République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆
UNIVERSITÉ DR. YAHIA FARÈS DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse et Mathématique et Application

par

BOUAYED WAHIBA

Titre :

Quelque théorème du point fixe local et ses applications

Date de soutenance : 06 Juillet 2021

Composition du Jury :

Président :	BENAICHOUCHE Noureddine	MAA	UYFM
Examinateur :	TOUMACHE Kamel	MAA	UYFM
Examinateur :	MEKDACHE Noureddine	MAA	UYFM
Encadreur :	BENTERKI Abdessalem	MCB	UYFM
Co-encadreur :	BIBI Hamza	MCB	UYFM

Année Universitaire : 2020/2021

♢

“Je dé-
die ce travail
à ma *mère*, à mon
père, à mon *frère* et à
mon *grand père*
et à tous mes
amis.”

♢

BOUAYED Wahiba

Remerciements

Le docteur BENTERKI Abdessalem et Le docteur BIBI Hamza ont accepté d'être notre directeur de thèse et nous a dirigé avec passion et enthousiasme. Ils nous a initié à la recherche et nous a soutenu pendant toute la durée de ce travail. Qu'il soit assuré de trouver ici notre profonde reconnaissance.

♡

Monsieur BENAICHOUCHE Noureddine nous a fait l'honneur et le plaisir de présider notre jury de soutenance. Nous lui exprimons toute notre gratitude.

♡

Nos vifs remerciements vont au monsieur TOUMACHE Kamel et à M. MEKDACHE Noureddine d'avoir accepté de lire notre travail.

♡

Nous tenons à exprimer aussi notre profonde reconnaissance à tous nos enseignants qui nous ont accompagné tout au long de nos études. Sans eux, ce travail n'aurait certainement jamais pu voir le jour.

Nous remercions également tous nos amis et en particulier Meriem qui nous a aidé dans un cadre mathématique ou autre.

Enfin, merci à toutes nos familles pour leur amour et leur soutien constant.

Résumé

L'objectif de notre travail et de trouver des points fixes pour une suite des fonctions et multi-fonctions satisfait certaines conditions dans les espaces métriques et les espaces métriques partiels. Le théorème du point fixe est fondamental en analyse. Il a des applications nombreuses, à la fois théoriques et pratiques. chaque théorème que nous trouvons version locale de théorème .

Dans Partie d'applications de ce mémoire, on applicable le théorème sur approximation numérique pour les inclusions variationnelles et pour trouve l'existence local et l'unicité de le solution de modèle SEIQRDP.

Mots clés : point fixe, espace métrique, espace métrique partiel, les multifonctions, l'application contractante, inclusion variationnelle, EDO, Covid-19.

Table des matières

Remerciements **iii**

0.0.1 Introduction générale 1

0.1 Liste des abréviations et des symboles 2

1 Généralités **3**

1.1 Espaces métriques 3

1.1.1 Espaces vectoriels normés 4

1.1.2 Espace de Banach 5

1.2 Espaces métriques partiels 6

1.3 Les multifonctions 14

2 Théorème du point fixe **24**

2.1 Théorème du point fixe de Banach 24

2.2 Les théorèmes du point fixe pour les multifonctions 31

2.3 Version locale de Nadler 39

3 Partie d'applications **49**

3.1 Approximation numérique pour les inclusions variationnelles 49

3.2 Application pour le problème de Covid-19 54

3.2.1 Étudier le modèle SEIQRDP de Covid-19 en Algérie 54

3.3 la version globale de Banach ou Matthews 63

3.4 la version locale de Banach ou Matthews 64

3.5 Programmation de SEIQRDP 66

Bibliographie **85**

0.0.1 Introduction générale

Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base pour montrer l'existence des solutions pour plusieurs équations non linéaires. La théorie du point fixe est le plus important domaine d'analyse ou ontronue les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence des problèmes non linéaires différents. L'origine de ce théorème est les travaux de Banach en 1922 [4].

En 1994, Matthews [5] introduit la notion des espaces métriques partiels. La topologie des espaces métriques partiels est un peu particulière. Précisément, la distance d'un point à lui même peut ne pas être égale à zéro. De plus, la limite d'une suite convergente n'est pas unique. Matthews a étendu le principe de Banach aux espaces métriques partiels complets.

Après des études mathématique, il a trouvé l'existence locale du point fixe pour les fonctions ("Version locale de Banach et Version locale de Mattews "). Ce qui grandement contribué à faciliter l'application et à trouver une solution pour les théorèmes du point fixe.

Les théorèmes du point fixe pour multifonction a été considérée par plusieurs auteurs comme des applications sur la théorie des les inclusions intégrales ou différentielles, problèmes de minimisation ... etc. L'étude de ce type d'applications a commencé par Nadler (1969) [5] comme une généralisation du principe de contraction de Banach qui a utilisé la métrique de Pompieu-Hausdorff pour les multifonction contractions dans les espaces métriques et les espaces métriques partiels.

Le but de notre travail est de trouver des points fixes pour une suite des fonctions et multifonctions dans des espaces métriques et des espaces métriques partiels.

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques définitions et propriétés et lemmes sur les espaces métriques, les espaces métriques partiels et les espaces de Pompieu-Hausdorff.

Dans le deuxième chapitre, on présente les théorèmes du point fixe (version globale) pour les fonctions et multifonctions contractantes définies sur les espaces métriques, les espaces métriques partiels.

Dans le troisième chapitre, on va appliquer le théorème de version locale de Nadler sur le espace métrique pour démontrons une méthode d'approximation de type Newton pour la résolution d'une inclusion variationnelle de type $0 \in f(x) + F(x)$ où f une fonction et F une multifonction.

De même, on appliquer le théorème de version locale de Nadler sur l'espace métrique partiel pour trouver l'existence local et l'unicité de la solution d'EDO pour un problème de Covid-19 de modèle SEIQRDP.

Section 0.1

Liste des abréviations et des symboles

X : ensemble
$d(.;.)$: métrique
k : constante de contraction
F : multifonction
$e(.;.)$: excès de Hausdorf
$H_d(.;.)$: distance de Hausdorf
$p(.;.)$: métrique partielle
$p_s(.;.)$: métrique
$p_w(:.;.)$: métrique
$\overline{B}$: boule d'unité fermée
$\delta_p(.;.)$: excès partielle de Hausdorf
$H_p(.;.)$: distance partielle de Hausdorf
$CB(X)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles fermées et bornées dons X,
$B(X)$ l'ensemble des sous-ensembles bornées dons X,
$C(X)$ l'ensemble des sous-ensembles compact dons X.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS

Dans ce chapitre, nous donnons quelques définitions et exemples sur les espaces métriques, les espaces métriques partielles et les multifonctions qui sont utitisées dans ce mémoire.

Section 1.1

Espaces métriques

Un espace métrique, introduite en 1906, par Maurice Fréchet [1] et développé peu aprés par F. Hausdorff [2], est directement issue d'une analyse des propriétés de la distance usuelle.

Définition 1.1.1 *Soit X un ensemble quelconque non vide. Le couple (X,d) est dit un espace métrique si la fonction $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant, pour tous $x,y,z \in X$, les conditions suivantes :*

(a) $d(x,y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$,

(b) $d(x,y) = d(y,x)$ *(la symétrie),*

(c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(l'inégalité triangulaire).*

Définition 1.1.2 *Une suite $(x_n) \subset X$ est dite de Cauchy si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } d(x_n,x_m) < \varepsilon, \quad \forall n,m > N.$$

1. René Maurice Fréchet, né 2 septembre 1878 à Maligny et mort le 4 juin 1973 à paris, est un mathématicien frans. Mématicien prolifique, il travailla entre autres en topologie, en théorie des ptobabilités et en statistiques.

2. Felix Hausdorff est mathématicien allemand né le 8 novembre 1868 à Breslau et mort le 26 janvier 1942 à Bonn. ll est est l'auteur, sous le nom de Paul Mongré, de travaux philosphiques et littéraires.

Un espace métrique (X,d) est dit complet si tout suite de Cauchy dans X convergente.

Exemple 1.1.3 *Sur l'espace $\mathbb{K}^n(\mathbb{K}=\mathbb{R}$ où $\mathbb{C})$ on définit pour $x=(x_1,...,x_n)$, $y=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{K}^n$, les fonctions suivantes sont des métriques :*

(1) $d_1(x,y)=\sum_{i=1}^n |x_i-y_i|$,

(2) $d_p(x,y)=(\sum_{i=1}^n |x_i-y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$,

(3) $d_\infty(x,y)=\max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|$.

Définition 1.1.4 (Boules ouvertes et fermées) *Soit (X,d) un espace métrique. Soit $x\in X$ et $r>0$, on note parla boule ouverte de centre x et rayon r par*

$$B_d(x,r)=\{y\in X : d(x,y)<r\},$$

On note par la boule fermé de centre x et rayon r par

$$\overline{B_d}(x,r)=\{y\in X : d(x,y)\leq r\}.$$

1.1.1 Espaces vectoriels normés

Définition 1.1.5 (Norme) *Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on appelle norme sur X une fonction notée $x\to\|x\|$ telle que*

(i) $\|x\|\geq 0$ *et* $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$,

(ii) $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$, $\forall\lambda\in\mathbb{K}$,

(iii) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

Définition 1.1.6 (Espace vectoriel normé) *Un espace vectoriel normé (e.v.n) est un couple constitué par un espace vectoriel muni d'une norme $\|.\|$ on note par $(X,\|.\|)$.*

Exemple 1.1.7 *:*

(i) Sur $\mathbb{R}^n$, on définit classiquement les normes

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x|^p)^{\frac{1}{p}}, \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}(|x_i|).$$

Le cas $p = 2$ fournit la norme euclidienne.

(ii) Sur $C^0([0,1])$, deux normes sont

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt, \|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

Proposition 1.1.8 (Distance associée à une norme) *Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Alors d l'application $d(x,y) : X \to \|x-y\|$ est une distance.*

Proposition 1.1.9 *1. Tout espace vectoriel normé est un espace métrique.*

2. Tout espace vectoriel normé de dimension fini est complet.

1.1.2 Espace de Banach

Définition 1.1.10 (Espace de Banach) *: Un espace vectoriel normé $(X, \|.\|)$, sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{C}$, qui est complet pour la distance associée à sa norme est appelé un espace de Banach.*

Définition 1.1.11 *On appelle produite scalaire sur X une forme bilinéaire symétrique définie positive $< .,. >: X \times X \to \mathbb{R}$, telle que*

(i) $< u,u >\geq 0$ et $< u,u >= 0 \Leftrightarrow u = 0$ (définie positive),

(ii) $< u, \lambda v + w >= \lambda < u,v > + < u,w >$, (linéarité à droite),

(iii) $< u,v >=< v,u >$ (symétrie).

Définition 1.1.12 *L'application $u \to \|u\| = \sqrt{< u,u >}$ est une norme appelée norme associée au produit scalaire $< \cdot,\cdot >$ (on parle aussi de norme hilbertienne) et on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$| < u,v > | \leq \|u\|\|v\|.$$

Définition 1.1.13 *Une espace de Hilbert est un espace d'un produit scalaire pour lequel la norme définit une distance complet c-á-d $(X, \|.\|)$ est de Banach .*

Section 1.2

Espaces métriques partiels

En 1994, Matthews a introduit la notion d'un espace métrique partiel [11]. Cette notion est une généralisation des espaces métriques usuels dans lesquels la distance l'auto-distance (i.e. d(x,x)) n'a pas besoin d'être égale à zéro. L'espace métrique partiel a de larges applictions dans de nombreuses branches des mathématiques ainsi que dans les domaines de l'informatique et de la sémantique .

Définition 1.2.1 *[11] Une fonction $p : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est dite une métrique partielle sur X et le couple (X, p) est dit espace métritque partiel, si pour tous $x, y, z \in X$, les conditions suivantes sont satisfaites :*

(p_1) $p(x,y) = p(x,x) = p(y,y)$ *si et seulement si* $x = y$,

(p_2) $p(x,x) \leq p(x,y)$,

(p_3) $p(x,y) = p(y,x)$,

(p_4) $p(x,z) + p(y,y) \leq p(x,y) + p(y,z)$.

Exemple 1.2.2 *Soit $X = \mathbb{R}^+$ et soient $p, q : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par*

1. $p(x,y) = \max\{x,y\}$,
2. $q(x,y) = d(x,y) + p(x,y)$.

Alors p et q sont des métriques partielles.

DÉMONSTRATION :

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^+$,

— Montrons que p une métrique partielle.

1. " $\Rightarrow$ "

$$x = y \Rightarrow \max\{x,y\} = \max\{x,x\} = \max\{y,y\}$$
$$\Rightarrow p(x,y) = p(x,x) = p(y,y).$$

" $\Leftarrow$ " par absurde, supposons que $\max\{x,y\} = \max\{x,x\} = \max\{y,y\}$ et $x \neq y$.

Comme $x \neq y$ alors $\max\{x,y\} \neq \max\{x,x\} \neq \max\{y,y\}$
contredit avec $\max\{x,x\} = \max\{y,y\}$ d'où (p_1) est vérifié.

2.
$$p(x,x) - p(x,y) = \max\{x,x\} - \max\{x,y\} = x - \max\{x,y\}.$$

Si $\max\{x,y\} = x$, alors $p(x,x) - p(x,y) \leq 0$.
Si $\max\{x,y\} = y$ i.e. $y \geq x$, alors $p(x,x) - p(x,y) = x - y \leq 0$.

Ceci donne $p(x,x) \leq p(x,y)$ alors (p_2) est vérifié.

3. $p(x,y) = \max\{x,y\} = \max\{y,x\} = p(y,x)$ et donc (p_3) est vérifié.

4. Par définition, $p(x,y) = \max\{x,y\} = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ alors
$p(x,z) + p(y,y) = \dfrac{x+z+|x-z|}{2} + y$ et comme $|.|$ une métrique alors

$$|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$$

donc,

$$\begin{aligned} p(x,z) + p(y,y) &= \frac{x+z+|x-z|}{2} + y \\ &\leq \frac{x+y+y+z+|x-y|+|y-z|}{2} \\ &\leq \frac{x+y+|x-y|}{2} + \frac{y+z+|y-z|}{2} \\ &\leq \max\{x,y\} + \max\{y,z\} \\ &\leq p(x,y) + p(y,z) \end{aligned}$$

alors (p_4) est vérifié. Par conséquent, p est une métrique partielle.

— Montrons que q une métrique partielle.

1. $x = y \Longleftrightarrow d(x,x) + p(x,x) = d(x,y) + p(x,y) = d(y,y) + p(y,y) \Longleftrightarrow q(x,x) = q(x,y) = q(y,y)$

2. $q(x,x) = d(x,x) + p(x,x) \leqslant d(x,y) + p(x,y) = q(x,y)$.
3. $q(x,y) = d(x,y) + p(x,y) = d(y,x) + p(y,x) = q(y,x)$.
4.

$$\begin{aligned} q(x,y) =& d(x,y) + p(x,y) \\ &\leq d(x,z) + d(z,y) - d(z,z) + p(x,z) + p(z,y) - p(z,z) \\ &\leq (d(x,z) + p(x,z)) + (d(z,y) + p(z,y)) - (d(z,z) + p(z,z)) \\ &\leq q(x,z) + q(z,y) - q(z,z) \\ q(x,y) + q(z,z) &\leq q(x,z) + q(z,y) \end{aligned}$$

alors q est une métrique partielle.

□

Toute métrique partielle p sur X génère une topologie τ_p d'un T_0 espace [3], où elle a une base de la famille des p-boule ouvertes de centre x et rayon r $\{B_p(x,r) : x \in X, r > 0\}$, où

$$B_p(x,r) = \{y \in X : p(x,y) < p(x,x) + r\}.$$

Pour tout $x \in X$ et $r > 0$ la p-boule fermée de centre x et rayon r est définie comme suite

$$\overline{B_p}(x,r) = \{y \in X : p(x,y) \leq p(x,x) + r\}.$$

Proposition 1.2.3 *Pour une métrique partielle p sur X, les fonctions $p^s, p^w : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ donnée par*

$$p^s(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y),$$

3. Un espace topologiue X est dit T_0 espace si pour tous $x, y \in X, x \neq y$, il existe un ouvertcontenant uniquement un des point et pas l'autre

et

$$\begin{aligned} p^w(x,y) &= \max\{p(x,y)-p(x,x), p(x,y)-p(y,y)\} \\ &= p(x,y)-\min\{p(x,x), p(y,y)\}, \end{aligned}$$

sont des métrique sur X.

DÉMONSTRATION :
(1) On a

$$\begin{aligned} p^w(x,y) &= \max\{p(x,y)-p(x,x), p(x,y)-p(y,y)\} \\ &\leq 2p(x,y)-p(x,x)-p(y,y) \\ &= p^s(x,y). \end{aligned}$$

Alors $p^w(x,y) \leq p^s(x,y)$

(2) Comme pour chaque nombre réel a et b on a

$$a+b \leq 2\max\{a,b\}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} p^s(x,y) &= 2p(x,y)-p(x,x)-p(y,y) \\ &\leq 2\max\{p(x,y)-p(x,x), p(x,y)-p(x,x)\} \\ &= 2p^w(x,y), \end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{2}p^s(x,y) \leq p^w(x,y)$$

Pour (1) et (2) on a

$$\frac{1}{2}p^s(x,y) \leq p^w(x,y) \leq p^s(x,y)$$

alors p^s, p^w sont équivalent.

DÉMONSTRATION :

Soit p une métrique partielle sur X. Alors

(a)

$$\begin{aligned} p^s(x,y) = 0 &\Leftrightarrow 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2p(x,y) = p(x,x) + p(y,y). \end{aligned} \tag{P}$$

Alors

$$\max\{p(x,x), p(y,y)\} \leqslant p(x,y) \leqslant \frac{p(x,x)+p(y,y)}{2} \leqslant \max\{p(x,x), p(y,y)\}$$

i.e. $p(x,y) = \max\{p(x,x), p(y,y)\}$.

Si $p(x,y) = p(x,x) \geqslant p(y,y)$, alors (P) donne

$$\begin{aligned} 2p(x,y) = p(x,x) + p(y,y) &\Leftrightarrow 2p(x,x) = p(x,x) + p(y,y) \\ &\Rightarrow p(x,y) = p(x,x) = p(y,y) \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

De même, si $p(x,y) = p(y,y)$.

(b)

$$\begin{aligned} p^s(x,y) &= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\ &= 2p(y,x) - p(y,y) - p(x,x) \\ &= p^s(y,x) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} p^s(x,z) &= 2p(x,z) - p(x,x) - p(z,z) \\ &\leq [2p(x,y) + 2p(y,z) - 2p(y,y)] - p(x,x) - p(z,z) \\ &\leq [2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)] + [2p(y,z) - p(y,y) - p(z,z)] \\ &\leq p^s(x,y) + p^s(y,z) \end{aligned}$$

alors p^s est une métrique sur X.

D'après proposition 1.2.3 on a p^s, p^w sont équivalent

dons p^w est métrique sur X.

□

Définition 1.2.4 *[11, 17]*

(a) *Une suite $\{x_n\}$ dans un espace métrique partiel (X,p) converge vers $x \in X$ si et seulement si $p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x,x_n)$.*

(b) *Une suite $\{x_n\}$ dans un espace métrique partiel (X,p) est dite de Cauchy si seulement si $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)$ exist et finie .*

(c) *Un espace mtrique partiel (X,p) est complet si toute suite de Cauchy $\{x_n\}$ dans X converge vers un point $x \in X$ tel que $p(x,x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)$.*

Lemme 1.2.5 *[11]*

(a) *Une suite $\{x_n\}$ est de Cauchy dans un espace métrique partiel (X,p) si et seulement si $\{x_n\}$ est de Cauchy dans l'espace métrique (X,p^s).*

(b) *Un espace métrique partiel (X,p) est complet si et seulement si l'espace métrique (X,p^s) est complet. De plus,*

$$\lim_{n\to\infty} p^s(x,x_n) = 0 \Leftrightarrow p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x,x_n) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)$$

Exemple 1.2.6 *[9] Soit $X = \mathbb{R}^+$ et soit $p : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ définie par*

$$p(x,y) = \max\{x,y\}.$$

On a, p est une métrique partielle, on a pose $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$,
c'est suite de Cauchy car
$p(x_n,x_m) = p(\frac{1}{n},\frac{1}{m}) = \max\{\frac{1}{n},\frac{1}{m}\} \to 0$ *pour* $n,m \to \infty$

$$p(y_n,y_m) = p(\frac{1}{2}+\frac{1}{n},\frac{1}{2}+\frac{1}{m}) = \max\{\frac{1}{2}+\frac{1}{n},\frac{1}{2}+\frac{1}{m}\} \to \frac{1}{2} \text{ pour } n,m \to \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} p(\frac{1}{n},\frac{1}{2}+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \max\{\frac{1}{n},\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\} = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$$

les suite $x_n = \frac{1}{n}$ *et* $y_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ *sont de Cauchy* (X, p)*, par le équivalent dans* (X, p^s) *car*

$$p(x_n, x_n) = \max\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\} = \frac{1}{n} \to 0,$$

$p(y_n, y_n) = \max\{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \to \frac{1}{2}+$ *pour* $n \to \infty$

on a

$$\lim_{n\to\infty} p^s(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} [2p(x_n, y_n) - p(x_n, x_n) - p(y_n, y_n)] = 2.\frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Lemme 1.2.7 *[11] Soit* (X, p) *un espace métrique partiel. On a*

1. *Si* $p(x,y) = 0$*, alors* $x = y$*. Mais si* $x = y$*, alors* $p(x,y)$ *n'a pas besoin d'être égale á zéro.*
2. *Si* $x \neq y$*, alors* $p(x,y) > 0$*.*

DÉMONSTRATION :

1. Soit $p(x,y) = 0$,
   de (p_2) on a
   $$p(x,x) \leq p(x,y) = 0$$
   et
   $$p(y,y) \leq p(x,y) = 0$$
   on trouve
   $$p(x,x) = p(y,y) = p(x,y) = 0$$
   de (p_1) on a $p(x,x) = p(y,y) = p(x,y)$ si et seulement si $x = y$.

   Mais si $x = y$, alors $p(x,y)$ n'a pas besoin d'être égale à zéro par exemple
   soit $X = \{1,2,4\}$, soit $p : X \to \mathbb{R}^+$ métrique partielle définie par
   $$p(x,y) = \max\{x,y\}$$
   donc,
   $$p(x,x) = \max\{x,x\} \neq 0.$$

2. On pose $x \neq y$,
   par définition
   $$p(x,y) \geq 0, \forall x,y \in X$$
   par absurde, supposons que $p(x,y) = 0$ d'aprér (1) on a $x = y$
   contradiction, d'où $p(x,y) > 0$, donc $x \neq y$.

⊡

Lemme 1.2.8 *[21, 9] Supposons que $x_n \to x$ quand $n \to +\infty$ dans un espace métrique partiel (X,p) tel que $p(x,x) = 0$. Alors $\lim_{n\to+\infty} p(x_n,y) = p(x,y)$ pour tout $y \in X$.*

Lemme 1.2.9 *[10, 2] Soit (X,p) un espace métrique partiel et $A \subset X$. Alors $p(a,A) = p(a,a) \Leftrightarrow a \in \overline{A}$. De plus, $p(a,A) = 0 \Leftrightarrow p(a,a) = 0$ et $a \in \overline{A}$.*

Où $\overline{A}$ est la fermeture de A par rapport à métrique partiel p. Notez que A fermé dans (X,p) si et seulement si $\overline{A} = A$.

DÉMONSTRATION :

Soit $a \in X$ et $A \subset X$ où $p(a,A) = 0$ tel que $p(a,a) \neq 0$ ou $a \notin \overline{A}$. Soit $z \in \overline{A}$ tel que $p(a,\overline{A}) = p(a,z)$. Si $p(a,a) \notin 0$ alors l'utilisation de propiété (p_2) de la métrique partielle donne

$$0 < p(a,a) \leq p(a,z) = p(a,\overline{A}) \leq p(a,A) = 0$$

ce qui est une contradiction. Si $a \in \overline{A}$ puis $a \neq z$et, en utilisant le lemme (1.2.7), nous avons trouver

$$0 < p(a,z) = p(a,\overline{A}) \leq p(a,A) = 0$$

ce qui est aussi une contradiction. Donc $p(a,A) = 0$ implique que $p(a,a) = 0$ et $a \in \overline{A}$.

⊡

Lemme 1.2.10 *[3] Soit (X,p)un espace métrique partiel. Soit $x \in X$ et $A \subset X$. Si $p(x,A) < \mu$ $(\mu > 0)$ alors il existe $a \in A$ tel que $p(x,a) < \mu$.*

DÉMONSTRATION :

Par contradiction, soit $x \in X$ et $A \subset X$ tel que $p(x,A) < \mu$. Nous supposons que $p(x,a) \geq \mu$ pour tout $a \in A$. En suite, nous avons

$$p(x,A) = \inf\{p(x,a) : a \in A\} \geq \mu,$$

ce qui une contradiction. Par consquent, il existe $a \in A$ tel que $p(x,a) < \mu$.

□

Section 1.3

Les multifonctions

Soient X et Y deux ensembles quelconques. Une multifonction [8] (sont appelées aussi multivoque, multi-applications, ou encore des correspondances)F de X vers Y, notée par $F : X \rightrightarrows Y$ ou par $F : X \longrightarrow 2^Y$ ou encore par $F : X \longrightarrow P(Y)$, est une fonction qui associe á tout point de X une partie de Y qui peut être vide.

On note le domaine de F par $Dom(F)$,

$$Dom(F) = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}.$$

On note le graphe de F par $Gr(F)$,

$$Gr(F) = \{(x,y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

On note la multifonction inverse $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ par

$$F^{-1}(y) = \{x \in X | y \in F(x)\}.$$

Définition 1.3.1 *[8] Soit (X,d) un espace métrique. On note*

$CB(X)$ *l'ensemble de tous les sous-ensembles fermées et bornées dons X,*

$B(X)$ *l'ensemble des sous-ensembles bornées dons X,*

$C(X)$ *l'ensemble des sous-ensembles compact dons X.*

Excess et distance de Hausdorff

Définition 1.3.2 *[15] Soit (X,d) un espace métrique, et soient A et B deux parties de X. On note par*

$$e_d(A,B) = \sup_{x \in A} d(x,B) = \sup_{x \in A}\{\inf_{y \in B} d(x,y)\},$$

l'excés entre A et B.

La distance de Hausdorff entre A et B est définie par

$$H_d(A,B) = \max\{e_d(A,B), e_d(B,A)\}.$$

Rappelons que métrique de Hausdorff (généralisée) H_d entre A et B peut prendre la valeur $+\infty$.

Exemple 1.3.3 *Soit (X,d) un espace métrique, et soient A et B deux partie de X tel que $A=[1,+\infty[$ et $B=[0,1]$, on a*

$$e_d(A,B)=\sup_{x\in A} d(x,B)=+\infty,\ e_d(B,A)=\sup_{x\in B} d(x,A)=1,$$

alors

$$H_d(A,B)=+\infty.$$

Proposition 1.3.4 *[15] Soit (X,d) un espace métrique pour tous $A,B\in CB(X)$, on a*

(P_1) $H_d(A,B)=0\Leftrightarrow A=B$,

(P_2) $H_d(A,B)=H_d(B,A)$,

(p_3) $H_d(A,B)\leq H_d(A,C)+H_d(C,B)$.

Proposition 1.3.5 *Soit X espace métrique , et soient $A,B,C\in CB(X)$. Alors*

$$H_d(A\cup B,C\cup D)\leq \max\{H_d(A\cup C),H_d(B\cup D)\}.$$

DÉMONSTRATION :
Soient $A,B,C,D\in CB(X)$ On a

$$\begin{aligned} e_d(A\cup B,C\cup D) &= \max\{e_d(A,C\cup D),e_d(B,C\cup D)\}\\ &\leq \max\{e_d(A,C),e_d(B,D)\}\\ &\leq \max\{H_d(A,C),H_d(B,D)\}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} e_d(C\cup D,A\cup B) &= \max\{e_d(C,A\cup B),e_d(D,A\cup B)\}\\ &\leq \max\{e_d(A,C),e_d(B,D)\}\\ &\leq \max\{H_d(A,C),H_d(B,D)\}. \end{aligned}$$

Et par définition de H_d, on a

$$\begin{aligned} H_d(A\cup B, C\cup D) &= \max\{e_d(A\cup B, C\cup D), e_d(C\cup D, A\cup B)\} \\ &\leq \max\{H_d(A\cup C), H_d(B\cup D)\}. \end{aligned}$$

□

Définition 1.3.6 *Soit X un espace métrique, on dit $f : X \longrightarrow X$ est Lipschitzienne si et seulement si :*

$$\exists k \geq 0, \forall x, y \in X : d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

On particulier, si $0 \leq k < 1$ on dit que f est contractante.

Définition 1.3.7 *Soit (X, d) un espace métrique. On dit que $F : X \to CB(X)$ est une contractante, s'il existe $0 \leq \lambda < 1$ telle que*

$$H_d(F(x), F(y)) \leq \lambda d(x, y)$$

pour tout $x, y \in X$.

Proposition 1.3.8 *Tout application contractante est application continue.*

Lemme 1.3.9 *[7] Soit (X, d) un espace métrique, $A, B \in CB(X)$ et $h > 1$. Pour tout $a \in A$, il existe $b \in B$ tell que*

$$d(a, b) \leq hH_d(A, B).$$

DÉMONSTRATION :

1. Si $A = B$, alors
$$H_d(A, B) = H_d(A, B) = e_d(A, A) = \sup_{a\in A} d(a, a).$$
Puisque $h > 1$, donc on a
$$d(a, a) \leq \sup_{a\in A} d(a, a) = H_d(A, B) \leq hH_d(A, B).$$
2. Si $A \neq B$,
supposons qu'il $a \in A$ tell que
$$d(a, b) > hH_d(A, B).$$

On a

$$H_d(A,B) \geq e_d(A,B) = \sup_{a\in A} d(a,B) \geq d(a,B) > hH_d(A,B).$$

Puisque $A \neq B$, alors $H_d(A,B) \neq 0$ on trouve la contradiction $h \geq 1$, alors

$$d(a,b) \leq hH_d(A,B).$$

⊡

Lemme 1.3.10 *[7] Soit (X,d) un espace métrique, et soient $A,B \in CB^p(X)$ et $a \in A$. Alors $\forall \alpha > 0$, $\exists b \in B$ tel que*

$$d(a,b) \leq H_d(A,B) + \alpha.$$

DÉMONSTRATION :

Si $A = B$,

$$H_d(A,B) = H_d(A,A) = e_d(A,A) = \sup_{a\in A} d(a,A),$$

soit $a \in A$, alors

$$d(a,a) \leq \sup_{a\in A} d(a,A) = H_d(A,A),$$

donc

$$d(a,b) \leq H_d(A,B) + \alpha.$$

Si $A \neq B$

supposons qu'il $a \in A$ tell que

$$d(a,b) > H_d(A,B) + \alpha,$$

on a

$$H_d(A,B) \geq e_d(A,B) \geq d(a,B) > H_d(A,B) + \alpha.$$

Puisque $A \neq B$, alors $H_d(A,B) \neq 0$ on trouve la contradiction, alors

$$d(a,b) \leq H_d(A,B) + \alpha.$$

⊡

Définition 1.3.11 *Soit (X,p) un espace métrique partiel, et soient A,B deux parties de X, on définit*

$$p(x,A) = \inf_{a\in A} p(x,a),$$

et

$$\delta_p(A,B) = \sup_{a\in A} p(a,B),$$

et

$$\delta_p(A,B) = \sup_{b\in B} p(b,A).$$

La distance de Hausdorff entre A et B est définit par

$$H_p(A,B) = \max\{\delta_p(A,B), \delta_p(B,A)\}.$$

Proposition 1.3.12 *Soit (X,p) un espace métrique partiel, et soient A partie de X, on a*

$$p(x,A) = 0 \Rightarrow p^s(x,A) = 0.$$

Proposition 1.3.13 *[8] Soit (X,p) un espace métrique partiel. Pour tous $A,B,C \in CB^p(X)$, on a les propriétés suivantes :*

(1) $\delta_p(A,A) = \sup\{p(a,a) : a \in A\}$,

(2) $\delta_p(A,A) \leq \delta_p(A,B)$,

(3) $\delta_p(A,B) = 0 \Rightarrow A \subseteq B$,

(4) $\delta_p(A\cup B,C) = \max\{\delta_p(A,C), \delta_p(B,C)\}$

(5) $\delta_p(A,B) \leq \delta_p(A,C) + \delta_p(C,B) - \inf_{c\in C} p(c,c)$.

DÉMONSTRATION :

(1) Soit $A \in CB^p(X)$ alors pour tout $a \in A$, on a

$$p(a,A) = p(a,a),$$

$$\delta_p(A,A) = \sup_{a\in A}\{p(a,A)\} = \sup_{a\in A}\{p(a,a)\}.$$

(2) Soit $a \in A$, puisque $p(a,a) \leq p(a,b)$, pour tout $b \in B$, donc on a

$$p(a,a) \leq p(a,B) \leq \delta_p(A,B).$$

D'aprés (1), on obtient que

$$\delta_p(A,A) = \sup_{a\in A} \leq \delta_p(A,B).$$

(3) Supposons que $\delta_p(A,B)=0$. On trouve $p(a,B)=0$ pour tout $a\in A$.

D'après (1) et (2) on a

$$p(a,a)\leq \delta_p(A,B)=0, \forall a\in A$$

donc

$$p(a,a)=0, \forall a\in A,$$
$$p(a,B)=p(a,a), \forall a\in A$$

alors $a\in B$ pour tout $a\in A$ donc $A\subseteq B$.

(4) On a

$$\begin{aligned}\delta_p(A\cup B,C) &= \sup_{x\in A\cup B} p(x,C)\\ &= \max\{\sup_{x\in A} p(x,C), \sup_{x\in B} p(x,C)\}\\ &= \max\{\delta_p(A,C),\delta_p(B,C)\}.\end{aligned}$$

(5) Soit $a\in A$, $b\in B$ et $c\in C$.
On a

$$p(a,b)\leq p(a,c)+p(c,b)-p(c,c),$$

donc

$$p(a,B)\leq p(a,c)+p(c,B)-p(c,c),$$

et

$$p(a,B)+p(c,c)\leq p(a,c)+\delta_p(C,B).$$

Puisque $c\in C$, on a

$$p(a,B)+\inf_{c\in C} p(c,c)\leq p(a,C)+\delta_p(C,B).$$

Comme $a\in A$, alors

$$\delta_p(A,B)\leq \delta_p(A,C)+\delta_p(C,B)-\inf_{c\in C} p(c,c).$$

□

Proposition 1.3.14 *[8] Soit (X,p) un espace métrique partiel. Soit $A \in X$ on a*

$$\delta_p(\emptyset, A) = 0.$$

Proposition 1.3.15 *[8] Soit (X,p) un espace métrique partiel. Pour tous $A,B \in X$, on a les propriétés suivantes :*

(h_1) $H_p(A,A) \leq H_p(A,B)$,

(h_2) $H_p(A,B) = H_p(B,A)$,

(h_3) $H_p(A,B) \leq H_p(A,C) + H_p(C,B) - \inf_{c\in C} p(c,c)$.

DÉMONSTRATION :

(1) On a

$$H_p(A,A) = \delta_p(A,A) \leq \delta_p(A,B) \leq H_p(A,B),$$

dons

$$H_p(A,A) \leq H_p(A,B).$$

(2) On a

$$H_p(A,B) = \max\{\delta_p(A,B), \delta_p(B,A)\} = \max\{\delta_p(B,A), \delta_p(A,B)\} = H_p(B,A).$$

(3) On a

$$\begin{aligned} H_p(A,B) &= \max\{\delta_p(A,B), \delta_p(B,A)\} \\ &\leq \max\{\delta_p(A,C) + \delta_p(C,B) - \inf_{c\in C} p(c,c), \delta_p(B,C) + \delta_p(C,A) - \inf_{c\in C} p(c,c)\} \\ &\leq \max\{\delta_p(A,C) + \delta_p(C,B), \delta_p(B,C) + \delta_p(C,A)\} - \inf_{c\in C} p(c,c) \\ &\leq \max\{\delta_p(A,C) + \delta_p(C,A)\} + \max\{\delta_p(C,B) + \delta_p(B,C)\} - \inf_{c\in C} p(c,c) \\ &\leq H_p(A,C) + H_p(C,B) - \inf_{c\in C} p(c,c). \end{aligned}$$

□

Corollaire 1.3.16 *[8] Soit (X,p) un espace métrique partiel, pour $A,B \in CB^p(X)$, on a*

$$H_p(A,B) = 0 \Rightarrow A = B.$$

DÉMONSTRATION :
Soit $H_p(A,B) = 0$, par définition de H_p

$$\delta_p(A,B) = \delta_p(B,A) = 0.$$

On utilise de la proposition (1.3.13) , pour obtenir $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$. Ainsi $A = B$.

⊡

Remarque 1.3.17 *La réciproque de ce corollaire n'est pas en général.*
Comme il clair de l'exemple suivant.

Exemple 1.3.18 *Soit $X = [0,1]$ et soit (X,p) un espace métrique partiel définie par*

$$p(x,y) = \max\{x,y\}$$

de (1) de la proposition (3.7) on a

$$H_p(X,X) = \delta_p(X,X) = \sup\{x, 0 \leq x \leq 1\} = 1 \neq 0$$

On a l'appliction

$$H_p : CB^p(X) \times CB^p(X) \to \mathbb{R}^+$$

définie une métrique partielle d'Hausdorff induit par p

Remarque 1.3.19 *Tout métrique d'Hausdorff est une métrique partielle d'Hausdorff. La réciproque n'est pas vrai.*

Lemme 1.3.20 *[8] Soit (X,p) un espace métrique partiel, $A,B \in CB^p(X)$ et $h > 1$. Pour tout $a \in A$, il existe $b \in B$ tell que*

$$p(a,b) \leq hH_p(A,B).$$

DÉMONSTRATION :

1. Si $A = B$, alors
$$H_p(A,B) = H_p(A,A) = \delta_p(A,A) = \sup_{a\in A} p(a,a).$$
Puisque $h > 1$, donc on a
$$p(a,a) \leq \sup_{a\in A} p(a,a) = H_p(A,B) \leq hH_p(A,B).$$

2. Si$A \neq B$
supposons qu'il $a \in A$ tell que
$$p(a,b) > hH_p(A,B)$$
On a
$$H_p(A,B) \geq \delta_p(A,B) = \sup_{a\in A} p(a,B) \geq p(a,B) \geq hH_p(A,B).$$
Puisque $A \neq B$ alors $H_p(A,B) \neq 0$ on trouve la contradiction $h \geq 1$. alors
$$p(a,b) \leq hH_p(A,B).$$

□

Lemme 1.3.21 *[8] Soit (X,p) un espace métrique partiel, et soient $A,B \in CB^p(X)$ et $a \in A$. Alors $\forall \alpha > 0$, $\exists b \in B$ tel que*
$$p(a,b) \leq H_p(A,B) + \alpha.$$

DÉMONSTRATION :
Si $A = B$,
$$H_p(A,B) = H_p(A,A) = \delta_p(A,A) = \sup_{a\in A} p(a,A),$$
soit $a \in A$, alors
$$p(a,a) \leq \sup_{a\in A} p(a,A) = H_p(A,A),$$
donc
$$p(a,b) \leq H_p(A,B) + \alpha.$$
Si $A \neq B$
supposons qu'il $a \in A$ tell que
$$p(a,b) > H_p(A,B) + \alpha,$$

on a

$$H_p(A,B) \geq \delta_p(A,B) \geq p(a,B) \geq H_p(A,B) + \alpha.$$

Puisque $A \neq B$, alors $H_p(A,B) \neq 0$ on trouve la contradiction, alors

$$p(a,b) \leq H_p(A,B) + \alpha.$$

□

CHAPITRE 2

THÉORÈME DU POINT FIXE

Dans ce chapitre, on présente quelques résultats de la théorie du point fixe pour les fonctions du point fixe de (Banach et Mattews) et de Nadler pour les multifonctions et les versions locales définies sur les espaces métriques, les espaces métriques partiels.

Définition 2.0.22 (les points fixes pour les fonctions et les multifonctions) *Soit X un espace quelque non vide , et soit une fonction f est défint par $f : X \to X$, et soit F une multifonction $F : X \to 2^X$ on dit que $x \in X$ est un **point fixe** :*

— *pour les fonctions si $f(x) = x$,*

— *et pour les multifonction si $x \in F(x)$.*

Section 2.1

Théorème du point fixe de Banach

Dans l'année 1922, Banach [1] reconnu le rôle fondamental de la complétude métrique, il enoncele théorème suivant :

Théorème 2.1.1 (Théorème de Banach(1922)) *[17] Soit (X,d) un espace métrique complet non vide et soit $f : X \to X$ une application contractante i.e il existe $0 < \alpha < 1$ tel que $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y)$, pour tout $x, y \in X$. Alors f admet un et un seul point fixe $x^* \in X$ i.e. $f(x^*) = x^*$.*

DÉMONSTRATION :

1. Stefan Banach, est mathématicien polonais, né le 30 mars 1892 à Cracovie et mort le 31 août 1945 à Lwów. Il est le fondateur de l'école mathématique de Lwów et l'un des mathématiciens les plus influents

(i) L'existence :

On choisi un point $x_0 \in X$ quelconque et on définit la suite $x_n = f(x_{n-1})$, on montre par récurrence que $d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_0, x_1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on montre que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq \sum_{n=0}^{p-1} d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) \\ &\leq \sum_{n=0}^{p-1} \alpha^{n+k} d(x_0, x_1) \\ &\leq \alpha^n \sum_{n=0}^{p-1} \alpha^k d(x_0, x_1) \\ &\leq \alpha^n \frac{1-\alpha^p}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

et donc $d(x_n, x_{n+p}) \to 0$ lorsque $n \to \infty$ ceci exprime le fait que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans X, et comme X est espace complet, il existe $x \in X$ tel que $x_n \to x$, par continuité, $x_{n+1} = f(x_n), f(x_n) \to f(x)$. d'où $f(x) = x$.

(ii) L'unicité :
On pose que $x, y \in X$ deux points fixes de f alors $f(x) = x$, $f(y) = y$

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

comme $0 < \alpha < 1$ donc $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

⊡

Exemple 2.1.2 *Soit $X = \mathbb{R}$ et la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tell que $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.*
(X, d) est un espace métrique complet, $\forall x, y \in X, d(x, y) = |x - y|$

On a $|f(x) - f(y)| = |\frac{1}{2}x + 1 - \frac{1}{2}y - 1| = |\frac{1}{2}||x - y| \leq \frac{1}{2}|x - y|$

Alors f est contractante. Donc f admet un unique point fixe $x = 2$ tell que

$f(x) = x \Rightarrow \frac{1}{2}x + 1 = x \Rightarrow (1 - \frac{1}{2})x = 1 \Rightarrow x = 2$

Remarque 2.1.3 *Les exemples suivante montrent que chacune des hypothéses du théorème du point fixe de Banach sont essentiells, si nous en négligeons seulement une, alors le point fixe n'existe pas.*

1. *f n'est pas contractante :*

   soit $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $X = [0, +\infty[$,

   or $f : X \to X$, et X est un fermé de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$est complet donc X est complet. Mais f n'admet pas de point fixe car $\sup_{x \in X} |f'(x)| = 1$ donc f n'est pas contractante.

2. *X n'est pas complet*

   soit $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{2}$ sur $X =]0, \dfrac{\Pi}{4}]$,
   or $f(]0, \dfrac{\pi}{4}]) =]0, \dfrac{\sqrt{2}}{4}] \subset]0, \dfrac{\pi}{4}]$, et $\sup_{x \in X} |f'(x)| = \dfrac{1}{2} < 1$, donc f est contractante, mais X n'ademt pas de point fixe car X n'est pas complet.

Théorème 2.1.4 (Matthews) *[11] Soit (X, p) un espace métrique partiel complet et soit $f : X \to X$ une contraction satisfaisant pour $0 \leq k < 1$ fixé,*

$$p(f(x), f(y)) \leq kp(x, y), \forall x, y \in X.$$

Alors f admet un et un seul point fixe $x^* \in X$ i.e. $f(x^*) = x^*$.

DÉMONSTRATION :

L'existence : Soit $x \in X$, alors pour tous $n, j \in \mathbb{N}$ et $f^n(x) := f(f(\cdots f(x))$, n fois, on a

$$\begin{aligned} p(f^{n+j+1}(x), f^n(x)) &\leq p(f^{n+j+1}(x), f^n(x)) + p(f^{n+j}(x), f^n(x)) - p(f^{n+j}(x), f^{n+j}(x) \\ &\leq k^{n+j} p(f(x), x) + p(f^{n+j}(x), f^n(x)) \\ &\leq (k^{n+j} + k^{n+j-1} + \ldots + k^{n+1} + k^n) p(f(x), x) + p(f^n(x), f^n(x)) \\ &\leq k^n (\frac{1-k^{j+1}}{1-k}) p(f(x), x) + k^n p(x, x) \\ &\leq (\frac{k^n}{1-k}) p(f(x), x) + k^n p(x, x) \\ &\leq k^n (\frac{p(f(x), x)}{1-k}) + p(x, x)) \end{aligned}$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, p(f^n(x), f^n(x)) \leq k^n p(x, x)$, on a $\{f^n(x)\}$ est une suite de Cauchy telle que

$$\lim_{n,m \to \infty} p(f^n(x), f^m(x)) = 0$$

Comme p est complète, on choisit $a \in X$ tell que $\{f^n(x)\}$ converge vers a. Donc

$$\lim_{n \to \infty} p(f^n(x), a) = 0$$

.

Mais, $p(f(a), a) = 0$, car $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} p(f(a), a) &\leq p(f(a), f^{n+1}(x)) + p(f^{n+1}(x), a) - p(f^{n+1}(x), f^{n+1}(x)) \\ &\leq k p(a, f^n(x)) + p(f^{n+1}(x), a) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Alors, $f(a) = a$. De plus, $p(a, a) = 0$ d'après P_2.
L'unicité : Supposons que $a, b \in X$ sont des points fixes i.e. $f(a) = a$ et $f(b) = b$, alors

$$p(a, b) = p(f(a), f(b)) \leq k p(a, b).$$

Comme $k < 1$, ceci donne $p(a, b) = 0$ et alors $a = b$.

□

Exemple 2.1.5 *Soit $X = \{0, 1, 2\}$ un ensemble muni de la métrique $d(x, y) = |x - y|$ et par la métrique partielle $p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ définie par*

$$p(0,0)=\frac{1}{5},\ p(1,1)=0,$$
$$p(2,2)=\frac{1}{4},\ p(0,1)=p(1,0)=\frac{3}{4},$$
$$p(0,2)=p(2,0)=1,\ p(1,2)=p(2,1)=1.$$

Soit $f:X\to X$ *une fonction définie par* $\begin{cases} f(0)=1,\\ f(1)=1,\\ f(2)=0. \end{cases}$ *On a les hypothèses du théorème de Matthews 2.1.4 sont satisfaites pour* $\lambda=\frac{4}{5}$ *(le point fixe est* $x^*=1$*) et pour le principe de Banach 2.1.1 n'est pas appliqué, i.e., le théorème de Matthews est une extension du théorème de Banach.*

Version locale de Banach

Nous allons présenter maintenant une version locale du principe de contraction de Banach.

Théorème 2.1.6 *[7, 16] Soit* (X,d) *un espace métrique complet. Soit* $\overline{x}\in X$, $r>0$ *et* $0\leq\lambda<1$. *Soit* $f:\overline{B_d}(\overline{x},r)\to X$ *une fonction vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $d(\overline{x},f(\overline{x}))<r(1-\lambda)$,

(ii) $d(f(x_1),f(x_2))\leq\lambda d(x_1,x_2)\ \forall x_1,x_2\in\overline{B_d}(\overline{x},r)$,

alors f *admet un et un seul point fixe dans* $\overline{B_d}(\overline{x},r)$.

DÉMONSTRATION :

Comme $d(f(x_0),x_0)<(1-\lambda)r$, alors il existe r_0 tel que $0\leq r_0<r$ avec

$$d(f(x_0),x_0)<(1-\lambda)r_0$$

On a $f:\overline{B_d}(\overline{x},r)\to\overline{B_d}(\overline{x},r)$, soit $x\in\overline{B_d}(\overline{x},r)$ alors

$$\begin{aligned} d(f(x),x_0)&\leq d(f(x),f(x_0))+d(f(x_0),x_0)\\ &\leq\lambda d(x,x_0)+(1-\lambda)r_0\\ &\leq\lambda r_0+(1-\lambda)r_0\\ &\leq r_0. \end{aligned}$$

Donc la fonction $f : \overline{B_d}(\bar{x},r) \to \overline{B_d}(\bar{x},r)$ est contractante avec $\overline{B_d}(\bar{x},r)$ est un espace complet. Par suite l'application du théorème de Banach2.1.1 à f assure qu'elle admet un unique point fixe dans $\overline{B_d}(\bar{x},r)$.

⊡

Exemple 2.1.7 *Soit $X = \mathbb{R}$ et soit $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ une métrique sur X définie par $d(x,y) = |x-y|$, et f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x+1 & si \;\; x \in [-\frac{3}{2},\frac{5}{2}] \\ x+1 & sinon \end{cases}$$

on choisie $\bar{x} = \frac{1}{2}$, $r = 2$ alors $\overline{B_d}(\bar{x},r) = [-\frac{3}{2},\frac{5}{2}]$ et pour $\lambda = \frac{1}{2}$ on a

$$d(\bar{x},f(\bar{x})) = |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2} - 1| = \frac{3}{4}.$$

et

$$r(1-\lambda) = 2(1-\frac{1}{2}) = 1 > \frac{3}{4} = d(\bar{x},f(\bar{x}))$$

Aussi, si $x,y \in X \backslash [-\frac{3}{2},\frac{5}{2}]$ on a

$$\begin{aligned} d(f(x),f(y)) &= |x+1-y-1| \\ &= |x-y| \\ &= d(x,y) > \lambda d(x,y) \end{aligned}$$

D'où, la condition de contractante ne vérifiée pas sur tout X.
Si $x,y \in \overline{B_d}(\bar{x},r)$ on a

$$\begin{aligned} d(f(x),f(y)) &= |\frac{1}{2}x+1-\frac{1}{2}y-1| \\ &= |\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y| \\ &\leq \lambda d(x,y) \end{aligned}$$

alors f est contractante sur $\overline{B_d}(\bar{x},r)$. D'après le théorème 2.1.6 f admet un et un seul point fixe $x^* = 2 \in \overline{B_d}(\bar{x},r)$.

Version locale de Matthews

De même, la version locale de Matthews est comme suite :

Théorème 2.1.8 *Soit (X,p)un espace métrique partiel complet. Soit $\bar{x} \in X$, $r > 0$ et $0 \leq \lambda < 1$. Soit $f : \overline{B_p}(\bar{x},r) \to X$ une fonction vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $p(\bar{x},f(\bar{x})) < (p(\bar{x},\bar{x})+r)(1-\lambda)$,

(ii) $p(f(x_1),f(x_2)) \leq \lambda p(x_1,x_2)\ \forall x_1,x_2 \in \overline{B_p}(\bar{x},r)$

alors f admet un seul point fixe dans $\overline{B_p}(\bar{x},r)$

DÉMONSTRATION :

Comme $p(x_0,f(x_0)) < (p(x_0,x_0)+r)(1-\lambda)$, alors il existe r_0 tel que $0 \leq r_0 < r$ avec

$$p(x_0,f(x_0)) < (p(x_0,x_0)+r_0)(1-\lambda).$$

on pose $x_{i+1} = f(x_i)$, $i = 1,\cdots,n$, alors on a

$$\begin{aligned} p(x_0,x_{i+1}) &\leq p(x_0,x_1)+\ldots+p(x_i,x_{i+1})-[p(x_1,x_{i+1})+\ldots+p(x_i,x_i)] \\ &\leq p(x_0,x_1)[1+\ldots+\lambda^{i-1}+\lambda^i] \\ &\leq (1-\lambda)[r_0+p(x_0,x_0)]\frac{(1-\lambda^{i+1})}{1-\lambda} \\ &\leq [r_0+p(x_0,x_0)] \end{aligned}$$

D'après (ii) $f : \overline{B_p}(\bar{x},r) \to \overline{B_p}(\bar{x},r)$ est contractante avec $\overline{B_p}(\bar{x},r)$ est un espace complet. D'après théorème de Matthews 2.1.4, alors f admet un et un seul point fixe $x \in \overline{B_p}(\bar{x},r)$.

⊡

Exemple 2.1.9 *Soit $X = [0,+\infty[$ et soit $p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ une métrique partielle sur X définie par $p(x,y) = \max\{x,y\}$. Définie*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x & si\ \ x \in [0,1] \\ x+\dfrac{4}{9} & si\ \ x \in]1,+\infty[. \end{cases}$$

On choisie $x_0 = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{2}$ *alors* $\overline{B_p}(x_0,r) = [0,1]$ *et* $p(x_0,x_0) = \frac{1}{2}$. *Pour* $\lambda = \frac{4}{9}$, *on trouve*

$$\begin{aligned}(1-\lambda)[r+p(x_0,x_0)] &= (1-\frac{4}{9})[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}] = \frac{5}{9},\\ p(x_0,f(x_0)) &= p(\frac{1}{2},f(\frac{1}{2}))\\ &= p(\frac{1}{2},\frac{1}{20}) = \frac{1}{2} < \frac{5}{9}.\end{aligned}$$

Aussi, si $x,y \in]1,+\infty[$, *on a*

$$\begin{aligned}p(f(x),f(y)) &= \max\{x+\frac{4}{9},y+\frac{4}{9}\}\\ &= \max\{x,y\}+\frac{4}{9}\\ &> \max\{x,y\}\\ &> \frac{4}{9}[\max\{x,y\}] = \lambda\, p(x,y).\end{aligned}$$

Ainsi, la condition contractante n'est pas vérifiée sur tout X.

Maintenant si $x,y \in \overline{B_P}(x_0,r)$, *on a*

$$\begin{aligned}p(f(x),f(y)) &= \max\{\frac{1}{10}x,\frac{1}{10}y\}\\ &= \frac{1}{10}p(x,y) < \frac{4}{9}P(x,y).\end{aligned}$$

D'après le Théorème 2.1.8 f *admet un et un seul point fixe* $x^* = 0 \in \overline{B_p}(x_0,r)$.

Section 2.2

Les théorèmes du point fixe pour les multifonctions

Théorème du point fixe de Nadler pour les multifonctions

Le théorème de Nadler est une généralisation du principe de contraction de Banach pour les contractions multifonctions.

Théorème 2.2.1 (Nadler(1969)) *[12] : Soit (X,d) un espace métrique complet et soit $F : X \to CB^d(X)$ une multifonction vérifiant :*

$\exists 0 \leq \lambda < 1$ *tell que* $H_d(F(x),F(y)) \leq \lambda d(x,y)$, $\forall x,y \in X$.

Alors F admet un point fixe $x^* \in X$ i.e $x^* \in F(x^*)$.

DÉMONSTRATION :
Soit $x_0 \in X$ et soit $x_1 \in F(x_0)$. D'après le lemme (1.3.21), il existe un point $x_2 \in F(x_1)$ tel que

$$d(x_1,x_2) \leq H_d(F(x_0),F(x_1)) + \alpha.$$

Puisque $F(x_1),F(x_2) \in CB(X)$ et $x_2 \in F(x_1)$, il existe un point $x_3 \in F(x_2)$ tel que

$$d(x_2,x_3) \leq H_d(F(x_1),F(x_2)) + \alpha^2.$$

De même manière, on obtient une suite $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ des points de X tel que $x_{i+1} \in F(x_i)$ et $d(x_i,x_{i+1}) \leq H_d(F(x_{i-1}),F(x_i)) + \alpha^i$ pour tout $i \geq 1$. On a

$$\begin{aligned} d(x_i,x_{i+1}) &\leq H_d(F(x_{i-1}),F(x_i)) + \alpha^i \leq \alpha d(x_i,x_{i+1}) + \alpha^i \\ &\leq [\alpha H_d(F(x_{i-2}),F(x_{i-1})) + \alpha^{i-1}] + \alpha^i \\ &\leq \alpha^2 d(x_{i-2},x_{i-1}) + 2\alpha^i \\ &\leq ... \\ &\leq \alpha^i d(x_0,x_1) + i\alpha^i \end{aligned}$$

pour tout $i \geq 1$. Par conséquent

$$\begin{aligned} d(x_i,x_{i+j}) &\leq d(x_i,x_{i+1}) + d(x_{i+1},x_{i+2}) + ... + d(x_{i+j-1},x_{i+j}) \\ &\leq \alpha^i d(x_0,x_1) + i\alpha^i + \alpha^{i+1} d(x_0,x_1) + (i+1)\alpha^{i+1} + ... + \alpha^{i+j-1} d(x_0,x_1) + (i+j-1)\alpha^{i+j-1} \\ &= (\sum_{n=1}^{i+j-1} \alpha^n) d(x_0,x_1) + \sum_{n=1}^{i+j-1} n\alpha^n \end{aligned}$$

pour tout $i,j \geq 1$. Alors la suite $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy. Puisque (X,d) est complet, la suite $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge vers un point $z_0 \in X$. Donc, la suite $\{F(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge vers $F(z_0)$ et puisque $x_i \in F(x_{i+1})$ pour tout i, alors $z_0 \in F(z_0)$.

⊡

Exemple 2.2.2 *Soit $X = \{0,1,4\}$ muni de métrique $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ définie par*

$$d(x,y) = |x-y|$$

et définie $F : X \to CB(X)$ par
$F(0) = F(1) = \{0\}$ et $F(4) = \{0,1\}$ Montrons que, pour tous $x,y \in X$, la condition de contraction est vérifiée avec $\lambda = \frac{1}{2}$.

1. *$x,y \in \{0,1\}$. On a*

$$H_d(F(x),F(y)) = H_d(\{0\},\{0\}) = 0.$$

2. *$x \in \{0,1\}, y = 4$. On a*

$$\begin{aligned} H_d(F(0),F(4)) &= H_d(F(1),F(4)) \\ &= H_d(\{0\},\{0,1\}) \\ &= \max\{e_d(\{0\},\{0,1\}),\{e_d(\{(0,1)\},\{(0)\}\} \\ &\leq \frac{1}{2}\min\{d(0,4),d(1,4)\} \\ &\leq \frac{1}{2}d(x,y) = \lambda d(x,y). \end{aligned}$$

3. *$x = y = 4$. On a*

$$\begin{aligned} H_d(F(4),F(4)) &= H_d(\{0,1\},\{0,1\}) \\ &= e_d(\{0,1\},\{0,1\}) \\ &= d(x,y) \leq \lambda d(4,4). \end{aligned}$$

D'après théorème2.2.1 F admet un point fixe $x^* \in X$ i.e $x^* \in F(x^*)$, et $x^* = 0$.

Théorème 2.2.3 *[13] Soit (X,p) un espace métrique partiel complet.*

Si $F : X \to CB^P(X)$ est une multifonction tell que pour tous $x,y \in X$, on a

$$H_p(F(x),F(y)) \leq \lambda p(x,y).$$

Où $\lambda \in [0,1[$. Alors F admet un point fixe.

DÉMONSTRATION :
Soit $x_0 \in X$ et $x_1 \in F(x_0)$. D'après le Lemme 1.3.20 avec $h = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, il existe $x_2 \in F(x_1$ telle que

$$p(x_1,x_2) \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} H_p(F(x_0),F(x_1)).$$

Comme $H_p(F(x_0),F(x_1)) \leq \lambda p(x_0,x_1)$, alors $p(x_1,x_2) \leq \sqrt{\lambda} p(x_0,x_1)$. Pour $x_2 \in F(x_1)$, il existe $x_3 \in F(x_2)$ tel que

$$p(x_2,x_3) \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} H_p(F(x_1),F(x_2)) \leq \sqrt{\lambda} p(x_1,x_2)$$

Par suite, on construire une suite $\{x_n\}$ dans X telle que

$x_{n+1} \in F(x_n)$ et $p(x_{n+1},x_n) \leq \sqrt{\lambda} p(x_n,x_{n-1})$ pour tout $n \geq 1$.
On obtient

$p(x_{n+1},x_n) \leq (\sqrt{\lambda})^n p(x_0,x_1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après la propriété (p_4) de la métrique partiel et pour tout $m \in \mathbb{N}_*$, on a

$$\begin{aligned} p(x_n,x_{n+m}) &\leq p(x_n,x_{n+1}) + p(x_{n+1},x_{n+2}) + \ldots + p(x_{n+m-1},x_{n+m}) \\ &\leq (\sqrt{\lambda})^n p(x_0,x_1) + (\sqrt{\lambda})^{n+1} p(x_0,x_1) + \ldots + (\sqrt{\lambda})^{n+m-1} p(x_0,x_1) \\ &= ((\sqrt{\lambda})^n + (\sqrt{\lambda})^{n+1} + \ldots + (\sqrt{\lambda})^{n+m-1}) p(x_0,x_1) \\ &\leq \frac{(\sqrt{\lambda})^n}{1-\sqrt{\lambda}} p(x_0,x_1)_{n\to+\infty} 0. \end{aligned}$$

Puisque $0 < \lambda < 1$. Par définition de p^s, on obtient pour tout $m \in \mathbb{N}_*$

$$p^s(x_n,x_{n+m}) \leq 2p(x_n,x_{n+m}) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0.$$

Ce qui donne $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans (X,p^s). Puisque (X,p) est complet, alors d'après lemme 1.2.10 (X,p^s) est un espace métrique complet. Donc, la suite $\{x_n\}$ converge vers $x^* \in X$ par rapport à le métrique p^s, c'est à dire,

$$\lim_{n\to+\infty} p^s(x_n,x^*) = 0.$$

De plus on a

$$p(x^*,x^*) = \lim_{n\to+\infty} p(x_n,x^*) = \lim_{n\to+\infty} p(x_n,x_n)$$

Puisque $H_p(F(x_n),F(x^*) \leq \lambda p(x_n,x^*)$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} H_p(F(x_n),F(x^*)) = 0$$

Maintenant $x_{n+1} \in F(x_n)$ donne que

$$p(F(x_{n+1}),F(x^*)) \leq \delta_p(F(x_{n+1}),F(x^*)) \leq H_p(F(x_{n+1}),F(x^*))$$

on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} p(F(x_{n+1}),F(x^*)) = 0$$

D'autre part, on a

$$p(x^*,F(x^*)) \leq p(x^*,F(x_{n+1})) + p(F(x_{n+1}),F(x^*))$$

On prend $n \to +\infty$ on obtient $p(x^*,F(x^*)) = 0$ donc

$$p(x^*,x^*) = 0$$

alors

$$p(x^*,x^*) = p(x^*,F(x^*))$$

On trouve que $x^* \in F(x^*)$. Alors F admet un point fixe.

⊡

Exemple 2.2.4 *Soit $X = \{0,1,2\}$ muni de la métrique partielle $p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ définie par*

$$p(0,0) = p(1,1) = 0$$
$$p(0,1) = p(1,0) = \frac{1}{3}$$
$$p(0,2) = p(2,0) = \frac{11}{24}$$

$$p(1,2) = p(2,1) = \frac{1}{2}$$

$$p(2,2) = \frac{1}{4}.$$

On définie l'application $F : X \to CB^p(X)$ *par*

$$F(0) = F(1) = \{0\} et F(2) = \{0,1\}.$$

On a $\{0\}$ *et* $\{0,1\}$ *sont deux ensembles bornés et fermés dans l'espace métrique partiel* (X,p)*, montrons que, pour tous* $x,y \in X$*, la condition de contraction est vérifiée avec* $k = \frac{2}{3}$ *On considére les cas suivants :*

(*) $x,y \in \{0,1\}$*. On a*

$$H_p(F(x),F(y)) = H_p(\{0\},\{0\}) = 0$$

donc est vérifiée.

(*) $x \in \{0,1\}, y = 2$*. On a*

$$\begin{aligned} H_p(F(0),F(2)) &= H_p(F(1),F(2)) \\ &= H_p(\{0\},\{0,1\}) \\ &= \max\{\delta_p(\{0\},\{0,1\}), \delta_p(\{0,1\},\{0\})\} \\ &= 0 \leq \frac{1}{4}k = kp(2,2). \end{aligned}$$

(*) $x = y = 2$*. On a*

$$\begin{aligned} H_p(F(2),F(2)) &= H_p(\{0,1\},\{0,1\}) \\ &= \max\{p(x,x), x \in \{0,1\}\} \\ &= \max\{e_d(x,y)\} \\ &= 0 \leq \frac{1}{4}k = kp(2,2). \end{aligned}$$

Ainsi, toutes les hypothèse de théorème de Nadler sont vérifiées. Et $x = 0$ *est un point fixe de* F*.*

D'autre part, p^s induite par la métrique partielle p est donnée par :

$$p^s(0,0) = p^s(1,1) = p^s(2,2) = 0,$$
$$p^s(0,1) = p^s(1,0) = p^s(0,2) = p^s(2,0) = \frac{2}{3}$$
$$p^s(2,1) = p^s(1,2) = \frac{3}{4}.$$

Maintenant, il est clair que la théorème de Nadler n'est pas applicable dans ce cas.

En effet, pour $x = 0$ et $y = 2$, on a

$$\begin{aligned} H_p(F(0),F(2)) &= H_p(\{0\},\{0,1\}) \\ &= \max\{\sup(p^s(0,\{0,1\})\},\sup(p^s(\{0,1\},\{0\})\} \\ &= \max\{0,\frac{2}{3}\} = \frac{2}{3} \\ &\nleq \frac{2}{3}k = kp^s(0,2). \end{aligned}$$

Pour tout $k = [0,1[$.

Généralisation du théorème de Nadler

Théorème 2.2.5 *[17] Soit (X,d) un espace métrique et F une multifonction $F : X \to CB(X)$ satisfaisant la condition suivant :*

$$H_d(F(x),F(y)) \leq \alpha d(x,y) + \beta[d(x,F(x)) + d(y,F(y))] + \gamma[d(x,F(x)) + d(y,F(y))]$$

pour tout $x,y \in X$, où $\alpha,\beta,\gamma \leq 0$ et $\alpha+\beta+\gamma < 1$. Alors F admet un point fixe.

DÉMONSTRATION :

Soit $x_0 \in X$, $x_1 \in F(x_0)$. On définit une suite $\{x_n\}$ dans X par $x_{n+1} \in F(x_n)$. On pose $r = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{1-(\beta-\gamma)}$

Si $r = 0$, la preuve est vraie.

Maintenant, supposons que $r > 0$, d'après le lemme 1.3.10on a

$$\begin{aligned}
&\exists x_2 \in F(x_1) : d(x_1,x_2) \leq H_d(F(x_0),F(x_1)) + r \\
&\exists x_3 \in F(x_2) : d(x_2,x_3) \leq H_d(F(x_1),F(x_2)) + r^2 \\
&\qquad\qquad \ldots \\
&\exists x_{n+1} \in F(x_n) : d(x_n,x_{n+1}) \leq H_d(F(x_{n-1}),F(x_n)) + r^n
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
d(x_n,x_{n+1}) &\leq H_d(F(x_{n-1}),F(x_n)) + r^n \\
&\leq \alpha d(x_{n-1},x_n) + \beta[d(x_{n-1},F(x_{n-1})) + d(x_n,F(x_n))] + \gamma[d(x_{n-1},F(x_{n-1})) + d(x_n,F(x_n))] + r^n \\
&\leq \alpha d(x_{n-1},x_n) + \beta[d(x_{n-1},x_n)) + d(x_n,x_{n+1})] + \gamma[d(x_{n-1},x_n) + d(x_n,x_{n+1})] + r^n.
\end{aligned}$$

donc

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq (\alpha+\beta+\gamma)d(x_{n-1},x_n) + (\beta+\gamma)d(x_n,x_{n+1}) + r^n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{1-(\beta+\gamma)}d(x_{n-1},x_n) + \frac{r^n}{1-(\beta+\gamma)}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut conclure que

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq r^n d(x_0,x_1) + \frac{nr^n}{1-(\beta+\gamma)}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Maintenant, puisque $r < 1$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n,x_{n+1}) < \infty$. Par conséquent, $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans X d'après la complétude de X, il existe $x^* \in X$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. On va montrer que x^* est un point fixe de F. Nous avons

$$\begin{aligned}
d(x^*,F(x^*)) &\leq d(x^*,x_{n+1}) + d(x_{n+1},F(x^*)) \\
&\leq d(x^*,x_{n+1}) + H_d(F(x_n),F(x^*)) \\
&\leq d(x^*,x_{n+1}) + \alpha d(x^*,x_{n+1}) + \beta[d(x_{n+1},F(x_n)) + d(x_n,F(x_n))] \\
&+ \gamma[d(x_n,F(x^*)) + d(x^*,F(x^n))]
\end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$d(x^*,F(x^*)) \leq d(x^*,x_{n+1}) + \alpha d(x^*,x_{n+1}) + \beta[d(x_n,x_n) + d(x^*,F(x^*))] + \gamma[d(x_n,F(x^*)) + d(x_{n+1},x^*))]$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \to \infty$, on obtient

$$d(x^*, F(x^*)) \leq (\beta + \gamma) d(x^*, F(x^*)).$$

Comme $\beta + \gamma < 1$, alors $d(x^*, F(x^*)) = 0$ et d'où $x^* \in F(x^*)$.

□

Section 2.3

Version locale de Nadler

Théorème 2.3.1 *[6] Soit (X,d) un espace métrique complet, un point $\overline{x} \in X$, deux scalaires $r > 0$ et λ tell que $0 \leq \lambda < 1$, et soit ϕ une multifonction définie sur la boule fermée $\overline{B_d}(\overline{x}, r)$ vers un sous ensemble fermé de X. On suppose les conditions suivantes :*

(i) $d(\overline{x}, \phi(\overline{x})) < r(1-\lambda)$,

(ii) $e(\phi(x_1) \cap \overline{B_d}(\overline{x}, r), \phi(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in \overline{B_d}(\overline{x}, r)$

alors ϕ a un point fixe dans $\overline{B_d}(\overline{x}, r)$, c'est -à-dire qu'il existe $x^* \in \overline{B_d}(\overline{x}, r)$ tel que $x^* \in \phi(x^*)$. Si ϕ est une fonction, alors x^* est le point fixe unique de ϕ dans $\overline{B_d}(\overline{x}, r)$.

DÉMONSTRATION :

Par l'hypothèse (i), il existe $x_1 \in \phi(x_0)$ tel que $d(x_0, x_1) < r(1-\lambda)$.
Par récurrence, supposons qu'il existe $x_{k+1} \in \phi(x_k) \cap \overline{B_d}(x_0, r)$ pour $k = 1, 2, ..., n-1$, on a

$$d(x_{k+1}, x_k) < r(1-\lambda)\lambda^k.$$

Par l'hypothèse (b)

$$\begin{aligned} d(x_n, \phi(x_n)) &\leq e(\phi(x_{n-1}) \cap \overline{B_d}(x_0, r), \phi(x_{n-1})) \\ &\leq \lambda d(x_n, x_{n-1}) \\ &< r(1-\lambda)\lambda^n. \end{aligned}$$

Cela implique qu'il existe $x_{n+1} \in \phi(x_n)$ tel que

$$d(x_{n+1}, x_n) < r(1-\lambda)\lambda^n$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$d(x_{n+1}, x_0) \leq \sum_{k=0}^{n-1} d(x_{k+1}, x_k) < r(1-\lambda) \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k < r.$$

Par conséquent on a $x_{n+1} \in \phi(x_n) \cap \overline{B_d}(x_0, r)$ pour $n > m$ on a

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(x_{k+1}, x_k) < r(1-\lambda) \sum_{k=m}^{n-1} \lambda^k < r\lambda^m.$$

Ainsi x_k est une suite de Cauchy convergeant vers un $x \in \overline{B_d}(x_0, r)$. Par l'hypothèse (b)

$$d(x_n, \phi(x)) \leq e(\phi(x_{n-1}) \cap \overline{B_d}(x_0, r), \phi(x)) \leq \lambda d(x, x_{n-1}).$$

L'inégalité triangulaire implique que

$$d(x, \phi(x)) \leq d(x, x_n) + d(x_n, \phi(x)) \leq d(x_n, x) + \lambda d(x_{n-1}, x),$$

donc $d(x, \phi(x)) \to 0$ lorsque $n \to \infty$, puisque $\phi(x)$ est fermé, alors $x \in \overline{B_d}(x_0, r)$, et d'après l'hypothése (b) alors ϕ a un point fixe dans $\overline{B_d}(x_0, r)$, c'est -à- dire qu'il existe $x^* \in \overline{B_d}(x_0, r)$ tel que $x^* \in \phi(x^*)$.

⊡

Exemple 2.3.2 *Soit $X = \{0, 1, 4\}$ muni d'une métrique $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ définie par*

$$d(x, y) = |x - y|$$

et définie $\phi : X \to CB(X)$ par

$$\phi(x) = \begin{cases} \{0\} & si \ \ x \in \{0, 1\} \\ \{0, 1\} & si \ \ x = 4 \end{cases}$$

On choisie $\overline{x} = 1$, $r = 2$ et $\lambda = \dfrac{1}{3}$ donc

$$\overline{B_d}(\overline{x}, r) = \{0, 1\}$$

On a

$$\begin{aligned} d(\bar{x},\phi(\bar{x})) &= d(1,0) \\ &= 1 < 2(1-\frac{1}{3}) \\ &< \frac{4}{3} = r(1-\lambda) \end{aligned}$$

Alors la condition (a) de théorème2.3.1 est satisfaite.
On a pour $x_1 = 0$ *et* $x_2 = 1$,

$$\begin{aligned} (*)\ \ e(\phi(x_1)\cap\overline{B_d}(\bar{x},r),\phi(x_2)) &= e(\{0\}\cap\overline{B_d}(1,2),\{0\}) \\ &= e(\{0\},\{0\}) \\ &= d(0,0) \\ &= 0 \leq \frac{1}{3} = \lambda d(0,1) \\ (**)\ \ e(\phi(x_2)\cap\overline{B_d}(\bar{x},r),\phi(x_1)) &= e(\phi(1)\cap\overline{B_d}(\bar{x},r),\phi(0)) \\ &= e(\{0\},\{0\}) \\ &= d(0,0) \\ &= 0 \leq \frac{1}{3} = \lambda d(0,1) \end{aligned}$$

donc la condition (a) de théorème 2.3.1 est satisfaite. Alors F admet un point fixe dans $\overline{B_d}(\bar{x},r) = \{0,1\}$ *et* $x^* = 0$.

Définition 2.3.3 (fonction de Bianchini-Grandolfi) *[5] Une fonction croissante* $\varphi : J \to J$ *est une fonction de jauge de Bianchini-Grandolfi sur J si*
$s(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(t)$ *est convergente pour tout* $t \in J$

où φ^n *d'énote l'itértion n- ième de la fonction* φ *et* $\varphi^0(t) = t$ *i.e.*

$$\varphi^0(t) = t, \varphi^1(t) = \varphi(t), ..., \varphi^n(t) = \varphi(\varphi^{n-1}(t)).$$
$$s(t) = t + s(\varphi(t))$$

et

$$\varphi(t) = s^{-1}(s(t) - t).$$

Exemple 2.3.4 *Les fonctions suivantes sont des fonctions de Jauge Binchini-Grandolfi sur J :*

1. $\varphi(t) = \lambda t (0 < \lambda < 1)$ *sur* $J = [0, +\infty[$,
2. $\varphi(t) = ct^r (r > 0, c > 0)$ *sur* $J = [0, R[$ *où* $R = (\frac{1}{c})^{\frac{1}{r-1}}$,
3. $\varphi(t) = \dfrac{t^2}{2\sqrt{t^2 + a^2}}$ *où* $a \geq 0$ *sur* $J = [0, +\infty[$.

Théorème 2.3.5 *[?] Soit (X, p) un espace métrique partiel complet, et considérons un point $\bar{x} \in X$, un scalaire non négatif $r > 0$ et une multifonction $\phi : \overline{B_p}(\bar{x}, r) \to C^p(X)$. Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction strictement croissante et continue telle que φ est une fonction Bianchini-Grandolfi sur l'intervalle J et $\lim_{t \to 0} \varphi(t) = 0$. Supposons qu'il existe $\alpha \in J$ et les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(a) $p(\bar{x}, \phi(\bar{x})) < \alpha$ *où* $s(\alpha) \leq p(\bar{x}, \bar{x}) + r$

(b) $\delta_p(\phi(x) \bigcap \overline{B_p}(\bar{x}, r), \phi(y)) \leq \varphi(p(x, y))$ $\forall x, y \in \overline{B_p}(\bar{x}, r)$,

alors ϕ a un point fixe x^* dans $\overline{B_p}(\bar{x}, r)$. Si ϕ est une fonction et $p(\bar{x}, \bar{x}) + 2r \in J$, alors x^* est le point fixe unique de ϕ dans $\overline{B_p}(\bar{x}, r)$.

DÉMONSTRATION :

Si $\varphi \equiv 0$ alors, d'après la proposition 1.3.4 et l'hypothèse (b), nous avons pour tous $x_1, x_2 \in \overline{B_p}(\bar{x}, r)$

$$\begin{cases} \phi(x_1) \cap \overline{B_p}(\bar{x}, r) \subseteq \phi(x_2) \\ \\ \phi(x_2) \cap \overline{B_p}(\bar{x}, r) \subseteq \phi(x_1) \end{cases} \Rightarrow \phi(x_1) \cap \overline{B_p}(\bar{x}, r) = \phi(x_2) \cap \overline{B_p}(\bar{x}, r) \neq 0,$$

d'après l'hypothése (a), la relation (2.3)et le lemme (1.2.10), il existe $x \in \overline{B_p}(\bar{x}, r)$ tel que $x \in \phi(\bar{x}) \cap \overline{B_p}(\bar{x}, r) = \phi(x) \cap \overline{B_p}(\bar{x}, r)$.

Supposons maintenant $\varphi \neq 0$, d'après l'hypothèse (a)et le lemme (1.2.10), il existe

$$x_1 \in \phi(\bar{x}) \cap \overline{B_p}(\bar{x}, r)$$

tel que

$$p(x_1, \bar{x}) < \alpha = \varphi^0(\alpha). \tag{3.2}$$

Notons $x_0 = \bar{x}$ et, d'après l'hypothèse (b), nous avons

$$\begin{aligned} p(x_1, \phi(x_1)) &\leq \delta_p(\phi(x_0) \cap \overline{B_p}(x_0, r), \phi(x_1)) \\ &\leq \varphi(p(x_0, x_1)) \\ &< \varphi(\alpha) = \varphi^1(\alpha). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Cela implique qu'il existe $x_2 \in \phi(x_1)$ tel que

$$p(x_1, x_2) < \varphi^1(\alpha) \tag{3.4}$$

et, par la propritété $(P4)$ de la métrique partielle , nous avons

$$\begin{aligned} p(x_2, x_0) &\leq p(x_2, x_1) + p(x_1, x_0) - p(x_1, x_1) \\ &< \varphi^1(\alpha) + \varphi^0(\alpha) \\ &< s(\alpha) \leq p(x_0, x_0) + r. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Donc $x_2 \in \phi(x_1) \cap \overline{B_p}(x_0, r)$. En procédant par reccurence et supposons que nous construit, pour $k \in \mathbb{N}$, un élément x_{k+1} tel que

$$x_{k+1} \in \phi(x_k) \cap \overline{B_p}(x_0, r)$$

et

$$p(x_{k+1}, x_k) < \varphi^k(\alpha). \tag{3.6}$$

Par l'hypothèse (b), nous avons

$$\begin{aligned} p(x_{k+1}, \phi(x_{k+1})) &\leq \delta_p(\phi(x_k) \cap \overline{B_p}(x_0, r), \phi(x_{k+1})) \\ &\leq \varphi(p(x_{k+1}, x_k)) \\ &\leq \varphi(\varphi^k(\alpha)) = \varphi^{k+1}(\alpha). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Alors, il existe $x_{k+2} \in \phi(x_{k+1})$ tel que

$$p(x_{k+2}, x_0) < \varphi^{k+1}(\alpha) \tag{3.8}$$

.

De plus, l'utilisation de la proprété (P4) de la métrique partielle,

$$\begin{aligned} p(x_{k+2}, x_0) &\leq \sum_{j=0}^{k+1} p(x_{j+1}, x_j) - \sum_{j=1}^{k} p(x_j, x_j) \\ &< \sum_{j=0}^{+\infty} \varphi^j(\alpha) = s(\alpha) \leq p(x_0, x_0) + r. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Donc $x_{k+2} \in \phi(x_{k+1}) \cap \overline{B_p}(x_0, r)$ et l'étape de la reccurence est terminée. D'autre part, nous avons

$$\max\{p(x_{k+1}, x_{k+1}), p(x_k, x_k)\} \leq p(x_{k+1}, x_k)$$

ce qui implique

$$\max\{p(x_{k+1}, x_{k+1}), p(x_k, x_k)\} < \varphi^k(\alpha).$$

Considéront maintenant

$$\begin{aligned} p^s(x_{k+1}, x_k) &= 2p(x_{k+1}, x_k) - p(x_{k+1}, x_{k+1}) - p(x_k, x_k) \\ &\leq 2p(x_{k+1}, x_k) \\ &< 2\varphi^k(\alpha). \end{aligned} \tag{3.10}$$

A partir des conditions sur φ, il est clair que $\lim_{k \to +\infty} \varphi^k(t) = 0$ pour $t \in J \backslash \{0\}$ et $\varphi(t) < t$. Par conséquent, nous avons $\lim_{k \to +\infty} p^s(x_{n+1}, x_n) = 0$. De plus, pour tous les entiers n et m tel que $n > m$, nous avons

$$\begin{aligned} p^s(x_n, x_m) &\leq \sum_{k=m}^{n-1} p^s(x_{k+1}, x_k) \\ &\leq 2 \sum_{k=m}^{n-1} \varphi^k(\alpha) \\ &\leq 2s(\alpha). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Puisque $s(t)$ est convergent pour chaque $t \in J$, nous obtenons que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans (X, p^s). Puisque (X, p) est complet, par le lemme 1.2.10 (X, p^s) est complet et la suite $\{x_n\}$ est convergente en (X, p^s) vers $x \in X$. Encore par le lemme 1.2.10, nous avons

$$p(x,x) = \lim_{n\to+\infty} p(x_n,x) = \lim_{n,m\to+\infty} p(x_n,x_m).$$

De plus, comme $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans l'espace métrique (X, p^s),

$$\lim_{n,m\to+\infty} p^s(x_n,x_m) = 0,$$

et, $\lim_{n\to+\infty} p(x_n,x_n) = 0$, donc , à partir de la définition de p^s, nous avons $\lim_{n,m\to+\infty} p(x_n,x_m) = 0$. Par conséquent, nous avons

$$p(x,x) = \lim_{n\to+\infty} p(x_n,x) = \lim_{n,m\to+\infty} p(x_n,x_m) = 0. \tag{3.12}$$

De plus, puisque $\{x_n\}$ est une suite dans la p-boule fermé $\overline{B_p}(x_0,r)$ qui est complète et d'après le lemme 1.3.20, en utilisant 3.12, nous avons pour $y = x_0 \in X$

$$p(x,x_0) = \lim_{n\to\infty} p(x_n,x_0) \leq p(x_0,x_0) + r, \tag{3.13}$$

i.e $x \in \overline{B_p}(x_0,r)$.

Nous affirmons maintenant que $x \in \phi(x)$. L'inégalité triangulaire modifiée et l'hypothèse (b) donnent

$$\begin{aligned} p(x,\phi(x)) &\leq p(x,x_n) + p(x_n,\phi(x)) - p(x_n,x_n) \\ &\leq p(x,x_n) + \delta_p(x_{n-1}) \cap \overline{B_p}(x_0,r), \phi(X)) \\ &\leq p(x,x_n) + \varphi(p(x_{n-1},x)). \end{aligned}$$

En prenant la limite pour $n \to +\infty$ et en utilisant (3.12) et la continuitè de φ, on obtient $p(x,\phi(x)) = 0$. Par conséquent, à partir de (3.12) $(p(x,x) = 0)$, nous obtenons $p(x,\phi(x)) = p(x,x)$ ce qui implique, avec le lemme 1.2.9, que

$$x \in \overline{\phi(x)} = \phi(x).$$

Si ϕ est une fonction et $p(\overline{x},\overline{x}) + 2r \in J$, nous supposons qu'il existe deux points fixes $x^*, x^{**} \in \overline{B_p}(x_0,r)$. Alors, nous avons

$$\begin{aligned} p(x^*,x^{**}) &\leq p(x^*,x_0) + p(x_0,x^{**}) - p(x_0,x_0) \\ &\leq p(x_0,x_0) + 2r \in J \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p(x^*,x^{**}) = p(x^*,\phi(x^{**})) &\leq \delta_p(\phi(x^*)\cap\overline{B_p}(x_0,r),\phi(x^{**})) \\ &\leq \varphi(p(x^*,x^{**})) \\ &< p(x^*,x^{**}) \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction.

□

Exemple 2.3.6 *Soit $X=\mathbb{R}^+$ muni de métrique partielle*

$$p(x,y)=\begin{cases} 0 & x=y\in[0,\dfrac{361}{900}]; \\ \max\{x,y\}, & ,sinon \end{cases}$$

Notez que $p^s(x,y)$ est une métrique sur $[0,\frac{361}{900}]$ et

$$p^s(x,y)=\begin{cases} 2p(x,y), & x,y\in[0,\dfrac{361}{900}]; \\ |x-y|, & sinon \end{cases}$$

Premièrement, observer que pour $a\geq\dfrac{361}{900}$, $[a,+\infty[$ est fermée par rapport à la métrique partielle p.
Soit $a\geq\dfrac{361}{900}$, alors nous avons

$$\begin{aligned} y\in\overline{[a,+\infty[}(y,[a,+\infty[) = p(y,y) &\\ \Leftrightarrow \inf_{z\in[a,+\infty[} p(y,z) = p(y,y) &\\ \Leftrightarrow y\geq z\geq a &\\ \Leftrightarrow y\in[a,+\infty[& \end{aligned}$$

Donc, $[a,+\infty[$ est fermé pour tout $a\geq\dfrac{361}{900}$.
Nous prenons

$$\varphi(t)=\begin{cases} \dfrac{2}{3}t, & 0\leq t\leq\dfrac{1}{2}; \\ 5t-\dfrac{13}{6}, & t\geq\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

qui est une fonction de jauge de Bianchini-Grandolfi sur $J=[0,\frac{1}{2}]$ *telle que* $s(t)=3t$ *et* $\lim_{t\to 0}\varphi(t)=0$.

On met $\phi:[0,1]\to C^p(X)$ *définie par*

$$\phi(x)=\begin{cases}\{x^2\}, & x\in[0,\dfrac{19}{30}];\\ [1,+\infty[, & x\in]\dfrac{19}{30},1].\end{cases}$$

Nous appliquons le Théorème 2.3.5 avec les spécifications suivantes
$\bar{x}=\dfrac{1}{4}, r=1, \alpha=\dfrac{1}{3}\in J, \overline{B_p}(\bar{x},r)=[0,1]$.*Premirement*, *observant que*,
$p(\dfrac{1}{4},\phi(\dfrac{1}{4}))=p(\dfrac{1}{4},\{\dfrac{1}{16}\})=\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{3}=\alpha ets(\alpha)=3\dfrac{1}{3}=1\leq p(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4})+1$ *; i.e. la condition (a) de Théorème 2.3.5 est satisfaite.*

Pour voir que la condition (b) du Théorème 2.3.5 est valable, il suffit de considérer les cas suivants :

1. *Si* $x=y\in[0,\dfrac{19}{30}]$ *alors*

$$\delta_p(\phi(x)\cap[0,1],\phi(y))=\delta_p(\{x^2\},\{x^2\})=0\leq\begin{cases}\dfrac{2}{3}p(x,x)=\varphi(p(x,y)), & x\in[0,\dfrac{1}{2}];\\ 5x-\dfrac{13}{6}=\varphi(p(x,y)), & sinon.\end{cases}$$

2. *Si* $x,y\in[0,\dfrac{19}{30}]$ *et* $x\neq y$ *alors*

$$\delta_p(\phi(x)\cap[0,1],\phi(y))=\delta_p(\{x^2\},\{y^2\}$$

$$\leq\begin{cases}\dfrac{1}{2}\max\{x,y\}, & x,y\in[0,\frac{1}{2}];\\ 5\max\{x,y\}-\dfrac{9}{4}, & sinon\end{cases}\leq\begin{cases}\frac{2}{3}\max\{x,y\}=\varphi(p(x,y)), & x,y\in[0,\dfrac{1}{2}];\\ 5\max\{x,y\}-\dfrac{13}{6}=\varphi(p(x,y)), & sinon.\end{cases}$$

Si $x,y\in]\dfrac{19}{30},1]$ *alors*

$$\delta_p(\phi(x)\cap[0,1],\phi(y))=\delta_p(\{1\},[1,+\infty[)=1\leq 5\max\{x,y\}-\frac{13}{6}=\varphi(p(x,y)).$$

Si $x\in[0,\dfrac{19}{30}]$ *et* $y\in]\dfrac{19}{30},1]$ *alors*
$\delta_p(\phi(x)\cap[0,1],\phi(y))=\delta_p(\{x^2\},[1,+\infty[)=1\leq 5y-\dfrac{13}{6}=\varphi(p(x,y))$
et
$\delta_p(\phi(y)\cap[0,1],\phi(y))=\delta_p(\{1\},\{x^2\})=1\leq 5y-\dfrac{13}{6}=\varphi(p(x,y))$.

Par conséquent, toutes conditions du Théorème 2.3.5 sont satisfaites et $x^* \in \{0,1\} \subset \overline{B_p}(\bar{x},r)$ sont les points requis.

D'un autre côté, il est facile de montrer que le Théorème 2.3.1 n'est pas applicable dans ce cas. En effet, pour $x \in [0,\frac{19}{30}]$ et $y = 1$, nous avons

$$e_{p^s}(\phi(x) \cap [0,1], \phi(y)) = e_{p^s}(\{x^2\}, [1,+\infty[) = |1-x^2| \geq |1-x| = p^s(x,y).$$

Donc, aucune constante $\lambda, 0 \leq \lambda < 1$ ne peut être choisie de telle sorte que

$$e_{p^s}(\phi(x) \cap [0,1], \phi(y)) \leq \lambda p^s(x,y)$$

pour tous $x, y \in [0,1]$.

CHAPITRE 3

PARTIE D'APPLICATIONS

Dans ce chapitre, on va appliquer :

— le théorème 2.3.1 sur l'espace métrique pour étudier une méthode approximative de type Newton de l'inclusion variationnelle $0 \in f(x) + F(x)$ où f est une fonction et F est une multifonction,

— et le théorème 2.3.5 sur l'espace métrique partiel pour trouver l'existence local et l'unicité de la solution d'un modèle SEIQRDP de la pandémie de Covid-19.

Section 3.1

Approximation numérique pour les inclusions variationnelles

Dans les années 80, Stephen M. Robinson, [18, 20], considère une classe "d'équation généralisée" de manière suivante

$$trouver \;\; x \in \Omega, \quad 0 \in f(x) + F(x) \tag{1.1}$$

où f est une fonction continue à partir d'une partie ouverte de X dans Y, F est une multifonction de X dans les sous-ensembles de Y avec un graphe fermé, et X, Y sont des espaces de Banach.

L'équation généralisée est un modèle abstrait d'une grande variété de problèmes comprenant :

1. Si $F = 0$ alors

$$\begin{aligned}(1.1) &\Leftrightarrow 0 \in f(x) + 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \in f(x) \\ &\Leftrightarrow f(x) = 0.\end{aligned}$$

2. Si F est un orthant positive i.e pour tout $x \in X$ on a

   $F(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : y \geq 0\}$ alors

$$\begin{aligned}(1.1) &\Leftrightarrow -f(x) \in \{y \in \mathbf{R}^m : y \geq 0\} \\ &\Leftrightarrow -f(x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow f(x) \leq 0.\end{aligned}$$

3. Si $F : X \rightrightarrows Y$ est multifonction définie par

$$F(x) = \begin{cases} \{z :< z, y-x > \leq 0 \ \text{ pour tout } \ y \in X\}, & si \ \ x \in C; \\ \emptyset & sinon. \end{cases}$$

   où X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $< \cdot, \cdot >$, et C un ensemble convexe de X, alors le probléme de l'inégalité variationnelle composé
   trouver $c \in C$ telle que $< f(c), x-c > \geq 0 \ \forall x \in X$
   est équivalente à l'équation généralisée 1.1 dans le formulaire ci-dessous

   trouver $c \in C$ telle que $0 \in f(c) + F(c)$

4. Si on considère l'inclusion différentielle suivante

$$x^{'}(t) \in F(x(t)) \tag{1.2}$$

   alors
   (1.1)$\Leftrightarrow$ chercher les trajectoires $x(.)$ de (1.2)

Pour résoudre cette inclusion, les auteurs considérée comme une méthode qui génère une suite x_k d'une itération en résolvant le sous-problème approximative suivante :

$$0 \in f(x_k) + \bigtriangledown f(x_k)(x_{k+1} - x_k) + F(x_{k+1}) \tag{1.3}$$

Définition 3.1.1 *Une fonction $f : \Omega \to Y$ est appelé Fréchet différentaibla en $x \in \Omega$ s'il existe un opérateur linéaire continue $A_x : X \to Y$ telle que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - A_x(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

L'opérateur A_x est appelé dérivée de f en x.

Définition 3.1.2 (M-pseudo-Lipshitzienne) *Une multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ est dite M-pseudo-Lipshitzienne* [1] *au voisinage de $(x_0, y_0) \in Gr(F)$ s'il existe des constantes a, b et M tel que*

$$e(F(x_1) \cap B_d(y_0, b), F(x_2)) \leq Md(x_1, x_2) \ \forall x_1, x_2 \in B_d(x_0, a)$$

i.e il existe des voisinages V de x_0 et U de y_0, tel que

$$e(F(x_1) \cap U, F(x_2)) \leq Md(x_1, x_2), \forall x_1, x_2 \in V$$

On dit que F est M-pseudo-Lipshitzienne sur $V \subset Gr(F)$ si elle est M-pseudo-Lipshitzienne pour tout $(x, y) \in V$.

Définition 3.1.3 *Un graphe d'une multifonction F est dite fermé ssi*

$$\begin{cases} (x_n, y_n) \in Gr(F) \\ x_n \to x \\ y_n \to y \end{cases} \Rightarrow (x, y) \in Gr(F)$$

Méthode de Newton

Nous démonrons que la méthode de type Newton $0 \in f(x_k) + \bigtriangledown f(x_k)(x_{k+1} - x_k) + F(x_{x+1})$, où f est une fonction et $F : X \rightrightarrows Y$ est une multifonction entre deux espace de Banach X et Y, converge localement Q-quadratiquement vers x^* si la multiapplication $(f(x^*) + \bigtriangledown f(x^*)(. - x^*) + F(.))^{-1}$ est M-pseudo-lipschitzienne en $(0, x^*)$.

soient X et Y des espaces de Banach. On considère une équation généralisée de la forme 1.1 :

$$0 \in f(x) + F(x),$$

où $f : X \to Y$ est une fonction Fréchet différentiable et F est une multifonction de X à valeurs dans les sous-ensembles de Y. On se propose d'étudier la convergence locale de la suite de Newton définie de la manière suivante :

$$0 \in f(x_k) + \bigtriangledown f(x_k)(x_{k+1} - x_k) + F(x_{k+1}), \tag{2}$$

où $\bigtriangledown f(x_k)$ est la dérivée de Fréchet de f au point x_k. Remarquons que lorsque

1. Que certains auteurs appellent "Aubin-continue" ou bien "admet la propriété d'Aubin

1. $F = 0$, on récupére la méthode classique de Newton pour résoudre l'équation $f(x) = 0$
2. On rappelle qu'une application multifonction $\Gamma : Y \rightrightarrows X$est M-pseudo-lipschitzienne (dite "Aubin-continue ") en $(y_0, x_0) \in Gr(\Gamma) := \{(y,x) \in Y \times X | x \in F(y)\}$ s'il existe une constante $M > 0$ et des voisinages V et U, respectivement de y_0 et de x_0 tel que :
$\sup_{x \in F(y_1) \cap U} d(x, F(y_2)) \leq M\|y_1 - y_2\|$, pour tous $y_1, y_2 \in V$.

On démontre le théorème suivant :

Théorème 3.1.4 (convergence quadratique) *[5] Soit x^* une solution de 1.1. On suppose que :*

1. *f une fonction différntiable au sens de Fréchet dans voisinage ouvert O de x^*,*
2. *la dérivée $\bigtriangledown f$ de f est L-Lipschitzienne sur O,*
3. *F est une multifonction de graphe fermé et la multi-application $f(x^*) + \bigtriangledown f(x^*)(. - x^*) + F(.))^{-1}$ M-pseudo-lipschitzienne en $(0, x^*)$.*

Alors, pour tout $c > (\frac{1}{2})ML$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout point de départ $x_0 \in B(x^*, \delta)$, il existe une suite de Newton $\{x_k | k \in \mathbb{N}\}$ pour 1.1 qui converge Q-quadraliquemenl vers x^* :

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq c\|x_k - x^*\|^2. \tag{3}$$

DÉMONSTRATION :

On note $P(x) = f(x^*)(x - x^*) + F(x)$, fixe $c > (\frac{1}{2})ML$, a et b sont des constantes positives telle que

$$e(P^{-1}(y^{'}) \cap B(x^*, a), P^{-1}(y^{"})) \leq \mu\|y^{'} - y^{"}\| \tag{4}$$

pour tout $y^{'}, y^{"} \in B(0, b)$, choisissez $\delta > 0$ tel que $B(x^*, \delta) \subset O$ et

$$\delta < \min\{a, \sqrt{\frac{2b}{3L}}, \frac{1}{c}, \frac{1}{ML} - \frac{1}{2c}\}. \tag{5}$$

soit $x_0 \in B(x^*, \delta), x_0 \neq x^*$ et considérons la carte

$$x \to \Phi_0(x) = P^{-1}[f(x^*) + \bigtriangledown f(x^*)(x - x^*) - f(x_0) - \bigtriangledown f(x_0)(x - x_0)].$$

de X aux sous-ensemble fermés de X. Nous appliquons le théorème 2.3.1 cette carte avec les spécifications suivantes

$$\xi_0 = x^*, \qquad \lambda = ML\delta,$$

$$r = r_0 := c\|x_0 - x^*\|^2.$$

Tout d'abord, observez que, de 5, $r_0 \leq \delta \leq a$ et $\lambda < 1$ de 4 et 5 nous obtenons

$$\begin{aligned}
d(x^*, \Phi_0(x^*)) &\leq e\{P^{-1}(0) \cap B(x^*, \delta), P^{-1}[f(x^*) - f(x_0) - \bigtriangledown f(x_0)(x^* - x_0)]\} \\
&\leq M\|f(x^*) - f(x_0) - \bigtriangledown f(x_0)(x^* - x_0)\| \\
&= M\|\int_0^1 \bigtriangledown f(x_0 + t(x^* - x_0))(x^* - x_0)dt - \int_0^1 \bigtriangledown f(x_0)(x^* - x_0)dt\| \\
&\leq M\|x^* - x_0\| \int_0^1 (\bigtriangledown f(x_0 + t(x^* - x_0) - \bigtriangledown f(x_0))dt\| \\
&\leq M\|x^* - x_0\| \int_0^1 tL\|x^* - x_0\|dt \\
&\leq \frac{1}{2}ML\|x_0 - x^*\|^2 \\
&< c\|x^* - x_0\|^2(1 - ML\delta).
\end{aligned}$$

c'est à-dire que condition (a) du théorème2.3.1 est vérifiée. Pour tout $x \in B(x^*, \delta)$, en utilisant 4 on a

$$\begin{aligned}
&\|f(x^*) + \bigtriangledown f(x^*)(x - x^*) - f(x_0) - \bigtriangledown f(x_0)(x - x_0)\| \\
&\leq \|f(x^*) - f(x_0) - \bigtriangledown f(x_0)(x^* - x_0)\| + \|(\bigtriangledown f(x^*) - \bigtriangledown f(x_0))(x - x^*)\| \leq \frac{3}{2}L\delta^2 \leq b.
\end{aligned}$$

De plus, en utilisant (5) pour tout $x^{'}, x^{"} \in B(x^*, r_0)$ on a

$$
\begin{aligned}
&e(\Phi_0(x^{'}) \cap B(x^*, r_0), \Phi_0(x^{"})) \\
&\leq e\{P^{-1}[f(x^*) + \bigtriangledown f(x^*)(x^{'} - x^*) - f(x_0) - \bigtriangledown f(x_0)(x^{'} - x_0)] \cap B(x^*, \delta), \\
&P^{-1}[f(x^*) + \bigtriangledown f(x^*)(x^{"} - x^*) - f(x_0) - \bigtriangledown f(x_0)(x^{"} - x_0)]\} \\
&\leq M\|(\bigtriangledown f(x^*) - \bigtriangledown f(x_0))(x^{'} - x^{"})\| \\
&\leq ML\delta\|x^{'} - x^{"}\|.
\end{aligned}
$$

c'est-à dire que la condition (b) du théorème 2.3.1 est remplie. Par conséquent, a un point fixe dans $x_1 \in B(x^*, r_0)$ alors

$$x_1 \in \Phi_0(x_1) = P^{-1}[f(x^*) + \bigtriangledown f(x^*)(x_1 - x_0) - f(x_0)(x_1 - x_0)]$$

par la 5et pour $x_0, x_1 \in B(x^*, r_0)$ on a

$$\|x_1 - x^*\| \leq c\|x_0 - x^*\|^2.$$

En procédant par récurrence, et en appliquant le théorème avec $\xi_0 = x^*, \lambda = ML\delta$ et $r = r_0 := c\|x_k - x^*\|^2$. à $x \to \Phi_k(x) = P^{-1}[f(x^*) + \bigtriangledown f(x^*)(x - x^*) - \bigtriangledown f(x_k)(x - x_k)]$, nous obtenir ça il existe $x_{k+1} \in B(x^*, \delta)$ satisfaisant (2) et (3) pour tout k et $x_k \in B(x_*, \delta)$.

□

Section 3.2

Application pour le problème de Covid-19

Dons cette section, nous discutons de l'existence local et de l'unicité de la solution de SEIQRDP pour utilisant le théorème local du point fixe 2.3.5 dans l'espace métrique partiel.

3.2.1 Étudier le modèle SEIQRDP de Covid-19 en Algérie

Depuis un an, une nouvelle maladie à virus corona(COVID-19) a été déclarée danger majeur pour la santé par l'organisation mondiale de la santé (OMS).

Á l'heure actuelle, cette maladie se développe rapidement dans de nombreux pays, et le nombre de cas de COVID-19 augmente à un rythme rapide.

Pour autant que nous le sachions, l'épidémie effective de COVID-19 en Algérie a commencé le 25 février 2020. En effet, le ministère algérien de la santé (AHM)a signalé dans un communiqué le 2 mars les deux premiers cas confirmés de COVID-19 à Blida province au sud de la capitale Alger.

Toutes les études de modélisation de la propagation du COVID-19 ont comme équations différentielles ordinaires. Il est très important d'étudier les modèles mathématique des maladies infectieuses pour une meilleure compréhension de leur évaluation, de leur existence, de leur stabilité et contrôler.

Dans cette partie, nous discutons de l'existence locale et de l'unicité de la solution pour le modèle SEIQRDP suivant de COVID-19

$$\begin{cases} S^{'}(t) = -\beta \dfrac{S(t)I(t)}{N_{pop}} - \alpha S(t) \\ E^{'}(t) = \beta \dfrac{S(t)I(t)}{N_{pop}} - \gamma E(t) \\ I^{'}(t) = \gamma E(t) - \delta I(t) \\ Q^{'}(t) = \delta I(t) - \lambda(t)Q(t) - K(t)Q(t) \\ R^{'}(t) = \lambda(t)Q(t) \\ D^{'}(t) = K(t)Q(t) \\ P^{'}(t) = \alpha S(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

où N_{pop} est la population totale définie par $N_{pop} = S+E+I+Q+R+D+P$ avec
S(t) cas sensibles
E(t) cas exposés(infectés, mais pas infectieux)
I(t) cas infectieux, mais non mis en quarantaine
Q(t) cas en quarantaine
R(t) cas récupérés
D(t) cas décès
P(t) cas insensibles ou protecteurs
α le taux de protection
β le taux d'infection
γ^{-1} le temps de latence moyen
δ la vitesse à laquelle les personnes infectieuses entrent en quarantaine

$\lambda(t)$ taux de récupération en fonction du temps
$K(t)$ taux de mortalité en fonction du temps

De plus,

$$\lambda(t) \in \{\frac{\lambda_0}{1+\exp(-\lambda_1(t-\lambda_2))}, \lambda_0 + \exp(-\lambda_1(t-\lambda_2))\}$$

et

$$K(t) \in \{\frac{K_0}{\exp(-K_1(t-K_2)) + \exp(K_1(t-K_2))}, K_0 \exp(-[K_1(t-K_2)]^2), K_0 + \exp(-K_1(t+K_2))\}$$

En utilisant le théoréme du point fixe (dans les espaces métriques partiels) qui est une méthode qualitative pour montrer l'existence et l'unicité des prolèmes de type EDO.

Considérons un espace de Banach $\Omega = (C[0,T])^7$, l'espace produit de tous les fonctions à valeurs réelles définies sur $I = [0,T]$, avec une norme

$$\|(S,E,I,Q,R,D,P)\| = \max_{t\in[0,T]} |S(t)| + |E(t)| + |I(t)| + |Q(t)| + |R(t)| + |D(t)| + |P(t)|)$$

et la métrique associée est $d(u,v) = \|u-v\|_\Omega$ pour tout $u,v \in \Omega$. Soit la métrique partielle

$$p(u,v) = \frac{1}{2}d(u,v) + c = \frac{1}{2}\|u-v\|_\Omega + c, \qquad \forall u,v \in \Omega$$

où $c > 0$. Soit

$$X(t) = \begin{pmatrix} S(t) \\ E(t) \\ I(t) \\ Q(t) \\ R(t) \\ D(t) \\ P(t) \end{pmatrix} K = \begin{pmatrix} S(0) := S_0 \\ E(0) := E_0 \\ I(0) := I_0 \\ Q(0) := Q_0 \\ R(0) := R_0 \\ D(0) := D_0 \\ P(0) := P_0 \end{pmatrix} \geq 0_{\mathbb{R}^7}$$

et

$$G(t,X(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t,X(t)) := -\beta\dfrac{S(t)I(t)}{N_{pop}} - \alpha S(t) \\ f_2(t,X(t)) := \beta\dfrac{S(t)I(t)}{N_{pop}} - \gamma E(t) \\ f_3(t,X(t)) := \gamma E(t) - \delta I(t) \\ f_4(t,X(t)) := \delta I(t) - \lambda(t)Q(t) - K(t)Q(t) \\ f_5(t,X(t)) := \lambda(t)Q(t) \\ f_6(t,X(t)) := K(t)Q(t) \\ f_7(t,X(t)) := \alpha S(t) \end{pmatrix}$$

En appliquant les intégrales et les conditions initiales, on trouve

$$\begin{cases} S(t) = S_0 + \int_0^t f_1(s,X(s))ds \\ E(t) = E_0 + \int_0^t f_2(s,X(s))ds \\ I(t) = I_0 + \int_0^t f_3(s,X(s))ds \\ Q(t) = Q_0 + \int_0^t f_4(s,X(s))ds \\ R(t) = R_0 + \int_0^t f_5(s,X(s))ds \\ D(t) = D_0 + \int_0^t f_6(s,X(s))ds \\ P(t) = P_0 + \int_0^t f_7(s,X(s))ds \end{cases}$$

i.e., (3.1)$\Leftrightarrow X(t) = K + \int_0^t G(s,X(s))ds := F(X(t))$. Autrement dit, chercher la solution de (3.1) $\Leftrightarrow$ chercher un point fixe $X \in C([0,T])^7$ de F

Résultat principal

On considère les conditions suivantes :

(C1) Il existe une fonction croissante et continue $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tel que φ une jauge Bianchini-Grandolfi fonction sur l'intervalle J, et $\lim_{t\to 0}\varphi(t) = 0$,

(C2) il existe un $\alpha \in J$ tel que $\begin{cases} \alpha > c + \frac{1}{2}\|K\|_\Omega \\ S(\alpha) \leq c + N_{pop}, \end{cases}$

(C3) $|f_i(t,u(t))-f_i(t,v(t))| \leq$
$\frac{2}{7T}(\varphi(\frac{1}{2}\|u-v\|_\Omega+c)-c)\forall \begin{cases} t\in I, i\in\{1,...,7\} \\ \|u\|_\Omega, \|v\|_\Omega \leq 2N_{pop}. \end{cases}$

Théorème 3.2.1 *Pour un $c>0$ fixé, supposons que les conditions de (C1)au(C3) soient vérifiées. Alors (3.1) à au moins une solution $\overline{X}=(\overline{S},\overline{E},\overline{I},\overline{Q},\overline{R},\overline{D},\overline{P})\in\Omega$ tel que*

$$\|\overline{X}\|_\Omega \leq 2N_{pop}.$$

De plus, si $c+2N_{pop}\in J$ alors la solution est unique.

DÉMONSTRATION :
Soit $\phi:\Omega\to C^p(\Omega)$ une application définie par

$$\phi(X(t))=d(X(t))=\{K+\int_0^1 G(s,X(s))ds\}\forall X\in\Omega.$$

On utilisation des hypothèses (C1)-(C2)donne ce qui suite

$$\begin{aligned} p(0_\Omega,\phi(0_\Omega)) &= \frac{1}{2}\|(0_\Omega-\phi(0_\Omega)\|_\Omega+c \\ &= \frac{1}{2}\|\phi(0_\Omega)\|_\Omega+c \\ &= \frac{1}{2}\max_{t\in[0,T]}|K+\int_0^t G(s,0_\Omega(s))ds|_\Omega+c \\ &\leq \frac{1}{2}\|K\|_\Omega+c<\alpha \end{aligned}$$

et

$$s(\alpha)\leq c+N_{pop}=p(0_\Omega,0_\Omega)+N_{pop}.$$

Ainsi la condition (a) du théorème 2.3.5est satisfaite .
Soit $u,v\in\overline{B_p}(0_\Omega,N_{pop})$ i.e $\|u\|_\Omega,\|v\|_\Omega\leq 2N_{pop}$, alors nous avons deux cas. Le premier, si $\phi(u)\cap\overline{B_p}(0_\Omega,N_{pop})=\emptyset$ d'après 1.3.14 on a

$$\delta_p(\phi(u)\cap\overline{B_p}(0_\Omega,N_{pop}),\phi(v))=0\leq\varphi(p(u,v)).$$

Nous supposons que $\phi(u) \cap \overline{B_P}(0_\Omega, N_{pop}) \neq \emptyset$.. De condition (C3), nous avons

$$\begin{aligned}
\delta_p(\phi(u) \cap \overline{B_p}(0_\Omega, N_{pop}), \phi(v)) =& p(\phi(u), \phi(v)) \\
&= \frac{1}{2}\|\phi(u) - \phi(v)\|_\Omega + c \\
&= \frac{1}{2}\|d(u) - d(v)\|_\Omega + c \\
&= \frac{1}{2}\max_{t\in[0,T]} |\int_0^t G(s,u(s))ds - \int_0^t G(s,v(s))ds|_\Omega + c \\
&\leq \frac{1}{2}\max_{t\in[0,T]} \int_0^t \|G(.,u(.)) - G(.,v(.))\|_\Omega ds + c \\
&\leq \frac{1}{2}\|G(.,u(.) - G(.,v(.))\|_\Omega \max_{t\in[0,T]} (\int_0^t 1ds) + c \\
&\leq \frac{1}{2}(\frac{2.7}{7T}\varphi(\frac{1}{2}\|u-v\|_\Omega + c) - c) \max_{t\in[0,T]} (\int_0^t 1ds) + c \\
&\leq \varphi(\frac{1}{2}\|u-v\|_\Omega + c) - c) + c \\
&\leq \varphi(p(u,v))
\end{aligned}$$

Ainsi tout les conditions sont satisfaites et alors ϕ a au moins un point fixe X dans $\overline{p}(0_\Omega, N_{pop})$i.e

$$\begin{aligned}
p(\overline{X}, 0_\Omega) \leq p(0_\Omega, 0_\Omega) + r &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\|\overline{X}\| + c \leq c + N_{pop} \\
&\Leftrightarrow \|\overline{X}\| \leq 2N_{pop}
\end{aligned}$$

Puisqu'il s'agit d'une valeur unique et si $c + 2N_{pop} \in J$ alors X un solution unique.

□

Solution numérique

Nous prenons le cas de l'Algérie du 01 décembre 2020 au 01 avril 2021. La population totale considérée ici est de 43,85 millions de personnes, actualisée selon [23, 22],

Remaquons, tout d'abord, que tout les conditions de 3.2.1 sont satisfaite et $c + 2 * N_{pop} \in J$. Alors, le problème 3.1 admet une et une solution $\overline{X} \leqslant 2N_{pop}$.

Paramètre	valeurs
$\mathbf{S}(0)$	84152
$\mathbf{E}(0)$	8190
$\mathbf{I}(0)$	8190
$\mathbf{Q}(0)$	27300
$\mathbf{R}(0)$	54405
$\mathbf{D}(0)$	2447
$\mathbf{P}(0)$	0
α	0.5388
β	2.0954
γ	0.0106
δ	0.1207
$\lambda(t)$	$\lambda_0 + \exp(-\lambda_1(t+\lambda_2))$
$[\lambda_0 \ \ \lambda_1 \ \ \lambda_2]$	[0.0036 0.0055 114.6355]
$\kappa(t)$	$K_0 + \exp(-K_1(t+K_2))\}$
$[\kappa_0 \ \ \kappa_1 \ \ \kappa_2]$	$[10^{-3} \ \ 10^{-3} \ \ 10]$
N_{pop}	43851044
c	0
$\varphi(t)$	$0.9t$
J	$[0,\infty[$
$s(t)$	$\frac{t}{1-0.9}$

TABLE 3.1 – L'interprétation physique des paramètres

j'ai également décidé de réécrire le système d'EDO sous forme matricielle $\frac{dX}{dt} = A * X + K$

où

$X = [S, E, I, Q, R, D, P]^T$

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k(t) - \lambda(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k(t) & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K = S(t).I(t). \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{N_{pop}} \\ \frac{\beta}{N_{pop}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'équation $A * X + K$ est ensuite résolue en utilisant la méthode classique de Runge-Kutta. Rappellons que les méthodes de Runge-Kutta sont des méthode d'analyse numérique d'approximation de solution d' équation différentielles. Elles ont été nommées des mathématiciens Carl Runge [2] et Martin Kutta [3] lesquels élaborèrent la méthode en 1901.

2. Carl David Tolmé Runge, né le 30 août 1856 et mort le 3 janvier 1927, était un mathématicien et physicien allemand. On retient surtout son nom pour son développement, avec Martin Wilhelm Kutta, d'une des méthodes les plus utilisées de résolution numérique des équations différentielles , la méthode de Runge-Kutta.

3. Martin Wilhelm Kutta, né le 3 novembre 1867 et mort le 25 décembre 1944, fut un mathématicien allemand.

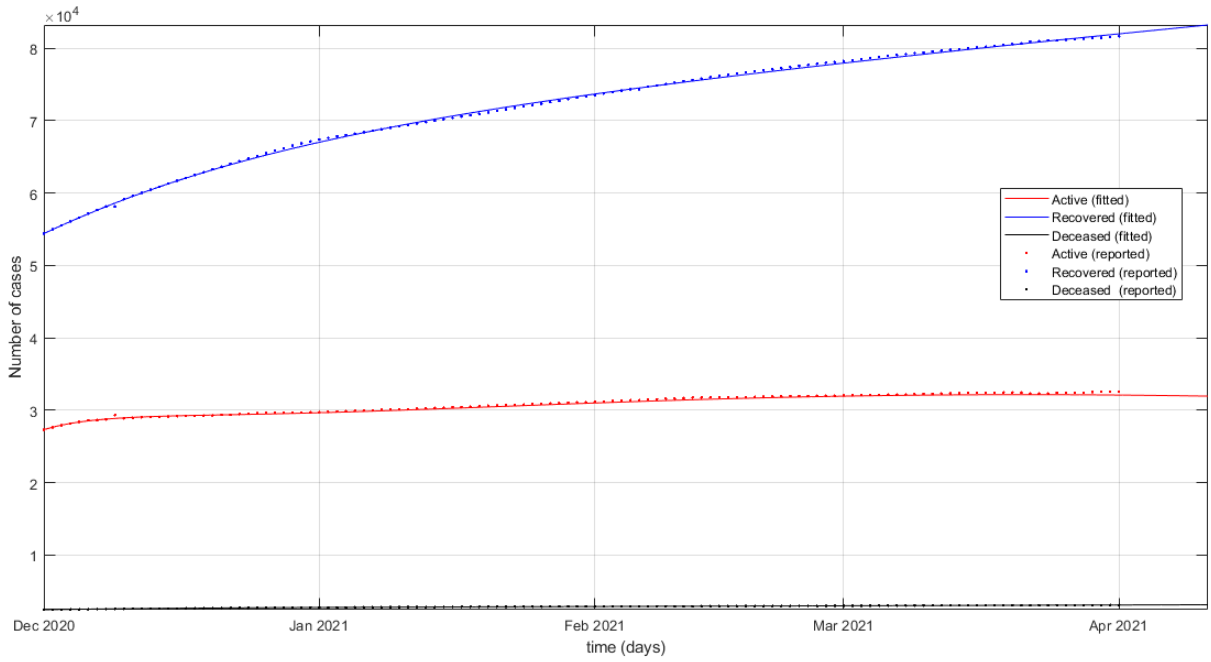


FIGURE 3.1 – Les cas récupérés, mis en quarantaine et les cas de décès en Algérie entre le 01/12/2020 et le 01/04/2021

Algorithme de Runge-Kutta RK-4

La méthode de RK-4 plus utilisés elle est équivalent à :

$$\begin{cases} f_1 = f(t_i, X_i), \\ f_2 = f(t_i + \dfrac{h}{2}, X_i + \dfrac{h}{2} f_1), \\ f_3 = f(t_i + \dfrac{h}{2}, X_i + \dfrac{h}{2} f_2), \\ f_4 = f(t_i + h, X_i + h f_3), \\ X_{i+1} = X_i + \dfrac{h}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4). \end{cases}$$

Programmation MATLAB

Dans ce chapitre, nous utilisons quelques programmes Matlab pour application les théorèmes des points fixes. Pour les deux premier sections, on a vérifier la condition (locale ou globale) de contractante pour ls théorèmes de Banach ou Matthews.

Section 3.3

la version globale de Banach ou Matthews

```
%===============Programme Principale pour ============================
%===============une fonction contractante ============================
clear all, clc
syms x y real
%==============L'intervale I=[Li Lu]=================================
Li=input('La borne inférieure de l''intervalle I Li= ');
Lu=input('La borne supérieure de l''intervalle I Lu= ');
N=input('Donner le nombre N = ');
f=input('Donner la fonction f(x)= ');
d=input('Donner une métrique partielle d(x,y)= ');

 I=[Li,Lu];
for i=1:N
r=Li+(Lu-Li).*rand(1,N);
r2=Li+(Lu-Li).*rand(1,N);
fr=subs(f,x,r);
fr2=subs(f,x,r2);
Part1(i,:)=subs(d,{x y},{fr,fr2});
Part2(i,:)=subs(d,{x y},{r,r2});
k=0;
```

```
for j=1:N
    if Part1(i,j)>=Part2(i,j)
        k=1;
    end
end
end
if k==1
        disp('La fonction n''est pas contractante sur I ')
else
disp('La fonction f est contractante sur I')
l=Part1./Part2;
lambda=max(max(l));
fprintf('Et lambda= %f\n',lambda)
clear i j k
end
```

Section 3.4

la version locale de Banach ou Matthews

```
%===============Programme Principale pour ==========================
%===============Détecter une fonction contractante ==================
clear all, clc
syms x y reall
xbar=input('Donner xbar = ');
rbar=input('Donner le rayon r = ');
%===============Choisi la métrique partielle ========================
d=input('Donner une métrique partielle d(x,y)= ');%e.g. d(x,y)=abs(x-y)
                                                   % ou  d(x,y)=max(x,y)
%====================================================================
N=input('Donner le nombre N = '); %e.g  N=100 ou 50
%====================================================================
c=[];i=0;
while (i<=1000) && subs(le(subs(d,{x y},{xbar,y}),subs(d,{x y},{xbar,xbar})+rbar),y,i) %&& subs(cos(x^2)
        c=[c i];
        i=i+1/N;
end
%=====================ou=============================================
% for i=0:1/N:1000
%if subs(d,{x y},{xbar,y})<=subs(d,{x y},{xbar,xbar})
 %   subs((subs(d,{x y},{xbar,y})),subs(d,{x y},{xbar,xbar}),y,i)
```

```
        c=[c i];
    end
end
%================================================================
fprintf('La boule B est B= [%0.3f , %0.3f]\n',min(c),max(c));
%==============L'intervale I=[Li Lu]================================
Li=min(c);
Lu=max(c);
% %=========================================================================
% %===============Créer un vecteur de f(x) contient N éléments =========
f=input('Donner la fonction f(x)= ');% e.g f(x)=x^2 ou f(x)=1/2*x
%=========================================================================
r=Li+(Lu-Li).*rand(1,N);
fr=subs(f,x,r);
r2=Li+(Lu-Li).*rand(1,N);
fr2=subs(f,x,r2);
for i=1:N
    if (fr(i)>= Li) & (fr(i)<=Lu)
    for j=1:N
        Part1(i,j)=subs(d,{x y},{fr(i),fr2(j)});
        Part2(i,j)=subs(d,{x y},{r(i),r2(j)});
        k=0;
        if Part1(i,j)>=Part2(i,j)
            k=1;
        end
    end
    if k==1
        disp('La fonction n''est pas contractante')
        break
    end
    end
end
test=le(Part1,Part2);
l=eval(Part1./Part2);
lambda=max(max(l));
A=subs(d,{x y},{xbar,subs(f,x,xbar)});
B=(r+subs(d,{x y},{xbar,xbar}))*(1-lambda);
if isequal(test,ones(N))==1 | N==1
    fprintf('La deuxième condition est satisfaite pour lambda= %0.3f,\n',lambda);
    if A<B
        disp('et la première condition est aussi satisfaite.')
```

```
        fprintf('Donc, la fonction f admet un point fixe sur la boule
        B= [%0.3f , %0.3f]\n',min(c),max(c));
    else
       disp('mais la première condition n''est pas satisfaite, donc ne peut rien a dire.')
    end
end
clear i j k
```

Section 3.5

Programmation de SEIQRDP

```
Example: COVID-2019 data for Algeria Country
I am taking some data from John Hopkins university [1]
https://github.com/CSSEGISandData/COVID-19
%-------------------------------------------------------------------------
Initialisation
%-------------------------------------------------------------------------
The parameters are here taken as constant except the death rate and the cure rate.
clearvars;close all;clc;
% Download the data from ref [1] and read them with the function getDataCOVID
[tableConfirmed,tableDeaths,tableRecovered,time] = getDataCOVID();
% time = time(1:end-1);
fprintf(['Most recent update: ',datestr(time(end)),'\n'])
Location = 'Algeria';
% Version 4.8 and above have an additional table conditions (thank to Aleks Czernicki)
% For more details, see: https://github.com/ECheynet/SEIR/pull/12
try
    indR = find(contains(tableRecovered.CountryRegion,Location)==1 & (tableRecovered.ProvinceState.ismis
    indC = find(contains(tableConfirmed.CountryRegion,Location)==1 & (tableConfirmed.ProvinceState.ismis
    indD = find(contains(tableDeaths.CountryRegion,Location)==1 & (tableDeaths.ProvinceState.ismissing()
catch exception
    searchLoc = strfind(tableRecovered.CountryRegion,Location);
    indR = find(~cellfun(@isempty,searchLoc)) ;

    searchLoc = strfind(tableConfirmed.CountryRegion,Location);
    indC = find(~cellfun(@isempty,searchLoc)) ;

    searchLoc = strfind(tableDeaths.CountryRegion,Location);
    indD = find(~cellfun(@isempty,searchLoc));
end
```

```
disp(tableRecovered(indR,1:2))
disp(tableConfirmed(indC,1:2))
disp(tableDeaths(indD,1:2))

indR = indR(1);
indD = indD(1);
indC = indC(1);

Recovered = table2array(tableRecovered(indR,5:end));
Deaths = table2array(tableDeaths(indD,5:end));
Confirmed = table2array(tableConfirmed(indC,5:end));
% If the number of confirmed cases is small, it is difficult to know whether
% the quarantine has been rigorously applied or not. In addition, this
% suggests that the number of infectious is much larger than the number of
% confirmed cases
%------------------------------
Choose Initial and final time
%------------------------------
tStart = datetime(2020,12,01);
tEnd = datetime(2021,04,01);
indT = find(time>=tStart & time <=tEnd);
Recovered=Recovered(indT);
Deaths = Deaths(indT);
time = time(indT);
Confirmed = Confirmed(indT);

if isempty(Confirmed)
    warning('"Confirmed" is an empty array. Check the value of "minNum". Computation aborted.')
    return
end

Npop= 43851044; % population
%-----------------------------------------------------------
Fitting of the SEIQRDP model to the real data
%-----------------------------------------------------------
% Definition of the first estimates for the parameters
alpha_guess = 0.06; % protection rate
beta_guess = 1.0; % Infection rate
LT_guess = 5; % latent time in days
Q_guess = 0.1; % rate at which infectious people enter in quarantine
```

```
lambda_guess = [0.01,0.001,10]; % recovery rate
kappa_guess = [0.001,0.001,10]; % death rate

guess = [alpha_guess,...
    beta_guess,...
    1/LT_guess,...
    Q_guess,...
    lambda_guess,...
    kappa_guess];


% Initial conditions
Q0 = Confirmed(1)-Recovered(1)-Deaths(1);
I0 = 0.3*Q0; % Initial number of infectious cases. Unknown but unlikely to be zero.
E0 = 0.3*Q0; % Initial number of exposed cases. Unknown but unlikely to be zero.
R0 = Recovered(1);
D0 = Deaths(1);

Active = Confirmed-Recovered-Deaths;
Active(Active<0) = 0; % No negative number possible
[alpha1,beta1,gamma1,delta1,Lambda1,Kappa1,lambdaFun,kappaFun] = ...
    fit_SEIQRDP(Active,Recovered,Deaths,Npop,E0,I0,time,guess);
%-----------------------------------------------------------------
Simulate the epidemy outbreak based on the fitted parameters
%-----------------------------------------------------------------
dt = 1/24; % time step
time1 = datetime(time(1), 'Locale', 'en_US'):dt:datetime(time(end)+datenum(10), 'Locale', 'en_US');
N = numel(time1);
t = [0:N-1].*dt;
[S,E,I,Q,R,D,P] = SEIQRDP(alpha1,beta1,gamma1,delta1,Lambda1,Kappa1,...
    Npop,E0,I0,Q0,R0,D0,t,lambdaFun,kappaFun);
%-----------------------------------------------------------
Display the fitted and measured death and recovery rates
%-----------------------------------------------------------
checkRates(time,Active,Recovered,Deaths,kappaFun,lambdaFun,Kappa1,Lambda1);

%-------------------------------------------------------
Comparison of the fitted and real data
%-------------------------------------------------------

Active cases = Confirmed-Deaths-Recovered (database) = Quarantined (SEIQRDP model)
```

```
clf;close all;
figure
semilogy(time1,Q,'r',time1,R,'b',time1,D,'k');
hold on
semilogy(time,Active,'r.',time,Recovered,'b.',time,Deaths,'k.');
% ylim([0,1.1*Npop])
ylabel('Number of cases')
xlabel('time (days)')
leg = {'Active (fitted)',...
        'Recovered (fitted)','Deceased (fitted)',...
        'Active (reported)','Recovered (reported)','Deceased  (reported)'};
legend(leg{:},'location','best')
set(gcf,'color','w')
grid on
axis tight
 set(gca,'yscale','lin')


%--------------------------fonction getDataCOVID()-----------------------
function [tableConfirmed,tableDeaths,tableRecovered,time] = getDataCOVID()
% The function [tableConfirmed,tableDeaths,tableRecovered,time] = getDataCOVID
% collect the updated data from the COVID-19 epidemy from the
% John Hopkins university [1]
%
% References:
% [1] https://github.com/CSSEGISandData/COVID-19
%
% Author: E. Cheynet - Last modified - 20-03-2020
%
% see also fit_SEIQRDP.m SEIQRDP.m
%% Options and names
Ndays = floor(datenum(now))-datenum(2020,01,22)-1; % minus one day because the data are updated with a d
opts = delimitedTextImportOptions("NumVariables", Ndays+5);
opts.VariableNames = ["ProvinceState", "CountryRegion", "Lat", "Long", repmat("data",1,Ndays+1)];
opts.VariableTypes = ["string", "string", repmat("double",1,Ndays+3)];
% Specify file level properties
opts.ExtraColumnsRule = "ignore";
opts.EmptyLineRule = "read";
% Specify variable properties
% opts = setvaropts(opts, ["ProvinceState", "CountryRegion"], "WhitespaceRule", "preserve");
% opts = setvaropts(opts, ["ProvinceState", "CountryRegion"], "EmptyFieldRule", "auto");
```

```
%% Import the data
status = {'confirmed','deaths','recovered'};
address = 'https://raw.githubusercontent.com/CSSEGISandData/COVID-19/master/csse_covid_19_data/csse_covi
ext = '.csv';
for ii=1:numel(status)

    filename = ['time_series_covid19_',status{ii},'_global'];
    fullName = [address,filename,ext];
%     disp(fullName)
    urlwrite(fullName,'dummy.csv');

    if strcmpi(status{ii},'Confirmed')
        tableConfirmed =readtable('dummy.csv', opts);

    elseif strcmpi(status{ii},'Deaths')
        tableDeaths =readtable('dummy.csv', opts);

    elseif strcmpi(status{ii},'Recovered')
        tableRecovered =readtable('dummy.csv', opts);
    else
        error('Unknown status')
    end
end

time = datetime(2020,01,22):days(1):datetime(datestr(floor(datenum(now))), 'Locale', 'en_US')-datenum(1)

% fid = fopen('dummy.csv');
% time = textscan(fid,repmat('%s',1,size(tableConfirmed,2)), 1, 'Delimiter',',');
% time(1:12)=[];
% time = datetime([time{1:end}])+years(2000);
% fclose(fid);
% delete('dummy.csv')

end

%---------------------function fit_SEIQRDP-----------------------------------
function [alpha1,beta1,gamma1,delta1,Lambda1,Kappa1,lambdaFun,kappaFun] = fit_SEIQRDP(Q,R,D,Npop,E0,I0,t
% [alpha1,beta1,gamma1,delta1,Lambda1,Kappa1,lambdaFun,varargout] =
% fit_SEIQRDP(Q,R,D,Npop,E0,I0,time,guess,varargin) estimates the
% parameters used in the SEIQRDP function, used to model the time-evolution
% of an epidemic outbreak.
```

```
%
% Input
%
%   Q: vector [1xN] of the target time-histories of the quarantined cases
%   R: vector [1xN] of the target time-histories of the recovered cases
%   D: vector [1xN] of the target time-histories of the dead cases
%   Npop: scalar: Total population of the sample
%   E0: scalar [1x1]: Initial number of exposed cases
%   I0: scalar [1x1]: Initial number of infectious cases
%   time: vector [1xN] of time (datetime)
%   guess: first vector [1x6] guess for the fit
%   optionals
%       -tolFun: tolerance  option for optimset
%       -tolX: tolerance  option for optimset
%       -Display: Display option for optimset
%       -dt: time step for the fitting function
%
% Output
%
%   alpha: scalar [1x1]: fitted protection rate
%   beta: scalar [1x1]: fitted  infection rate
%   gamma: scalar [1x1]: fitted  Inverse of the average latent time
%   delta: scalar [1x1]: fitted  rate at which people enter in quarantine
%   lambda: scalar [1x1]: fitted  cure rate
%   kappa: scalar [1x1]: fitted  mortality rate
%   lambdaFun: anonymous function giving the time-dependant recovery rate
%   kappaFun: anonymous function giving the time-dependant death rate
%
% Author: E. Cheynet - UiB - last modified 23-05-2020
%
% see also SEIQRDP.m

%% Inputparseer
p = inputParser();
p.CaseSensitive = false;
p.addOptional('tolX',1e-5);  %  option for optimset
p.addOptional('tolFun',1e-5);  %  option for optimset
p.addOptional('Display','iter'); % Display option for optimset
p.addOptional('dt',0.1); % time step for the fitting
p.parse(varargin{:});
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
tolX = p.Results.tolX ;
tolFun = p.Results.tolFun ;
Display  = p.Results.Display ;
dt  = p.Results.dt ;

%% Options for lsqcurvfit
options=optimset('TolX',tolX,'TolFun',tolFun,...
    'MaxFunEvals',1200,'Display',Display);
%% Initial conditions and basic checks

% Write the target input into a matrix
Q(Q<0)=0; % negative values are not possible
R(R<0)=0; % negative values are not possible
D(D<0)=0; % negative values are not possible

if isempty(R)
    warning(' No data available for "Recovered" ')
    input = [Q;D]; % In this aprticular case, Q is actually the number of active + recovered cases
else
    input = [Q;R;D];
end

if size(time,1)>size(time,2) && size(time,2)==1,    time = time';end
if size(time,1)>1 && size(time,2)>1,  error('Time should be a vector');end

%% Definition of the new, refined, time vector for the numerical solution
fs = 1./dt;
tTarget = round(datenum(time-time(1))*fs)/fs; % Number of days with one decimal
t = tTarget(1):dt:tTarget(end); % oversample to ensure that the algorithm converges

%% Preliminary fitting
% Decide which function to use for lambda and get first estimate of lambda
%  Preliminary fitting for lambda to find the best approximation
%  The final fitting is done considering simulatneously the different
%  parameters since the equations are coupled

if ~isempty(R) % If there exists information on the recovered cases
    [guess,lambdaFun] = getLambdaFun(tTarget,Q,R,guess);
else
    lambdaFun =  @(a,t) a(1)./(1+exp(-a(2)*(t-a(3)))); % default function
    %lambdaFun = @(a,t) a(1)+exp(-a(2)*(t-a(3))); % second choise
```

```
end

% Get a first estimate of kappa
try
[guess,kappaFun] = getKappaFun(tTarget,Q,D,guess);
catch exception
    warning('Failure to fit the death rate. A poor fit is expected!');
end

%% Main fitting

modelFun1 = @SEIQRDP_for_fitting; % transform a nested function into anonymous function

if isempty(R)
    % Significantly constraint the death rate
    kappaMax = guess(8:10)*1.05; % Constrain the guess if no R available
    kappaMin = guess(8:10)*0.95; % Constrain the guess if no R available
    lambdaMax = [1 1 100]; % bound the guess around the initial fit
    lambdaMin = [0 0 0]; % bound the guess around the initial fit

    if kappaMax(3)<1e-1
        kappaMax(3) = 100;
        kappaMin(3) = 0;
     end

else
    kappaMax = guess(8:10)*2.0; % bound the guess around the initial fit
    kappaMin = guess(8:10)/2.0; % bound the guess around the initial fit
    lambdaMax = guess(5:7)*2.0; % bound the guess around the initial fit
    lambdaMin = guess(5:7)/2.0; % bound the guess around the initial fit

     if kappaMax(3)<1e-1
        kappaMax(3) = 20;
        kappaMin(3) = 0;
     end

    if lambdaMax(3)<1e-1
        lambdaMax(3) = 20;
        lambdaMin(3) = 0;
    end
end
```

```
ub = [1, 5, 1, 1, lambdaMax, kappaMax]; % upper bound of the parameters
lb = [0, 0, 0, 0, lambdaMin, kappaMin]; % lower bound of the parameters
% call Lsqcurvefit
[Coeff] = lsqcurvefit(@(para,t) modelFun1(para,t),...
    guess,tTarget(:)',input,lb,ub,options);


%% Write the fitted coeff in the outputs
alpha1 = abs(Coeff(1));
beta1 = abs(Coeff(2));
gamma1 = abs(Coeff(3));
delta1 = abs(Coeff(4));
Lambda1 = abs(Coeff(5:7));
Kappa1 = abs(Coeff(8:10));

%% nested functions

    function [output] = SEIQRDP_for_fitting(para,t0)

        % I simply rename the inputs
        alpha = abs(para(1));
        beta = abs(para(2));
        gamma = abs(para(3));
        delta = abs(para(4));
        lambda0 = abs(para(5:7));
        kappa0 = abs(para(8:10));


        %% Initial conditions
        N = numel(t);
        Y = zeros(7,N); %  There are seven different states
        Y(2,1) = E0;
        Y(3,1) = I0;
        Y(4,1) = Q(1);
        if ~isempty(R)
            Y(5,1) = R(1);
            Y(1,1) = Npop-Q(1)-R(1)-D(1)-E0-I0;
        else
            Y(1,1) = Npop-Q(1)-D(1)-E0-I0;
        end
        Y(6,1) = D(1);
```

```
    if round(sum(Y(:,1))-Npop)~=0
        error(['the sum must be zero because the total population',...
            ' (including the deads) is assumed constant']);
    end
    %%
    modelFun = @(Y,A,F) A*Y + F;
    lambda = lambdaFun(lambda0,t);
    kappa = kappaFun(kappa0,t);

    % Very large recovery rate should not occur but can lead to
    % numerical errors.
    if lambda>10, warning('lambda is abnormally high'); end

    % ODE resolution
    for ii=1:N-1
        A = getA(alpha,gamma,delta,lambda(ii),kappa(ii));
        SI = Y(1,ii)*Y(3,ii);
        F = zeros(7,1);
        F(1:2,1) = [-beta/Npop;beta/Npop].*SI;
        Y(:,ii+1) = RK4(modelFun,Y(:,ii),A,F,dt);
    end

    Q1 = Y(4,1:N);
    R1 = Y(5,1:N);
    D1 = Y(6,1:N);

    Q1 = interp1(t,Q1,t0);
    R1 = interp1(t,R1,t0);
    D1 = interp1(t,D1,t0);
    if ~isempty(R)
        output = ([Q1;R1;D1]);
    else
        output = ([Q1+R1;D1]);
    end

end
function [A] = getA(alpha,gamma,delta,lambda,kappa)
    %  [A] = getA(alpha,gamma,delta,lambda,kappa) computes the matrix A
    %  that is found in: dY/dt = A*Y + F
    %
```

```
    %   Inputs:
    %   alpha: scalar [1x1]: protection rate
    %   beta: scalar [1x1]: infection rate
    %   gamma: scalar [1x1]: Inverse of the average latent time
    %   delta: scalar [1x1]: rate of people entering in quarantine
    %   lambda: scalar [1x1]: cure rate
    %   kappa: scalar [1x1]: mortality rate
    %   Output:
    %   A: matrix: [7x7]

    A = zeros(7);
    % S
    A(1,1) = -alpha;
    % E
    A(2,2) = -gamma;
    % I
    A(3,2:3) = [gamma,-delta];
    % Q
    A(4,3:4) = [delta,-kappa-lambda];
    % R
    A(5,4) = lambda;
    % D
    A(6,4) = kappa;
    % P
    A(7,1) = alpha;

end
function [Y] = RK4(Fun,Y,A,F,dt)
    % NUmerical trick: the parameters are assumed constant between
    % two time steps.

    % Runge-Kutta of order 4
    k_1 = Fun(Y,A,F);
    k_2 = Fun(Y+0.5*dt*k_1,A,F);
    k_3 = Fun(Y+0.5*dt*k_2,A,F);
    k_4 = Fun(Y+k_3*dt,A,F);
    % output
    Y = Y + (1/6)*(k_1+2*k_2+2*k_3+k_4)*dt;
    %
end
```

```
function [guess,kappaFun] = getKappaFun(tTarget,Q,D,guess)
    % [guess,kappaFun] = getKappaFun(tTarget,Q,D,guess) provides a first
    % estimate of the  death rate, to faciliate convergence of the main
    % algorithm.
    %
    % Input:
    %
    % tTarget: vector [1xN]: time as double
    % Q: vector [1xN] of the target time-histories of the quarantined cases
    % D: vector [1xN] of the target time-histories of the dead cases
    % guess: vector [1x9] Initial guess for kappa
    %
    % Output
    % guess: vector [1x9]  Updated intial guess
    % kappaFun: Empirical fucntion for the death rate

    % If less than 20 reported deceased, the death rate won't be
    % reliable. Therefore, no preliminary fitting is done.
    if max(D)<10
        kappaFun = @(a,t) a(1)./(exp(a(2)*(t-a(3))) + exp(-a(2)*(t-a(3))));
    else

        try
            opt=optimset('TolX',1e-6,'TolFun',1e-6,'Display','off');

%               myFun1 = @(a,t) a(1).*exp(-a(2)*(t+(a(3))));

           myFun1 = @(a,t) a(1)./(exp(a(2)*(t-a(3))) + exp(-a(2)*(t-a(3))));
           myFun2 = @(a,t) a(1).*exp(-(a(2)*(t-a(3))).^2);
           myFun3 = @(a,t) a(1) + exp(-a(2)*(t+a(3)));

            rate = (diff(D)./median(diff(tTarget(:))))./Q(2:end);
            x = tTarget(2:end);

            % A death rate larger than 3 is abnormally high. It is not
            % used for the fitting.
            rate(abs(rate)>3)=nan;

            % Remove death rate = 0 if the majority number of death is not
            % zero
            if numel(find(rate==0))/numel(rate) <0.5
```

```
                rate(abs(rate)==0)=nan;
            end

            [coeff1,r1] = lsqcurvefit(@(para,t) myFun1(para,t),...
                guess(8:10),x(~isnan(rate)),rate(~isnan(rate)),[0 0 0],[1 1 100],opt);
            [coeff2,r2] = lsqcurvefit(@(para,t) myFun2(para,t),...
                guess(8:10),x(~isnan(rate)),rate(~isnan(rate)),[0 0 0],[1 1 100],opt);
            [coeff3,r3] = lsqcurvefit(@(para,t) myFun3(para,t),...
                guess(8:10),x(~isnan(rate)),rate(~isnan(rate)),[0 0 0],[1 1 100],opt);
%
%                 figure;plot(x,rate,x,myFun1(coeff1,x),'r',x,myFun2(coeff2,x),'g',x,myFun3(coeff3,x

            minR = min([r1,r2,r3]);
            if r1==minR
                kappaGuess = coeff1;
                kappaFun = myFun1;
            elseif r2==minR
                kappaGuess = coeff2;
                kappaFun = myFun2;
            elseif r3==minR
                kappaFun = myFun3;
                kappaGuess = coeff3;
            end

            guess(8:10) = kappaGuess; % update guess

        catch exceptionK
            disp(exceptionK)
           kappaFun = @(a,t) a(1)./(exp(a(2)*(t-a(3))) + exp(-a(2)*(t-a(3))));
        end

    end
end

function [guess,lambdaFun] = getLambdaFun(tTarget,Q,R,guess)
    %  [guess,lambdaFun] = getLambdaFun(tTarget,Q,R,guess) provides a first
    % estimate of the  death rate, to faciliate convergence of the main
    % algorithm.
    %
    % Input:
    %
```

```
% tTarget: vector [1xN]: time as double
% Q: vector [1xN] of the target time-histories of the quarantined cases
% R: vector [1xN] of the target time-histories of the recovered cases
% guess: vector [1x9] Initial guess for kappa
%
% Output
% guess: vector [1x9]  Updated intial guess
% lambdaFun: Empirical fucntion for the recovery rate

% If less than 20 reported deceased, the death rate won't be
% reliable. Therefore, no preliminary fitting is done.

% If less than 20 reported recovered, the death rate won't be
% reliable. Therefore, no preliminary fitting is done.
if max(R)<20
    lambdaFun =  @(a,t) a(1)./(1+exp(-a(2)*(t-a(3))));
else

    try

        opt=optimset('TolX',1e-6,'TolFun',1e-6,'Display','off');

        % Two empirical functions are evaluated
        myFun1 = @(a,t) a(1)./(1+exp(-a(2)*(t-a(3))));
        myFun2 = @(a,t) a(1) + exp(-a(2)*(t+a(3)));

        % Compute the recovery rate from the data (noisy data)
        rate = diff(R)./median(diff(tTarget(:)))./Q(2:end);
        x = tTarget(2:end);

        % A daily rate larger than one is abnormally high. It is not
        % used for the fitting. A daily recovered rate of zero is
        % either abnormally low or reflects an insufficient number
        % of recovered cases. It is not used either for the fitting
        rate(abs(rate)>1|abs(rate)==0)=nan;

        [coeff1,r1] = lsqcurvefit(@(para,t) myFun1(para,t),...
            guess(5:7),x(~isnan(rate)),rate(~isnan(rate)),[0 0 0],[1 1 100],opt);
        [coeff2,r2] = lsqcurvefit(@(para,t) myFun2(para,t),...
            guess(5:7),x(~isnan(rate)),rate(~isnan(rate)),[0 0 0],[1 1 100],opt);
```

```
%                  figure;plot(x,rate,x,myFun1(coeff1,x),'r',x,myFun2(coeff2,x),'g--')

                % myFun1 is more stable on a long term persepective
%               % If coeff2 have reached the upper boundaries, myFUn1 is
%               chosen
                if r1<r2 || coeff2(1)>0.99 || coeff2(2)>4.9
                    lambdaGuess = coeff1;
                    lambdaFun = myFun1;
                else
                    lambdaGuess = coeff2;
                    lambdaFun = myFun2;
                end
                guess(5:7) = lambdaGuess; % update guess


            catch exceptionL
                disp(exceptionL)
                lambdaFun =  @(a,t) a(1)./(1+exp(-a(2)*(t-a(3))));
            end
        end
    end


end


%------------------------function SEIQRDP----------------------------------
function [S,E,I,Q,R,D,P] = SEIQRDP(alpha,beta,gamma,delta,lambda0,kappa0,Npop,E0,I0,Q0,R0,D0,t,lambdaFun
% [S,E,I,Q,R,D,P] = SEIQRDP(alpha,beta,gamma,delta,lambda,kappa,Npop,E0,I0,R0,D0,t,lambdaFun)
% simulate the time-histories of an epidemic outbreak using a generalized
% SEIR model.
%
% Input
%
%   alpha: scalar [1x1]: fitted protection rate
%   beta: scalar [1x1]: fitted  infection rate
%   gamma: scalar [1x1]: fitted  Inverse of the average latent time
%   delta: scalar [1x1]: fitted  rate at which people enter in quarantine
%   lambda: scalar [1x1]: fitted  cure rate
%   kappa: scalar [1x1]: fitted  mortality rate
```

```
%   Npop: scalar: Total population of the sample
%   E0: scalar [1x1]: Initial number of exposed cases
%   I0: scalar [1x1]: Initial number of infectious cases
%   Q0: scalar [1x1]: Initial number of quarantined cases
%   R0: scalar [1x1]: Initial number of recovered cases
%   D0: scalar [1x1]: Initial number of dead cases
%   t: vector [1xN] of time (double; it cannot be a datetime)
%   lambdaFun: anonymous function giving the time-dependant recovery rate
%   kappaFun: anonymous function giving the time-dependant death rate
%
% Output
%   S: vector [1xN] of the target time-histories of the susceptible cases
%   E: vector [1xN] of the target time-histories of the exposed cases
%   I: vector [1xN] of the target time-histories of the infectious cases
%   Q: vector [1xN] of the target time-histories of the quarantinedcases
%   R: vector [1xN] of the target time-histories of the recovered cases
%   D: vector [1xN] of the target time-histories of the dead cases
%   P: vector [1xN] of the target time-histories of the insusceptible cases
%
% Author: E. Cheynet - UiB - last modified 27-04-2020
%
% see also fit_SEIQRDP.m

%% Initial conditions
N = numel(t);
Y = zeros(7,N);
Y(1,1) = Npop-Q0-E0-R0-D0-I0;
Y(2,1) = E0;
Y(3,1) = I0;
Y(4,1) = Q0;
Y(5,1) = R0;
Y(6,1) = D0;
%---------------------------------
%%-guess ---
%ge=[Y(1,1);Y(2,1);Y(3,1);Y(4,1);Y(5,1);Y(6,1);0];
%%---------------------------------
if round(sum(Y(:,1))-Npop)~=0
    error(['the sum must be zero because the total population',...
        ' (including the deads) is assumed constant']);
end
%% Computes the seven states
```

```
modelFun = @(Y,A,F) A*Y + F;
dt = median(diff(t));

lambda = lambdaFun(lambda0,t);
kappa = kappaFun(kappa0,t);

% ODE resolution
for ii=1:N-1
    A = getA(alpha,gamma,delta,lambda(ii),kappa(ii));
    SI = Y(1,ii)*Y(3,ii);
    F = zeros(7,1);
    F(1:2,1) = [-beta/Npop;beta/Npop].*SI;
    Y(:,ii+1) = RK4(modelFun,Y(:,ii),A,F,dt);
end
   % [time2 Z]=fde12(0.8,@(Y,A,F) A*Y+F,t(1),t(end),ge,h) ;
% Y = round(Y);
%% Write the outputs
S = Y(1,1:N);
E = Y(2,1:N);
I = Y(3,1:N);
Q = Y(4,1:N);
R = Y(5,1:N);
D = Y(6,1:N);
P = Y(7,1:N);
%------------
%SF = Z(1,1:N)';
%EF = Z(2,1:N)';
%IF = Z(3,1:N)';
%QF = Z(4,1:N)';
%RF = Z(5,1:N)';
%DF = Z(6,1:N)';
%PF = Z(7,1:N)';


%% Nested functions
    function [A] = getA(alpha,gamma,delta,lambda,kappa)
        %  [A] = getA(alpha,gamma,delta,lambda,kappa) computes the matrix A
        %  that is found in: dY/dt = A*Y + F
        %
        %   Inputs:
        %   alpha: scalar [1x1]: protection rate
```

```
        %   beta: scalar [1x1]: infection rate
        %   gamma: scalar [1x1]: Inverse of the average latent time
        %   delta: scalar [1x1]: rate of people entering in quarantine
        %   lambda: scalar [1x1]: cure rate
        %   kappa: scalar [1x1]: mortality rate
        %   Output:
        %   A: matrix: [7x7]
        A = zeros(7);
        % S
        A(1,1) = -alpha;
        % E
        A(2,2) = -gamma;
        % I
        A(3,2:3) = [gamma,-delta];
        % Q
        A(4,3:4) = [delta,-kappa-lambda];
        % R
        A(5,4) = lambda;
        % D
        A(6,4) = kappa;
        % P
        A(7,1) = alpha;
    end
    function [Y] = RK4(Fun,Y,A,F,dt)
        % Runge-Kutta of order 4
        k_1 = Fun(Y,A,F);
        k_2 = Fun(Y+0.5*dt*k_1,A,F);
        k_3 = Fun(Y+0.5*dt*k_2,A,F);
        k_4 = Fun(Y+k_3*dt,A,F);
        % output
        Y = Y + (1/6)*(k_1+2*k_2+2*k_3+k_4)*dt;
    end
end
```

Conclusion

L'objectif de notre travail et de trouver des points fixes pour une suite des fonctions et multi-fonctions satisfait certaines conditions dans les espaces métriques et les espaces métriques partiels. Le théorème du point fixe est fondamental en analyse. Il a des applications nombreuses, à la fois théoriques et pratiques. chaque théorème que nous trouvons version locale de théorème .
Dans la partie d'applications de ce mémoire on applique le théorème sur approximation numérique pour les inclusions variationnelles et pour trouve l'existence local et L'unicité de le solution de modèle SEIQRDP.

Bibliographie

[1] A. DONTCHEV Local convergence of the newton method for generalized équations.

[2] A. BENTERKI A. H. ANSARI and M. ROUAKI. Some local fixed point results under c-class functions with applications to coupled elliptic systems. *Journal of Linear and Topological Algebra*, (pp. 169-182), 2018.

[3] A.BENTERKI. A local fixed point theorem for set-valued mappings on partial metric spaces. *Appl. Gen. Topol*, 2016.

[4] S. Banach. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fund. Math*, (p 133–181), 1922.

[5] R. M. BIANCHINI and M. GRANDOLFI. *Transformazioni di tipo contracttivo generalizzato in uno spazio metrico*. Number pp. 212–216. 1968.

[6] A. L. DONTCHEV and W. W. HAGER. An inverse mapping theorem for set-valued maps. 1994.

[7] E.KREYSZIG. Paperback edition. New York etc. : John Wiley | Sons, paperback edition ed, 1989.

[8] C. Vetro H. Aydi, M. Abbas. Partial Hausdorff metric and Nadler's fixed point theorem on partial metric spaces. *Topology and its Applications*, (p 323–3242), 2012.

[9] Elida Hoxha. The equivalent cauchy sequences in partial metric spaces. *in JOURNAL OF ADVANCES IN MATHEMATICS*, (PP 6148-6154), 2016.

[10] F. SOLA I. ALTUN and H. SIMSEK. Generalized contractions on partial metric spaces. *Topology Appl*, (pp. 2778–2785), 2010.

[11] S. G. Matthews. Partial metric topology. *In : Proc. 8th Summer Conference on general topology and applications*, (pp. 183-197), 1994.

[12] S. B. Nadler. Multi-valued contraction mappings. *Pacific J. Math*, 1969.

[13] S. B. NADLER. *Pac. J. Math*. Number pp. 475–488. 1969.

[14] Fixed Point Results of Locally Contractive Mappings. *Ordered Quasi-Partial Metric Spaces*.

[15] O.Hassani. *Analyse multivoque et inclusions différentielles*. Univ. Dr Tahar Moulay - Saïda, 11 Juin 2015.

[16] Q.H.Ansari. *Metric Spaces Including Fixed Point Theory and Set valued Maps*. Norosa publisling House New Delhi, 2010.

[17] D. O'regan R. P. Agarwal, M. Meehan. *Fixed point theory and applications*. University Press, 2001.

[18] S.M. Robinson. *Basic Theory. Mathematical Programming study*. Number PP 128–141. 1979.

[19] S.M. Robinson. *Basic Theory Mathematical Programming study*. Number PP 128–141. 1979.

[20] S.M. Robinson. *applications to nonlinear programming. Mathematical Programming study*. Number 200–221. 1982.

[21] E. KARAPINAR T. ABDELJAWAD and K. TA¸S. Existence and uniqueness of a common fixed point on partial metric spaces. *Appl. Math. Lett*, (PP.1900–1904), 2011.

[22] https ://github.com/CSSEGISandData/COVID-19.

[23] https ://www.worldometers.info/world-population/algeria-population.