Republique Algerienne Democratique et Populaire
Ministere de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique
Universite Yahia Fares de Medea
Faculte des Sciences
Departement des Mathematiques et de l'Informatique



MEMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLOME DE MASTER EN MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse et Mathématique Appliqué

par

HAMIDI Lalia

EQUATIONS ELLIPTIQUES ET ANISOTROPES NON LINEAIRES

Soutenu publiquement le 00 Juin 2018 devant le jury composé de

Président :	M. BENCHAA	*M.A.A*	Université de Médéa
Examinateur :	R. BELGACEM	*M.C.B*	Université de Chlef
Examinateur :	M. KRIMI	*M.A.A*	Université de Médéa
Co-encadreur :	H. AYADI	*M.A.A*	Université de Médéa
Encadreur :	F.MOKHTARI	*M.C.A*	université Alger 1

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2017 – 2018

Table des matières

Résumé **III**

Notation **VII**

Introduction **IX**

1 Préliminaires **1**

1.1 **Espaces de Lebesgue** 1

1.2 **Les Distributions** 3

1.3 **Espaces de sobolev** 4

1.4 **Espaces de sobolev anisotropes** 6

1.5 **Méthodes des operateurs monotones** 7

1.5.1 Opérateurs coercif 8

1.5.2 Opérateurs bornés 8

1.5.3 Opérateurs hémicontinus 8

2 Équations p – Laplacian **10**

2.1 **Existence des solutions** 10

2.2 **Régularité de solutions** 13

3 Équations anisotropes **22**

3.1 **Existence de solutions** 22

3.2 **Régularité de solutions** 25

Conclusion **37**

Dédicace

Dieu me suffit, quel excellent protecteur

Je dédie ce modeste travail à :

A ma formidable mère qui m'a toujours soutenu,

qui m'a toujours encouragé et qui n'a jamais

cessé de croire en moi.

A 2éme mère « $\mathfrak{F}$ »

A mon père

Abd el Aziz qui a toujours

su me donné les meilleurs conseils pour ma

réussite.

A 2éme père « Ayache »

Mes frères Youcef, Adel, Hamid,

Sahrawi, Ayoub et Oussama

Daoud.

A toute mes sœurs, et toute la famille sans

exception.

Toute mes amis et toute personne qui mon aidée

de loin ou de prés.

$\mathscr{A}$ $\mathscr{H}$

$\mathscr{L}.\mathscr{A}hlam.\ HAMIDI$

Remerciements

Nous remercions
tout d'abord Allah le tout
puissant, pour m'avoir donnée la force
et la patience, la santé et la volonté pour
réaliser ce modeste travail.
Je tiens
à adresser mes
remerciements à mes directeur de mémoire
F.MOKHTARI et
H. AYADI
qui est guidé dans ce travail.
Je tiens à remercier également les membres de jury
pour avoir accepter de jurer ce mémoire.
remerciements à Tous
les enseignants
de l'université de *YAHIA FARES DE MEDEA*.
Un grand merci à toutes
personnes ayant
participé de près ou de loin à
notre formation et à tous ceux qui nous ont
apporté leur soutien et leurs
encouragements durant
la réalisation de
ce travail.

Résumé

Dans ce mémoire nous prouvons l'existence et la régularité des solutions de l'équation elliptique anisotropes non linéaires. suivante

$$-\sum_{i=1}^{N}\partial_i\Big[|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u\Big]=f \qquad \text{dans } \ \Omega; \quad i=1,\dots,N,$$

Où $\Omega\subset\mathbb{R}^N, N\geq 2$ et $f\in L^m(\Omega), m\geq 1$.

Ce mémoire contenant trois chapitres

- Premier chapitre : concerne les définitions des espaces utilises dans les autres chapitres
- Deuxième chapitre : on a étudie l'existence et la régularité de solution pour l'équation p − Laplacian dans le cas régulier, comme un cas particulier de l'équation

$$-\sum_{i=1}^{N}\partial_i[|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u]=f \tag{0.0.1}$$

- Troisième chapitre : on a étudie l'existence et la régularité de solution pour l'équation $-\sum_{i=1}^{N}\partial_i[|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u]=f$. f dans le cas régulier $(f\in L^m(\Omega), m\leq(\bar{p}^*)')$

Abstract

In this thesis we prove the existence and the regularity of the solutions of the elliptic equation anisotropic nonlinear. next :

$$-\sum_{i=1}^{N}\partial_i\Big[|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u\Big]=f \qquad \text{dans } \Omega; \quad i=1,\dots,N,$$

Or $\Omega\subset\mathbb{R}^N, N\geq 2$ and $f\in L^m(\Omega), m\geq 1$.

This memory containing three chapters

- First chapter : concerns definitions of spaces used in other chapters
- Second chapter : we have studied the existence and the regularity of solution for the equation g p − Laplacian, in the regular case, as a special case of the equation $-\sum_{i=1}^{N}\partial_i[|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u]=f$
- third chapter : we studied the existence and the regularity of solution for the equation $-\sum_{i=1}^{N}\partial_i[|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u]=f$, f in the regular case ,$(f\in L^m(\Omega), m\leq(\bar{p}^*)')$

Notations

$\mathbb{R}^N$	L'espace Euclidien de dimension N.
Ω	Un ouvert de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$.
$\|E\|$	La mesure de Lebesgue de l'ensemble mesurable E.
$p.p.$	Presque partout (par rapport à la mesure de Lebesgue)
E'	Le dual topologique de E (l'espace des formes linéaires continues sur l'espace de Banach E)
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{E' \times E}$	Le crochet de dualité entre l'espace E et son dual topologique E'.
$(\cdot, \cdot)$	Produit scalaire.
$\| \cdot \|_E$	La norme dans E.
$B_\rho(x_0)$	La boule fermé de centre x_0 et de rayon $\rho > 0$; $B_\rho(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N \ ; \ \|x - x_0\|_2 \leq \rho\}$.
$\alpha \in \mathbb{N}^N$	Un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$, $\|\alpha\|$.la longueur de α $\|\alpha\| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$
∂_i	La i-ième dérivée partielle ; $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.
∂^α	La dérivée d'ordre α $\partial^\alpha = \frac{\partial^{\|\alpha\|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$.
∇u	Le gradient de u $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$.
Δu	Le laplacien de u, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}$.
$\operatorname{div} v$	La divergence du vecteur $v = (v_1, ..., v_N)$ $\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial v_N}{\partial x_N}$.
I_E	La fonction indicatrice de l'ensemble E, $I_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in E \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$
$\{u \geq k\}$	pour une fonction donnée u $\{u \geq k\} := \{x \in \Omega, u(x) \geq k\}$
$\rightharpoonup$	La convergence faible.

$\text{supp}(u)$	Support d'une fonction u, $\text{supp}(u) := \overline{\{x \in \Omega \ ; \ u(x) \neq 0\}}$.
p_i	l'exposant critique dépend du genre d'anisotropie $i = 1, 2...N$
$\bar{p}$	l'exposent critique usuel $\bar{p} = \dfrac{N}{\sum_{i=1}^{N} \dfrac{1}{p_i}}$
p^*	L'exposant critique de Sobolev : pour $1 \leq p < N$ $p^* = \frac{\bar{p}N}{N-\bar{p}}$
p_N	le maximum des p_i $p_N = \max_i\{p_i\}$
p_1	le minimum des p_i $p_1 = \min_i\{p_i\}$
p_∞	$p_\infty = \max\{p_N, p^*\}$
p'	L'exposant conjugué de l'exposant p pour $1 \leq p \leq +\infty$. $p' = \frac{p}{p-1}$
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	L'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω.
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	L'espace des fonctions infiniment différentiables sur Ω.
$\mathcal{C}_c(\Omega)$	L'espace des fonctions continues à support compact dans Ω.
$\mathcal{D}(\Omega)$	L'espace des fonctions indéfiniments différentiables à support compact dans Ω.
$\mathcal{D}'(\Omega)$	L'espace des distributions sur Ω.
$L^p(\Omega)$	L'espace de Lebesgue,
$W^{1,p}(\Omega)$	L'espace de Sobolev,
$W_0^{1,p}(\Omega)$	La fermeture de $\mathcal{D}$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.
$\underset{\Omega}{\text{sup-ess}}(u)$	Le sup essentiel d'une fonction u sur Ω.
	$\underset{\Omega}{\text{sup-ess}}(u) = \inf\{C > 0 \ ; \ u(x) \leq C \ \ p.p. \ x \in \Omega\}$.
$W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$	La fermeture de $\mathcal{C}_0^\infty$ dans $W^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$.
$\liminf f_n$	La limite inférieure de f_n ; $\liminf f_n = \lim_{k\to\infty} \inf\{f_n : n \geq k\}$ $; k \geq 1$

Introduction

L'une des branches les plus importantes des mathématiques dans les temps anciens et modernes est la branche des équations de dérive partielle, qui est la base de toutes les sciences actives, sinon toutes, où nous trouvons beaucoup de questions dans le domaine des sciences physiques et biologiques ... Mathématiquement formulé sous la forme d'équations différentielles, pour trouver les moyens de trouver des solutions à ces équations ; Nous avons abordé dans ce mémoire la question d'existence et de régularité de solution pour les équations elliptiques et anisotropes non linéaires dans le cas régulière
Dans le premier chapitre de ce travail, nous avons discuté certaines concepts généraux que nous avons utilisés dans le reste de mémoire
Dans le deuxième chapitre de ce mémoire, nous avons montre l'existence et la régularité de solution pour l'équation suivante

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

comme un cas particulier de l'opérateur anisotrope Nous avons commencé à étudier l'existence de solution en utilisant le théorème de surjectivité dans la première section de ce chapitre.
Dans le deuxième section, nous avons montré la régularité de solutions dépend de la régularité de la source f. Les points de départ sont les résultats de la régularité de Stampacchia. Nous supposons que la source est la fonction f appartenant à l'espace de Lebesgue $f \in L^m(\Omega)$, ona trouvé deux cas $m < p^*$ et $m > \frac{N}{p}$ et pour la deuxième cas la solution est bornée

En fin, en troisième chapitre on a étudié le problème suivant :

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{N} \partial_i \Big[|\partial_i u|^{p_i - 2} \partial_i u \Big] = f & \text{dans } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{0.0.2}$$

Où Ω domaine borné de $\mathbb{R}^N$ $, N > 2, \quad p_i > 1 \quad \forall i = 1, \ldots, N$, f est une fonction donnée appartenant a un espace de Lebesgue $L^m(\Omega)$

Dans le premier section on a étudié l'existence de solution par l'utilisation de théorème de surjectivité. Pour la section deux on a fait l'étude de régularité de solution sauf le cas de $p_i = p$ pour tout i puisque il est bien connu [16], si $p \in (1, 2 - \frac{1}{N}]$ on ne peut pas s'attendre à ce que les solutions appartiennent à $W_0^{1,1}(\Omega)$ Nous devons considérer des espaces fonctionnel différent aux espaces classiques de Sobolev, afin l'étude de l'équation (0.0.2), à savoir les espaces anisotropes de Sobolev, auxquels les solutions problèmes appartiennent

Dans la deuxième Section du troisième chapitre concerne la régularité des solutions d'abord $m \geq p'_\infty$ nous prouvons que les solutions faibles, a priori appartenant seulement à l'espace d'énergie $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$, ayez un sommabilité supplémentaire, celui est si $u \in L^s(\Omega)$ pour un certain s selon le sommabilité de f . Si $f \in L^m(\Omega) \quad 1 \leq m < p'_\infty$ nous montrons que les solutions distributionnelles appartiennent à quelques espaces anisotropes de Sobolev, mais ils sont pas borne (employant une méthode d'approximation, des estimation a priori et des résultats de compacité dans les espaces appropriés) .

Dans [12], (0.0.2) a été considéré, a donnée mesure de radon. L'existence d'une solution est montrée dans l'espace anisotrope de Sobolev $W_0^{1,(s_i)}(\Omega)$ avec s_i tels que

$$1 \leq s_i < \frac{N(\bar{p} - 1)}{\bar{p}(N - 1)} p_i$$

$\bar{p}$ et avec condition supplémentaire $2 - \frac{1}{N} < \bar{p} < N$.

Pour des problèmes anisotropes (0.0.2), nous devons distinguer deux cas : $p_\infty = \bar{p}^*$ et $p_\infty = p_{\max}$ en tant que comme suit

$$1 < m < (p^*)' \quad \text{implique} \quad u \in W_0^{1,s}(\Omega), s = \frac{mN(p-1)}{N - mp} \quad \text{pour } p > \frac{1}{m^*} + 1;$$

. Il est bien connu que la théorie d'existence et les résultats de régularité pour des problèmes elliptiques fortement depend de pespietes des espaces dans les quels nous recherchons des solutions. Pour l'espace Sobolev anisotrope l'exposant critique dépend du type d'anisotropie. exposant est $\bar{p}^*$ si l'anisotropie est concentrée, alors que c'est p_max si l'anisotropie n'est pas concentrée (voyez [5]). Ainsi si

$p_\infty = \bar{p}^* \geq p_{\max}$ en général, nous prouvons des résultats de (3.0.1), aux résultat du deuxième chapitre et en remplaçant les espaces de Sobolev classique par les espaces anisotropes de Sobolev .

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous mentionnons quelques espaces avec ses propriétés, ainsi des définitions et des théorèmes qu' on va utilise dans le chapitre suivant.

1.1 Espaces de Lebesgue

Définition 1.1. ***L'espace de Lebesgue***

L'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ *définit par*

$$\begin{cases} L^p(\Omega) = \Big\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable } ; \quad \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < +\infty\Big\}, & si\ 1 \leq p < +\infty \\ \mathbf{L}^{\infty}(\Omega) = \Big\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable } ; \quad supess(u) < +\infty\Big\}. & p = +\infty \end{cases}$$

muni de la norme

$$\begin{cases} ||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, & si\ 1 \leq p < +\infty \\ ||u||_{L^p(\Omega)} = supess(u). & p = +\infty \end{cases}$$

$L^p(\Omega)$ *est un espace de Banach pour* $1 \leq p \leq +\infty$

de Hilbert pour $p = 2$ *muni du produit scalaire*

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} f(x)g(x) \, dx.$$

Proposition 1.1.

i) $L^p(\Omega)$ *est réflexif pour* $1 < p < +\infty$ $L^p(\Omega)$

et séparable pour $1 \leq p < +\infty$.

ii) *$L^p(\Omega)$ possede un dual si $1 < p < +\infty$ et son dual et $L^{p'}(\Omega)$, avec $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$.*

iii) *$L^1(\Omega)$ réflexif mais n'est pas séparable, et son dual $L^\infty(\Omega)$ est ni réflexif ni séparable, et le dual de ce dernier est inclue dans $\mathbf{L}^1(\Omega)$*

iiii) *$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert*

Lemme 1.2. (Inégalité de Hölder généralisée)

Soient $p, q \in (1, +\infty)$ et $r \in (1, +\infty)$ avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Si $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, alors $uv \in L^r(\Omega)$, et on a

$$||uv||_{L^r(\Omega)} \leq ||u||_{L^p(\Omega)} \cdot ||v||_{L^q(\Omega)}.$$

Lemme 1.3. (Inégalité de Yong)

Soient $a, b \in [0, +\infty)$ et $p, q \in (1, +\infty)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Lemme 1.4. (Inégalité d'interpolation)

Soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Si $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ alors $u \in L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [p, q]$, et on a

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \cdot \|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}$$

où $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$, avec $\theta \in [0, 1]$.

Corollaire 1.5.

Soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Si $|\Omega| < +\infty$ alors $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$.

Définition 1.2. (convergence dans $L^p(\Omega)$)

Soient $p \in [1, +\infty[$, $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$.

1) *On note la convergence forte de f_n vers f dans $L^p(\Omega)$ par $f_n \longrightarrow f$ et on dit que f_n converge fortement vers f dans $L^p(\Omega)$ si*

$\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0.$

2) *On note la convergence faible de f_n vers f dans $L^p(\Omega)$ par $f_n \rightharpoonup f$ et on dit que f_n converge faiblement vers f dans $L^p(\Omega)$ si*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega (f_n - f) \cdot \varphi \, dx \; = 0, \qquad \forall \varphi \in L^{p'}(\Omega).$$

3) *On note la convergence faible* $*$ *de* f_n *vers* f *dans* $L^p(\Omega)$ *par* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$

et on dit que f_n *converge faiblement*$*$ *vers* f *dans* $L^p(\Omega)$ *si*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{\Omega}(f_n-f)\cdot\varphi\ dx\ \ =0,\qquad \forall\varphi\in L^1(\Omega).$$

Théorème 1.1. ***(La convergence dominée de Lebesgue)***

Soit $p\geq 1$*, et soient* $(f_n)_n\subset L^p(\Omega)$ *et* $f\in L^p(\Omega)$*, on suppose que* $f_n\to f$ *p.p. dans* Ω *et qu'il existe* $g\in L^p(\Omega)$ *telle que pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *on :* $|f_n|\leq g$ *p.p. dans* Ω*. Alors* $f_n\to f$ *dans* $L^p(\Omega)$*.*

Définition 1.3. (Fonction de Carathéodory)

Soit $f:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*. On dit que* f *est de Carathéodory si*

(1) $f(\cdot,s):\Omega\to\mathbb{R}$ *mesurable pour tout* $s\in\mathbb{R}$*.*

(2) $f(x,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *continue pour presque par tout* $x\in\Omega$*.*

Lemme 1.6. (Fatou)

Soit $(f_n)_n\subset L^1(\Omega)$ *une suite de fonctions positives. Alors*

$$\int_{\Omega}\liminf_{n\to+\infty}f_n\ dx\leq\liminf_{n\to+\infty}\int_{\Omega}f_n\ dx.$$

1.2 Les Distributions

Définition 1.4. ***Distribution***

Soit Ω *ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *pour tout* $k\subset\Omega$ *compacte on note :*

$$\mathcal{D}_K(\Omega)=\{\varphi\in C^\infty(\Omega)\ ;\quad supp\ \varphi\subset K\}\quad avec\ \ supp(\varphi)=\overline{\{x\in\Omega,\varphi(x)\neq 0\}}$$

et les distributions sont de forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ *et on note :*

$\mathcal{D}'(\Omega)$ *: l'ensemble de tout les distribution sur* Ω

$T\in D'(\Omega)$ *donc*

$$T:\ \ D(\Omega)\to\mathbb{R}$$
$$\varphi\to<T,\varphi>_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}_K(\Omega)}=<T,\varphi>$$

et vérifie la propriété suivante

$$|<T,\varphi>|\leq c\sup_{x\in K}|\partial^\alpha\varphi(x)|\qquad\forall K\subset\Omega$$

α *est l'ordre de* T

Définition 1.5. (Égalité au sens des distributions)

Soit $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que T est égale à S au sens des distributions et on note $T = S$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle, \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Définition 1.6. ***(Dérivées au sens des distributions)***

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{1...N\}$, $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
On note $\dfrac{\partial T}{\partial x_k}$ pour le dérivé partielle de T par apport le variable x_k, et on la définit :

$$\Big\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \varphi \Big\rangle = -\Big\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \Big\rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On définit par récurrence la dérivée partielle de T d'ordre α Par :

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

1.3 Espaces de sobolev

Définition 1.7. ***L'espace de sobolev***

L'espace de sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ avec $p \in [1, +\infty]$ et Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$ définit par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega) \ \ ; \ \ D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq m \Big\}$$

muni de la norme :

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} & si \ \ 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\max_{0 \leq |\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||_{L^\infty(\Omega)} & si \ \ p = +\infty, \end{cases}$$

lorsque $m = 1$

$$W^{1,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega) \ \ ; \ \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \Big\}$$

muni de la norme :

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = \begin{cases} \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\partial u\|_{L^p(\Omega)} & si \ \ 1 \leq p < \infty, \\ \max \big\{ ||u||_{L^\infty(\Omega)}, ||\nabla u||_{L^\infty(\Omega)} \big\} & si \ \ p = +\infty, \end{cases}$$

pour $p = 2$

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega) = \Big\{ u \in L^2(\Omega) \ \ , \ \ D^k u \in L^2(\Omega) \quad \forall k \leq m \Big\}$$

$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni de produit scalare

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

et la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \Big(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 1.7.

$W^{m,p}(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < +\infty$ et séparable si $1 \leq p < +\infty$

Définition 1.8. ***(convergence dans $W^{1,p}(\Omega)$)***

Soient $1 \leq p < +\infty$, $f \in W^{1,p}(\Omega)$ et $(f_n)_n \subset W^{1,p}(\Omega)$

1 *On note la convergence forte de f_n vers f dans $W^{1,p}(\Omega)$ par $f_n \longrightarrow f$ et on dit que f_n converge fortement vers f dans $W^{1,p}(\Omega)$ si*

$$f_n \to f \quad dans \quad L^p(\Omega) \quad et \quad \nabla f_n \to \nabla f \quad dans \quad L^p(\Omega)$$

2 *On note la convergence faible de f_n vers f dans $W^{1,p}(\Omega)$ par $f_n \rightharpoonup f$ et on dit que f_n converge faiblement vers f dans $W^{1,p}(\Omega)$ si*

$$f_n \rightharpoonup f \quad dans \quad L^p(\Omega) \quad et \quad \nabla f_n \rightharpoonup \nabla f \quad dans \quad L^p(\Omega)$$

Définition 1.9. *On dit qu'un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ est de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$ (respectivement Lipschitzien), si on peut trouver un nombre fini d'ouverts $\{\mathcal{O}_i\}_{0\leq i\leq I}$ de $\mathbb{R}^N$ tels que $\overline{\mathcal{O}_0} \subset \Omega$, $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^{I} \mathcal{O}_i$ et $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=0}^{I} \mathcal{O}_i$ et tels que pour tout $i \in \{0,...,I\}$ il existe une application bijective ϕ_i de classe $\mathcal{C}^k$ (respectivement Lipschitzien) de $\mathcal{O}_i$ dans l'ensemble*

$$B_1(0) = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \ ; \quad \|x\|_2 \leq 1\},$$

et l'inverse de ϕ_i doit être de classe $\mathcal{C}^k$ (respectivement Lipschitzien) et tel que

$$\phi_i(\mathcal{O}_i \cap \Omega) = \Big\{(x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \ ; \quad \|x\|_2 \leq 1, \ x_N > 0\Big\} = B^+,$$

et

$$\phi_i(\mathcal{O}_i \cap \partial\Omega) = \Big\{(x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \ ; \quad \|x\|_2 \leq 1, \ x_N = 0\Big\} = \Gamma.$$

Les ϕ_i sont des difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^k$ (respectivement Lipschitzien).

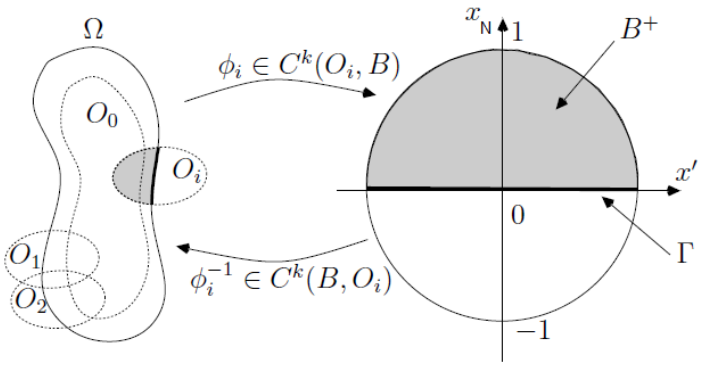


Figure : Résumé géométrique de la définition précédente

Définition 1.10.

Soit $1 < p < +\infty$. *On note* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *la fermeture de* $\mathcal{D}_K(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$, *de plus, si* Ω *est Lipschitzien, alors*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \Big\{ u \in W^{1,p}(\Omega) \ ; \quad u_{|\partial\Omega} = 0 \Big\}.$$

Si $p > 1$, *on note* $W^{-1,p'}(\Omega)$ *au dual de* $W^{1,p}(\Omega)$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Théorème 1.2. (Injections de Sobolev-Rellich-Kondrachov)

Soient Ω *un ouvert borné et Lipschitzien de* $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ *et* $p^* = \frac{Np}{N-p}$. *Alors*

i) Si $1 \leq p < N$ *alors l'injection* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *est compacte pour* $q \in [1, p^*)$, *et continue pour* $q = p^*$. *En particulier l'injection* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ *est compacte pour tout* $p \in [1, +\infty)$.

ii) Si $p = N$ *alors l'injection* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *est compacte et continue pour* $q \in [1, +\infty)$.

iii) Si $p > N$ *alors l'injection* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ *est compacte et continue.*

Théorème 1.3. ***(Inégalité de poincaré)***

Soit Ω *ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *borne ou mions d'un direction et* $1 \leq p < +\infty$ *Alors il existe* C *(depend seulement de* Ω *) telle que* $\forall \ \ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

1.4 Espaces de sobolev anisotropes

Définition 1.11.

Soit Ω *un ouvert borné lipschitzien de* $\mathbb{R}^N$ *avec* $(N \geq 2)$ *,et soit* $1 \leq p_i < +\infty \quad$ *avec* $\quad i = 1, \ldots, N$. *L'espace de sobolev anisotrop* $W^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ *est définie par :*

$$W^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) = \Big\{ u \in W^{1,1}(\Omega) \ \ ; \ \ \partial_i u \in L^{p_i}(\Omega), \quad i = 1, \ldots, N \Big\}$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)} = \|u\|_{L^1(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i u\|_{L^{p_i}(\Omega)}$$

$W^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ *est un espace de Banach pour* $1 \leq p \leq +\infty$

$$W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \ \ ; \ \ u = 0 \ \ sur \ \ \partial\Omega \right\}$$

Proposition 1.8.

L'espace $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ *est la fermeture de* $C_0^\infty(\Omega)$ *par apport à sa norme.*

Théorème 1.4. ***(Inégalité de type Poincaré)***

Soit Ω *ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *borné. Nous rappelons une inégalité de type Poincaré. Laissé Alors il existe un constante* C_p *telle que* $\forall \ \ u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$

$$\|u\|_{L^{p_i}(\Omega)} \leq C_p \|\partial_i u\|_{L^{p_i}(\Omega)}. \tag{1.4.1}$$

On a aussi l'inégalité de Sobolev sachant que $\bar{p}$ *le moyen harmonique de* p_i *avec* $\frac{1}{\bar{p}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i}$ *et* $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ *alors il existe* $C_s > 0$ *telle que :*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_s \prod_{i=1}^{N} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{\frac{1}{N}} \tag{1.4.2}$$

où $q = \bar{p}^* = \frac{N\bar{p}}{N-\bar{p}}$ *si* $\bar{p} < N$ *ou* $q \in [1, +\infty[$. *et on a*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \frac{C_s}{N} \sum_{i=1}^{N} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^{p_i}(\Omega)} \tag{1.4.3}$$

Proposition 1.9.

Pour $q \in [1, p_\infty]$ *l'injections* $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *est continue ,de plus si* $q < p_\infty$ *l'injection est compacte*

1.5 Méthodes des operateurs monotones

Définition 1.12. ***(Opérateurs monotones)***

Soit E *un espace de Banach et* E' *son dual topologique,on dit l'opérateur*

$A : E \to E'$. *est :*

- *Monotone si :*

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in E$$

- *Strictement monotone si :*

$$\langle Au - Av, u - v \rangle > 0 \quad \forall \ u, v \in E \quad v \neq u$$

1.5.1 Opérateurs coercif

Définition 1.13. ***(opérateur coercif)***

Soit E un espace de Banach réflexif, $A : E \to E'$ un opérateur on dit que A coercif si

$$\frac{\langle A(v), v\rangle}{\|v\|} \to +\infty \quad lorsque \quad \|v\| \to +\infty$$

1.5.2 Opérateurs bornés

Définition 1.14. ***Opérateurs bornés***

Soient E et W deux espaces de Banach ,et soit $A : E \to W$ un opérateur. On dira que A est borné s'il envoie tout borné de E dans un borné de W ;

$$\forall \rho_1 > 0, \exists\ \rho_2 > 0 \quad tel\ que \quad A(B_{\rho_1}(0)) \subset B_{\rho_2}(0)$$

c'est-à-dire

soit $v \in E$

$$\|A(v)\|_W \quad est\ borné\ lorsque \quad \|v\|_E \quad est\ borné$$

où

$B_{\rho_1}(0)$ *:désigne la boule ouverte dans E*

$B_{\rho_2}(0)$ *:désigne la boule ouverte dans W*

1.5.3 Opérateurs hémicontinus

Définition 1.15. ***(Opérateurs hémicontinus)***

Un opérateur $A : E \to W$ est dit hémicontinu au point u_∞ de E si pour toute suite $\{u_n\}$ convergeant vers u_∞ le long d'une ligne, la suite $\{Au_n\}$ converge faiblement vers $\{Au_\infty\}$ dans W. En d'autres termes :

$$\forall v \in E, \forall \{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}, \lambda_n \to 0, A(u_\infty + \lambda_n v) \rightharpoonup Au_\infty \quad dans \quad W$$

Si A est hémicontinu en tout point de E on dit qu'il est hémicontinu sur E. Dans les espaces réflexifs et pour $W = E'$, et en passant du sequentiel au continu, on peut définir l'hémicontinuité sur E en exigeant que : $\forall u, v, w \in E$, l'application

$$\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\lambda \to \langle A(u + \lambda v), w\rangle$$

est continue.

Théorème 1.5.

Soient E un Banach réflexif et $A : E \to E'$ un opérateur

- *borné,*
- *hémicontinu, -*
- *coercif,*
- *monotone.*

Alors,

$$\forall f \in E', \quad \exists u \in E \quad tel\ que \quad Au = f \tag{1.5.1}$$

Chapitre 2

Équations p – Laplacian

On va étudie dans ce chapitre quelques résultats d'existence classiques, pour des solutions faibles aux problèmes de Dirichlet qui concerne les opérateurs elliptiques non linéaires

Dans la suite Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N, N \geq 2$; $1 < p < N$.

On considère le problème elliptique non linéaire suivant :

$$(pb) \begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{2.0.1}$$

Où $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$

2.1 Existence des solutions

Théorème 2.1.

Le problem (2.0.1) admet une solution unique $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

Démonstration.

Soit l'opérateur A défine par

$A : \quad W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$

$u \to -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$

on appliquer le théorème (1.5) a l'opérateur A.

on procédé de en Quatre étapes

•**Étape 1** A est borné.

Soient $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$,soit $\rho_1 > 0 \;\; v \in B_{\rho_1}(0)$

$$\begin{aligned} |\langle A(v), u\rangle| &= \left| \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla u \; dx \right| \leq \int_\Omega \big||\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla u\big| \; dx \\ &\leq \int_\Omega \big|\nabla v\big|^{p-1} |\nabla u| \; dx \\ &\leq \|\nabla v\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|v\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

Et

$$\|A(v)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \sup\{|\langle A(v), u\rangle| \quad ; \quad \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq 1\} \leq \|v\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \rho_1^{p-1} = \rho_2$$

comme $\|A\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \rho_2 \quad$ donc $\quad A(B_{\rho_1}(0)) \subset B_{\rho_2}(0)$

•**Étape 2** A est hémicontinu

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, u, v et $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, soit $\{\lambda_n\}$une suit réelle telle que $\lambda_n \to 0$

On montre que :

$$\forall w \in W_0^{1,p}(\Omega) \; , \quad \langle A(u + \lambda_n v), w\rangle \to \langle Au, w\rangle$$

on a :

$$\langle Au, w\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w \; dx$$

Alors :

$$\begin{aligned} \langle A(u + \lambda_n v), w\rangle &= \int_\Omega |\nabla(u + \lambda_n v)|^{p-2}\nabla(u + \lambda_n v)\nabla w \; dx \\ &= \int_\Omega |\nabla(u + \lambda_n v)|^{p-2}(\nabla u + \lambda_n \nabla v)\nabla w \; dx \\ |\nabla u + \lambda_n v|^{p-2}(\nabla u + \lambda_n \nabla v)\nabla w &\to |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w \qquad p.p \end{aligned}$$

on suppose que $|\lambda_n| \leq 1$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla(u + \lambda_n v)|^{p-2}\nabla(u + \lambda_n v)\nabla w \; dx &= \int_\Omega |\nabla(u + \lambda_n v)|^{p-1}|\nabla w| \; dx \\ &\leq \int_\Omega \Big[|\nabla u| + |\lambda_n||\nabla v|\Big]|^{p-1}|\nabla w| \; dx \\ &\leq \int_\Omega \Big[|\nabla u| + |\nabla v|\Big]|^{p-1}|\nabla w| \; dx \end{aligned}$$

en utilisant (1.3) et

$$\begin{aligned}\Big||\nabla(u+\lambda_n v)|^{p-2}\nabla(u+\lambda_n v)\nabla w\Big| &\leq \tfrac{|\nabla w|^p}{p}+\tfrac{[\ |\nabla u|+|\nabla v|\ ]^{p'}}{p'}\\ &\leq \tfrac{1}{p}|\nabla w|^p+\tfrac{\max(1,2^{p-1})}{p'}\Big(|\nabla u|^p+|\nabla v|^p\Big)\end{aligned}$$

et nous avons $u,v,w\in W_0^{1,p}(\Omega)$ donc :

$$\frac{1}{p}|\nabla w|^p+\frac{\max(1,2^{p-1})}{p'}\Big(|\nabla u|^p+|\nabla v^p|\Big)\in L^1$$

D'après La convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{n\to+\infty}\langle A(u+\lambda_n v),w\rangle=\langle Au,w\rangle$$

•**Étape 3** A est coercif.

$$\langle A(v),v\rangle=\int_\Omega|\nabla v|^{p-2}\nabla v^2\ dx\geq\int_\Omega|\nabla v|^p\ dx$$

alors :

$$\frac{\langle A(v),v\rangle}{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}}\geq\|v\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

donc si$\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\to+\infty$ .Alors $\frac{\langle A(v),v\rangle}{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}}\to+\infty$

•**Étape 4** A est strictement monotone

$$\begin{aligned}\langle Au-Av,u-v\rangle &=\int_\Omega(|\nabla u|^{p-2}\nabla u-|\nabla v|^{p-2}\nabla v)(\nabla u-\nabla v)\ dx\\ &\geq\begin{cases}C_1\displaystyle\int_\Omega|\nabla u-\nabla v|^p\ dx & \text{si}\quad p\geq 2\\ C_2\displaystyle\int_\Omega\frac{|\nabla u-\nabla v|^2}{(|\nabla u|+|\nabla v|)^{2-p}}\ dx & \text{si}\ \ 1<p<2\end{cases}\end{aligned}$$

avec $C_1=2^{2-p}$

et on a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega|\nabla u-\nabla v|^p\ dx &=\int_\Omega\frac{|\nabla u-\nabla v|^p}{|\nabla u|+|\nabla v|)^{\frac{p(2-p)}{2}}}(|\nabla u|+|\nabla v|)^{\frac{p(2-p)}{2}}\ dx\\ &\leq\left(\int_\Omega\frac{|\nabla u-\nabla v|^2}{|\nabla u|+|\nabla v|)^{(2-p)}}\ dx\right)^{\frac{p}{2}}\left(\int_\Omega(|\nabla u|+|\nabla v|)^p\ dx\right)^{\frac{2-p}{2}}\\ &\leq\left(\int_\Omega\frac{|\nabla u-\nabla v|^2}{|\nabla u|+|\nabla v|)^{(2-p)}}\ dx\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

donc :

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u - \nabla v|^2}{|\nabla u| + |\nabla v|)^{(2-p)}}\, dx \geq C_1 \Big(\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^p \, dx \Big)^{\frac{2}{p}} = C_1 \|\nabla u - \nabla v\|^2_{L^p(\Omega)}$$

alors ;

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq \begin{cases} C_1 \|\nabla u - \nabla v\|^p_{L^p(\Omega)} & \text{si} \quad p \geq 2 \\ C_2 \|\nabla u - \nabla v\|^2_{L^p(\Omega)} & \text{si} \quad 1 < p < 2 \end{cases} > 0$$

■

2.2 Régularité de solutions

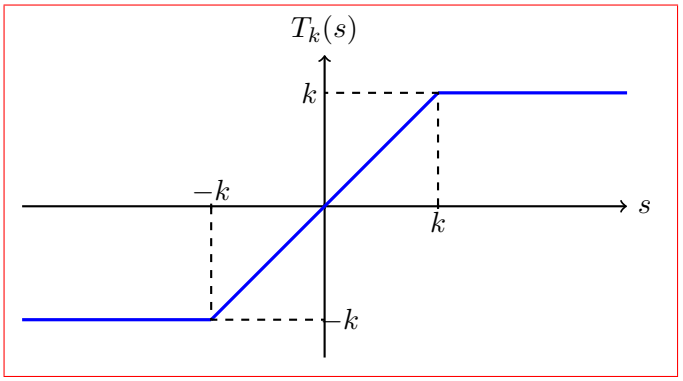
On va étudie dans cette section la régularité de solutions du problème (pb) dans le cas régulier ,cet à dire ,le cas de $f \in L^m(\Omega)$ avec $m \geq p^{\star'}$, dans ce cas, l'injection de Sobolev assure que $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, maintenant on a au moins une solution faible $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ pour le problème (pb) les résultats sont résumées dans le tableau ci dessous :

$f \in L^m(\Omega)$	$m > N/p$	$u \in L^\infty$
	$N/p > m \geq p^{*'}$	$u \in L^{m_1}(\Omega)$
	$m = N/p$	$\forall\ \lambda > 0 : \quad e^{\lambda \lvert u \rvert} \in L^{p^*}(\Omega)$

où $m_1 = \frac{N(p-1)m}{N-pm}$, $p^* = \frac{Np}{N-p}$ et $p^{*'} = \frac{Np}{(p-1)N+p}$.

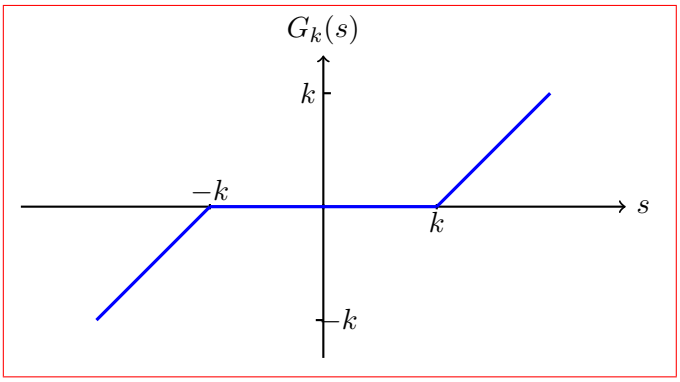
Dans toute la suite, pour tout $k > 0$, on note

$$T_k(s) = \begin{cases} -k, & s < -k, \\ s, & |s| \leq k, \\ k, & s > k, \end{cases} \tag{2.2.1}$$



et

$$G_k(s) = s - T_k(s) = \begin{cases} s+k, & s < -k, \\ 0, & |s| \leq k, \\ s-k, & s > k. \end{cases} \tag{2.2.2}$$



De plus si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, on note

$$g(k) = \int_\Omega G_k(f) \quad ; \qquad A_k = \{|f| > k\} \quad \text{et} \quad C_k = \{|f| < k\}$$

pour trouver les solutions des problèmes elliptiques étudie ,on prend $\varphi(u)$comme fonction test $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Selon des hypothèses sur φ, on a $\varphi(u)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 2.2. ***(Stampacchia)***

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p < +\infty$. Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux telle que $\varphi(0) = 0$ et φ' est bornée sur $\mathbb{R}$. Alors $\varphi(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$,et

$$\nabla\varphi(u) = \nabla u \cdot \varphi(u) \quad p.p. \quad dans \quad \Omega$$

Démonstration.

voir [8] ■

Lemme 2.1.

Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Alors $\nabla G_k(u) = \nabla u \cdot I_{A_k}$ et $\nabla T_k(u) = \nabla u \cdot I_{C_k}$ p.p. dans Ω.
avec $A_k(u) = \{|u| > k\}$

Preuve.

On a : $G_k(0) = T_k(0) = 0$, $G_k'(s) = I_{\{|s|>k\}}(s)$ et $T_k'(s) = I_{\{|s|\leq k\}}(s)$, et comme $G_k(s)$ et $T_k(s)$ sont lipschitziennes, alors le théorème 2.2 implique le résultat. ■

Lemme 2.2.

Soit $f \in L^1(\Omega)$. Alors $g(k)$ est différentiable p.p. et $g'(k) = -|A_k|$.

tell que $A_k(u) = \{|u| > k\}$

Preuve.

Posons $A_k^+ = \{w > k\}$, $A_k^- = \{w < k\}$, $g_1(k) = \int\limits_{A_k^+} (w-k)$ et $g_2(k) = \int\limits_{A_k^-} (w-k)$.
Les fonctions g_1 et g_2 sont monotones, donc elles sont différentiables p.p., d'où g est différentiable p.p.. Soit $h \in \mathbb{R}_+$, alors

$$\begin{aligned} \frac{g_1(k+h) - g_1(k)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int\limits_{A_{k+h}^+} (w-k-h)\, dx - \int\limits_{A_k^+} (w-k) \right) \\ &= -\int\limits_{\Omega} I_{A_{k+h}^+} - \frac{1}{h} \int\limits_{\{k<w\leq k+h\}} (w-k). \end{aligned}$$

Par conséquence,

$$g_1'(k) = \lim_{h\to 0} \frac{g_1(k+h) - g_1(k)}{h} = -\lim_{h\to 0} \int\limits_{\Omega} I_{A_{k+h}^+}\, dx = -|A_k^+|.$$

De même, on obtient que $g_2'(k) = -|A_k^-|$, d'où $g'(k) = -|A_k|$. ∎

Lemme 2.3.

Soit $f \in L^1$. On suppose qu'il existe $\alpha > 1$, $C > 0$ et $k_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $k \geq k_0$, on a $g(k) \leq C|A_k|^\alpha$. Alors $f \in L^\infty(\Omega)$.

Preuve.

En utilisant le lemme 2.2, on obtient

$$g(k) \leq C[-g'(k)]^\alpha,$$

c'est-à-dire,

$$g'(k)[g(k)]^{-\frac{1}{\alpha}} \leq -\frac{1}{C^{\frac{1}{\alpha}}}. \tag{2.2.3}$$

Par l'intégration sur (k_0, k), on obtient

$$-\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{k-k_0}{C^{\frac{1}{\alpha}}} \geq g(k)^{1-\frac{1}{\alpha}} - g(k_0)^{1-\frac{1}{\alpha}}.$$

Par suite, pour $k > k_0$, on obtient

$$g(k)^{1-\frac{1}{\alpha}} \leq g(k_0)^{1-\frac{1}{\alpha}} - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{k-k_0}{C^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Pour $h_0 = k_0 + \frac{C^{\frac{1}{\alpha}} g(k_0)^{1-\frac{1}{\alpha}}}{1-\frac{1}{\alpha}}$, on a $g(h_0) = 0$, c'est-à-dire,

$$|f| \leq h_0 = k_0 + \frac{C^{\frac{1}{\alpha}} g(k_0)^{1-\frac{1}{\alpha}}}{1-\frac{1}{\alpha}}.$$

D'où

$$||f||_{L^\infty} \leq h_0 = k_0 + \frac{C^{\frac{1}{\alpha}} g(k_0)^{1-\frac{1}{\alpha}}}{1-\frac{1}{\alpha}} < +\infty.$$

■

Proposition 2.4.

Soient f une fonction mesurable définie sur Ω et $\beta > 0$. Alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{\beta k}|A_k| < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \int_\Omega e^{\beta|f|} < +\infty.$$

Preuve.

On observe que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{\beta k}|A_k| = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{\beta k} \sum_{i=k}^{+\infty} |B_i| = \sum_{i=0}^{+\infty} |B_i| \sum_{k=0}^{i} e^{\beta k}, \tag{2.2.4}$$

où $B_i = \{i < |f| < i+1\}$. Puisque $t \mapsto e^{\beta t}$ croissante et continue, alors

$$\sum_{k=k_0}^{n} e^{\beta k} \leq \int_{k_0}^{n+1} e^{\beta t}\, dt. \tag{2.2.5}$$

En combinant (2.2.4) et (2.2.5), on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} e^{\beta k}|A_k| &= \sum_{i=0}^{+\infty} |B_i| \sum_{k=0}^{i} e^{\beta k} \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} |B_i| \sum_{j=-1}^{i-1} e^{\beta(j+1)} \\
&\geq \sum_{i=0}^{+\infty} |B_i| \int_{-1}^{i} e^{\beta t}\, dt \\
&\geq \sum_{i=0}^{+\infty} |B_i| \Big[\frac{e^{i\beta} - e^{\beta}}{\beta}\Big] \\
&\geq \frac{1}{\beta} \sum_{i=0}^{+\infty} \int_{|B_i|} [e^{\beta(|f|-1)} - e^{-\beta}] \\
&\geq \frac{e^{-\beta}}{\beta} \int_\Omega [e^{\beta|f|} - 1],
\end{aligned}$$

et donc $\int_\Omega e^{\beta|f|} < +\infty$. ■

Proposition 2.5.

Soit f une fonction mesurable définie sur Ω. On suppose qu'il existe $\gamma, \theta > 0$, $k_0 \in \mathbb{N}$, tels que

$$|A_k| \leq \frac{\theta}{ke^{\gamma k}}, \quad \forall\ k \geq k_0. \tag{2.2.6}$$

Alors pour tout $\beta < \gamma$, on a

$$\int_\Omega e^{\beta|f|} < \infty.$$

Preuve.

L'inégalité (2.2.6) que ce trouve dans 2.5 , implique

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} e^{\beta k}|A_k| \leq \sum_{k=k_0}^{+\infty} e^{\beta k}\frac{\theta}{ke^{\gamma k}} < +\infty,$$

par suite, la proposition 2.4 implique le résultat. ∎

Proposition 2.6. *Soit $p \in]1, +\infty)$. Alors pour tout $t \geq 0$, $Q > 1$, on a*

$$(Q-1)|t^p - 1| \leq Q(Q-1)|t-1|^p + 1.$$

Proposition 2.7.

Soit $a, b > 0$. Alors pour tout $\alpha > 0$, on a

$$(a+b)^\alpha \leq \max\{1, 2^{\alpha-1}\}(a^\alpha + b^\alpha).$$

Théorème 2.3.

Soit $f \in L^m(\Omega)$ avec $m > N/p$. Alors toute solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ du problème (pb) est bornée.

Démonstration.

On prend $v = G_k(u)$ comme une fonction test dans (1.5.1), on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla G_k(u)\ dx = \int_\Omega f\ G_k(u)\ dx. \tag{2.2.7}$$

premièrement, en utilisant l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla G_k(u)\ dx &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u \cdot I_{A_k}\ dx \\
&\geq \int_\Omega |\nabla u|^p I_{A_k}\ dx \\
&\geq \int_\Omega |\nabla G_k(u)|^p\ dx \\
&\geq S^p ||G_k(u)||^p_{L^{p^*}(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

deuxièmement, par deux applications de l'inégalité de Hölder, l'une avec l'exposant p^* et l'autre avec $\frac{m}{p^{*\prime}}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f\ dx\ G_k(u) &\leq \int_{A_k} |f|\ |G_k(u)|\ dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |G_k(u)|^{p^*}\ dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\int_{A_k} |f|^{p^{*\prime}}\ dx\right)^{\frac{1}{p^{*\prime}}} \\
&\leq ||G_k(u)||_{L^{p^*}(\Omega)} \left(\int_\Omega |f|^{p^{*\prime}} I_{A_k}\ dx\right)^{\frac{1}{p^{*\prime}}} \\
&\leq ||G_k(u)||_{L^{p^*}(\Omega)} \left(\int_\Omega |f|^{p^{*\prime}\frac{m}{p^{*\prime}}}\ dx\right)^{\frac{1}{p^{*\prime}}\frac{p^{*\prime}}{m}} |A_k|^{[1-\frac{p^{*\prime}}{m}]\frac{1}{p^{*\prime}}} \\
&\leq ||G_k(u)||_{L^{p^*}(\Omega)} ||f||_{L^m(\Omega)} |A_k|^{[\frac{1}{p^{*\prime}}-\frac{1}{m}]}.
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

En combinant (2.2.7), (2.2.8) et (2.2.9), on obtient

$$||G_k(u)||_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \left(\frac{||f||_{L^m(\Omega)}}{S^p}\right)^{\frac{1}{p-1}} |A_k|^{[\frac{1}{p^{*\prime}}-\frac{1}{m}]\frac{1}{p-1}}. \tag{2.2.10}$$

En utilisant (2.2.10) et l'inégalité de Hölder avec l'exposant p^*, on obtient

$$\begin{aligned}
g(k) &= \int_\Omega |G_k(u)|\ dx = \int_\Omega |G_k(u)| I_{A_k}\ dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |G_k(u)|^{p^*}\ dx\right)^{\frac{1}{p^*}} |A_k|^{\frac{1}{p^{*\prime}}} \\
&\leq ||G_k(u)||_{L^{p^*}(\Omega)} |A_k|^{\frac{1}{p^{*\prime}}} \\
&\leq \left(\tfrac{||f||_{L^m(\Omega)}}{S^p}\right)^{\frac{1}{p-1}} |A_k|^{1+\frac{1}{p-1}(\frac{p}{N}-\frac{1}{m})}.
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Si on pose $C = \left(\frac{1}{S^p}||f||_{L^m(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p-1}} > 0$ et $\gamma = 1 + \frac{1}{p-1}(\frac{p}{N} - \frac{1}{m}) > 1$, on obtient

$$g(k) \leq C\ |A_k|^\gamma.$$

Donc le lemme 2.3 assure le résultat. ∎

Remarque 2.1.

On observe que, si u vérifiant

$$\int_{A_k} |\nabla u|^p\ dx \leq \int_{A_k} f\ G_k(u)\ dx.$$

alors u est bornée.

Remarque 2.2.

Dans le théorème 2.3, la condition $m > N/p$, implique

$$1 + \frac{1}{p-1}\Big(\frac{p}{N} - \frac{1}{m}\Big) > 1.$$

Théorème 2.4.

Soit $f \in L^m(\Omega)$ avec

$$N/p > m \geq p^{*'}. \tag{2.2.12}$$

Alors toute solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ du problème (pb), vérifiant

$$||u||^{p-1}_{L^{m_1}(\Omega)} \leq C\ ||f||_{L^m(\Omega)}, \qquad où\ \ m_1 = \frac{N(p-1)m}{N-pm}.$$

Démonstration.

Soit $\lambda > 0$, en prenant $v = |T_k(u)|^{p\lambda}T_k(u)$ comme une fonction test dans (1.5.1), on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(|T_k(u)|^{p\lambda}T_k(u)) \ = \int_\Omega f|T_k(u)|^{p\lambda}T_k(u). \tag{2.2.13}$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(|T_k(u)|^{p\lambda}T_k(u))\ dx &= (p\lambda+1)\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u^2 |T_k(u)|^{p\lambda}\ I_{C_k}\ dx \\
&\geq (p\lambda+1)\int_\Omega |T_k(u)|^{p\lambda}|\nabla u|^p I_{C_k}\ dx \\
&\geq (p\lambda+1)\int_\Omega \Big||T_k(u)|^{\lambda}\nabla T_k(u)\Big|^p\ dx \\
&\geq \frac{p\lambda+1}{(\lambda+1)^p}\int_\Omega \Big|\nabla(|T_k(u)|^{\lambda}T_k(u))\Big|^p\ dx,
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(|T_k(u)|^{p\lambda}T_k(u))\ dx \geq \frac{S^p(p\lambda+1)}{(\lambda+1)^p}\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{(\lambda+1)p^*}\ dx\right)^{\frac{p}{p^*}}. \tag{2.2.14}$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Hölder avec l'exposant m, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f|T_k(u)|^{p\lambda}T_k(u)\ dx &\leq \left(\int_\Omega \Big||T_k(u)|^{p\lambda}T_k(u)\Big|^{m'}\ dx\right)^{\frac{1}{m'}} ||f||_{L^m(\Omega)} \\
&\leq \left(\int_\Omega |T_k(u)|^{(p\lambda+1)m'}\ dx\right)^{\frac{1}{m'}} ||f||_{L^m(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

En combinant (2.2.13), (2.2.14) et (2.2.15), on obtient

$$\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{(\lambda+1)p^*}\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \frac{(\lambda+1)^p}{S^p(p\lambda+1)}\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{(p\lambda+1)m'}\right)^{\frac{1}{m'}} ||f||_{L^m(\Omega)}. \tag{2.2.16}$$

En prenant $\lambda = \frac{p^*-m'}{m'p-p^*}$ dans l'inégalité (2.2.16), on obtient

$$\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{m_1}\, dx\right)^{\frac{p-1}{m_1}} \leq \frac{(\lambda+1)^p}{S^p(p\lambda+1)}||f||_{L^m(\Omega)},$$

et alors

$$||T_k(u)||^{p-1}_{L^{m_1}(\Omega)} \leq C\ ||f||_{L^m(\Omega)}\ , \qquad \forall\ k \geq 0.$$

La semi-continuité inférieure de $||\cdot||_{L^{m_1}(\Omega)}$ implique le résultat. ∎

Remarque 2.3. *Dans le théorème 2.4, on a la condition (2.2.12) implique*

$$m_1 = \frac{N(p-1)m}{N-pm} > 1,$$

et

$$\lambda = \frac{p^*-m'}{m'p-p^*} > 0.$$

Théorème 2.5.

Soit $f \in L^{\frac{N}{p}}(\Omega)$. Alors pour toute solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ du problème (pb), on a

$$e^{\lambda|u|} \in L^{p^*}(\Omega)\ , \qquad \forall\ \lambda > 0.$$

Démonstration.

On prend $v = [e^{p\lambda|G_k(u)|}-1]\,\mathrm{sign}(G_k(u))$ comme une fonction test dans (1.5.1). D'une part, implique

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla([e^{p\lambda|G_k(u)|}-1]\,\mathrm{sign}(G_k(u)))\ dx &= p\lambda\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u(\nabla G_k(u))e^{p\lambda|G_k(u)|}\ dx\\ &\geq p\lambda\int_\Omega |\nabla G_k(u)|^p e^{p\lambda|G_k(u)|}\ dx\\ &\geq \frac{p}{\lambda^{p-1}}\int_\Omega \left|\nabla(e^{\lambda|G_k(u)|}-1)\right|^p dx.\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla([e^{p\lambda|G_k(u)|}-1]\,\mathrm{sign}(G_k(u)))\ dx \geq \frac{pS^p}{\lambda^{p-1}}\left(\int_\Omega \left|e^{\lambda|G_k(u)|}-1\right|^{p^*} dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \tag{2.2.17}$$

D'autre part, on utilise la proposition 2.6 et l'inégalité de Hölder avec l'exposant N/p, donc pour tout $Q > 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f\,[e^{p\lambda|G_k(u)|}-1]\,\mathrm{sign}(G_k(u))\,dx &\leq \int_\Omega |f|\,|e^{p\lambda|G_k(u)|}-1|\,dx \\
&\leq \int_{A_k} |f|\left(Q|e^{\lambda|G_k(u)|}-1|^p+\frac{1}{Q-1}\right)\,dx \\
&\leq Q\int_{A_k}|f|\,|e^{\lambda|G_k(u)|}-1|^p\,dx+\frac{1}{Q-1}\int_\Omega |f|\,dx \\
&\leq Q||f||_{L^{\frac{N}{p}}(A_k)}\left(\int_{A_k}|e^{\lambda|G_k(u)|}-1|^{\frac{Np}{N-p}}\,dx\right)^{\frac{N-p}{N}}+\int_\Omega\frac{|f|}{Q-1}\,dx \\
&\leq Q||f||_{L^{\frac{N}{p}}(A_k)}\left(\int_\Omega|e^{\lambda|G_k(u)|}-1|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{p}{p^*}}+\frac{1}{Q-1}\int_\Omega|f|\,dx.
\end{aligned}$$

En combinant (2.2.17) et la dernière inégalité, on obtient

$$\left(\frac{pS^p}{\lambda^{p-1}}-Q||f||_{L^{\frac{N}{p}}(A_k)}\right)\left(\int_\Omega\left|e^{\lambda|G_k(u)|}-1\right|^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}}\leq\frac{1}{Q-1}\int_\Omega|f|\,dx. \tag{2.2.18}$$

Comme $\lim\limits_{k\to\infty}||f||_{L^{\frac{N}{p}}(A_k)}\to 0$, alors il existe k_λ, tel que

$$\frac{pS^p}{\lambda^{p-1}}-Q||f||_{L^{\frac{N}{p}}(A_k)}>0\ ,\qquad\forall\ k\geq k_\lambda.$$

Donc, pour tout $k\geq k_\lambda$, la suite $\{e^{\lambda|G_k(u)|}-1\}$ est bornée dans $L^{p^*}(\Omega)$. D'abord, on va montrer que $e^{\lambda|u|}\in L^{p^*}(\Omega)$. Pour $k\geq k_\lambda$, on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\left(e^{\lambda|u|}\right)^{p^*}dx &= \int_\Omega\left(e^{\lambda|T_k(u)+G_k(u)|}\right)^{p^*}dx \\
&\leq \int_\Omega\left(e^{\lambda k}[e^{\lambda|G_k(u)|}-1]+e^{\lambda k}\right)^{p^*}dx
\end{aligned}$$

en utilisant la proposition 2.7, on obtient

$$\int_\Omega\left(e^{\lambda|u|}\right)^{p^*}dx\leq 2^{p^*-1}e^{\lambda kp^*}\int_\Omega\left(e^{\lambda|G_k(u)|}-1\right)^{p^*}dx+2^{p^*-1}e^{\lambda kp^*}|\Omega|<+\infty.$$

D'où le résultat. ■

Chapitre 3

Équations anisotropes

On va voire dans ce chapitre quelques résultats d'existence classiques pour des solutions faibles aux problèmes de Dirichlet qui concerne les opérateurs elliptiques non linéaires anisotrope . Par la suite Ω est considéré comme un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$,$N \geq 2$; $1 < p_i \leq N$ $,i = 1, \ldots, N$ avec $\overrightarrow{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$.

On considère le problème elliptique non linéaire suivant :

$$(pb) \quad \begin{cases} -\sum_{i=1}^{N} \partial_i [|\partial_i u|^{p_i - 2} \partial_i u] = f & \text{dans } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{3.0.1}$$

Où $f \in W^{-1,\overrightarrow{p}'}(\Omega)$

3.1 Existence de solutions

Théorème 3.1.

Le problem (3.2.1) admet une solution faible unique $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$.

Démonstration.

On applique théorème1.5 a l'opérateur

$$\begin{aligned} A : \quad & W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \to W^{-1,\overrightarrow{p}'}(\Omega) \\ & u \to \sum_{i=1}^{N} \partial_i [|\partial_i u|^{p_i - 2} \partial_i u] \end{aligned}$$

•**Étape 1** A est borné.

Soient $u, v \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ tell que u borné

$$\begin{aligned}|\langle A(u), v\rangle| &= \left|\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u\nabla v\ dx\right| \leq \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\left||\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u\nabla v\right|\ dx\\ &\leq \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i u|^{p_i-1}||\partial_i v|\ dx\\ &\leq \sum_{i=1}^{N}\|\partial_i u\|^{p_i-1}_{L^{p_i}(\Omega)}\|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)}\end{aligned}$$

Et comme u borné donc

$$\begin{aligned}|\langle A(u), v\rangle| &\leq C\sum_{i=1}^{N}\|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)}\\ &= C\|\partial_i v\|_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)}\end{aligned}$$

Et $\|\partial_i v\|_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)} < 1$

Alors $\|A(v)\|_{W^{-1,\overrightarrow{p}'}(\Omega)}$ borné

•**Étape 2** A est hémicontinu

Soient u, v et $w \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$,soit $\{\lambda_n\}$une suit réelle tell que $\lambda_n \to 0$

On montrons que

$$\forall w \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \quad \langle A(u+\lambda_n v), w\rangle \to \langle Au, w\rangle$$

on a

$$\langle Au, w\rangle = \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u\partial_i w$$

Alors

$$\begin{aligned}\langle A(u+\lambda_n v), w\rangle &= \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i(u+\lambda_n v)|^{p_i-2}\partial_i(u+\lambda_n v)\partial_i w\ dx\\ &= \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i(u+\lambda_n v)|^{p_i-2}(\partial_i u+\lambda_n\partial_i v)\partial_i w\ dx\end{aligned}$$

$|\partial_i u+\lambda_n v|^{p_i-2}(\partial_i u+\lambda_n\partial_i v)\partial_i w \to |\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u\partial_i w \qquad p.p \quad \forall i$

donc

$\sum_{i=1}^{N}|\partial_i u+\lambda_n v|^{p_i-2}(\partial_i u+\lambda_n\partial_i v)\partial_i w \to \sum_{i=1}^{N}|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u\partial_i w \qquad p.p$

on se pose que $|\lambda_n| \leq 1$ nous obtenons pour tout i

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\partial_i(u+\lambda_n v)|^{p_i-2}\partial_i(u+\lambda_n v)\partial_i w\ dx &= \int_\Omega |\partial_i(u+\lambda_n v)|^{p_i-1}|\partial_i w|\ dx \\ &\leq \int_\Omega \Big[|\partial_i u|+|\lambda_n||\partial_i v|\Big]^{p_i-1}|\partial_i w|\ dx \\ &\leq \int_\Omega \Big[|\partial_i u|+|\partial_i v|\Big]^{p_i-1}|\partial_i w|\ dx,\end{aligned}$$

En utilisant (1.3) et pour tout $i = 1, \ldots, N$

$$\begin{aligned}\Big||\partial_i(u+\lambda_n v)|^{p_i-2}\partial_i(u+\lambda_n v)\partial_i w\Big| &\leq \tfrac{|\partial_i w|^{p_i}}{p_i} + \tfrac{[\ |\partial_i u|+|\partial_i v|\ ]^{p_i'}}{p_i'} \\ &\leq \tfrac{1}{p_i}|\partial_i w|^{p_i} + \tfrac{\max(1,2^{p_i-1})}{p_i'}\Big(|\partial_i u|^{p_i}+|\partial_i v|^{p_i}\Big),\end{aligned}$$

et nous avons $u, v, w \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ donc :

$$\frac{1}{p_i}|\partial_i w|^{p_i} + \frac{\max(1,2^{p_i-1})}{p_i'}\Big(|\partial_i u|^{p_i}+|\partial_i v^{p_i}|\Big) \in L^1(\Omega) \qquad \forall i = 1, \ldots, N$$

D'après la convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{n\to+\infty}\langle A(u+\lambda_n v), w\rangle = \langle Au, w\rangle$$

•**Étape 3** A est coercif.

$$\begin{aligned}\langle A(v), v\rangle &= \sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i v|^{p_i-2}\partial_i v^2\ dx \\ &\geq \sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i v|^{p_i}\ dx \\ &\geq \sum_{i=1}^N \|\partial_i v\|^{p_i}_{L^{p_i}(\Omega)}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\langle A(v), v\rangle \quad C &\geq \Big(\sum_{i=1}^N \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)}\Big)^{p_1} \\ &= C\|v\|^{p_1}_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)} \qquad C>0\end{aligned}$$

$$\frac{\langle A(v), v\rangle}{\|v\|_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)}} \geq \|v\|^{p_1-1}_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)} - \frac{N}{\|v\|_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)}}.$$

et $\frac{N}{\|v\|_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)}} \to 0$ donc si$\|v\|_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)} \to +\infty$ .Alors $\frac{\langle A(v),v\rangle}{\|v\|_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)}} \to +\infty$

•**Étape 4** A est monotone

$$\langle Au - Av, u - v\rangle = \sum_{i=1}^N \int_\Omega (|\partial_i u|^{p_i-2}\nabla u - |\partial_i v|^{p_i-2}\partial_i v)(\partial_i u - \partial_i v)\ dx$$

donc pour démontrer $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0$ il suffit de montrer

$$\int_\Omega (|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u - |\partial_i v|^{p_i-2}\partial_i v)(\partial_i u - \partial_i v)\ dx \geq 0 \qquad \forall i$$

et cette dernière a était montré dans le chapitre précédant

donc

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0$$

■

3.2 Régularité de solutions

Dans ce section on va présente quelques résultats concernant la régularité de problème suivant.

$$(pb1) \quad \begin{cases} -\sum_{i=1}^{N} \partial_i[|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u] = f \qquad \text{dans } \Omega \\ \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{3.2.1}$$

grâce aux l'injection de type de Sobolev,si $f \in L^m(\Omega)$, avec $m \geq p'_\infty$ tell que $p_\infty = \max\{p_N, \bar{p}^*\}$,$p_N = \max_i\{p_i\}$, $\bar{p}^* = \frac{\bar{p}N}{N-\bar{p}}$, $\quad \bar{p} < N$, $\frac{1}{\bar{p}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i}$; il existe une solution faible à notre problème, c'est $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ tels que

$$\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \partial_i[|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u\partial_i v\ dx = \int_\Omega fv\ dx \qquad \forall v \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \tag{3.2.2}$$

Dans la suit nous seront besoin des lemme suivantes

Lemme 3.1.

Soient p_N, p_1, p_i, avec $p_N = \max_i\{p_i\}$, $p_1 = \min_i\{p_i\}$,$p_i > 1 \qquad \forall i = 1, \ldots, N$. Soit $B > 0$, on a l'inégalité :

$$\|u\|^{p_N}_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)} \leq C^{p_N} N^{p_N-1} B^{p_N-p_1} \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i v\|^{p_i}_{L^{p_i}(\Omega)}$$

pour tout $v \in W_0^{1,1}(\Omega)$ avec :

$$\|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)} \leq B \quad \forall i = 1, 2, \ldots, N$$

Preuve.

voir [10] ■

Nous rappelons également cette inégalité de poincaré, valide pour tous $v \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$

$$\|v\|_{L^r(\Omega)} \leq \frac{|\Omega|r}{2}\|\partial_i v\|_{L^r(\Omega)} \qquad \forall\ r \geq 1 \tag{3.2.3}$$

Lemme 3.2.

soit $v \in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$ *avec* p_i *comme ci-dessus et supposant que* $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} > 1$ *et* $\bar{p} < N$.

Nous obtenons les résultats suivants :

$$\Big(\int_\Omega |v|^r \, dx \Big)^{\frac{N}{\bar{p}}-1} \leq C \prod_{i=1}^{N} \Big(\int_\Omega |\partial_i v|^{p_i} |v|^{t_i p_i} \, dx \Big)^{\frac{1}{p_i}} \tag{3.2.4}$$

pour tout r *et* $t \geq 0$ *satisfaire :*

$$\begin{cases} \frac{1}{r} = \frac{\gamma_i(N-1)-1+\frac{1}{p_i}}{t_i+1} > 0, & \forall i = 1, \ldots, N, \\ \sum_{i=1}^{N} \gamma_i = 1. \quad \gamma_i \geq 0 & \forall i = 1, \ldots, N \end{cases} \tag{3.2.5}$$

C *dépend seulement de* p_i , $i = 1, \ldots, N$ *et* N *de plus détient aussi*

si $t_i < 0, \gamma_i$ *et* r *comme dans (3.2.4) Sachant que l'intégration existe dans (3.2.4) est finie.*

Preuve.

En appliquant les techniques utilisées par Troisi [23].On obtenons :

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega |v|^r dx \right)^{N-1} &= \left(\int_\Omega |v|^{r \sum_{i=1}^{N} \gamma_i} dx \right)^{N-1} \\ &= \prod_{i=1}^{N} \int_\Omega |v|^{r\gamma_i(N-1)} dx \\ &\leq \prod_{i=1}^{N} \int_{S_i} \sup_{x_i} |v|^{r\gamma_i(N-1)} dS_i \end{aligned}$$

où S_i est l'intersection entre Ω et l'hyperplan $x_i = 0$ et $\gamma_i \geq 0$ pour tout i telle que $\sum_{i=1}^{N} \gamma_i = 1$ D'un autre côté, nous avons :

$$|v(x)|^{r\gamma_i(N-1)} \leq r\gamma_i(N-1) \int_{-\infty}^{+\infty} |v|^{r\gamma_i(N-1)-1} |\partial_i v| dx_i$$

D'où il résulte

$$\Big(\int_\Omega |v|^r \Big)^{N-1} \leq C \prod_{i=1}^{N} \int_\Omega |v|^{r\gamma_i(N-1)-1} |\partial_i v| = C \prod_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i v| |v|^{t_i} |v|^{\beta_i} \tag{3.2.6}$$

où $t_i \geq 0$ et $\beta_i > 0$. Choisissez de cette manière

$$t_i + \beta_i = r\gamma_i(N-1) - 1, \qquad \forall i = 1, \ldots, N$$

donc

$$\beta_i = -t_i + r\gamma_i(N-1) - 1, \qquad \forall i = 1, \dots, N$$

et $C = r(N-1)$, en appliquant l'inégalité de Hölder

$$\Big(\int_\Omega |v|^r\Big)^{N-1} \leq C \prod_{i=1}^{N} \Big(\int_\Omega |\partial_i v|^{p_i} |v|^{t_i p_i}\Big)^{\frac{1}{p_i}} \Big(\int_\Omega |v|^{\beta_i p_i'}\Big)^{\frac{1}{p_i'}}.$$

En prenant $r = \beta_i$, p_i' pour tout $i = 1, \dots, N$

$$\Big(\int_\Omega |v|^r\Big)^{N-1} \leq C\Big(\int_\Omega |v|^r\Big)^{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i'}} \prod_{i=1}^{N} \Big(\int_\Omega |\partial_i v|^{p_i} |v|^{t_i p_i}\Big)^{\frac{1}{p_i}}$$

Observant que $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i'} < N-1 \quad \Leftrightarrow \quad (\bar{P} < N)$ D'où le résultat (3.2.4) ∎

Remarque 3.1.

Nous notons cela si puis $\bar{p} \geq N$ *prises pour chaque* $r \geq 1, \gamma_i \geq 0$ *telle que* $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \gamma_i = 1$ *et* $t_i \geq 0$ *avec* $i = 1.2 \dots N$ *D'ailleurs dans ce cas-ci* C *dépend également de la mesure de l'ensemble* Ω

Théorème 3.2.

pour $f \in L^m(\Omega)$

i) si $m = \frac{N}{\bar{p}}$ *alors il existe une solution faible* u *de problème (3.2.1) comme interne (3.2.2)*

ii) si $m > \frac{N}{\bar{p}}$ *alors il existe une solution faible* u *de problème (3.2.1),et* $\beta > 0$ *un constant telle que*

$$\int_\Omega e^{\beta|u|} < +\infty \tag{3.2.7}$$

iii) si $(\bar{p}^*)' \leq m \leq \frac{N}{\bar{p}}$ *alors il existe une solution faible* u *de problème (3.2.1) appartenir à* $L^s(\Omega)$ *avec*

$$s = \tfrac{m\bar{p}^*(\bar{p}-1)}{m\bar{p}+\bar{p}^*-m\bar{p}^*} = \tfrac{mN(\bar{p}-1)}{N-m\bar{p}}$$

Cachan que $\frac{1}{\bar{p}} = \frac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i}$ $\bar{p}^* = \dfrac{N\bar{p}}{N-\bar{p}}$

Démonstration.

Nous prenons $v = G_k(u)$, comme fonction teste dans (2.2.2)

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i - 2} |\partial_i u| \partial_i G_k(u) = \int_\Omega f G_k(u),$$

il implique

$$\Big(\int\limits_{\Omega}|\partial_i G_k(u)|^{p_i}\Big)^{\frac{1}{p_i N}}\leq\Big(\int\limits_{\Omega}fG_k(u)\Big)^{\frac{1}{p_i N}},$$

Par conséquent, par (1.4.2) nous obtenons :

$$\|G_k(u)\|_{L^{\bar{p}^*}(\Omega)}\leq C_0\prod_{i=1}^{N}\Big(\int\limits_{\Omega}|fG_k(u)|\Big)^{\frac{1}{p_i N}}=C_0\Big(\int\limits_{\Omega}|fG_k(u)|\Big)^{\frac{1}{\bar{p}}}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder avec des exposants $\bar{p}^*$ et $(\bar{p}^*)'$, et comme $f\in L^{(\bar{p}^*)'}$, nous obtenons l'inegalité suivante :

$$C_0\Big(\int\limits_{\Omega}|fG_k(u)|\Big)^{\frac{1}{\bar{p}}}\leq C_0\Big(\int\limits_{\Omega}|G_k(u)|^{\bar{p}^*}\Big)^{\frac{1}{\bar{p}^*\bar{p}}}\Big(\int\limits_{A_k}|f|^{(\bar{p}^*)'}\Big)^{(1-\frac{1}{\bar{p}^*})\frac{1}{\bar{p}}}$$

où $A_k=\big\{|u|>k\big\}$ Par conséquent :

$$\Big(\int\limits_{\Omega}|G_k(u)|^{\bar{p}^*}\Big)^{\frac{1}{\bar{p}^*}-\frac{1}{\bar{p}^*\bar{p}}}\leq C_0\Big(\int\limits_{A_k}|f|^{(\bar{p}^*)'}\Big)^{\frac{1}{\bar{p}}-\frac{1}{\bar{p}^*\bar{p}}}$$

Notons que

$$\frac{1}{\bar{p}^*}-\frac{1}{\bar{p}^*\bar{p}}>0\Leftrightarrow\bar{p}>0$$

Cette équivalence est vraie, depuis $p_i>1$ pour tout $i=1,\dots,N$, Depuis $f\in L^m(\Omega)$ et $m>(\bar{p}^*)'$ nous avons :

$$\int\limits_{A_k}|f|^{(\bar{p}^*)'}\leq C_f|A_k|^{1-\frac{(\bar{p}^*)'}{m}}$$

Par l'inégalité de Hölder avec l'exposant $\bar{p}^*$ et $(\bar{p}^*)'$ à $\int\limits_{\Omega}|G_k(u)|$ donne :

$$\int\limits_{\Omega}|G_k(u)|\leq C_1|A_k|^{(1-\frac{(\bar{p}^*)'}{m})(1-\frac{1}{\bar{p}^*})\frac{1}{\bar{p}-1}+1-\frac{1}{\bar{p}^*}}\tag{3.2.8}$$

Soit $g(K):=\int\limits_{\Omega}|G_k(u)|$ et nous rappelons que $g(k)'=-|A_k|$ pour tout k, nous obtenons, à partir (3.2.8) que

$$g(k)^{\frac{1}{\gamma}}\leq -C_2g'(k)$$

avec $\gamma=(1-\frac{(\bar{p}^*)'}{m})(1-\frac{1}{\bar{p}^*})\frac{1}{\bar{p}-1}+1-\frac{1}{\bar{p}^*}$, par conséquent

$$1\leq C_2g(k)^{-\frac{1}{\gamma}}g'(k)=-\frac{C_2}{1-\frac{1}{\gamma}}\big(g(k)^{1-\frac{1}{\gamma}}\big)'\tag{3.2.9}$$

D'aprés i) du théorème 3.2 on a

$$1-\frac{1}{\gamma}>0$$

Si on intègre (3.2.9) de 0 à k, nous obtenons

$$k \leq -C_3\big[g(k)^{1-\frac{1}{\gamma}} - g(0)^{1-\frac{1}{\gamma}}\big]$$

c.-à-d.

$$C_3 g(k)^{1-\frac{1}{\gamma}} \leq -k + C_3\|u\|_{L^1(\Omega)}^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

Comme $g(k)$ est une fonction positive et décroissante, de la dernière inégalité que nous déduisons que là existe k_0 tels que $g(k_0) = 0$ et ainsi $u \in L^\infty(\Omega)$. Au cas où ii), depuis $m = \frac{N}{\bar{p}}$, $\gamma = 1$, nous avons :

$$1 \leq -C_2 \frac{g(k)'}{g(k)}$$

Par l'intégration de 0 à k, nous avons :

$$\frac{k}{C_2} \leq \log\left[\frac{\|u\|_{L^1(\Omega)}}{g(k)}\right]$$

$$e^{\frac{k}{c_2}} \leq \left[\frac{\|u\|_{L^1(\Omega)}}{g(k)}\right] \quad \Rightarrow \quad g(k)e^{\frac{k}{c_2}} \leq \|u\|_{L^1(\Omega)}$$

Ainsi, rappelant que

$$g(k) = \int_\Omega |G_k(u)| \geq \int_{A_{2k}} |G_k(u)| \geq k|A_{2k}| \tag{3.2.10}$$

Si $k \leq 1$ nous avons :

$$g(k) \geq k|A_{2k}| \quad \Rightarrow \quad |A_{2k}|e^{\frac{k}{c_2}} \leq \|u\|_{L^1(\Omega)}$$

Par conséquent , si $k \leq 2$ nous obtenons :

$$g(k) \geq k|A_{2k}| \quad \Rightarrow \quad |A_{2k}|e^{\frac{k}{2c_2}} \leq \|u\|_{L^1(\Omega)} \tag{3.2.11}$$

L'inégalité précédente implique que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |A_{2k}|e^{k\beta} < \infty$$

pour $0 < \beta < \frac{1}{2c_2}$

ii) est preuvé.

Nous prenons $v = |T_k(u)|^{t_j p_j} T_k(u)$ comme fonction teste dans (3.2.2) pour $j = 1, \ldots, N$, T_k est définie dans (2.2.1) et t_j sont des nombres réels positifs fixe . Nous avons

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i - 2}\partial_i u|\partial_i(|T_k(u)|^{t_j p_j} T_k(u)) = \int_\Omega f|T_k(u)|^{t_j p_j} T_k(u), \qquad \forall j = 1, \ldots, N \tag{3.2.12}$$

pour le premier terme de (3.2.12) nous avons

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u|\partial_i(|T_k(u)|^{t_jp_j}T_k(u))\geq C_0\int_{\Omega}|\partial_i T_k(u)|^{p_j}|T_k(u)|^{t_jp_j}\quad\forall j=1,\dots,N$$

Pour le deuxième terme, on applique l'inégalité de Hölder avec exposants m et m', nous obtenons

$$\int_{\Omega}f|T_k(u)|^{t_jp_j}T_k(u)\leq\Big(\int_{\Omega}|f|^m\Big)^{\frac{1}{m}}\Big(\int_{\Omega}|T_k(u)|^{(t_jp_j+1)m'}\Big)^{\frac{1}{m'}}\quad,j=1,\dots,N$$

Des inégalités précédentes, en se multipliant sur j, nous déduisons

$$\prod_{j=1}^{N}\left(\int_{\Omega}|\partial_j T_k(u)|^{p_j}||T_k(u)|^{t_jp_j}\right)^{\frac{1}{p_j}}\leq C_1\prod_{j=1}^{N}\left(\int_{\Omega}|T_k(u)|^{(t_jp_j+1)m'}\right)^{\frac{1}{m'p_j}}\quad,j=1,\dots,N\qquad(3.2.13)$$

Par (3.2.4) ,et pour $v=T_k(u)$ et $r=s$, et (3.2.13) nous avons

$$\left(\int_{\Omega}|T_k(u)|^s\right)^{\frac{1}{\bar p}-1}\leq C_2\prod_{j=1}^{N}\left(\int_{\Omega}|T_k(u)|^{(t_jp_j+1)m'}\right)^{\frac{1}{m'p_j}}\quad,j=1,\dots,N\qquad(3.2.14)$$

Puisque nous voulons également $s=(t_jp_j+1)m'$ pour tout $j=1,\dots,N$ nous devons résoudre le système suivant

$$\begin{cases}s=\frac{1+t_j}{\gamma_j(N-1)-1+\frac{1}{p_j}}>0, & \forall j=1,\dots,N,\\ s=(t_j+p_j+1)m' & \forall j=1,\dots,N,\\ \sum_{j=1}^{N}\gamma_i=1.\quad \gamma_j\geq 0,t_j\geq 0 & \forall j=1,\dots,N\end{cases}$$

A partir des deux premières équations dans le système précédent, nous avons

$$t_j=\frac{2mp_j-m-p_j-mp_j\gamma_j(N-1)}{p_j(mp_j\gamma_j(N-1)-p_jm+1)}\qquad(3.2.15)$$

et

$$\gamma_j=\Big(1-\frac{1}{p_j}\Big)\frac{N-m\bar p}{N(\bar p-1)m(N-1)}+\Big(1-\frac{1}{mp_j}\Big)\frac{1}{N-1}\quad\forall\quad j=1,\dots,N\qquad(3.2.16)$$

Il est facile de prouver que γ_j satisfaites la condition $\sum_{j=1}^{N}\gamma_j=1$ avec $\gamma_j\geq 0$, et comme $m>1$ et $p_j>1$ pour tout $j=1,\dots,N$. En outre de (3.2.15) et (3.2.16) nous avons

$$t_j=\frac{(p_j-1)[N\bar p(m-1)-m(N-\bar p)]}{p_j(p_j-1)(N-m\bar p)}=\frac{N\bar p(m-1)-m(N-\bar p)}{p_j(N-m\bar p)}$$

Par conséquent $t_j\geq 0$ pour tout $j=1,\dots,N$, on obtient

$$N-m\bar p>0\Leftrightarrow m<\frac{N}{\bar p}$$

et

$$N\bar{p}(m-1) - m(N-\bar{p}) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{N\bar{p}}{N\bar{p} - N + \bar{p}}$$

D'ailleurs, par le choix de t_j et γ_j, nous avons

$$s = \frac{mN(\bar{p}-1)}{N - m\bar{p}}$$

donc, on obtient par conséquent, grâce à (3.2.14) en notant que $\frac{N}{\bar{p}} - 1 > \frac{N}{m'\bar{p}}$, c-à-d $m < \frac{N}{\bar{p}}$

$$\|T_k(u)\|_{L^s(\Omega)} \leq C_3 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

En utilisant le lemme de Fatou 1.6, nous pouvons passer vers la limite .lorsque $k \to +\infty$ pour obtenir

$$\|u\|_{L^s(\Omega)} \leq C_4$$

■ Dans le cas $p_\infty = p_N = \max_i\{p_i\}$, on a le théorème suivant.

Théorème 3.3.

Soit $f \in L^m(\Omega)$. i) et ii) de le théorème 3.2 sont vérifies ,et

i) si $\frac{N(p_N-\bar{p})}{\bar{p}(p_N-1)} \leq m < \frac{N}{\bar{p}}$ alors il existe une solution faible u de problème (3.2.1) appartenir à $L^s(\Omega)$ avec

$$s = \frac{m\bar{p}^*(\bar{p}-1)}{m\bar{p}+\bar{p}^*-m\bar{p}^*} = \frac{mN(\bar{p}-1)}{N-m\bar{p}}$$

ii) si $p'_N \leq m < \frac{N(p_N-\bar{p})}{\bar{p}(p_N-1)}$ alors il existe une solution faible u de problème (3.2.1) appartenir à $L^{\tilde{s}}(\Omega)$ avec $\tilde{s} = m(p_N - 1)$

Remarque 3.2.

pour $p_N = \max_i\{p_i\} > \bar{p}^* = \frac{N\bar{p}}{N-\bar{p}}$, $\frac{N(p_N-\bar{p})}{\bar{p}(p_N-1)} > (\bar{p}^*)' > p'_N$ et

$$\tilde{s} = m(p_N - 1) > s = \frac{mN(\bar{p}-1)}{N-m\bar{p}} \Leftrightarrow m < \frac{N(p_N-\bar{p})}{\bar{p}(p_N-1)} \tag{3.2.17}$$

de sorte que nous ayons obtenu un meilleur sommabilité de u ,si $(\bar{p}^*)' < m < \frac{N(p_N-\bar{p})}{\bar{p}(p_N-1)}$ et un autre résultat si $p'_N < m < (\bar{p}^*)'$.

Tandis que si $(\bar{p}^*)' < m < p'_N < \frac{N}{\bar{p}}, (p_N < \bar{p}^*)$ (3.2.17) jamais les prises, ainsi nous n'améliorons pas le sommabilité de u, obtenu en théorème 3.2

Remarque 3.3.

Comme $m > p'_N$, on note que $\tilde{s} = m(p_N - 1) > p_N$, par conséquent, on améliore la régularité, déjà connue par les inclusions, de la solution faible de notre problème

Remarque 3.4.

Remarquons qu'il y a une continuité dans nos résultats de sommabilité. En fait ,

si $p_N = \bar{p}^*, m = (\bar{p}^*)'$ *nous avons*

$$\tilde{s} = (\bar{p}^*)'(\bar{p}^* - 1) = \bar{p}^*$$

et c'est le même exposant qui apparaît dans iii) du théorème 3.2 avec $m = (\bar{p}^*)'$.

Remarque 3.5.

Évidemment le cas iv) du théorème 3.3 est nouveau parce que notre opérateur est anisotrope. S' il est isotrope ,$p_N = \bar{p} = p$ *et* $p < p^*$. *D'ailleurs*

$$\frac{N(p_N - \bar{p})}{\bar{p}(p_N - 1)} = 0$$

comme nous prévoyons

Remarque 3.6.

si $f \in L^m(\Omega)$ *avec* $m \geq p'_\infty$ *il est facile de prouver que la solution faible du problème (3.2.1) est en raison unique de la propriété monotone des opérateurs anisotropes comme(0.0.1). Si nous supposons que deux solutions* u_1 *et* u_2 *existe nous avons*

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i u_1|^{p_i - 2} \partial_i u_1 \partial_i v = \int_\Omega f v \qquad \forall v \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$$

et

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i u_2|^{p_i - 2} \partial_i u_2 \partial_i v = \int_\Omega f v \qquad \forall v \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$$

On prend $v = u_1 - u_2$ *comme fonction d'essai dans les deux. Nous notons qu'un tel choix est possible depuis* $u_1, u_2 \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ *Puis, soustrayant les deux expressions, nous obtenons*

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Big[|\partial_i u_1|^{p_i - 2} \partial_i u_1 - |\partial_i u_2|^{p_i - 2} \partial_i u_2 \Big] \partial_i (u_1 - u_2) = 0$$

Puis, si $p_i \geq 2$ *pour tout* $i = 1 \ldots . N$

$$\Big[|\partial_i u_1|^{p_i - 2} \partial_i u_1 - |\partial_i u_2|^{p_i - 2} \partial_i u_2 \Big] \partial_i (u_1 - u_2) \geq C_0 |\partial_i (u_1 - u_2)|^{p_i}, \qquad \forall i = 1 \ldots N.$$

Par conséquent

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i (u_1 - u_2)|^{p_i} \leq 0$$

cela implique $u_1 = u_2$. *Un sample modification est nécessaire pour obtenir le même résultat pour* $p_i < 2$.

Remarque 3.7.

Maintenant nous considérons toujours le même problème de Dirichlet (3.2.1) mais si $m > p'_\infty$ *Nous prouvons l'existence d'une solution au sens de distribution,* $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ *tels que,*

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u \partial_i \phi = \int_\Omega f\phi \qquad \forall \phi \in C_0^1(\Omega) \tag{3.2.18}$$

si $p_\infty = \bar{p}^*$, *nous avons le théorème suivant.*

Théorème 3.4.

Soit $f \in L^m(\Omega)$

i) si $m = 1$ *alors il existe une solution au sens de distribution* u *de (3.2.1) appartint à* $W_0^{1,\overrightarrow{s}}(\Omega)$ *pour tout*

$$1 < s_i < p_i \frac{N(\bar{p}-1)}{\bar{p}(N-1)}, \qquad \forall i = 1, \dots, N$$

ii) si $1 < m < (\bar{p}^*)'$ *alors il existe une solution au sens de distribution* u *de (3.2.1) appartenir à* $W_0^{1,\overrightarrow{s}}(\Omega)$, $\overrightarrow{s} = s_1, \dots, s_N)$ *pour tout*

$$1 < s_i = p_i \frac{Nm(\bar{p}-1)}{\bar{p}(N-m)}, \qquad \forall i = 1, \dots, N$$

Démonstration.

Nous commençons par le cas $m = 1$ i). Nous considérons un ordre $\{f_n\} \subset L^\infty(\Omega)$ tels que

$$f_n \to f \in L^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \|f_n\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)}$$

On prend u_n comme des solutions aux problèmes suivants

$$u_n \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \ : \ -\sum_{i=1}^{N} \partial_i[|\partial_i u_n|^{p_i-2}\partial_i u_n] = f_n \tag{3.2.19}$$

ce qui existent en raison des résultats précédents. Nous prenons comme fonction teste dans la formulation faible des problèmes (3.2.19) $v = T_1\Big(G_k(u)\Big)$ Nous avons

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{B_{k,n}} |\partial_i u_n|^{p_i} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)}$$

pour $B_{k,n} = \big\{x \in \Omega : k < |u_n(x)| \leq k+1\big\}$ donc

$$\int_{B_{k,n}} |\partial_i u_n|^{p_i} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} \qquad \forall i = 1, \dots, N \tag{3.2.20}$$

soit $s_i = \theta p_i, \beta = \frac{(1-\theta)\bar{s}^*}{\theta}$ et $\theta \in \Big(0, \frac{N(\bar{p}-1)}{\bar{p}(N-1)}\Big)$. On utilise l'inégalité de Hölder avec l'exposent $\frac{p_i}{s_i}$ et $(\frac{p_i}{s_i})'$

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega |\partial_i u_n|^{s_i} &= \int\limits_\Omega |\partial_i u_n|^{s_i}(1+|u_n|)^{-\beta\frac{s_i}{p_i}}(1+|u_n|)^{\beta\frac{s_i}{p_i}} \\ &\leq \Big(\sum_{k=0}^{+\infty}\int\limits_{B_{k,n}} |\partial_i u_n|^{p_i}(1+|u_n|)^{-\beta}\Big)^{\frac{s_i}{p_i}}\Big(\int\limits_\Omega (1+|u_n|)^{\beta\frac{s_i}{p_i-s_i}}\Big)^{1-\frac{s_i}{p_i}}\end{aligned}$$

Puisque dessus $B_{n,k}$

$$\frac{1}{|u_n|+1} < \frac{1}{k+1}$$

nous avons

$$\int\limits_\Omega |\partial_i u_n|^{s_i} \leq \Big(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(1+k)^\beta}\int\limits_{B_{k,n}} |\partial_i u_n|^{p_i}\Big)^{\frac{s_i}{p_i}}\Big(\int\limits_\Omega (1+|u_n|)^{\beta\frac{s_i}{p_i-s_i}}\Big)^{1-\frac{s_i}{p_i}} \tag{3.2.21}$$

par (3.2.20) et depuis $\beta > 1$ nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(1+k)^\beta}\int\limits_{B_{k,n}} |\partial_i u_n|^{p_i} \leq C_0$$

par conséquent

$$\left(\int\limits_\Omega |\partial_i u_n|^{s_i}\right)^{\frac{1}{Ns_i}} \leq C_1\left(\int\limits_\Omega (1+|u_n|)^{\beta\frac{s_i}{p_i-s_i}}\right)^{(\frac{1}{s_i}-\frac{1}{p_i})\frac{1}{N}} \tag{3.2.22}$$

Maintenant nous appliquons l'inégalité anisotrope de Sobolev (1.4.2),par $r = \bar{s}^*$, pour obtenir, grâce au choix de β

$$\|u_n\|_{L^{\bar{s}^*}(\Omega)} \leq C_2\left(\int\limits_\Omega (1+|u_n|)^{\bar{s}^*}\right)^{(\frac{1}{\theta}-1)\frac{1}{\bar{p}}} \tag{3.2.23}$$

par (3.2.23) et (3.2.22),nous obtenons cela $\partial_i u_n$ est borne dans $L^{s_i}(\Omega)$ pour tout n. Ainsi nous pouvons supposer que, pour un certain u et pour un certain résultat, que nous dénotons toujours près u_n, cela

$$\partial_i u_n \to \partial_i u \quad \text{dans} \quad L^{s_i}(\Omega) \quad \forall \quad i = 1, \ldots, N \tag{3.2.24}$$

$$\partial_i u_n \to \partial_i u \quad \text{dans} \quad L^{\bar{s}}(\Omega) \tag{3.2.25}$$

$\bar{s}$, le moyen harmonique du s_i . il n'est pas suffisant pour passer vers la limite, mais nous pouvons suppose cela

$$\partial_i u_n \to \partial_i u \quad \text{dans} \quad L^{r_i}(\Omega) \quad \forall \quad r_i < s_i, \quad i = 1, \ldots, N \tag{3.2.26}$$

En fait nous prenons, pour tous $\eta > 0$ et pour tous $i = 1, \ldots, N$

$$\int\limits_{\{|u_n-u_h|\leq\eta\}} \Big(|\partial_i u_n|^{p_i-2}\partial_i u_n - |\partial_i u_h|^{p_i-2}\partial_i u_h\Big)\partial_i\Big(u_n - u_h\Big) \leq 2\eta\|f\|_{L^1(\Omega)}$$

par la fixation de i et $p_i \geq 2$ nous déduisons cela

$$\int\limits_{\{|u_n-u_h|\leq\eta\}} \Big|\partial_i\Big(u_n-u_h\Big)\Big|^{p_i} \leq C_3\eta$$

après des calculs simples, et ainsi par l'inégalité de Hölder avec des exposants $(\frac{p_i}{r_i})$ et $(\frac{p_i}{r_i})'$, nous avons

$$\int\limits_{\{|u_n-u_h|\leq\eta\}} \Big|\partial_i\Big(u_n-u_h\Big)\Big|^{r_i} \leq C_4\eta^{\frac{p_i}{r_i}} + C_5|\{|u_n-u_h|>\eta\}|^{1-\frac{r_i}{s_i}}$$

Après une modification le même résultat est obtenus également pour p_i . Nous rappelons cela u_n converge à u en mesure parce que $u_n \to u$ dans $L^{\bar{s}}(\Omega)$ Ainsi, puisque l'inégalité ci-dessus est vrai pour $\eta > 0$; nous obtenons cela $\partial_i u_n$ est un ordre de Cauchy dans $L^{r_i}(\Omega)$ Ainsi, près (3.2.26) nous avons

$$|\partial_i u_n|^{p_i-2}\partial_i u_n \to |\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega)$$

maintenant nous pouvons passer vers la limite pour $n \to \infty$ dans la formulation faible de (3.2.19) et nous obtenons que u est une solution aux sens de distribution pour l'équation (3.2.1).

Maintenant nous traitons le cas $1 < m < (\bar{p}^*)'$ par ii) de 3.4 Comme précédemment nous considérons un ordre $\{f_n\} \subset L^\infty(\Omega)$ tels que

$$f_n \to f \quad \text{dans} \quad L^m(\Omega) \quad \text{et} \quad \|f_n\|_{L^m(\Omega)} \leq \|f\|_{L^m(\Omega)}$$

et laissez u soyez les solutions des problèmes (3.2.19), $v = T_1(G_k(u))$ pour obtenir

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{B_{k,n}} |\partial_i u_n|^{p_i} \leq \int\limits_{A_{k,n}} |f_n|$$

avec $A_{k,n} = \{|u_n| > k\}$

$$\int\limits_{B_{k,n}} |\partial_i u_n|^{p_i} \leq \int\limits_{A_{k,n}} |f_n|, \qquad \forall i = 1,\dots,N \tag{3.2.27}$$

Si nous continuons comme le cas $m = 1$, nous avons

$$\int\limits_{\Omega} |\partial_i u_n|^{s_i} \leq \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \int\limits_{B_{j,n}} |f_n| \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{(1+k)^\beta}\right)^{\frac{s_i}{p_i}} \left(\int\limits_{\Omega} (1+|u_n|)^{\frac{\beta s_i}{p_i-s_i}}\right)^{1-\frac{s_i}{p_i}}$$

Depuis

$$\sum_{k=0}^{j} \frac{1}{(1+k)^\beta} \leq C_0(1+j^{1-\beta})$$

nous obtenons, par quelques calculs et en employant l'inégalité de Hölder avec les exposants m et m'

$$\int\limits_{\Omega} |\partial_i u_n|^{s_i} \leq C_1 \left[\|f_n\|_{L^m(\Omega)} \left(\int\limits_{\Omega} (1+|u_n|)^{(1-\beta)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}\right]^{\frac{s_i}{p_i}} \left(\int\limits_{\Omega} (1+|u_n|)^{\frac{\beta s_i}{p_i-s_i}}\right)^{1-\frac{s_i}{p_i}}, \quad \forall i = 1,\dots,N$$

Maintenant nous prenons $s_i = \theta p_i$ pour $\theta \in [0,1)$ tels que

$$\frac{\beta s_i}{p_i - s_i} = \frac{\beta\theta}{1-\theta} \qquad \forall i = 1, \dots, N$$

et nous choisissons β, tels que

$$\frac{\beta\theta}{1-\theta} = (1-\beta)m' \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \frac{m(1-\theta)}{m-\theta}$$

Nous obtenons

$$(1-\beta)m' = \frac{m\theta}{m-\theta}$$

et donc

$$\left(\int_\Omega |\partial_i u_n|^{s_i}\right)^{\frac{1}{s_i N}} \leq C_2 \left(\int_\Omega (1+|u_n|)^{\frac{\theta m}{m-\theta}}\right)^{(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{m})\frac{1}{N p_i}} , \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Par l'inégalité de type de Sobolev, nous avons

$$\|u_n\|_{L^{\bar{s}^*}} \leq C_3 \left(\int_\Omega (1+|u_n|)^{\frac{\theta m}{m-\theta}}\right)^{(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{m})\frac{1}{N\bar{p}}} \tag{3.2.28}$$

pour

$$\bar{s}^* = \frac{\theta\bar{p}N}{N-\theta\bar{p}}$$

Maintenant nous prenons θ, tels que

$$\frac{\theta\bar{p}N}{N-\theta\bar{p}} = \frac{\theta m}{m-\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{mN(\bar{p}-1)}{\bar{p}(N-m)}$$

et par conséquent

$$s_i = \frac{mN(\bar{p}-1)}{\bar{p}(N-m)} p_i, \qquad \forall i = 1, \dots, N$$

Nous remarquons que la valeur de θ ce que nous obtenons, est plus petit que 1, depuis $m \leq (\bar{p}^*)'$.

En outre

$$\frac{1}{\bar{s}^*} > \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{m}\right)\frac{1}{\bar{p}} \quad \Leftrightarrow \quad m < \frac{N}{\bar{p}}$$

Puis, si nous continuons comme le cas $m = 1$, nous pouvons passer vers la limite dans problèmes approche (3.2.19) pour obtenir le résultat voulu. ∎

Remarque 3.8.

Depuis $s_i > 1$, pour tout $i = 1, \dots, N$, nous déduisons cela

$$\bar{p} > 2 - \frac{1}{N}$$

dans i) et ii)

$$\bar{p} > 1 - \frac{1}{m^*}$$

comme nous attendons rappeler au cas classique, c.-à-d. $p_i = p$ *pour tout* i

Remarque 3.9.

En outre dans ce cas-ci, nous notons cela, depuis $\bar{p}^* \geq p_N$,

$$\frac{N(p_N - \bar{p})}{\bar{p}(p_N - 1)} < (\bar{p}^*)'$$

et

$$\frac{N(p_N - \bar{p})}{\bar{p}(p_N - 1)} > 1 \Leftrightarrow p_N > \frac{\bar{p}(N-1)}{N - \bar{p}} = \frac{N-1}{N}\bar{p}^*.$$

Par conséquent nous pouvons améliorer le théorème précédent si $\frac{\bar{p}(N-1)}{N-\bar{p}} < p_N \leq \bar{p}^*$

et $1 < m < \frac{N(p_N - \bar{p})}{\bar{p}(p_N - 1)}$.

En fait nous avons une solution au sens de distribution de (3.2.1) appartenir à $W_0^{1,(\tilde{s}_i)}(\Omega)$, *pour* $1 < \tilde{s}_i = p_i \frac{m}{p'_N}$ *pour tout* $i = 1, \ldots, N$ *et par la restriction à* m, *il se tient*

$$p_i \frac{m}{p'_N} > p_i \frac{mN(\bar{p}-1)}{\bar{p}(N-m)} \qquad \forall i = 1, \ldots, N \Leftrightarrow \quad m < \frac{N(p_N - \bar{p})}{\bar{p}(p_N - 1)}. \tag{3.2.29}$$

En outre dans ce cas-ci, depuis $\tilde{s}_i > 1$ *nous avons la condition suivante dessus* $\bar{p}$

$$\bar{p} > \frac{p'_N}{m}$$

D'ailleurs si $f \in L^1(\Omega), u \in W_0^{1,\vec{s}}(\Omega)$ *pour tout* $\tilde{s}_i < \frac{p_i}{p'_N}$ *et* $\bar{p} > p_N, \qquad \forall i = 1, \ldots, N$

Dans le cas $p_\infty = p_N$, *nous avons le théorème ci-dessous.*

Théorème 3.5.

Soit $f \in L^m(\Omega)$

i) si $m = 1$ *alors il existe une solution au sens de distribution* u *de (3.2.1) appartenir à* $W_0^{1,(\tilde{s}_i)}(\Omega)$ *pour tout*

$$\tilde{s}_i < \frac{p_i}{p'_N}, \qquad \text{et} \quad \bar{p} > p'_N \quad \forall i = 1, \ldots, N,$$

ii) si $1 < m < (\bar{p}^*)'$ *alors il existe une solution au sens de distribution* u *de (3.2.1) appartenir à* $W_0^{1,(\tilde{s}_i)}(\Omega)$ *pour tout*

$$\tilde{s}_i = p_i \frac{m}{p'_N}, \qquad \forall i = 1, \ldots, N$$

Conclusion

Dans ce mémoire on étudier l'existence et la régularité de solutions d'un problème elliptique non linéaire et anisotrope, dans le cas ou le second membre f appartient a un espace de lebesgue. L'étude dans ce domaine est nouvelle, il reste encore à étudier le cas ou le second membre appartient à un espace de lebesgue $L^m(\Omega)$ avec $m \leq p_\infty$

Bibliographie

[1] A. Di Castro, Existence and regularity results for anisotropic elliptic problems, Adv. Nonlin. Stud., to appear.

[2] . Boccardo, G. Croce, Elliptic partial differential equations. Existence and regularity of distributional solutions, De Gruyter Studies in Mathematics, 55, De Gruyter, Berlin,(2014).

[3] Boccardo, H. Brezis : Some remarks on a class of elliptic equations with degenerate coercivity ; Boll. Unione Mat. Ital. 6, (2003), 521–530.

[4] H. Bresis, Analyse fonctionnelle : Théorie et appliccations, Masson, (1983).

[5] I. Fragalà, F. Gazzola, B. Kawohl, Existence and nonexistence results for anisotropic quasilinear elliptic equations, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 21 (2004), 715–734.

[6] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problème'emes aux limites non linéaires, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, (1969).

[7] J. Serrin, Pathological solutions of elliptic differential equations, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 18 (1964), 385–387.

[8] K. Sbihi, Etude de quelques E.D.P. non linéaires dans L^1 avec des conditions générales sur le bord, Thesis,University of Strasbourg, France,2006.

[9] L. Boccardo, D. Giachetti, A nonlinear interpolation result with application to the summability of minima of some integral functionals, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B, to appear

[10] L. Boccardo, P. Marcellini, C. Sbordone, L^∞-regularity for variational problems with sharp non-standard growth conditions, Boll. Un. Mat. Ital. A 4 (1990), 219–225

[11] L. Boccardo, T. Galloët, L. Orsina, Existence and uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic equations with measure data, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 13 (1996), 539–551.

[12] L. Boccardo, T. Gallouët, P. Marcellini, Anisotropic equations in L^1 , Differential Integral Equations 9 (1996), 209–212.

[13] Marcellini, Un exemple de solution discontinue d'un probleme variationnel dans le cas scalaire, Preprint Istituo Mat. "U. Dini", Università di Firenze 11 (1987).

[14] M. Giaquinta,Growth conditions and regularity, a counterexample, Manuscripta Math. 59 (1987), 245–248

[15] M.Troisi,“ Teoremi di inclusione per spazi di Sobolev non isotropi.“, recerche Mat.18, 3-24, 1969

[16] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, J. L. Vazquez, An L^1-theory of existence and uniqueness of nonlinear elliptic equations, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 22 (1995), 241–273

[17] R. A. Adams, Sobolev spaces. New York : Academic Press, (1975).

[18] S. M. Nikolskii, Imbedding theorems for functions with partial derivatives considered in various metrics, Izd. Akad. Nauk SSSR 22 (1958), 321–336.

[19] S.N. Kruzhkov, I.M. Kolodii, On the theory of embedding of anisotropic Sobolev spaces, Russian Math. Surveys 38 (1983), 188–189

[20] Boccardo, G. Croce, Elliptic partial differential equations. Existence and regularity of distributional solutions, De Gruyter Studies in Mathematics, 55, De Gruyter, Berlin,

[21] H. Bresis, functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equation, Springer,

[22] I. Fragala, F. Gazzola, B. Kawohl,“ Existence and nonexistence results for anisotropic quasi- linear elliptic equations “, Ann. Inst. H. Poincar Anal. Non Linéaire, 21(5), 715-734, 2004

[23] M. Troisi, Teoremi di inclusione per spazi di Sobolev non isotropi, Ricerche Mat. 18 (1969), 3–24