambda t^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-s)^{\beta-1}x(s)\,ds+\left(1-t^{\beta}\right)\int_0^1\varphi(s)\,x(s)\,ds. \end{aligned} \tag{3.8}$$

3.3 Existence et unicité

Dans le sous-section suivante, on montre l'unicité de solution de notre problème (3.1).

3.3.1 L'unicitée de la solution du problème

Théorème 3.1 *Soit $f:[0,1]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

(H_1) : Il existe une constante $k>0$ telle que :

$$|f(t,x)-f(t,y)|\leq k|x-y|,\ \text{pour tout } t\in[0,1]\ \text{ et } x,y\in\mathbb{R}.$$

(H_2) : La fonction φ est continue sur $[0,1]$ et $|\varphi(t)|\leq L$.
Si

$$\frac{k}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta+1)}<\frac{1}{2}-2L,$$

alors, le problème (3.1) admet une seule solution.
Preuve. Pour montrer que F admet un point fixe il suffit de montrer que F est une contraction, en effet : si $x, y \in X$ pour tout $t \in J = [0,1]$, alors

$$
\begin{aligned}
& |Fx(t) - Fy(t)| \qquad (3.9)\\
= \; & \Big| -\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s))\, ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} x(s)\, ds \\
& + \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s))\, ds + \frac{\lambda t^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (t-s)^{\beta-1} x(s)\, ds \\
& + \left(1 - t^\beta\right) \int_0^1 \varphi(s)\, x(s)\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, y(s))\, ds \\
& + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} y(s)\, ds - \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, y(s))\, ds \\
& - \frac{\lambda t^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (t-s)^{\beta-1} y(s)\, ds - \left(1 - t^\beta\right) \int_0^1 \varphi(s)\, y(s)\, ds \Big|,
\end{aligned}
$$

Ce qui donne

$$
\begin{aligned}
& |Fx(t) - Fy(t)| \qquad (3.10)\\
\leq \; & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))|\, ds \\
& + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} |x(s) - y(s)|\, ds \\
& + \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))|\, ds \\
& \frac{|\lambda|\, t^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} |x(s) - y(s)|\, ds + \left(1 - t^\beta\right) \int_0^1 |\varphi(s)|\, |x(s) - y(s)|\, ds.
\end{aligned}
$$

En utilisant (H_1) et (H_2), on obtient

$$
\begin{aligned}
& |Fx(t) - Fy(t)| \qquad (3.11)\\
\leq \; & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} k\, |x - y|\, ds + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} |x(s) - y(s)|\, ds \\
& + \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} k\, |x - y|\, ds + \frac{|\lambda|\, t^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} |x(s) - y(s)|\, ds \\
& \left(1 - t^\beta\right) \int_0^1 L\, |x(s) - y(s)|\, ds.
\end{aligned}
$$

Par calcul simple, on trouve que :

$$\begin{aligned} & \|Fx - Fy\| \\ \leq & \frac{2k}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\|x-y\| + \frac{2|\lambda|}{\Gamma(\beta+1)}\|x-y\| + L\|x-y\|. \end{aligned} \tag{3.12}$$

■

Donc

$$\|Fx - Fy\| \leq \left(\frac{2k}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{2|\lambda|}{\Gamma(\beta+1)} + L\right)\|x-y\|. \tag{3.13}$$

D'où F est une contraction et d'après le théorème de Banach F admet un seul point fixe qui est une solution du problème (3.1).

3.3.2 Exemple

On considère le problème fractionnaire suivant :

$$\begin{gathered} D^{\frac{2}{3}}\left(D^{\frac{3}{4}} + \frac{1}{25}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sin x(t)}{35\pi\left(te^{t^2}+1\right)} + \arctan\left(1+t+t^2\right), t \in [0,1], \\ x(0) = \int_0^1 \frac{e^{-s}}{20} x(s)\, ds, \quad x(1) = \frac{1}{2}. \end{gathered} \tag{3.14}$$

On a : $\alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{3}{4}, \theta = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{25}, \varphi(s) = \frac{e^{-s}}{20}$.
On définit

$$f(t,x) = -\frac{\sin x(t)}{35\pi\left(te^{t^2}+1\right)} + \arctan\left(1+t+t^2\right), t \in [0,1], x \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &= \left|-\frac{\sin x(t)}{35\pi\left(te^{t^2}+1\right)} + \frac{\sin y(t)}{35\pi\left(te^{t^2}+1\right)}\right| \\ &\leq \frac{1}{35\pi}|x-y|. \end{aligned}$$

et

$$|\varphi(s)| \leq \left|\frac{e^{-s}}{20}\right| \leq \frac{1}{20}.$$

Il est clair que les hypothèse (H_1) et (H_2) sont vérifiées avec $k = \frac{1}{35\pi}$ et $L = \frac{1}{20}$.
On a aussi

$$\Gamma(\alpha+\beta+1) = \Gamma\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+1\right) = \Gamma\left(\frac{29}{12}\right) = 1.2558,$$

et

$$\Gamma(\beta+1) = \Gamma\left(\frac{3}{4}+1\right) = \Gamma\left(\frac{7}{4}\right) = 0.91906.$$

Par conséquent

$$\frac{k}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta+1)} = \frac{\frac{1}{35\pi}}{1.2558} + \frac{\frac{1}{25}}{0.91906} = 0.05076 < \frac{1}{2} - L = 0.4.$$

D'après le Théorème 3.1, le problème (3.14) admet une solution unique sur $[0,1]$.

3.3.3 Existence d'une Solution au moins

3.3.4 Résultat d'existence via l'alternative non linéaire de Leray-Schauder

Théorème 3.2 *Soit $f : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que (H_2) et les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

(H_3) : *Il existe une fonction croissante continue définie par $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et une fonction $g \in C([0,1], \mathbb{R}^+)$ tel que :*

$$|f(t,x)| \leq g(t)\,\phi(\|x\|), \quad (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}.$$

(H_4) : *il existe une constante $N > 0$ tel que :*

$$\frac{N}{|\theta|\left(1 + \frac{2}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\right) + \left[\frac{2\|g\|\phi(N)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{2|\lambda|N}{\Gamma(\beta+1)} + LN\right]} > 1.$$

Alors le problème (3.1) *admet au moins une solution sur* $[0,1]$.

Preuve. Principalement, on va utiliser l'alternative non linéaire de Leray-Schauder. pour montrer l'existence d'une solution pour le problème et pour cela, on passera par 3 étapes :

■

Étape1 : On montre que F est continu. En effet, soit (x_n) une suite dans X convergente pour la norme $\|.\|$ vers une limite x, c'est à dire $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. Il faut montrer que $\lim_{n\to\infty} \|Fx_n - Fx\| = 0$.

Soit $t \in J$, alors

$$\begin{aligned}
&\|Fx_n - F_x\| \qquad (3.15)\\
= \;& \Big\| -\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x_n(s))\, ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} x_n(s)\, ds \\
&+ \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x_n(s))\, ds + \frac{\lambda t^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (t-s)^{\beta-1} x_n(s)\, ds \\
&+ \left(1 - t^\beta\right) \int_0^1 \varphi(s)\, x_n(s)\, ds + \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s))\, ds \\
&+ \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} x(s)\, ds - \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s))\, ds \\
&- \frac{\lambda t^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (t-s)^{\beta-1} x(s)\, ds - \left(1 - t^\beta\right) \int_0^1 \varphi(s)\, x(s)\, ds \Big\|,
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} & \|Fx_n - F_x\| \\ = \; & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \|f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))\| \, ds \\ & + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \|x_n(s) - x(s)\| \, ds \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (t-s)^{\alpha+\beta-1} \|f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))\| \, ds \\ & + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} \|x_n(s) - x(s)\| \, ds + \int_0^1 L \|x_n(s) - x(s)\| \, ds. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Puisque f est continue et $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} \|Fx_n - Fx\| = 0$.

D'où F est continu.

Preuve. ■

Étape2 : Soit l'ensemble : $B_r = \{x \in X : \|x\| \leq r\}$. On montre que $F(B_r)$ est relativement compact.

Preuve. ■

(a) : On montre que $F(B_r)$ est borné. Pour tout $x \in B_r$ et $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned} |Fx(t)| = \; & \left| \theta \left(t^\beta + \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} - \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)} \right) \right. \\ & - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s,x(s)) \, ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} x(s) \, ds \\ & + \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} f(s,x(s)) \, ds \\ & \left. + \frac{\lambda t^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} x(s) \, ds + \left(1-t^\beta\right) \int_0^1 \varphi(s) x(s) \, ds \right|, \end{aligned} \tag{3.17}$$

alors

$$\begin{aligned} \|Fx\| \leq \; & \left| \theta \left(t^\beta + \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} - \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)} \right) \right| \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} |f(s,x(s))| \, ds + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} |x(s)| \, ds \\ & + \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} |f(s,x(s))| \, ds \\ & \left. + \frac{|\lambda| t^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} |x(s)| \, ds + \left(1-t^\beta\right) \int_0^1 |\varphi(s)| x(s) \, ds \right|. \end{aligned} \tag{3.18}$$

En utilisant l'hypothèses (H_2) et (H_3), on obtient :

$$\begin{aligned}\|Fx\| &\leq \left|\theta\left(t^{\beta}+\frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)}-\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right)\right| \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} g(t)\,\phi(\|x\|)\,ds+\frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}|x(s)|\,ds \\ &+\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} g(t)\,\phi(\|x\|)\,ds \\ &+\frac{|\lambda|\,t^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-s)^{\beta-1}|x(s)|\,ds+\left(1-t^{\beta}\right)\int_0^1 L|x(s)|\,ds.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}&\|Fx\| \\ &\leq \theta+\frac{2\theta}{\Gamma(\alpha+\beta)}+\frac{2\|g\|\,\phi(\|x\|)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{2|\lambda|\,\|x\|}{\Gamma(\beta+1)}+2L\|x\|.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}&\|Fx\| \\ &\leq \theta+\frac{2\theta}{\Gamma(\alpha+\beta)}+\frac{2\|g\|\,\phi(\|r\|)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{2|\lambda|\,r}{\Gamma(\beta+1)}+Lr:=\Lambda.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Donc $\|Fx\|\leq\Lambda$ et par suite $F(B_r)$ est borné.

Preuve. ■

(b) : On montre que $F(B_r)$ équicontinu. Pour tout $x\in B_r$ et $t_1,t_2\in J, t_1<t_2$, on a :

$$\begin{aligned}&|Fx(t_2)-Fx(t_1)| \\ &= \left|\theta\left(t_2^{\beta}+\frac{t_2^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)}-\frac{t_2^{\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right)-\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta-1}f(s,x(s))\,ds\right. \\ &-\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\beta-1}x(s)\,ds-t_2^{\beta}\int_0^1\varphi(s)\,ds \\ &-\theta\left(t_1^{\beta}+\frac{t_1^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)}-\frac{t_1^{\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right)-\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha+\beta-1}f(s,x(s))\,ds \\ &\left.-\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\beta-1}x(s)\,ds+t_1^{\beta}\int_0^1\varphi(s)\,x(s)\,ds\right|.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
& |Fx(t_2) - Fx(t_1)| \qquad (3.23)\\
= & \left| \theta \left(t_2^{\beta} - t_1^{\beta} + \frac{t_2^{\alpha+\beta} - t_1^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{t_1^{\beta} - t_2^{\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \right) \right.\\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^{t_1} \left[(t_1 - s)^{\alpha+\beta-1} - (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} \right] f(s, x(s))\, ds\\
& + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s))\, ds + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_1} \left[(t_1 - s)^{\alpha+\beta-1} - (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} \right] x(s)\, ds\\
& \left. + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\beta-1} x(s)\, ds + \left(t_1^{\beta} - t_2^{\beta} \right) \int_0^1 \varphi(s)\, x(s)\, ds \right|.
\end{aligned}
$$

Ce qui donne

$$
\begin{aligned}
& |Fx(t_2) - Fx(t_1)| \qquad (3.24)\\
\leq & |\theta| \left(t_2^{\beta} - t_1^{\beta} + \frac{t_2^{\alpha+\beta} - t_1^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{t_1^{\beta} - t_2^{\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \right)\\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^{t_1} \left[(t_1 - s)^{\alpha+\beta-1} - (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} \right] |f(s, x(s))|\, ds\\
& + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} |f(s, x(s))|\, ds + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_1} \left[(t_1 - s)^{\alpha+\beta-1} - (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} \right] |x(s)|\, ds\\
& + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\beta-1} |x(s)|\, ds + \left(t_1^{\beta} - t_2^{\beta} \right) \int_0^1 |\varphi(s)|\, |x(s)|\, ds.
\end{aligned}
$$

D'après l'hypothèse (H_2) et (H_3), on trouve que

$$
\begin{aligned}
& |Fx(t_2) - Fx(t_1)| \qquad (3.25)\\
\leq & |\theta| \left(t_2^{\beta} - t_1^{\beta} + \frac{t_2^{\alpha+\beta} - t_1^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{t_1^{\beta} - t_2^{\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \right)\\
& + \frac{\|g\|\, \phi(\|r\|)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^{t_1} \left[(t_1 - s)^{\alpha+\beta-1} - (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} \right] ds\\
& + \frac{\|g\|\, \phi(\|r\|)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} ds + \frac{|\lambda|\, r}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_1} \left[(t_1 - s)^{\alpha+\beta-1} - (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} \right] ds\\
& + \frac{|\lambda|\, r}{\Gamma(\beta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\beta-1} ds + \left(t_1^{\beta} - t_2^{\beta} \right) Lr \int_0^1 ds.
\end{aligned}
$$

Par calcule simple, on trouve

$$\begin{aligned} & |Fx(t_2) - Fx(t_1)| \\ \leq\ & |\theta| \left(t_2^{\beta} - t_1^{\beta} + \frac{t_2^{\alpha+\beta} - t_1^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{t_1^{\beta} - t_2^{\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \right) \\ & + \frac{\|g\| \phi(\|r\|)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \left[t_2^{\alpha+\beta} - t_1^{\alpha+\beta} + (t_2 - t_1)^{\alpha+\beta} \right] \\ & + \frac{|\lambda| r}{\Gamma(\beta+)} \left[t_2^{\beta} - t_1^{\beta} + (t_2 - t_1)^{\beta} \right] + rL \left(t_1^{\beta} - t_2^{\beta} \right). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Le second membre de l'inégalité (3.26) est indépendant de x, donc F est equicontinue, et pour t_2 tend vers t_1, l'inégalité (3.26) tend vers 0, donc $F(B_r)$ est relativement compacte. Par conséquent, d'après les étapes : (1) et (2) et le théorème d'Ascoli-Arzela, l'opérateur F est complètement continue.

Preuve. ■

Étape3 : Soit $\Omega = \{x \in X : \|x\| < M\}$ et soit $x \in \partial\Omega$, tel que $x = \delta F(x), 0 < \delta < 1$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} \|x\| &= |\delta Fx(t)| = \left| \delta\theta \left(t^{\beta} + \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} - \frac{t^{\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \right) \right. \\ & - \frac{\delta}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s))\, ds - \frac{\delta\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} x(s)\, ds \\ & + \frac{\delta t^{\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s))\, ds \\ & \left. + \frac{\delta\lambda t^{\beta}}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} x(s)\, ds + \delta\left(1 - t^{\beta}\right) \int_0^1 \varphi(s) x(s)\, ds \right|. \end{aligned} \tag{3.27}$$

En appliquant les hypothèses (H_2) et (H_3), on trouve :

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|\delta F(x)\| \leq \delta \left| \theta \left(t^{\beta} + \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} - \frac{t^{\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \right) \right| \\ & + \frac{\delta \|g\| \phi(\|x\|)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} ds + \frac{\delta |\lambda| \|x\|}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} ds \\ & + \frac{\delta \|g\| \phi(\|x\|)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} ds + \frac{\delta |\lambda| t^{\beta} \|x\|}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} ds \\ & + \delta\left(1 - t^{\beta}\right) \int_0^1 L \|x\| ds. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Par calcule simple, on trouve

$$\begin{aligned} & \|x\| \\ \leq\ & |\theta| \left(1 + \frac{2}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \right) + \frac{2\|g\| \phi(\|x\|)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{2|\lambda| \|x\|}{\Gamma(\beta+1)} + L\|x\|, \end{aligned} \tag{3.29}$$

ce qui donne

$$\frac{\|x\|}{|\theta|\left(1+\frac{2}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\right)+2\frac{2\|g\|\phi(\|x\|)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{2|\lambda|\|x\|}{\Gamma(\beta+1)}+L\|x\|}\leq 1, \tag{3.30}$$

D'après (H_4), on a

$$\|x\|<N,$$

ceci contredit le fait que $x\in\partial\Omega$. Alors $\forall x\in\partial\Omega$ et $\forall\delta\in]0,1[$, on a $x\neq\delta F(x)$.

Donc d'après l'alternative non linéaire de Leray-Schauder F admet au moins un point fixe qui une est solution du problème (1.3).

3.3.5 Exemple

Soit le problème fractionnaire suivant :

$$\begin{gathered} D^{\frac{3}{3}}\left(D^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{30}\right)=\frac{\pi}{4}-e^{t}\sinh(t)\frac{\left(2-e^{3t}\right)x^{2}(t)-\frac{\sin t}{5}}{(1+e^{t})(15|x|+t+10)} \\ x(0)=\int_{0}^{1}\frac{\cos(s)}{\sqrt{2s+144}}x(s)\,ds,\quad x(1)=\frac{\pi}{4}. \end{gathered} \tag{3.31}$$

Pour cet exemple, on a : $\alpha=\frac{3}{5},\beta=\frac{1}{2},\lambda=\frac{1}{30},\theta=\frac{\pi}{4},\varphi(t)=\frac{\cos(t)}{\sqrt{2t+144}}$ et $f(t,x)=e^{t}\sinh(t)\frac{\left(2-e^{3t}\right)x^{2}(t)-\frac{\sin t}{5}}{(1+e^{t})(15|x|+t+10)}$. Alors

$$|\varphi(t)|=\left|\frac{\cos(t)}{\sqrt{2t+144}}\right|\leq\frac{1}{12},$$

et

$$|f(t,x)|=\left|e^{t}\sinh(t)\frac{(2-e^{3t})x^{2}(t)-\frac{\sin t}{5}}{(1+e^{t})(15|x|+t+10)}\right|\leq\frac{e^{t}\sinh(t)}{5(1+e^{t})}\left(\frac{|x|}{3}+1\right).$$

Maintenant, on prend $g(t)=\frac{e^{t}\sinh(t)}{5(1+e^{t})}$ et $\phi(|x|)=\left(\frac{|x|}{3}+1\right)$. Alors, on peut avoir

$$\Gamma(\alpha+\beta+1)=\Gamma\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}+1\right)=1.0465,$$

et

$$\|g\|=\frac{1}{5},\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=0.886\,23.$$

Par un simple calcul, on obtient :

$$N>\frac{|\theta|\left(1+\frac{2}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\right)+\frac{2\|g\|}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}}{1-\frac{2\frac{\|g\|}{3}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{2|\lambda|}{\Gamma(\beta+1)}+L}=\frac{2.6686}{0.714\,03}=3.737\,4>1.$$

En conclusion, toutes les hypothèses du Théorème 3.2 sont vérifiées, donc le problème (3.31) admet au moins une solution.

3.3.6 Résultat d'existence via le théorème du point fixe de Krasnosselski

Théorème 3.3 *Soit $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que (H_1) et (H_2) et l'hypothèse suivante est satisfaite :*

(H_5) : *Il existe une fonction positives b telle : $|f(t,x)| \leq b(t), (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$, avec $B = \sup_{t\in[0,1]} b(t)$.*

Si

$$\frac{k}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta+1)} < 1, \tag{3.32}$$

alors le problème fractionnaire (3.1) *admet au moins une solution sur J.*

Preuve. Pour montrer l'existence de la solution du problème (3.1) ; il suffit de vérifier les hypothèses du théorème du point fixe de Krasnosselski. ■

Soit :

$$r \geq \frac{|\theta|\left(1+\frac{2}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right) + \frac{2B}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}}{1-\left(\frac{2|\lambda|}{\Gamma(\beta+1)}+L\right)},$$

et on considère l'ensemble :

$$B_r = \{x \in X : \|x\| \leq r\}.$$

On définit aussi les opérateurs F_1 et F_2 sur B_r comme suit :

$$\begin{aligned} & F_1 x(t) \\ = & -\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s,x(s))\,ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1} x(s)\,ds, \end{aligned} \tag{3.33}$$

et

$$\begin{aligned} F_2 x(t) &= \theta\left(t^\beta + \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} - \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right) \\ &\quad + \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} f(s,x(s))\,ds \\ &\quad + \frac{\lambda t^\beta}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-s)^{\beta-1} x(s)\,ds + \left(1-t^\beta\right)\int_0^1 \varphi(s)\,x(s)\,ds. \end{aligned} \tag{3.34}$$

(1) : Premièrement, onmontre que si $x, y \in B_r$, alors $F_1 x(t) + F_2 y(t) \in B_r$. En effet, pour

tout $x, y \in B_r$ et $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned} & \|F_1 x + F_2 y\| \qquad (3.35) \\ \leq & \left|\theta\left(t^\beta + \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} - \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right)\right| \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} |f(s, x(s))|\, ds + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} |x(s)|\, ds \\ & + \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} |f(s, x(s))|\, ds \\ & + \frac{|\lambda|\, t^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} |x(s)|\, ds + \left(1 - t^\beta\right) \int_0^1 |\varphi(s)|\, |x(s)|\, ds. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (H_2) et(H_5) et en calculant les intégrales du second membre de (3.35), on obtient :

$$\begin{aligned} & \|F_1 x + F_2 y\| \qquad (3.36) \\ \leq & |\theta| \left(1 + \frac{2}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right) + \frac{2 \sup_{t\in[0,1]} b(t)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{2|\lambda|\, \|x\|}{\Gamma(\beta+1)} + L\|x\|. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \|F_1 x + F_2 y\| \qquad (3.37) \\ \leq & |\theta| \left(1 + \frac{2}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right) + \frac{2B}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{2|\lambda|\, \rho}{\Gamma(\beta+1)} + Lr \leq r. \end{aligned}$$

Donc

$$F_1 x(t) + F_2 y(t) \in B_r. \qquad (3.38)$$

(2) : Deuxièmement, on montre que F_2 est continu et compact. Il est claire de voir que F_2 est continu puisque f est continue.

Preuve. ■

• : On montre que $F_2(B_r)$ est borné. En effet, soit $x \in B_r$ et $t \in J$, alors

$$\begin{aligned} \|F_2 x\| \leq & |\theta| \left(t^\beta + \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right) \qquad (3.39) \\ & + \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} \|f(s, x(s))\|\, ds \\ & + \frac{|\lambda|\, t^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} \|x(s)\|\, ds + \left(1 - t^\beta\right) \int_0^1 |\varphi(s)|\, \|x(s)\|\, ds. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (H_2) et (H_5) et en calculant les intégrales du second membre de (3.39), on obtient :

$$\begin{aligned} \|F_2 x\| \leq & |\theta| \left(1 + \frac{2}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right) + \frac{t^\beta \sup_{t\in[0,1]} b(t)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1}\, ds \qquad (3.40) \\ & + \frac{|\lambda|\, t^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} \|x(s)\|\, ds + \left(1 - t^\beta\right) \int_0^1 L\|x(s)\|\, ds. \end{aligned}$$

Puisque $t \in [0,1]$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned} & \|F_2 x\| \\ \leq\ & |\theta| \left(1 + \frac{2}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right) + \frac{B}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\lambda| r}{\Gamma(\beta+1)} + Lr := \Pi. \end{aligned} \tag{3.41}$$

D'où $F_2(B_r)$ est uniformément borné.

Preuve. ■

•• : Maitenant, on montre que $F_2(B_r)$ est équicontinu. En effet, soient $t_1, t_2 \in J$, tel que $t_2 < t_1$ et $x \in B_r$, alors par (H_2) et (H_5), on a :

$$\begin{aligned} & \|F_2 x(t_1) - F_2 x(t_2)\| \\ \leq\ & |\theta| \left(t_1^\beta - t_2^\beta + \frac{t_1^{\alpha+\beta} - t_2^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{t_2^\beta - t_1^\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right) \\ & + \frac{\left(t_1^\beta - t_2^\beta\right) \sup_{t\in[0,1]} b(t)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} ds \\ & + \frac{|\lambda| \left(t_1^\beta - t_2^\beta\right)}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} \|x(s)\| ds + \left(t_2^\beta - t_1^\beta\right) \int_0^1 L \|x(s)\| ds. \end{aligned} \tag{3.42}$$

De (3.42), on obtient

$$\begin{aligned} & \|F_2 x(t_1) - F_2 x(t_2)\| \\ \leq\ & + \left[|\theta| + \frac{\left(t_1^\beta - t_2^\beta\right) B}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\lambda| r}{\Gamma(\beta+1)}\right] \left(t_1^\beta - t_2^\beta\right) \\ & + \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} + r\right] \left(t_2^\beta - t_1^\beta\right) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left(t_1^{\alpha+\beta} - t_2^{\alpha+\beta}\right). \end{aligned} \tag{3.43}$$

Comme $t_2 \to t_1$, le seconde membre de (3.43) tend vers zéro. Par conséquent $F_2(B_r)$ est équicontinu. D'après le théorème d'Ascoli-Arzela, F_2 est compact.

Preuve. ■

• • • : Finalement, on prouve que F_1 est une contraction. En effet pour tout $x \in X$et $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned} & \|F_1(x) - F_1(y)\| \\ \leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \\ & + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \|x(s) - y(s)\| ds. \end{aligned} \tag{3.44}$$

En appliquant l'hypothèse (H_1), on aboutit à :

$$\begin{aligned} & \|F_1(x) - F_1(y)\| \qquad (3.45) \\ \leq\ & \frac{k\|x-y\|}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\| \, ds \\ & + \frac{|\lambda|\|x-y\|}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \, ds. \end{aligned}$$

En calculant l'intégrale du second membre de (3.45), on obtient :

$$\|F_1(x) - F_1(y)\| \leq \frac{k\|x-y\|}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\lambda|\|x-y\|}{\Gamma(\beta+1)}. \qquad (3.46)$$

Et donc

$$\|F_1(x) - F_1(y)\| \leq \left[\frac{k}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta+1)}\right] \|x-y\|. \qquad (3.47)$$

En utilisant la condition (3.32), on conclut que F_1 est une contraction.

Par conséquence du théorème du point fixe de Krasnosselski, on peut conclure que a un point fixe qui est une solution du système (3.1).

Corollaire 3.1 *Supposons que (H_1) est satisfaite. S'il existe $\omega > 0$ tel que :*

$$f(t,x) \leq \omega, \ \textit{pour tout } t \in J \ \textit{et } x \in \mathbb{R},$$

alors le problème fractionnaire (3.1) *admet au moins une solution.*

3.3.7 Exemple

On considère le problème fractionnare suivant :

$$\begin{aligned} D^{\frac{3}{4}}\left(D^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{15}\right) x(t) &= \frac{1}{2} - \frac{\sin x}{e^{t^2}+20\pi} + \cos\left(2+t^2\right), t \in [0,1], \qquad (3.48) \\ x(0) &= \int_0^1 \frac{1}{21+e^{2s}} x(s)\, ds, \ x(1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Soit $t \in [0,1]$ et $x \in \mathbb{R}$, alors :

$$f(t,x) = \frac{\sin x}{e^{t^2}+20\pi} + \cos\left(2+t^2\right).$$

En appliquant l'hypothèse (H_5), on trouve :

$$|f(t,x)| \leq \left|\frac{\sin x}{e^{t^2}+20\pi} + \cos\left(2+t^2\right)\right| \leq \frac{1}{e^{t^2}+20\pi} + \cos\left(2+t^2\right).$$

ce qui signifie que $b(t) = \frac{1}{e^{t^2}+20\pi} + \cos\left(2+t^2\right)$.

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [J = 0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,1)| &= \left| \frac{\sin x}{e^{t^2} + 20\pi} - \frac{\sin y}{e^{t^2} + 20\pi} \right| \\ &\leq \frac{1}{e^{t^2} + 20\pi} |x - y| \leq \frac{1}{1 + 20\pi} |x - y| . \end{aligned}$$

Par conséquent, l'hypothèse (H_1) est satisfaite avec $k = \frac{1}{1+20\pi}$.
Maintenant, on va vérifier la condition (3.32).
Tout d'abord, en calculant la valeur $\Gamma(\alpha + \beta + 1)$ et $\Gamma(\beta + 1)$, on trouve :

$$\Gamma(\alpha + \beta + 1) = \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} + 1\right) = 1.2558,$$

et

$$\Gamma(\beta + 1) = \Gamma\left(\frac{2}{3} + 1\right) = 0.902\,75.$$

Finalement, on a :

$$\frac{k}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta + 1)} = 8.6323 \times 10^{-2} < 1$$

D'après le Théorème 3.3, le système (3.48) admet au moins une solution sur $[0, 1]$.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a appliqué les théorèmes de point fixe pour étudier un problème aux limites avec une et deux dérivée fractionnaire au sens de Caputo dans un espace de Banach et en particulier pour démontrer l'existence et l'unicité des solutions du problème fractionnaire posé. En effet, on a d'abord présenté une autre équivalence intégrale du problème fractionnaire donné, puis on a établit des hypothèses assurant l'existence et l'unicité de solutions pour le problème fractionnaire posé. On a ensuite considéré d'autres hypothèses pour assurer l'existence d'au moins une solution.

Bibliographie

[1] [1] **R.P Agarwal, Y. Zhou and Y. He**, *Existence of fractional neutral functional differential equations*, Comput. Math. Appl. 59, (2010), no. 3, 1095-1100.

[2] **A. Anber, S. Belarbi and Z. Dahmani**, *New existence and uniqueness results for fractional differential equations*, Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Seria Matematica. 21, (2013), no. 3, 33-41.

[3] **G. A. Anastassiou**, *Fractional differentiation inequalities*, Springer, Dordrecht, 2009.

[4] **A. Granas and J. Dugundji**, *Fixed point theory*, Springer-Verlas, New York. 2003.

[5] **J. K. Hale and S. V. Lunel**, Introduction to functional differential equations, Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[6] **A. A. Kilbas and S. A. Mazran**, *Nonlinear differential equations with Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions*. Differential Equations. 41 (2005), no. 1, 84-89.

[7] **V. Lakshmikantham and A.S. Vatsala**, *Basic theory of fractional differential equations*. Nonlinear Anal. 69, (2008), no. 8, 2677-2682.

[8] **V. Lakshmikantham and A. S. Vatsala**, *Theory of fractional differential inequalities and applications*. Commun. Appl. Anal. 11, (2007), no. 3-4, 395-402.

[9] **M. Houas and Z. Dahmani**, *On existence of solutions for fractional differential equations with nonlocal multi-point boundary conditions*. Lobachevskii Journal of Mathematics. 37, (2016), no. 2, 120-127.

[10] **M. Houas and Z. Dahmani**, *New results for a system of two fractional differential equations involving n Caputo derivatives*, Kragujevac Journal of Mathematics. 38, (2014), no. 2, 283-301.

[11] **M. Houas**, Existence of solutions for fractional differential equations involving two Riemann-Liouville fractional orders. Analysis in Theory and Applications. 34, (2018), no. 3, 253-274.

[12] **W. Yang**, *Some new Chebyshev and Gruss-type integral inequalities for Saigo fractional integral operators and Their $q-$analogues.* Filomat. 29, (2015), no. 6, 1269-1289.

[13] **Y. Zhang, Z. Bai and T. Feng**, *Existence results for a coupled system of nonlinear fractional three-point boundary value problems at resonance.* Comput.Math. Appl. 61, (2011), 1032-1047.

[14] **X. Zhang, C. Zhu and Z. Wu**, *Solvability for a coupled system of fractional differential equations with impulses at resonance.* Boundary Value Problems, 80, (2013), 1-13.

[15] **W. Zhong and W. Lin**, *Nonlocal and multiple-point boundary value problem for fractional differential equations.* Comput. Math. Appl. 39 (2010), 1345-1351.