RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÉRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ YAHIA FARES - MÉDÉA

FACULTÉ DE TECHNOLOGIE

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

Ordre N^{0}: …….

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du

DOCTORAT LMD

Filière : GÉNIE MÉCANIQUE

Spécialité : Mécanique Numérique et Matériaux

Présenté par :

YASSER CHIKER

Intitulé :

COMPORTEMENT MÉCANIQUE DES PLAQUES COMPOSITES HYBRIDES RENFORCÉES AVEC DES PLIS EN NANOTUBE DE CARBONE MONO-FEUILLETS

Soutenue publiquement le 10 mai 2021, devant le jury composé de :

Dr. MOURAD BACHENE (MCA)
Université Yahia Fares de Médéa
Directeur de thèse

Dr. MOHAMED KEZRANE (MCA)
Université Yahia Fares de Médéa
Présidente

Dr. MOULOUD GUEMANA (MCA)
Université Yahia Fares de Médéa
Co-directeur de thèse

Pr. RACHID TIBERKAK
Université Saad Dahlab de Blida
Examinateur

Dr. MOHAMED BENTCHIKOU (MCA)
Université Yahia Fares de Médéa
Examinateur

Année académique 2020/2021

Remerciements

Cette thèse a été rédigée de 2017 à 2021 durant mes études de troisième cycle à l'Université de Médéa. Je tiens à exprimer ma sincère gratitude à mon promoteur, Dr. MOURAD BACHENE, pour ses conseils continus, son soutien inconditionnel, ainsi que pour les encouragements et la liberté d'action dont il m'a investi pendant mes recherches. Sa motivation, sa patience et sa passion pour la mécanique ont grandement influencé le développement de mes connaissances. Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude au Dr. MOULOUD GUEMANA, pour son dévouement en tant que Co-promoteur de ma thèse de doctorat.

Je tiens à exprimer mon respect et ma gratitude aux membres du Jury : Dr. KEZRANE MOHAMED de l'Université de Médéa, Dr. RACHID TIBERKAK de l'Université de Blida et Dr MOHAMED BENTCHIKOU de l'Université de Médéa, pour avoir accepté d'examiner et d'évaluer ce travail, ainsi que pour leurs remarques et suggestions. Cela m'aidera à améliorer la qualité du manuscrit.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements au Dr. BRAHIM ATTAF (expert en matériaux composites - France), Dr. NASREDDINE AMOURA de l'Université de Médéa, Dr. REDHA REBHI de l'Université de Médéa, et au Dr. ABDESSALEM BENTERKI de l'Université de Médéa pour leur aide précieuse et leurs suggestions pratiques.

Enfin, mes sincères remerciements vont à ma famille, en particulier à ma mère et à mon père, pour leur soutien émotionnel et leurs encouragements tout au long de mes études.

Médéa, Avril 2021
YASSER CHIKER

ملخص

في ضوء الدلائل الحديثة للتقدم في مجال المواد المركبة، يتم إحراز تطور سريع في استخدام مواد ذات مقياس النانو مثل صفائح الجرافين النانوية وأنابيب الكربون النانوية كحشو للمواد المركبة من أجل تطوير هياكل عالية القوة، خفيفة الوزن ومتعددة الوظائف. في الآونة الأخيرة، ظهر نوع جديد من المواد النانوية المركبة المعروفة باسم المركبات النانوية القائمة على التعزيز المتدرج للحشو الكربوني. يعتمد مفهوم هذه العلامة الجديدة من المركبات النانوية على تشتيت الحشوات النانوية (أنابيب الكربون النانوية أو صفائح الجرافين النانوية) في مصفوفة بوليمر عبر سمك الهيكل (ألواح، قوقعيات، أو أعمدة)، إما بشكل منتظم أو متدرج (غير منتظم). ركزت معظم الأبحاث المنشورة حت الأن فقط على الشكل الخطي لتوزيع الحشوات النانوية، مما قد يؤدي إلى تنبؤ رقمي غير دقيق وذلك بسبب عدم اليقين في أنماط توزع التعزيزات النانوية أو بعبارة أخرى، عدم اليقين الناجم عن انحراف توزيع التعزيزات النانوية عن الشكل الخطي المثالي أثناء عملية التصنيع، كما أن دراسة الشكل الخطي فقط لتوزيع المعززات النانوية يمكن أن يؤدي إلى الحد من تحسين أداء هياكل المركبات النانوية القائمة على الكربون.

في هذا السياق، يدرس العمل الحالي سلوك الاهتزاز الحر لهيكل الألواح النانوية القائمة على الكربون مع الأخذ في الاعتبار كل من الشكل الخطي وغير الخطي للحشوات الموزعة بشكل غير منتظم. في هذه الدراسة تم النظر في ثلاثة أنواع منفصلة من اللوحات المركبة النانوية؛ (1) مركب متعدد الطبقات مقوى بأنابيب نانوية كربونية ذات التوزيع المتدرج، (2) مركب متعدد الطبقات مقوى بصفائح الجرافين ذات التوزيع المتدرج، و (3) ألواح هجينة تتكون من طبقات متعددة منها طبقات مركبة مدعمة بأنابيب نانوية كربونية.

هنا، يتم تحصيل المعادلات التأسيسية للوحات المركبة باستخدام نظرية القص من الدرجة الأولى. تُستخدم قاعدة الخليط لحساب معامل المرونة الفعال للوحة المدعومة بأنابيب نانوية كربونية ذات التوزيع المتدرج، بينما بالنسبة للوحة المدعومة بصفائح الجرافين ذات التوزيع المتدرج، يتم استخدام نموذج ()، على كل، يتم تحديد كثافة الكتلة ونسبة بواسون باستخدام قاعدة الخليط لـ كلا النوعين من لوحات المركبات النانوية. تم إجراء دراسة للتحقق من كفاءة النتائج المحصل عليها حيث قورنت بتلك المتوفرة في الأدبيات، وبعد ذلك، تم إجراء دراسة مفصلة تركز على تأثير (1) العدد الإجمالي لطبقات اللوحة الفرعية، (2) أجزاء الوزن وأنواع التوزيع الحشوات النانوية، (3) الشكل الهندسي للوحة، (4) عدد طبقات رقائق، (5) ترتيب طبقات الألواح الهجينة التي تحتوي أنابيب نانوية كربونية، (6) عدد طبقات اللوحة الهجينة، و (7) الشروط الحدودية على استجابات الترددات للألواح المفردة ومتعددة الطبقات القائمة على الحشوات النانوية.

أظهرت النتائج أن تغيير أنماط توزيع مواد الحشو النانوية من التوزيع المنتظم إلى الغير منتظم باستخدام النموذج المقترح من قبلنا يمكن أن يزيد أو ينقص صلابة هياكل الألواح. أيضًا، تم تقديم بعض الملاحظات التي تأخذ في الاعتبار ترتيب اللوح متعددة الطبقات وأنواع توزيع الحشوات النانوية من أجل توفير اقتراحات مفيدة حول معايير تصميم هياكل الألواح المركبة النانوية

الكلمات المفتاحية: صفائح الجرافين النانوية؛ أنابيب الكربون النانوية؛ مركب نانوي؛ المواد المتدرجة وظيفيا؛ عدم اليقين في توزيعات التعزيزات النانوية؛ سلوك الاهتزاز ؛ نظرية القص من الدرجة الأولى.

Résumé :

Au vu des récents signes de développement dans le domaine des matériaux composites, des progrès rapides sont réalisés dans l'utilisation des matériaux à l'échelle nanométrique tels que les plaquettes de Graphène (PLGs) et les nanotubes de carbone (NTCs) comme renfort pour but de développer des nanocomposites à haute résistance, légères et multifonctionnelles. Plus récemment, un nouveau type de matériau nanocomposite est apparu. Ce dernier est défini sous le nom de nanocomposite renforcé par des nanocharges à base de carbone fonctionnellement graduée. Le concept de cette nouvelle marque de nanocomposites est basé sur la dispersion des nano-renforts (NTC ou PLG) dans une matrice polymère à travers l'épaisseur des structures (plaques, coques ou poutres), soit de manière uniforme, ou fonctionnellement graduée (non-uniforme). La plupart des recherches se sont concentrées sur la forme linéaire de la distribution des nanocharges, ce qui peut conduire à une prédiction numérique imprécise en raison de l'incertitude dans les distributions des nano-renforts ou en d'autres termes, l'incertitude causée par la déviation de distribution de nano-renfort par rapport à la forme linéaire idéale pendant le processus de fabrication. De plus, étudier uniquement la distribution linéaire du nano-renfort peut conduire à une limitation dans l'amélioration des performances des structures nanocomposites à base de carbone.

Dans ce contexte, le présent travail se focalise sur le comportement vibratoire des plaques nanocomposite renforcées par des nanocharges à base de carbone, en tenant compte à la fois des formes linéaire et no-linéaire de distribution des nano-renforts. Trois types distincts de plaques nanocomposite sont considérés dans cette étude ; (i) composite multicouche renforcé par des nanotubes de carbone (CRNTC) fonctionnellement gradué, (ii) composite multicouche renforcé par des plaquettes de Graphene (CRPLG) fonctionnellement gradué, et (iii) plaques stratifiées hybrides contenant des plis renforcés par des nanotubes de carbone fonctionnellement gradué.

Les équations constitutives de la plaque sont obtenues en utilisant la théorie du cisaillement du premier ordre. La loi de mélange est utilisée pour calculer le module d'élasticité effectif pour la plaque composite renforcé par les nanotubes de carbone, tandis que pour la plaque composite renforcée par les plaquettes de Graphene. Le modèle micromécanique Halpin-Tsai est utilisé, cependant, la masse volumique et le coefficient de Poisson sont déterminés en utilisant la loi de mélange pour les deux types de plaques nanocomposites. La précision de cette modélisation est validée avec celles rapportées

dans la littérature. Par la suite, une étude paramétrique détaillée a été réalisée en se concentrant sur l'effet (i) du nombre total de sous-couches, (ii) de la fraction volumique des nanocharges et leurs types de distribution, (iii) de la géométrie de la plaque, (iv (de la configuration des plaques stratifiées, (v) du nombre de plis, et (vi) des conditions aux limites sur la réponse vibratoire des plaques nanocomposites multicouches et stratifiées renforcées par des nano-renforts fonctionnellement gradué.

Les résultats ont révélé que le passage de la distribution uniforme à celle non-uniforme en utilisant un modèle qu'on a proposé, peut considérablement augmenter ou diminuer la rigidité effective des plaques nanocomposites. De plus, quelques remarques finales sur la configuration de la plaque stratifiée et la forme de distribution des nano-renforts sont présentées afin de fournir une observation utile sur les critères de conception des plaques nanocomposites stratifiées.

Mots clés: Plaquettes de Graphène; Nanotubes de carbone; Nanocomposite; Matériaux fonctionnellement graduées; Incertitude dans les distributions des nano-renforts; Comportement vibratoire; Théorie du cisaillement du premier ordre.

Abstract:

In view of the recent signs of advancement in the field of composite materials, rapid progress is being conducted in using nano-scale materials such as Graphène platelets (GPLs) and carbon nanotubes (CNTs) as reinforcement fillers for the sake of developing high-strength, lightweight, and multifunctional nanocomposites. Most recently a new type of nanocomposite materials known as functionally graded carbon-based nanofillers reinforced composite has emerged. The concept of this new brand of nanocomposites is based on dispersing nanofillers (CNTs or GPLs) into a polymer matrix across the thickness of structures (plates, shells, or beams), either in uniform or functionally graded (non-uniform) form. Most researches have focused on the linear form of the nanofillers distribution, which may lead to an imprecise numerical prediction due to the uncertainty in the nano-reinforcement grading patterns or in other words, the uncertainty caused by the deviation of the distributed nan-reinforcement from the ideal linear form during the manufacturing process, also investigating only the linear form of the distributed nano-reinforcement can lead to a limitation in enhancing the performance of the carbon-based nanocomposites structures.

In this context, the present work studies the free vibration behavior of carbon-based nanocomposite plate structures taking into account both the linear and non-linear forms of the distributed nano-reinforcements. Three separate types of nanocomposite plates are considered in this study; (i) multilayered functionally graded carbon nanotube-reinforced composite (CNTRC), (ii) multilayered functionally graded Graphène platelets reinforced composite (GPLRC), and (iii) hybrid laminated plates containing multilayered functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plies.

Here, the governing equations are obtained employing the first-order shear deformation theory (FSDT). The rule of mixture is used to calculate the effective elastic modulus for the CNTRC plate, while for the GPLRC plate, the modified Halpin-Tsai micromechanics model is employed, however, the mass density and Poisson’s ratio are determined by using the rule of mixture for both types of nanocomposite plates. The accuracy of this modeling is validated with those reported in the open literature, thereafter, a detailed parametric study was performed focusing on the effect of (i) the total number of plate' layers, (ii) the nanofillers weight fraction and distribution types, (iii) the plate geometry, (iv) plies arrangements, (v) the number of plies, and (vi) boundary

conditions on the frequencies responses of the functionally graded carbon-based nanocomposite multilayered and laminated plates.

Results revealed that changing the nanofillers distribution patterns from a uniform to non-uniform way using a proposed layer-wise formulation model can remarkably increase or decrease the effective stiffness of the plate structures. Also, some final remarks considering the laminated plate configuration and the distribution form of the CNT fillers are presented in order to provide a useful observation on the design criteria of the laminated composite plate structures

Keywords: Graphene platelets; Carbon nanotubes; Nanocomposite; Functionally graduated materials; Uncertainty in the distributions of nano-reinforcements; Vibration behavior; First-order shear deformation theory.

Tableau des matières

Remerciements ……..I
ملخص ……II
Résumé……..... III
Abstract ……V
Tableau des matières ……VII
Liste des notations ……...X
Liste des figures ……..……XIII
Liste des Tableaux ……..……...XVII
Introduction générale ……1
Chapitre 1 Synthèse bibliographique 5
1.1 Les Matériaux composites..... 5
1.2 Les Matériaux nanocomposites..... 8
1.2.1 Nanotubes de carbone (NTC) 9
1.2.2 Plaquettes de Graphène (PLG)..... 12
1.3 Matériaux fonctionnellement graduées (FGM)..... 14
1.4 Revue de l'analyse mécanique des composites renforcés par des nanocharges fonctionnellement gradués. 17
1.4.1 Revue des structures à bas des FGM 17
1.4.2 Revue sur les plaques composites renforcées par les NTCs (CRNTC) et les plaques composites renforcées par les PLGs (CRPLG) 22
1.4.3 Revue sur les plaques composites stratifié renforcées par FG-NTC 24
1.5 L'incertitude dans les profils fonctionnellement gradués..... 26
Chapitre 2 Caractérisation géométrique et mécanique des matériaux fonctionnellement gradués 27
2.1 Introduction..... 27
2.2 Caractérisation géométrique et mécanique d'une multicouche renforcée par des nanofibres fonctionnellement gradué..... 27
2.3 Propriétés mécaniques des plaques nanocomposites 31

2.3.1 Propriétés mécaniques du nanocomposite renforcé par les NTCs 32

2.3.2 Propriétés mécaniques du nanocomposite renforcé par les PLGs 34

2.3.3 Propriétés mécaniques du composite renforcé de fibres de graphite (CRFG) 36

2.4 Caractérisation géométrique d'une plaque stratifiée hybride renforcée par des nanofibres fonctionnellement gradué 37

2.5 Comportement mécanique des plaques stratifiées 38

2.5.1 Champ des déplacements 38

2.5.2 Champ des deformations 39

2.5.3 Relation contraintes–deformations 39

2.5.4 Résultantes et moments 43

2.5.5 Equation constitutive 43

2.6 Équations fondamentales des plaques stratifiées 44

Chapitre 3 Formulation par élément finis 48

3.1 Introduction 48

3.2 Discrétisation 49

3.3 Équations du mouvement 52

3.3.1 Matrice de rigidité 55

3.3.2 Matrice de masse 56

3.4 Équations caractéristiques 57

3.5 Conditions aux limites 58

Chapitre 4 Analyse vibratoire des plaques composites renforcées par les NTCs et PLGs fonctionnellement graduées. 59

4.1 Introduction 59

4.2 Études comparatives 59

4.3 Analyse vibratoire des plaques renforcées par les NTCs 62

4.4 Analyse vibratoire des plaques renforcées par les PLGs 71

Chapitre 5 Analyse vibratoire des plaques stratifiées hybrides contenant des plis en nanotubes de carbone fonctionnellement graduées. 81

5.1 Introduction 81

5.2 Etudes comparatives..... 82

5.3 Vibration libre des plaques stratifiées hybrides 84

Conclusion générale ……....99

Liste des publications ……....101

Références ……..…103

Liste des notations

UD : Uniformément distribuée.

FG-A : Distribution forme A.

FG-V : Distribution forme V.

FG-O : Distribution forme O.

FG-X : Distribution forme X.

NTC : Nanotube de carbone.

PLG : Plaquettes de Graphène.

f_r : Fraction volumique des nanofibres.

f_m : Fraction volumique de la matrice.

f_r^* : Fraction volumique totale des nanofibres.

w_r : Fraction massique des nanofibres.

N_L : Nombre de sous-couche.

P_{in} : Indice de puissance.

η_i ($i=1,2,3$) : Paramètres d'efficacité.

$k_r, l_r, m_r, n_r,$ et p_r : Modules élastiques de Hill.

l_{PLG}, h_{PLG} et w_{PLG} : Respectivement la longueur, la largeur et l'épaisseur d'une feuille du Graphène.

$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, F_{ij}$: Coefficients de rigidité respectivement en membrane, membrane–flexion, flexion et en cisaillement.

a, b, h : Respectivement la longueur, la largeur et l'épaisseur de la plaque.

a : Vecteur des déplacements globaux.

$\ddot{a}$: Vecteur des accélérations globales.

$[B_i]$: Matrice d'interpolation des déformations.

d_i : Vecteur des déplacements nodaux.

E : L'énergie cinétique totale de la plaque.

E_1 : Module d'Young longitudinal.

E_2 : Module d'Young transversal.

G_{12} : Module de cisaillement longitudinal.

G_{13}, G_{23} : Modules de cisaillement transversal.

g : Nombre de points d'intégration.

$[J]$: Matrice Jacobienne.

$[K]$: Matrice de rigidité globale.

$[K_e]$: Matrice de rigidité élémentaire.

$[M]$: Matrice de masse globale.

$[M_e]$: Matrice de masse élémentaire.

M_x, M_y : Moments de flexion.

M_{xy} : Moment de torsion.

$[\bar{m}]$: Matrice d'inertie.

n : Nombre de pli.

NE : Nombre des éléments.

NN : Nombre de nœuds par élément.

$[N_i]$: Fonctions d'interpolations des déplacements.

N_x, N_y, N_{xy} : Résultantes en membrane.

Q_x, Q_y : Résultantes en cisaillement.

$[Q]$: Matrice de rigidité d'un pli exprimée dans le repère principal (*1, 2, 3*).

$[\bar{Q}]$: Matrice de rigidité d'un pli exprimée dans le repère du stratifié (*x, y, z*).

R : Nombre de degrés de liberté total de la structure.

$[T]$: Matrice de changement de base des contraintes.

$[T']$: Matrice de changement de base des déformations.

u, v, w : Respectivement, les déplacements suivant les directions *x, y, z*.

V : Volume de la plaque.

W_a, W_b : Coefficients de pondération.

(x,y,z) : Axes liés au stratifié.

$(1,2,3)$: Axes principaux liés au pli.

$\alpha_{i,j}$: Facteurs de correction en cisaillement.

γ : Déformation angulaire.

$\dot{\Delta}$: Vecteur vitesse.

ε : Déformation linéaire.

(ξ,η) : Système d'axes local.

θ : L'angle que font le repère (*1,2)* et le repère (*x,y)*.

θ_x, θ_y : Respectivement, les rotations de la normale à la surface moyenne autour des axes *x, y*.

κ : Déformation en courbure.

ν_{12} , ν_{21} : Coefficients de Poisson.

π : L'énergie potentielle totale de la plaque.

ρ : La masse volumique d'un pli.

σ : Contrainte normale.

τ : Contrainte tangentielle.

Ω : Surface de la plaque.

ω : Fréquence propre de vibration.

$\bar{\omega}$: Fréquence propre addimensionnelle de vibration.

Liste des figures

Figure 1.1 Phase matricielle entourant une autre phase qui est discontinue et est appelée phase dispersée. 7
Figure 1.2 Classification et types de matériaux composites. (a) Renforcé de particules dispersées, (b) Fibres discontinues renforcées (alignées), (c) Fibres discontinues renforcées (orientées au hasard), (d) Continues renforcées de fibres (alignées), (e) Continues renforcées de fibres (angle d'orientation de la fibre aligné de 0° à 90°), et (f) fibre continue renforcée (angle d'orientation de la fibre multidirectionnelle). 7
Figure 1.3 Représentation schématique de la relation entre les nanotubes et le Graphène. (Les trois rectangles peuvent être enroulés autour d'eux-mêmes). 11
Figure 1.4 Faisceau de nanotubes de carbone mono-feuillet (d = diamètre moyen des tubes) 11
Figure 1.5 Nanotubes de carbone multi-feuillets, (a) Formé de feuillets de Graphène arrangés en cylindres concentriques ; (b) Constitué d'un feuillet de Graphène enroulé en spirale. 12
Figure 1.6 (a) Feuille de Graphène en « chaise » (vert) et en « zigzag » (rouge), (b) les PLGs en chaise et (c) les PLGs en zigzag. 13
Figure 1.7 Une FGM avec les fractions volumiques des phases constituantes graduées dans une direction. 15
Figure 1.8 L'application potentielle des MFG. 16
Figure 1.9 Modèle analytique pour une couche de FGM (a) couches céramique-métal quasi-homogènes (b) variation continue de la fraction volumique de la phase matricielle. 17
Figure 1.10 La fraction volumique de métal sur toute l'épaisseur. 17
Figure 2.1 Système de coordonnées et géométrie d'une plaque fonctionnellement graduée. 28
Figure 2.2 Différents types de distribution des nanofibres 30
Figure 2.3 variation de la fraction volumique des nanocharges le long de la direction de l'épaisseur pour les types de distribution UD, FG-V, FG-Λ, FG-O et FG-X. 31

Figure 2.4 Système de coordonnées et géométrie d'une plaque stratifiée hybride parfaitement collé composée des plis renforcés par les NTCs et des plis renforcés par le graphite. 37
Figure 2.5 Schéma d'une plaque stratifiée. 38
Figure 2.6 Directions principales dans un pli. 40
Figure 2.7 Changement du repère dans un pli. 42
Figure 3.1 Élément de référence 49
Figure 4.1 Effet du nombre de sous-couches N_L sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega(b^2/h)\sqrt{\rho_m / E_m}$ pour une plaque renforcée par les NTCs (a/b=1, b/h=10 et $f_r^* = 0.11$). 64
Figure 4.2 Effet de P_{in} sur le pourcentage de changement de fréquence fondamentale $\Delta\bar{\omega}_p = (\bar{\omega}_p - \bar{\omega}_u)/\bar{\omega}_u$ d'une plaque renforcée par les NTCs (a/b=1) en fonction de la fraction volumique de NTC (f_r^*), rapport géométrique (b/h) et conditions aux limites, ((a) et (b) b/h=10, (c) et (d) b/h=20, (e) et (f) b/h=50). 68
Figure 4.3 Effet de P_{in} sur le pourcentage de changement de fréquence fondamentale $\Delta\bar{\omega}_p = (\bar{\omega}_p - \bar{\omega}_u)/\bar{\omega}_u$ d'une plaque renforcée par les NTCs (a/b=1) en fonction de la fraction volumique de NTC (f_r^*), rapport géométrique (a/b) et conditions aux limites, ((a) et (b) a/b=1.0, (c) et (d) a/b=1.5, (e) et (f) a/b=2.0). 69
Figure 4.4 Effet de différents types de distribution de NTC sur les six premiers fréquences naturelle $\bar{\omega} = \omega(b^2/h)\sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque simplement appuyée renforcée par les NTCs (b/h=5 et a/b=1). 70
Figure 4.5 Effet de différents modèles de distribution de NTC sur les six premiers fréquences naturelles $\bar{\omega} = \omega(b^2/h)\sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque encastrée renforcée par les NTCs (b/h=50 et a/b=1). 71
Figure 4.6 Effet du nombre de sous-couches N_L sur le pourcentage de changement de fréquence naturelle $\Delta\bar{\omega} = (\bar{\omega}_c - \bar{\omega}_e)/\bar{\omega}_e$ d'une plaque renforcée par les PLGs (a/b=1 et b/h=10). 72
Figure 4.7 Effet de P_{in} sur le pourcentage de changement de fréquence fondamentale $\Delta\bar{\omega}_p = (\bar{\omega}_p - \bar{\omega}_u)/\bar{\omega}_u$ d'une plaque renforcée par les PLGs (a/b=1) en fonction de la fraction volumique de PLG (w_t), rapport largeur/épaisseur (b/h) et conditions aux limites, ((a) et (b) b/h=10, (c) et (d) b/h=20, (e) et (f) b/h=50). 75

Figure 4.8 Effet du rapports longueur / épaisseur et longueur / largeur des PLGs sur le changement de fréquence naturelle $\Delta\bar{\omega}_p = (\bar{\omega}_p - \bar{\omega}_u)/\bar{\omega}_u$ des plaques renforcées par les PLGs pour différent types de distributions de PLG, et des conditions aux limites.(a) et (c) $l_{GPL}/w_{GPL} = 1.0$; (b) et (d) $l_{GPL}/w_{GPL} = 2.0$ 76

Figure 4.9 Effet de différents modèles des distributions de PLG sur les six premiers fréquences naturelles $\bar{\omega} = \omega h\sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque simplement appuyée renforcée par les PLGs (b/h=50, a/b=1 et $w_t = 1\%$). 77

Figure 4.10 Effet de différents modèles des distributions de PLG sur les six premiers fréquences naturelle $\bar{\omega} = \omega h\sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque encastrée renforcée par les PLGs (b/h=50, a/b=1 et $w_t = 1\%$). 78

Figure 4.11 Six premières déformées modales d'une plaques encastrée renforcée par les PLGs (FG-X, b/h=50, a/b=1, $w_t = 1.2\%$ et P_{in}=1.8). 79

Figure 4.12 Combinaison de conditions aux limites. 79

Figure 5.1 Pourcentage d'augmentation de la fréquence fondamentale ($\Delta\bar{\omega}=100\times(\bar{\omega}_p - \bar{\omega}_u)/\bar{\omega}_u$) d'une plaque hybride croisée ($0^0/90^0/0^0/90^0$) en fonction de l'index de puissance avec différentes conditions aux limites (b/h=10, a/b=1.0)..... 91

Figure 5.2 Pourcentage d'augmentation de la fréquence fondamentale ($\Delta\bar{\omega}=100\times(\bar{\omega}_p - \bar{\omega}_u)/\bar{\omega}_u$) d'une plaque hybride équilibrée ($45^0/-45^0/45^0/-45^0$) en fonction l'index de puissance avec différentes conditions aux limites (b/h=10, a/b=1.0). 92

Figure 5.3 Effet de l'angle d'orientation θ de nanofibre sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega (b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$ d'une plaque hybride équilibrée (θ/- θ/ θ/- θ) avec différentes valeurs de fraction volumique de NTC (SSSS, a/b=1 et b/h=10)..... 93

Figure 5.4 Effet de l'angle d'orientation θ de nanofibre sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega (b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$ d'une plaque hybride équilibrée (θ/- θ/ θ/- θ) avec différentes valeurs de fraction volumique de NTC (CCCC, a/b=1, et b/h=10)..... 93

Figure 5.5 Effet de l'angle d'orientation θ de nanofibre sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega (b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$ d'une plaque hybride équilibrée (θ/- θ/ θ/- θ) avec différents rapports largeur/épaisseur de la plaque (SSSS, a/b=1 et $f^*_{CNT} = 0.11$). 94

Figure 5.6 Effet de l'angle d'orientation θ de nanofibre sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega (b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$ d'une plaque hybride équilibrée (θ/- θ/ θ/- θ) avec différents rapports largeur/épaisseur de la plaque (CCCC, a/b=1 et $f^*_{CNT} = 0.11$). 94

Figure 5.7 Effet de l'angle d'orientation θ de nanofibre sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$ d'une plaque hybride équilibrée (θ/- θ/ θ/- θ) avec différentes rapports longueur/largeur de la plaque (SSSS, b/h=10 et $f^*_{CNT} = 0.11$)..... 95

Figure 5.8 Effet de l'angle d'orientation θ de nanofibre sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$ d'une plaque hybride équilibrée (θ/- θ/ θ/- θ) avec différents rapports longueur/largeur de la plaque (CCCC, b/h=1et $f^*_{CNT} = 0.11$). 96

Figure 5.9 Six premières déformées modales d'une plaque hybride équilibrée (45^0/-45^0/45^0/-45^0) simplement appuyée avec empilement [Λ-F-V-F]. (a) Mode 1, (a) Mode 2, (a) Mode 3, (a) Mode 4, (a) Mode 5, (a) Mode 6. 96

Figure 5.10 Six premières déformées modales d'une plaque hybride équilibrée (45^0/-45^0/45^0/-45^0) encastrée avec empilement [Λ-F-V-F]. (a) Mode 1, (a) Mode 2, (a) Mode 3, (a) Mode 4, (a) Mode 5, (a) Mode. 97

Liste des Tableaux

Tableau 1.1 Exemples de matériaux composites, pris au sens large. 6

Tableau 4.1 Comparaison des fréquence fondamentale no- dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_{Al_2O_3} / E_{Al_2O_3}}$ d'une plaque simplement appuyée renforcée par Al_{2O3}/Al fonctionnellement graduée avec a/b=1 et N_L=10..... 60

Tableau 4.2 Comparaison des six premières valeurs des fréquences non-dimensionnelles $\bar{\omega} = \omega (b^2/h) \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque renforcée par les NTCs fonctionnellement graduée ($f_r^* = 0.11$, b/h=10, a/b=1 et N_L=20)..... 61

Tableau 4.3 Comparaison des six premières valeurs des fréquences non-dimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque renforcée par les PLGs fonctionnellement graduée avec $w_t = 1\%$, b/h=10, a/b=1 et N_L=10. 62

Tableau 4.4 Propriétés mécaniques de la matrice PmPV et de SWCNTs [74,130]. 63

Tableau 4.5 Paramètres d'efficacités de NTC [74]. 63

Tableau 4.6 Fréquence fondamentale non- dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega (b^2/h) \sqrt{\rho_m / E_m}$ d' une plaque renforcée par les NTCs avec différentes valeurs de fractions volumiques de NTC, rapport b/h de plaque et types de distributions de NTC (SSSS, a/b=1)..... 65

Tableau 4.7 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega (b^2/h) \sqrt{\rho_m / E_m}$ d' une plaque renforcée par les NTCs avec différentes valeurs de fractions volumiques de NTC, rapport largeur/épaisseur de plaque et types de distributions de NTC (CCCC, a/b=1). 65

Tableau 4.8 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega (b^2/h) \sqrt{\rho_m / E_m}$ d' une plaque renforcée par les NTCs avec différentes valeurs de fractions volumiques de NTC, rapport longueur/Largeur de plaque et types de distributions de NTC (SSSS, b/h=10). 66

Tableau 4.9 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega (b^2/h) \sqrt{\rho_m / E_m}$ d' une plaque renforcée par les NTCs avec différentes valeurs de fractions volumiques de NTC, rapport longueur/largeur de plaque et types de distributions de NTC (CCCC, b/h=10). 66

Tableau 4.10 Propriétés mécanique de l'époxy et des nanocharges de PLG [16]..... 71

Tableau 4.11 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega h\sqrt{\rho_m / E_m}$ d' une plaque renforcée par les PLGs avec différentes valeurs de fractions massiques de PLG, rapport géométrique b/h et profiles de distributions de PLG (SSSS, a/b=1). . 73

Tableau 4.12 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega h\sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque renforcée par les PLGs avec différentes valeurs de fractions massiques de PLG, rapport géométrique b/h et profiles de distributions de PLG (CCCC, a/b=1). 74

Tableau 4.13 Cinq premières fréquences no-dimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h\sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque renforcée par les PLGs avec différents indices de puissances et conditions aux limites (FG-X, b/h=10, a/b=1 et $w_t = 1.2\%$)..... 80

Tableau 5.1 Comparaison de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega} = \omega\sqrt{\rho_c / E_c}$) d'une plaque simplement appuyée renforcée par Al/Al_2O_3 fonctionnellement graduée avec différents indice de puissances P_{in}, rapport b/h et tailles de maillage. 83

Tableau 5.2 Comparaison des six premières fréquences non-dimensionnelles ($\bar{\omega} = \omega\ (b^2/h)\sqrt{\rho^m / E^m}$) d'une plaque stratifiée croisée ($0^0/90^0/0^0/90^0/0^0$) renforcée par les NTCs avec deux types de conditions aux limites pour a/b=1, b/h=10, N_L=20 et $f_{CNT}^{*} = 0.11$ 83

Tableau 5.3 Comparaison de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega} = \omega\ (b^2/h)\sqrt{\rho^m / E^m}$) des plaques stratifiées croisées $(0^0/90^0)_n$ et équilibrées $(45^0/-45^0)_n$ renforcées par les NTCs avec différents nombre de sous-couches pour a/b=1, b/h=50, N_L=20, et $f_{CNT}^{*} = 0.11$ 84

Tableau 5.4 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega} = \omega\ (b^2/h)\sqrt{\rho^m / E^m}$) d'une plaque hybride croisée $(0^C/90^F)_n$ renforcée par les NTCs et CRFG avec différentes valeurs de fractions volumiques de NTC (a/b=1 et b/h=10)..... 85

Tableau 5.5 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega} = \omega\ (b^2/h)\sqrt{\rho^m / E^m}$) d'une plaque hybride croisée $(0^C/90^F)_n$ renforcée par les NTCs et CRFG avec différentes valeurs de rapport largeur/épaisseur de la plaque (a/b=1, $f_{CNT}^{*} = 0.11$)..... 85

Tableau 5.6 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega} = \omega\ (b^2/h)\sqrt{\rho^m / E^m}$) d'une plaque hybride croisée $(0^C/90^F)_n$ renforcée par les NTCs et CRFG avec différentes valeurs de rapport longueur /largeur de la plaque (b/h=10, $f_{CNT}^{*} = 0.11$)..... 85

Tableau 5.7 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$) d'une plaque hybride équilibrée $(45^C/\text{-}45^F)_n$ renforcée par les NTCs et CRFG avec différentes valeurs de fractions volumiques de NTC (a/b=1, b/h=10). 86

Tableau 5.8 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$) d'une plaque hybride équilibrée $(45^C/\text{-}45^F)_n$ renforcée par les NTCs et CRFG avec différentes valeurs de rapport largeur/épaisseur de la plaque (a/b=1, $f_{CNT}^{*} = 0.11$)..... 86

Tableau 5.9 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$) d'une plaque hybride équilibrée $(45^C/\text{-}45^F)_n$ renforcée par les NTCs et CRFG avec différentes valeurs de rapport longueur/largeur de la plaque (b/h=10, $f_{CNT}^{*} = 0.11$). 87

Tableau 5.10 Six premières fréquences non-dimensionnelles ($\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$) d'une plaque hybride croisée $(0^0/90^0)$ avec différentes configurations des plis (a/b=1, b/h=10, et $f_{CNT}^{*} = 0.11$)..... 87

Tableau 5.11 Six premières fréquences non-dimensionnelles ($\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$) d'une plaque hybride équilibrée $(45^0/\text{-}45^0)$ avec différentes configurations des plis (a/b=1, b/h=10, et $f_{CNT}^{*} = 0.11$). 88

Tableau 5.12 Six premières fréquences non-dimensionnelles ($\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$) d'une plaque stratifiée croisée $(0^0/90^0)$ renforcée par les NTCs avec différentes configurations des plis (a/b=1, b/h=50, et $f_{CNT}^{*} = 0.11$)..... 89

Tableau 5.13 Six premières fréquences non-dimensionnelles ($\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$) d'une plaque stratifiée $(45^0/\text{-}45^0)$ renforcée par les NTCs avec différentes configurations des plis (a/b=1, b/h=50, et $f_{CNT}^{*} = 0.11$. 90

Tableau 5.14 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$) d'une plaque hybride croisée $(0^C/90^F/0^C/90^F)$ avec différentes valeurs de l'indice de puissance et de la fraction volumique de NTC (a/b=1, b/h=10). 90

Tableau 5.15 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$) d'une plaque hybride équilibrée $(45^C/\text{-}45^F/45^C/\text{-}45^F)$ avec différentes valeurs de l'indice de puissance et de la fraction volumique de NTC (a/b=1, b/h=10). 91

Introduction générale

Au cours des dernières décennies, le développement rapide dans le domaine des structures requiert que l'on utilise des matériaux ayant des caractéristiques spécifiques élevées (bons rapports rigidité-poids et résistance-poids, faible coût d'entretien, excellente durabilité et bien d'amples qualités). Les matériaux composites à matrice polymère sont des matériaux qui répondent à ces exigences, dans lesquels ils sont intégrés dans plusieurs structures de différents secteurs industriels (constructions aérospatiales et aéronavales, transport et carrosseries, etc.), car elles permettent d'offrir aux structures concernées des avantages considérables, essentiellement en terme d'allégement, de rigidité spécifique et de résistance spécifique. Ces avantages sont généralement traduits par des bénéfices économiques (sur le plan des performances et/ou sur celui des économies de bilan d'exploitation). Ainsi, outre ces avantages, les matériaux composites présentent d'autres avantages associés aux caractéristiques physiques, variant fortement suivant les fibres ou les résines utilisées (conductivité thermique ou électrique, anisotropies diverses, tenus aux chocs, état de surface, tenue à la fatigue et résistance à la corrosion).

Avec l'avènement des nanotechnologies et des nanosciences, une nouvelle classe de composites connue sous le nom de matériau nanocomposite renfoncé par des nano-renfort fonctionnellement graduées a été émergé. Les nanocomposites sont des matériaux solides multiphasique dans lesquels au moins une des phases (généralement la phase discontinue ou renfort) présente une dimension à l'échelle nanométrique. Ces dernières années, ce type de matériau composite à attirer l'attention d'un grand nombre de chercheurs du monde entier. Ceci est révélé à travers l'énorme quantité d'investigations qui traitent le comportement mécanique des structures en poutres plaques et coques.

Pendant leur fonctionnement, les plaques en matériaux composites y compris les nanocomposite fonctionnellement graduées peuvent être soumises à diverses forces d'excitation dont la source provient de différentes origines (moteur, rotor, vent, vagues, séisme, etc.). Ces forces excitatrices peuvent causer, sous le phénomène de résonance, des effets néfastes sur le comportement structural de la plaque. Afin de permettre à cette dernière de fonctionner, sans aucun effet néfaste, dans l'intervalle d'opération

fréquentielle tout en supportant les conditions sévères auxquelles elle sera soumise pendant le service, il est nécessaire d'entreprendre une étude approfondie qui consiste à faire une analyse du comportement vibratoire de la plaque en nanocomposite dans le but de dégager l'ordre des grandeurs des paramètres modaux nécessaires (fréquences propres et déformées modales) pour mettre en évidence d'éventuels problèmes de résonance.

Malgré les nombreux avantages que présentent les matériaux nanocomposite fonctionnellement graduées, leur comportement mécanique "par exemple leurs comportement vibratoire" reste assez complexe à analyser en raison des problèmes spécifiques liés principalement à leur processus de fabrication. En raison de leur complexité, les structures nanocomposites à base de carbone fonctionnellement graduée sont assez difficiles à fabriquer selon les spécifications de conception souhaitées. Ainsi, une incertitude indésirable peut apparaître dans le processus [123,124]. Dans un tel cas, on mentionne notamment l'incertitude dans les profils de distribution des nano-renforts ou, en d'autres termes, l'incertitude provoquée par la déviation de distribution des nanocharges par rapport à la forme linéaire idéale. Étant donné que les solutions numériques rapportées ne traitent que du cas linéaire, cela peut conduire à l'obtention d'une prédiction imprécise. De plus, la dispersion des nanocharges de manière non linéaire pourrait augmenter la performance des nanostructures à base de carbone.

Dû au fait que les travaux rapportés dans la littérature (qui ont été réalisés en termes de solutions numériques) ne traitent que du cas linéaire de distribution des nanocharges, cela peut conduire à obtenir une prédiction incorrecte du comportement mécanique du nanocomposites. En outre, étudier uniquement la forme de distribution linéaire du renfort peut conduire à des limitations dans la maximisation de la résistance et du potentiel des structures nanocomposites à base de carbone. Pour cette raison, une tentative a été menée pour combler cette lacune.

Par conséquent, l'objectif principal de cette thèse est d'évaluer l'effet de l'incertitude dans le classement du nano-renfort sur le comportement de vibration libre d'une plaque composite de nanocharges à base-de-carbone fonctionnellement graduée utilisant un code des d'éléments finis maison basé sur la théorie des plaques de déformation par cisaillement du premier ordre. À cette fin, un nouveau modèle de formulation par couches qui peut fournir une solution plus précise pour l'analyse numérique est proposé et appliqué pour les nano composites à bas de charges fonctionnellement graduées. La formulation par couches proposée peut effectuer à la fois les distributions linéaire et non linéaire des

nanocharges pour quatre modèles ou profils de distribution de nanocharges, à savoir (FG-V, FG-A, FG-O et FG-X). Il vise également à étudier l'influence d'autres paramètres géométriques tels que (i) le nombre de sous-couches, (ii) la fraction volumique des nanocharges et leur type de distribution, (iii) les rapports géométriques (longueur / largeur et largeur / épaisseur de la plaque), (iv) le nombre de pli, (v) et les conditions aux limites sur les réponses vibratoires des structures en plaques nanocomposites multicouches et stratifiées à base de carbone fonctionnellement graduée.

Cette thèse est scindée en trois parties. La première partie présente une synthèse bibliographique sur le comportement statique et dynamique des matériaux nanocomposites. La deuxième partie adresses le développement des formulations mathématiques nécessaires pour étudier le comportement vibratoire des plaques nanocomposites. La dernière partie présente les résultats obtenus à partir d'une étude paramétrique détaillée sur les plaques multicouches et les plaques stratifies. En plus de ces trois parties à la fin de cette thèse, une conclusion générale de ce qui a été atteint est présenté.

Dans la première partie, le Chapitre 1 présente une revue sur les types et l'utilisations des matériaux nanocomposites. Également dans ce chapitre, une synthèse bibliographique des travaux qui ont conduit à l'analyse statique et dynamique des structures (poutres, plaques et coques) renforcées du céramique/métal fonctionnellement gradué, du nanotube de carbone fonctionnellement gradué et de la plaquette de Graphène fonctionnellement gradué ont été présentés.

Dans la deuxième partie, la caractérisation géométrique et mécanique des matériaux fonctionnellement gradués est illustrée dans Chapitre 2. En particulier, les différents types de distribution de fraction volumique des nano-renforts ont été discutés. En outre, les approches utilisées pour estimer les propriétés mécaniques de différents types de plaques nanocomposites (selon les types des nanocharges), y compris le schéma Eshelby-Mori-Tanaka, Loi de mélange et la procédure d'homogénéisation Halpin-Tsai ont été aussi discutés. Aussi ce chapitre a pour but de développer les équations fondamentales des plaques stratifiées, où la théorie utilisée est celle de déformation par cisaillement du premier ordre. Dans la même partie, le Chapitre 3 se concentre sur le développement du modèle d'éléments finis utilisé.

Dans la troisième partie, les résultats des applications numériques des plaques nanocomposites multicouches et stratifiées sont respectivement présentés dans les Chapitre 4 et Chapitre 5. Ici, l'effet de l'incertitude dans les distributions des nanocharges est profondément étudié en comparant les fréquences obtenues à partir des plaques nanocomposites renforcées par des nano-renforts distribuées de manier linéaire et celles obtenues à partir des nano-renforts distribuées de manier non-linéaire. En outre, plusieurs applications sont menées pour étudier l'effet de nombre total de sous-couches, la fraction volumique des nanocharges et leurs types de distribution, la géométrie de la plaque, la configuration des plaques stratifiées, le nombre de plis, et les conditions aux limites sur les fréquences propres des plaques nanocomposites.

PARTIE I. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE

Chapitre 1
Synthèse bibliographique

1.1 Les Matériaux composites

Dans un sens large, les matériaux composites sont réalisés à partir de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont les performances globales sont supérieures à celles des composants pris séparément. Quelques exemples de matériaux composites pris au sens large sont donnés dans le tableau 1.1.

Un matériau composite dans le cas le plus général est un matériau multi phase composé d'une ou plusieurs phases discontinues noyées dans une phase isotrope continue [1–3]. La phase discontinue est généralement plus dure et avec propriétés mécaniques plus élevé que la phase continue. La phase continue est appelée la matrice. La phase discontinue est appelée le renfort ou matériau renforçant (figure 1.1). La phase matricielle peut être métallique, céramique ou polymère, tandis que le renfort peut être en fibre synthétique (verre, carbone, aramide, etc.) ou en fibre naturelle (sisal, ramie, jute, coton, etc.) ou des particules (argile, mica, carbure de tungstène, carbure de titane, etc.) [4].

Les matrices polymères peuvent être classées comme thermodurcissables (polyester, époxy, phénolique, polyimide, silicone, etc.) ou thermoplastiques (polystyrène, polyéthylène, nylons, polyéther-éther cétone, polycarbonate, polyphénylène sulfure, etc.). Ces matrices sont les plus largement utilisées en raison de leur coût modéré, de leur bonne résistance chimique, de leur facilité de traitement et de leur faible densité [3,4]. Le renfort étant généralement plus résistant et plus dur que la matrice, les propriétés des composites sont fortement dépendantes des propriétés de leurs charges. La forme, la distribution, le contenu, la taille et la liaison interraciale matrice / charge, ainsi que l'orientation des charges, affectent fortement les propriétés initiales et à long terme (hydro, électrique, thermique et mécanique) des composites dont les performances

peuvent également être affectées par une exposition environnementale provoquant des changements de taille (ou gonflement).

En raison de leurs faibles dimensions, les charges (fibres et matériaux particulaires isométriques) sont rarement utilisées directement dans les applications d'ingénierie. Pour ces types d'applications, ils sont intégrés dans une matrice polymère. Par exemple, afin de former des composites particulaires, des particules sont incorporées dans une matrice polymère pour former les composites particulaires. En général, les matériaux composites peuvent être classés en composites renforcés de particules (composites particulaires) et en composites renforcés de fibres (composites fibreux).

La figure 1.2 illustre un schéma des types et de la classification des matériaux composites [4].

Tableau 1.1 Exemples de matériaux composites, pris au sens large.

Type de composite	Constituants	Domaines d'application
1. *Composites à matrice organique*	Résine/charges/fibres cellulosiques	Imprimerie, emballage, etc.
Papier, carton	Résine/copeaux de bois	Menuiserie
Panneaux de particules	Résine/fibres de bois	Bâtiment
Panneaux de fibres	Résines souples/tissus	Sports, bâtiment
Toiles enduites	Elastomères/bitume/textiles	Toiture, terrasse, etc.
Matériaux d'étanchéité	Caoutchouc/toile/acier	Automobile
Pneumatiques	Résine/charges/fibres de verre, de carbone, etc.	Domaines multiples
Stratifiés	Résines/microsphères	
Plastiques renforcés		
2. *Composites à matrice minérale*	Ciment/sable/granulats	Génie civil
Béton	Carbone/fibres de carbone	Aviation, espace, sports, bio-médecine, etc.
Composite carbone-carbone	Céramique/fibres céramiques	Pièces thermo-mécaniques
Composite céramique		
3. *Composites à matrice métallique*	Aluminium/fibres de bore Aluminium/fibres de carbone	Espace
4. *Sandwiches*	Métaux, stratifiés, etc.	Domaines multiples
{ Peaux	Mousses, nids d'abeilles, balsa, plastiques renforcés, etc.	
{ Ames		

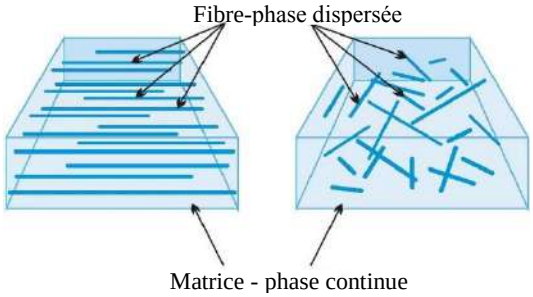


Figure 1.1 Phase matricielle entourant une autre phase qui est discontinue et est appelée phase dispersée.

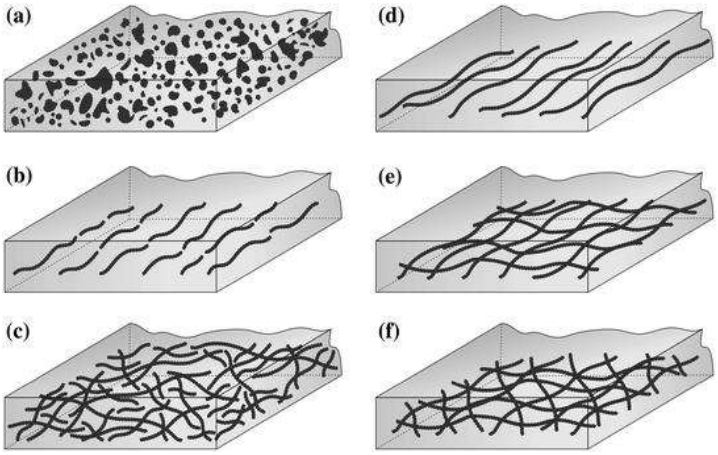


Figure 1.2 Classification et types de matériaux composites. (a) Renforcé de particules dispersées, (b) Fibres discontinues renforcées (alignées), (c) Fibres discontinues renforcées (orientées au hasard), (d) Continues renforcées de fibres (alignées), (e) Continues renforcées de fibres (angle d'orientation de la fibre aligné de 0° à 90°), et (f) fibre continue renforcée (angle d'orientation de la fibre multidirectionnelle).

Généralement, les matériaux composites sont obtenus en recherchant des matériaux alternatifs ayant une ou plusieurs des caractéristiques suivantes [5]:

- À prix réduit.
- Bon comportement structurel.
- Production massive réalisable.
- Bonne isolation thermique et acoustique.
- Résistance à certains agents chimiques.
- Faible poids, réduction des poids morts faciles à transporter.
- Excellent comportement contre la corrosion dans les environnements agressifs.
- Propriétés mécaniques élevées.
- Imperméable et résistant à divers agents chimiques.

L'utilisation des matériaux composites dans la conception structurelle a considérablement augmenté ces dernières années. Ceci est dû à leurs propriétés mécaniques qui sont meilleures que les traditionnelles (acier, aluminium, etc.), et à leurs

possibilités de processus de conception. Ces matériaux sont thermiquement stables, résistants à la corrosion et appropriés pour les structures qui dépendent fortement de la variable de poids dans le processus de conception. Les matériaux composites conviennent aux composants structurels nécessitant une résistance élevée aux chocs, une rigidité, des formes complexes et un volume de production élevé. De plus, l'utilisation de ces matériaux s'est étendue à plusieurs domaines dont l'industrie automobile, l'industrie aéronautique, l'industrie navale, le génie civil, l'armature dans le béton, etc.

1.2 Les Matériaux nanocomposites

Avec l'avènement des nanotechnologies et des nanosciences, les nanocomposites sont devenus un matériau de haute performance aux propriétés nanométriques uniques. Les nanocomposites sont des composites dans lesquels au moins une des phases (généralement la phase discontinue) présente une dimension à l'échelle nanométrique (1 à 100 nm). Les propriétés des nanocomposites dépendent des dimensions du matériau de la matrice qui peut être à l'échelle nanométrique, de la taille, du chargement, de l'orientation, de la forme et du degré de dispersion de la deuxième phase, qui peut également être à l'échelle nanométrique [6–8]. L'interaction entre la phase dispersée et la matrice joue également un rôle crucial dans l'amélioration des propriétés recherchées des nanocomposites.

Les nanocomposites sont actuellement utilisés dans un certain nombre de domaines et de nouvelles applications sont continuellement développées. Les applications des nanocomposites comprennent [9]:

- Condensateurs à couche mince pour puces informatiques
- Électrolytes polymères solides pour batteries.
- Pièces de moteurs automobiles et réservoirs de carburant
- Turbines et pales
- Barrières à oxygène et à gaz
- Emballages alimentaires

En général, les nanocomposites sont classés en trois types principaux en fonction du matériau de la matrice [6]:

- Nanocomposites à matrice céramique (CMC)
- Nanocomposites à matrice métallique (MMC)
- Nanocomposites à matrice polymère (PMC)

Parmi ces trois types des nanocomposites, les PMC sont plus appropriés pour les applications industrielles en raison de leur nature légère et ductile. Cependant, ils présentent de mauvaises propriétés mécaniques, thermiques, électriques et autres propriétés physiques par rapport aux MMC et CMC. Ces propriétés peuvent être améliorées de manière significative en renforçant la matrice polymère avec un nanomatériau approprié, généralement appelé nanocharges, dans une seconde phase. les nanocharges peuvent modifier de manière appropriée les propriétés de la matrice polymère lorsqu'elles sont incorporées en utilisant des procédures de synthèse appropriées telles que l'intercalation en fusion, la polymérisation in situ, le processus sol-gel et la synthèse de matrice [6]. Certaines des nanocharges couramment utilisées dans les PMC sont les nano-oxydes, les nano-argiles, les nanotubes de carbone (NTCs), les plaquettes de Graphène (PLGs) et les nanoparticules métalliques. Les matrices polymères renforcées de nanocharges sont largement étudiées pour leurs propriétés uniques et spéciales exposées dans la synergie entre la matrice et les nanocharges. Cela a ouvert la voie aux chercheurs pour préparer des PMC avec des propriétés ajustables telles que des propriétés thermiques, électriques, mécaniques et optiques.

Les NTCs et les PLGs sont deux nanomatériaux à base de carbone technologiquement importants qui devraient révolutionner dans un proche avenir le domaine des structures renforcées (en tant que charges), de l'électronique et de l'énergie. Dans ce qui suit, nous discuterons des caractéristiques des différents types de NTC et de PLG.

1.2.1 Nanotubes de carbone (NTC)

Les nanotubes de carbone (NTCs) sont des tubes en carbone avec des diamètres généralement mesurés en nanomètres. Les NTCs ont été découverts en 1991 par S. Iijima [10] comme sous-produit mineur de la synthèse du fullerène. Des progrès importants ont été réalisés au cours des 30 dernières années, notamment la découverte de deux principaux types de nanotubes (mono-feuillet et multi-feuillets) ; de grands progrès ont été accomplis dans leur purification et leur synthèse, l'élucidation des propriétés physiques fondamentales, et des étapes cruciales sont prises vers des applications pratiques réalistes.

En raison de ses excellentes propriétés mécaniques, thermiques et électriques, le NTC est largement utilisé comme matériau de renforcement à l'échelle nanométrique pour développer de nouveaux nanocomposites multifonctionnels. Les NTCs dans les matrices

polymères peuvent potentiellement améliorer la rigidité et la résistance des composites de manière significative par rapport à ceux renforcés avec des fibres de carbone conventionnelles. Il est bien connu que les NTCs ont de grandes propriétés de module de Young, de limite d'élasticité, de flexibilité et de conductivité. En plus de ce qui précède, ils ont des résistances 20 fois supérieures à celles des alliages d'acier à haute résistance, à moitié plus denses que l'aluminium, et la capacité de transport de courant est 10000 fois celle du cuivre [11,12]. Cependant, conserver ces propriétés exceptionnelles à une échelle macro pose un défi considérable.

Un nanotube de carbone est composé d'un ou plusieurs feuillets de Graphène (i.e. plan graphitique dans lequel les atomes de carbone sont organisés selon un réseau hexagonal à l'image d'un nid d'abeilles) enroulés, suivant un rayon de courbure nanométrique, de façon à former une structure cylindrique. L'angle d'enroulement du feuillet de Graphène, appelé hélicité (θ). Cet angle varie de 0 à 30° compte tenu de la symétrie du réseau hexagonal et permet de classer toutes les configurations possibles en trois catégories appelées « chaise », « zig-zag » et « chirale » (voir la figure 1.3) [13].

En fait, il existe deux types de nanotubes de carbone :

- Les nanotubes de carbone mono-feuillet, nommés également mono-paroi ou mono-couche (single-wall carbon nanotubes - SWCNT) sont constitués d'un feuillet de Graphène enroulé sur lui-même et qui peut être fermé à ses deux extrémités par une demi-molécule de fullerène (extrémités coniques, polygonales ou sphériques). Les nanotubes de carbone mono-feuillet se regroupent lors de leur synthèse sous forme de fagots, aussi appelés faisceaux, à la manière des cordes. Dans chaque faisceau, les tubes s'empilent de façon compacte et constituent un arrangement périodique de symétrie triangulaire comme schématisé sur la figure 1.4. Leur nombre peut atteindre plusieurs dizaines dans un faisceau ;
- Les nanotubes de carbone multi-feuillets également appelés multi-parois ou multi-couches (multi-wall carbon nanotubes - MWCNT) sont constitués de plusieurs feuillets de Graphène (de 2 à 50) enroulés les uns autour des autres. Deux configurations différentes, basées soit sur un emboîtement de feuillets de Graphène arrangés en cylindres concentriques dit en « poupées russes », soit sur l'enroulement d'un unique feuillet de Graphène en spirale dit en « parchemin », peuvent être rencontrées (voir. figure 1.5).

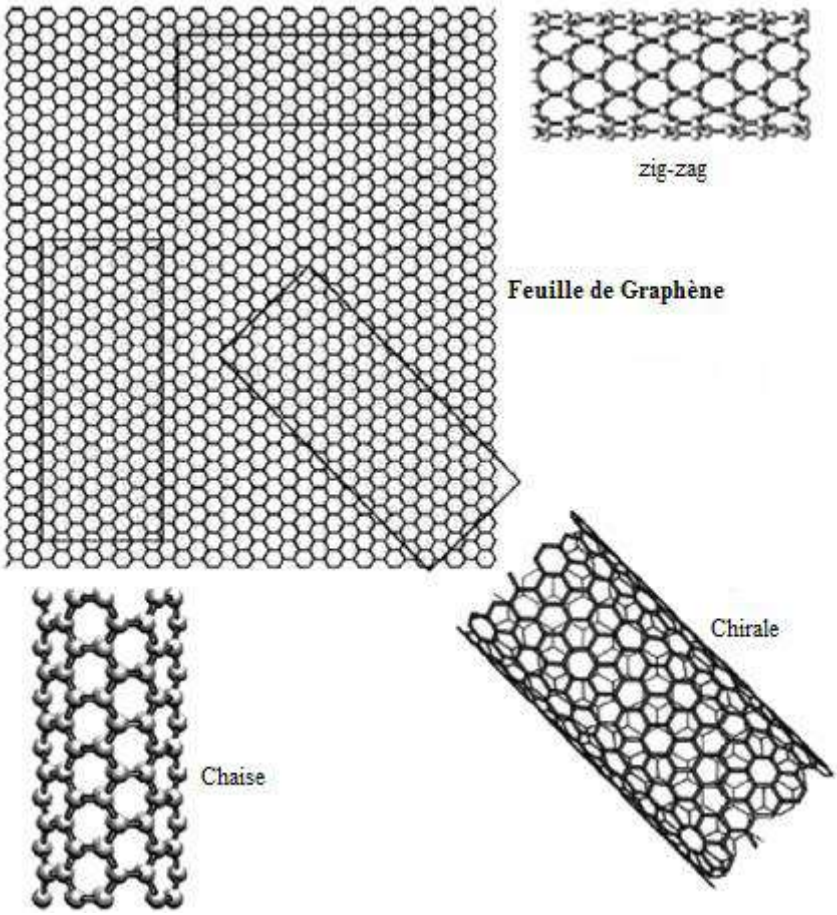


Figure 1.3 Représentation schématique de la relation entre les nanotubes et le Graphène. (Les trois rectangles peuvent être enroulés autour d'eux-mêmes).

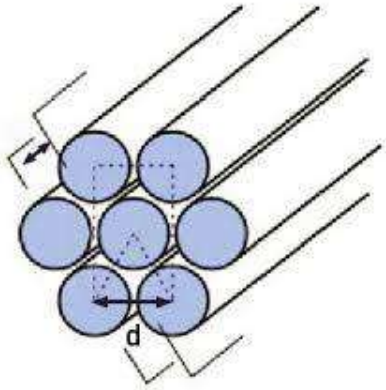


Figure 1.4 Faisceau de nanotubes de carbone mono-feuillet (d = diamètre moyen des tubes)

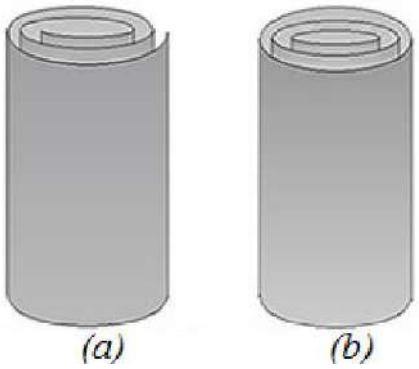


Figure 1.5 Nanotubes de carbone multi-feuillets, (a) Constitué d'un feuillet de Graphène enroulé en spirale; (b) Formé de feuillets de Graphène arrangés en cylindres concentriques.

1.2.2 Plaquettes de Graphène (PLG)

Ces dernières années, le besoin des structures performantes s'est considérablement accru. Cela stimule les nombreux scientifiques dans le domaine des matériaux composites à rechercher de nouveaux renforts ou revêtement nanométrique avec des propriétés mécaniques supérieures aux fibres micro-dimensionnées traditionnelles telles que le Kevlar, les fibres de carbone et le verre pour fabriquer des nanocomposites multifonctionnels avancés. À cet égard, récemment, des nanomatériaux à base de carbone tels que les NTCs et le Graphène et ses dérivés tels que l'oxyde de Graphène (GO) et les plaquettes de Graphène (PLGs) ont été utilisés pour fabriquer des nanocomposites à base de polymère avec des propriétés mécaniques améliorées. En effet, de nombreux chercheurs ont rapporté que le développement de matériaux nanocomposites renforcés par des NTCs présente plusieurs défis dans la pratique, tels que la difficulté à obtenir une dispersion uniforme sans agglomération et les caractéristiques hautement anisotropes des NTCs. [14,15] et des coûts de fabrication élevés. Le Graphène et ses dérivés tels que les PLGs sont d'autres nano-renforts prometteurs, qui peuvent soit surmonter soit réduire ces lacunes des NTCs. Le Graphène a montré un potentiel considérable pour devenir un candidat pour le renforcement des polymères depuis sa découverte en 2004. Cela est dû au fait que le Graphène a d'excellentes propriétés mécaniques, une surface spécifique élevée, un coût inférieur à celui de NTC et une géométrie bidimensionnelle (planaire), ce qui peut améliorer ses effets de renforcement. Par exemple, il a été montré expérimentalement qu'une addition de 0,1% de fraction massique de PLG dans la matrice époxy peut augmenter le module de Young du nanocomposite de 31% alors que seule une augmentation de 3% peut être obtenue par les charges de NTC [16].

Les plaquettes de Graphène typiques sont constituées de feuilles d'une à quelques couches d'atomes de carbone liés par sp2 se superposant pour former des particules bidimensionnelles d'épaisseur nanométrique [17]. Ce sont des bandes allongées de Graphène qui peuvent être obtenues en coupant une feuille de Graphène selon une certaine direction. Puisque le Graphène a une structure en nid d'abeille, il peut y avoir deux formes de bord différentes lors de la découpe, à savoir ; bord en chaise et bord en zigzag (voir figure 1.6) [18].

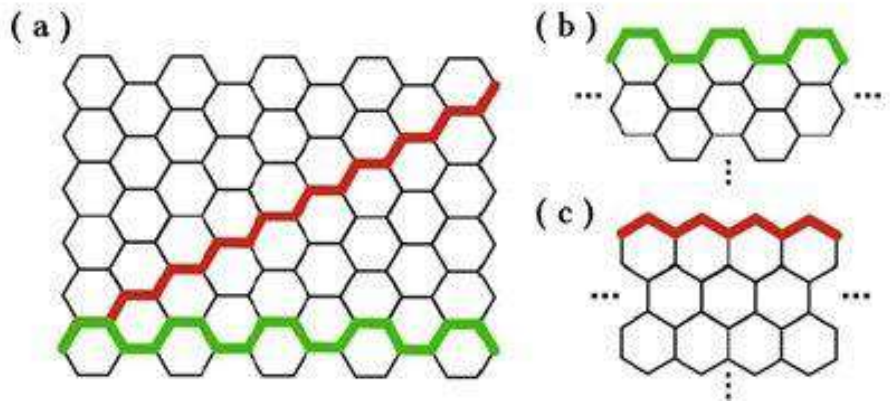


Figure 1.6 (a) Feuille de Graphène en « chaise » (vert) et en « zigzag » (rouge), (b) les PLGs en chaise et (c) les PLGs en zigzag.

Le Graphène et ses dérivés possèdent des propriétés physiques exceptionnelles en raison de son réseau d'hybridation, qui est bien connu pour ses excellentes propriétés - module de Young 1 TPa, résistance à la rupture 130 GPa et conductivité thermique/électrique similaire au cuivre. Ces propriétés exceptionnelles permettent au Graphène d'avoir de nombreuses applications prometteuses. Les plaquettes de Graphène sont utilisées dans :

• Électrodes à ultra-condensateurs.
• Matériaux d'anode pour batteries lithium-ion.
• Additif conducteur pour électrodes de batterie.
• Dans des encres électriquement conductrices.
• Films et revêtements thermo conducteurs.
• En tant qu'additif pour les composites légers.
• Films ou revêtements pour blindage EMI.
• Substrat pour capteurs chimiques et biochimiques.
• matériau barrière pour l'emballage.

• Les plaquettes de Graphène sont utilisées comme additif pour le béton ultra résistant et les composites à matrice métallique.

En raison des propriétés exceptionnelles détenues par les PLG, l'industrie et le milieu de recherche ont de grands intérêts pour utiliser les PLG comme renforcement des composites polymères, où de nombreux matériaux de Graphène ont été ajoutés aux matrices polymères, y compris (époxy ou poly (méthacrylate de méthyle) (PMMA)) comme composant prometteur [19,20]. Cependant, la réalisation du plein potentiel du Graphène dans les composites polymères reste encore un défi important à l'échelle du laboratoire et du commerce.

1.3 Matériaux fonctionnellement graduées (FGM)

En raison de l'ambition accrue dans les différents domaines des applications d'ingénierie tels que l'industrie aéronautique, la nécessité de créer un matériau composite léger avec des rapports rigidité / poids et résistance / poids élevés est également accrue. Le matériau composite conventionnel ne peut toujours pas être utilisé dans des environnements à haute température. Généralement, les métaux, y compris l'acier et l'aluminium, sont utilisés dans le domaine de l'ingénierie depuis des années en raison de leur résistance et de leur dureté exceptionnelle. Cependant, comme pour le matériau composite traditionnel, la résistance du métal est réduite en raison de la condition à haute température. Contrairement aux matériaux métalliques, les matériaux céramiques présentent d'excellentes caractéristiques de résistance à la chaleur et une faible dureté.

Récemment, un matériau d'ingénierie avancé, connu sous le nom de matériaux fonctionnellement gradué (FGM), a été introduit comme une nouvelle classe de matériaux composites capables de supporter l'environnement de travail difficile, sans défaillance et sans perdre ses propriétés pendant le service [21,22]. Le concept des FGMs est totalement différent du matériau composite traditionnel, qui sont soit deux matériaux différents assemblés comme dans le cas des matériaux composites stratifiés, soit des mélanges homogènes qui impliquent un compromis entre les propriétés des matériaux constitutifs. Une FGM typique est un composite inhomogène composé de deux phases différentes de constituants du matériau (généralement céramique et métal). Un exemple d'un tel matériau est illustré dans la figure 1.7 où des particules sphériques sont incorporées dans une matrice isotrope [23].

Les propriétés des matériaux constitutifs des FGMs montrent un changement régulier et continu d'une surface à l'autre en fonction du changement progressif de leur fraction volumique, éliminant ainsi les concentrations de contraintes thermiques atténuantes et les problèmes d'interface. En effet, les constituants céramiques des FGMs sont capables de supporter des environnements à haute température en raison de leurs caractéristiques de résistance thermique élevées, tandis que les constituants métalliques donnent une performance mécanique plus forte et une possibilité réduite de fracture catastrophique. [24].

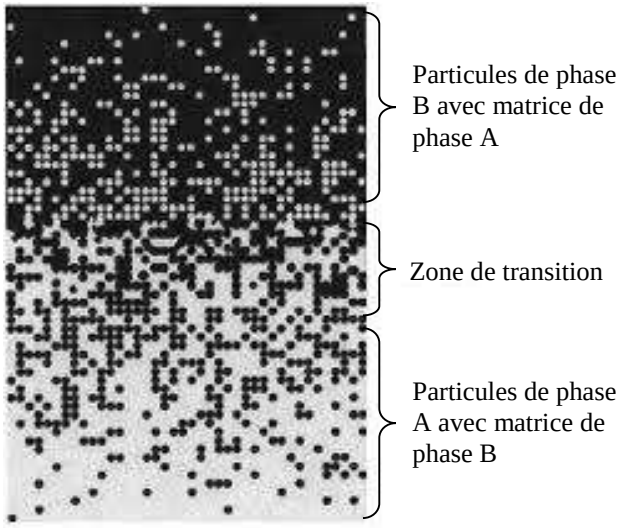


Figure 1.7 Une FGM avec les fractions volumiques des phases constituantes graduées dans une direction.

L'utilisation du matériau fonctionnellement graduée dans les applications d'ingénierie a été proposée pour la première fois au début des années 1980 par des chercheurs japonais. lorsqu'ils ont été confrontés à un problème nécessitant un type de matériau composite pouvant supporter une différence de température très élevée dans un projet d'avion spatial [25]. Le procédé exigeait qu'un côté des matériaux composites supporte une température d'environ 2000 K, dans laquelle cette température ne devrait pas être transmise à l'autre côté du matériau composite. Autrement dit, le corps de l'avion a besoin d'un matériau composite qui sera exposé à un gradient de température d'environ 1000 K, entre l'intérieur et l'extérieur de l'avion spatial. À partir de là, les FGMs ont été initialement conçues comme des matériaux de barrière thermique pour les réacteurs de fusion et les structures aérospatiales. Depuis lors, les efforts visant à développer des matériaux hautement résistants utilisant les FGM se sont poursuivis. On peut noter que la plupart des premières études de recherche sur les FGMs étaient davantage axées sur la mécanique de la rupture et l'analyse des contraintes thermiques.

Les FGMs sont maintenant développées pour une utilisation générale comme les composants structurels dans des environnements à haute température. Des applications des FGMs ont récemment été rapportées dans la littérature, par exemple, les capteurs de FGM [26] et actionneurs [27], armure en métal / céramique [28], Photodétecteurs [29], et implant dentaire [30]. La figure 1.8 montre les potentielle applications des MGF.

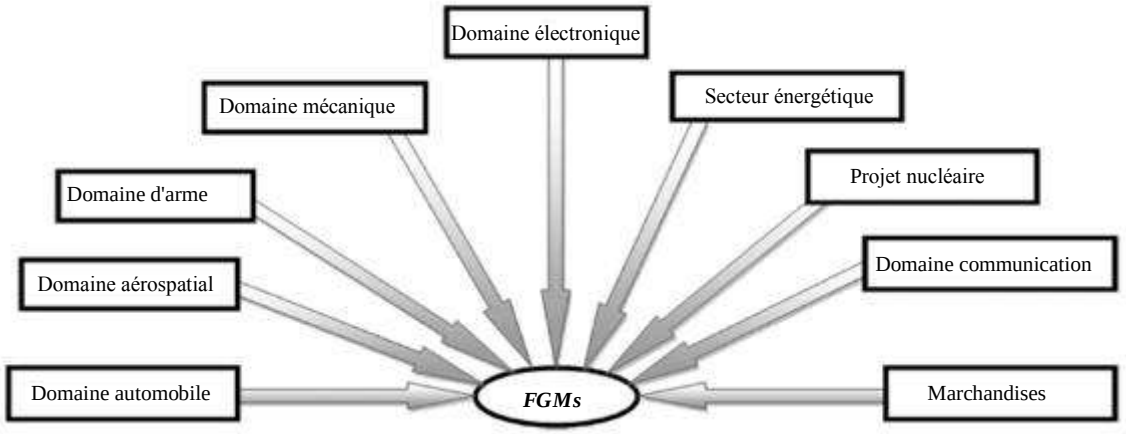


Figure 1.8 L'application potentielle des MFG.

Plusieurs FGMs sont fabriqués par deux phases de matériaux aux propriétés différentes. Étant donné que la fraction volumique de chaque phase varie progressivement dans la direction de gradation (généralement la direction de l'épaisseur), les propriétés mécaniques des FGMs varient le long de cette direction. Par conséquent, nous avons deux approches différentes pour modéliser les FGMs [24]. Pour le premier choix, on suppose une variation par sous-couches de la fraction volumique de l'un des constituants (céramique ou métal). Chaque sous-couche de la FGM est supposée avoir la même fraction volumique et une quantité graduelle de celle-ci d'une sous-couche à l'autre, c'est-à-dire des couches céramique-métal quasi-homogènes (figure 1.9 (a)). Pour le deuxième choix, la fraction volumique de la céramique ou du métal est supposée varier sous forme continue (figure 1.9 (b)), dans laquelle la fraction volumique du métal peut être donnée en termes de Z comme suit :

$$V_m = (\frac{1}{2} + \frac{z}{h})^N \tag{1.1}$$

où h est l'épaisseur de la structure et N ($0 \leq N \leq \infty$) est un exposant de fraction volumique (indice de loi de puissance), qui dicte le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur de l'FGM. La figure 1.10 illustre le nombre infini de compositions de distribution dans lesquelles les formes linéaires et non linéaires sont considérées.

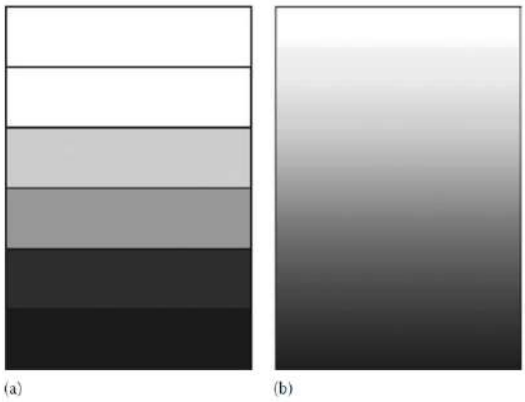


Figure 1.9 Modèle analytique pour une couche de FGM (a) couches céramique-métal quasi-homogènes (b) variation continue de la fraction volumique de la phase matricielle.

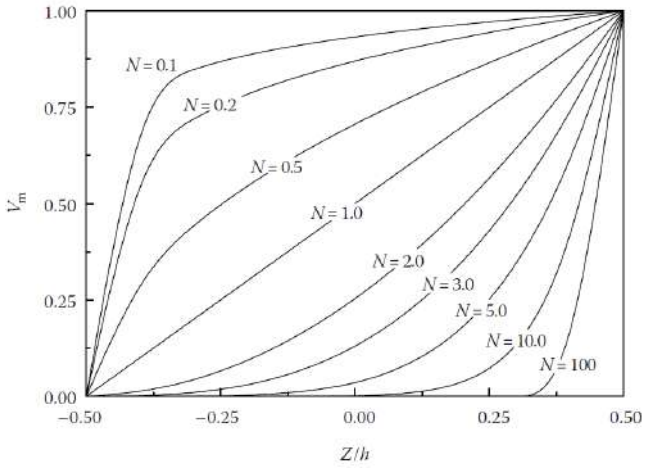


Figure 1.10 La fraction volumique de métal sur toute l'épaisseur.

1.4 Revue de l'analyse mécanique des composites renforcés par des nanocharges fonctionnellement gradués.

1.4.1 Revue des structures à bas des FGM

Dans cette section, une revue du comportement mécanique des poutres, plaques et coques fait à partir de l'FGM sera présentée, cette revue couvre principalement l'analyse dynamique, statiques, et flambement.

1.4.1.1 Analyses statiques des structures à bas des FGMs

i. Poutre

Li et al. [31] a effectué une analyse de flexion d'une poutre fonctionnellement graduée de forme bidirectionnelle utilisant ABAQUS et un code élément fini. Giunta et al. [32] a utilisé une solution de forme forte sans maillage pour étudier la réponse statique de poutres constituées de matériaux fonctionnellement graduée. Les équations différentielles

gouvernantes sont déterminées à l'aide de théories d'ordre supérieur et du modèle classique de Timoshenko. Li et al. [33] ont étudié le comportement en flexion, flambement et vibration de poutres fonctionnellement graduée sur la base de la théorie du gradient de déformation non local. Les équations de mouvement et les conditions aux limites ont été déduites en utilisant le principe de Hamilton. Li et al. [34] ont mené l'étude statique et dynamique sur des poutres fonctionnellement graduée en utilisant une théorie d'ordre supérieur, les équations gouvernantes ont été dérivées des équations de base de l'élasticité. Pydah et al. [35] ont analysé la flexion des poutres circulaires fonctionnellement graduée bidirectionnelles en utilisant les hypothèses cinématiques de la théorie d'Euler – Bernoulli

ii. Plaque

Eshraghi et al. [36] ont introduit des méthodes de solution capables de traiter les problèmes de statique et de vibrations libres impliquant des micro-plaques circulaires fonctionnellement graduée chargées thermiquement. La formulation est basée sur la théorie modifiée des contraintes de couple, et les équations aux dérivées partielles, les conditions aux limites associées sont dérivées au moyen du principe de Hamilton. Nguyen et al. [37] ont proposé un outil de calcul efficace basé sur une formulation d'éléments finis isométriques d'élasticité tridimensionnelle (3-D) pour l'analyse statique et dynamique des plaques fonctionnellement graduées. Jodaei et al. [38] ont présenté une solution d'élasticité tridimensionnelle pour l'analyse statique des plaques annulaires piézoélectriques fonctionnellement graduée avec et sans fondations élastiques en utilisant la méthode de quadrature différentielle basée sur l'espace d'états (SSDQM) à différentes conditions aux limites. Nguyen et al. [39] ont étudié la vibration et le comportement statique de plaques sandwich isotropes fonctionnellement graduées en utilisant une théorie de déformation d'ordre supérieur. Ghazzawi et al. [40] ont utilisé la théorie de la déformation par cisaillement du troisième ordre pour étudier le comportement en flexion des plaques FGM.

iii. Coque

Tornabene et al. [41] ont appliqué la méthode de la quadrature différentielle généralisée (GDQ) pour étudier les coques et les panneaux de révolution composites fonctionnellement gradées. Le modèle mécanique est basé sur la théorie dite de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT), en particulier sur la théorie de

Toorani-Lakis. Viola et al. [42] ont étudié l'analyse statique de coques et panneaux coniques fonctionnellement gradées. Une théorie de déformation par cisaillement du troisième ordre sans contrainte (UTSDT) est utilisée pour l'évaluation des contraintes tangentielles et normales dans des coques coniques tronquées modérément épaisses et des panneaux soumis à des charges uniformes méridiennes, circonférentielles et normales. Aragh et al. [43] ont analysé la vibration libre et la réponse statique d'une coque cylindrique ouverte métal / céramique fonctionnellement gradées (2-D FGM) en utilisant la méthode de quadrature différentielle généralisée. Viola et al. [44] ont étudié le comportement statique de coques sphériques fonctionnellement gradées et de panneaux soumis à des charges uniformes sur les surfaces extrêmes. Les équations gouvernantes obtenues sont résolues au moyen de la technique numérique GDQ. Basée sur la théorie de l'élasticité non locale, Arefi et al. [45] ont étudié l'analyse statique d'une nano-coquille cylindrique fonctionnellement graduée reposant sur les fondations de Pasternak. La théorie de la déformation par cisaillement du troisième ordre est développée pour modéliser les relations cinématiques.

1.4.1.2 Analyses vibratoires des structures à bas des FGMs

i. Poutre

Akbaş [46] a étudié les réponses aux vibrations forcées des nanopoutres fonctionnellement graduée en utilisant la théorie des contraintes de couple modifiées (MCST) avec un effet d'amortissement. Le modèle Kelvin – Voigt a été considéré dans l'effet d'amortissement. Eroglu [47] a étudié les vibrations libres des poutres fonctionnellement graduée circulaires dans l'environnement thermique via l'approche de la théorie des poutres. Wang et Li [48] ont mené la réponse aux vibrations libres de poutre fonctionnellement graduée en utilisant la théorie des poutre de Levinson (LBT). Les équations de mouvement sont dérivées en intégrant directement les équations d'élasticité de forme de contrainte avec la profondeur de la poutre avec les forces résultantes d'inertie liées au couplage inclus et à la déformation de cisaillement d'ordre supérieur. Li et al. [49] étudié la vibration libre des poutres en matériau fonctionnellement graduée (FGM) en utilisant les théories classiques et la théorie de déformation de premier ordre. Ebrahimi et Mokhtari [50] ont étudié le comportement de vibration libre d'un poutre rotatif fonctionnellement graduée basé sur Mori – Tanaka en utilisant la théorie des poutres de Timoshenko.

ii. Plaque

Gupta et al. [51] ont réalisé les caractéristiques de vibration des plaques de matériau fonctionnellement graduée. Kumar et al. [52] ont étudié le comportement aux vibrations libres de plaques rectangulaires minces fonctionnellement graduée en utilisant la méthode de la rigidité dynamique (DSM). La théorie classique des plaques ainsi que le concept de surface physique neutre de la plaque fonctionnellement graduée sont utilisés pour formuler la matrice de rigidité dynamique. Wang et al. [53] ont proposé un modèle mathématique non classique et un algorithme pour l'analyse des vibrations libres axisymétriques non linéaires d'une microplaque circulaire, en employant la théorie de von Kármán. Kumar et al. [54] ont réalisé l'analyse des vibrations forcées non linéaires sur des plaques fonctionnellement graduées. Le problème est formulé en utilisant la méthode énergétique et les équations gouvernantes sont dérivées sur la base du principe de Hamilton. Jung et al. [55] ont développé une théorie affinée de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur pour l'analyse des vibrations libres et forcées des plaques fonctionnellement graduée.

iii. Coque

Tornabene et al. [56] ont proposé un cadre théorique pour effectuer l'analyse dynamique des structures de coque à double courbure en utilisant le champ de déplacement généralisé de la formule unifiée Carrera (CUF). Le système d'équations aux dérivées partielles est résolu en utilisant la méthode de la quadrature différentielle généralisée (GDQ). Punera et Kant [57] ont étudié le comportement de vibration libre des coques cylindriques ouvertes fonctionnellement graduée en utilisant diverses théories raffinées d'ordre supérieur. Pandey et Pradyumna [58] ont présenté une formulation d'éléments finis basée sur une théorie par couches d'ordre supérieur pour étudier les vibrations induites thermiquement des plaques sandwich et des panneaux de coque fonctionnellement graduée. Les équations gouvernantes sont résolues en utilisant la méthode d'accélération moyenne de Newmark.

1.4.1.3 Analyses de flambage des structures à bas des FGM

i. Poutre

Nguyen et Lee [59] ont introduit une analyse des vibrations flexion-torsion et du flambage des poutres fonctionnellement graduée bidirectionnelles à parois minces. Akgöz et Civalek [60] ont étudié le comportement de flambement des micropoutres dépendant

de la taille constituées de matériaux fonctionnellement graduée pour différentes conditions aux limites en utilisant la poutre de Bernoulli – Euler et la théorie du gradient de déformation modifiée. Taati [61] a fourni une solution exacte pour le flambement et le comportement post-flambage en fonction de la taille des micropoutres fonctionnellement graduée avec des conditions aux limites arbitraires qui sont soumises à des charges thermomécaniques combinées. Li et al. [62] ont analysé le post-flambage thermique des poutres de Timoshenko soumises à une élévation de température transversalement non uniforme. She et al. [63] ont étudié les comportements de flambage thermique et de post-flambement de poutres fonctionnellement graduée basés sur Euler – Bernoulli, Timoshenko et diverses théories de poutre de déformation par cisaillement d'ordre supérieur.

ii. Plaque

Tran et al. [64] ont abordé une approche isométrique par éléments finis (IGA) en combinaison avec la théorie des plaques de déformation du troisième ordre (TSDT) pour l'analyse du flambage thermique des plaques fonctionnellement graduée. Atmane et al. [65] ont étudié le flambement thermique d'une plaque rectangulaire simplement appuyée fonctionnellement graduée (SFGM) en utilisant la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre. Van et Thai [66] ont présenté une théorie de Kirchhoff modifiée pour analyser les réponses thermomécaniques statiques et de flambage des plaques isotropes et sandwiches en matériau fonctionnellement graduée. Abdollahi et al. [67] ont étudié l'analyse du flambage de plaques rectangulaires piézoélectriques épaisses à gradation fonctionnelle en utilisant le cisaillement d'ordre supérieur et la théorie des plaques déformables normales. Ramu et Mohanty [68] ont étudié le comportement de flambement de plaques rectangulaires en matériau fonctionnellement graduée en utilisant la théorie classique des plaques (CPT). La méthode des éléments finis a été appliquée pour la modélisation et l'analyse de flambage de la plaque FGM.

iii. Coque

Van Dung et Dong [69] ont étudié l'analyses post-flambement pour des coques superficielles à double courbure reposant sur des fondations élastiques sous charge mécanique, charge thermique et charge thermomécanique par une méthode analytique, basée sur la théorie des coques de déformation par cisaillement du troisième ordre, prenant en compte l'imperfection initiale et la technique des raidisseurs enduits. Trabelsi

et al. [70] ont étendu le modèle de Kirchhoff – Love à l'analyse du flambage thermique et post-flambage des structures de coques ABS de plaques fonctionnellement graduée. Hajlaoui et al. [71] ont étudié le comportement de flambement des structures fonctionnellement graduée à l'aide de l'élément de coque solide à déformation supposée améliorée (EAS) basé sur le concept de déformation par cisaillement du premier ordre. Zhao et Liew [72] ont présenté la réponse au flambement de panneaux de coque cylindrique céramique-métal fonctionnellement graduées sous compression axiale et charge thermique. La formulation est basée sur la théorie de la coquille de déformation par cisaillement du premier ordre et la méthode kp-Ritz. Zghal et al. [73] ont étudié le comportement au flambement mécanique des de panneaux courbes fonctionnellement graduée et de plaques composites renforcées de nanotubes de carbone.

1.4.2 Revue sur les plaques composites renforcées par les NTCs (CRNTC) et les plaques composites renforcées par les PLGs (CRPLG)

Inspiré par le concept de matériaux fonctionnellement graduée (FGM), Shen a examiné les nanotubes de carbone en termes de dispersion fonctionnellement graduée dans une matrice polymère avec succès [74]. Récemment, de nombreux chercheurs dans des domaines variés tels que la science et l'ingénierie ont accordé un grand intérêt au concept de composite renforcé par les nanotube de carbone (CRNTC) fonctionnellement gradué, cet intérêt s'est traduit par plusieurs publications au cours des dernières années, dans le but d'étudier de nombreux paramètres influents, y compris la fraction volumique de NTC et leur modèles de distribution pour l'analyse statique [75], l'analyse des vibrations forcées [76,77], l'analyse des vibrations libre [78–80], l'analyse de flambement [81–83] et l'analyse post-flambage [84,85].

En raison de sa forme géométrique, les structures en plaques composites sont des composants structurels très essentiels, elles supportent diverses forces externes qui leur sont appliquées avec toute efficacité. Les structures en plaques sont largement utilisées dans divers domaines tels que l'ingénierie marine, civile, architecturale et aéronautique, elles sont souvent soumises à des charges dynamiques variables qui produisent des vibrations, donc étudier le comportement vibratoire de ces structures est une tâche essentielle pour une application réussie. De nombreuses recherches sont effectuées pour étudier le comportement vibratoire des plaques CRNTC carrées [86], plaques inclinées [87,88], plaques triangulaires [89], plaques quadrilatérales [90,91], plaques de formes

arbitraires [92], plaques sandwichs [93] et plaques stratifiées [94]. Cependant, peu de travaux ont été rapportés sur les CRPLG. L'analyse vibrationnelle des composites renforcés par les PLG a été traitée dans le cas des plaques carrées [95], plaques trapézoïdales [96], plaques poreuses [97], plaques sandwichs [98] et plaques stratifiées [99].

Récemment, Zhu et al. [75] ont étudié le comportement vibratoire et la flexion des plaques composites renforcées par les NTCs minces moyennement épaisses en utilisant la théorie FSDT et la méthode des éléments finis (FEM), tandis que, Jafari Mehrabadi et al. [100] ont utilisé la théorie FSDT pour comparer les fréquences naturelles obtenues par la règle étendue du mélange et la méthode Eshelby–Mori–Tanaka. Une théorie tridimensionnelle de l'élasticité a été utilisée par Alibeigloo et al. [86] pour étudier le comportement en flexion et en vibration libre des plaques composites renforcées de nanotubes de carbone en utilisant la méthode de quadrature différentielle. Employant le FSDT, Garcia et al. [101] ont effectué des simulations numériques statiques et dynamiques de plaques obliques composites renforcées en NTC minces et moyennement épaisses fonctionnellement graduée avec des renforts alignés uni axialement. En utilisant une fonction polynomiale de Chebyshev dans la méthode des multiplicateurs lagrangiens, Kiani et al. [102] ont examiné le comportement aux vibrations libres de plaques composites rectangulaires moyennement épaisses renforcées de NTC. En outre Zghal et al. [103] ont étudié l'analyse des vibrations libres des structures de coque composite renforcée par les NTCs employant la formulation d'éléments finis et de coques à double directeur discret. Basé sur la méthode de quadrature différentielle variationnelle, Ansari et al. [104] ont effectué l'analyse des vibrations et du flambage de plaques CRNTC à secteurs annulaires précontraints thermiquement reposant sur la fondation élastique en utilisant la théorie FSDT.

De plus, en utilisant le FSDT, Song et al. [95] ont étudié le comportement de vibration forcée et libre des plaques multicouches renforcées par les PLGs, où la loi de melange et le modèle Halpin-Tsai ont été utilisés respectivement pour prédire la variation du coefficient de Poisson, de la densité et du module d'élasticité effectif. Utilisant les mêmes modèles, Reddy et al. [105] ont effectué l'analyse des vibrations libres des plaques CRPLG avec plusieurs conditions aux limites, le FSDT et la méthode des éléments finis ont été utilisés. En appliquant le modèle micromécanique de Mori-Tanaka, Garcia et al. [106] en comparant les caractéristiques de vibration et flexion des plaques composites

renforcées par les NTCs et PLGs fonctionnellement graduée, les auteurs ont conclu que l'effet de renforcement des NTCs est inférieur à celui des GPLs. Par l'application de l'élasticité non locale et de la théorie de la déformation par cisaillement sinusoïdal à deux variables, Arefi et al. [107] ont analysé le comportement de vibration libre de CRPLG. Dans un autre travail de recherche, Thai et al.[108] ont présenté le comportement de vibration libre dépendant de la taille des microplaques multicouches CRPLG basé sur le gradient de déformation modifié et la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur. Dans le cadre du FSDT et de la méthode de quadrature différentielle transformée, Malekzadeh et al. [109] ont étudié les fréquences naturelles des plaques annulaires irrégulières multicouches renforcées par les PLGs noyées dans des couches piézoélectriques. En utilisant la formulation NURBS, Thai et al. [110] ont étudié le flambage, la vibration libre et la flexion des plaques CRPLG multicouches. En utilisant la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur, Farzad [111] a effectué une analyse statistique du comportement de vibration libre des plaques CRPLG.

1.4.3 Revue sur les plaques composites stratifié renforcées par FG-NTC

Les structures en plaques stratifiées composites sont largement utilisées dans plusieurs applications structurelles en raison de leurs performances mécaniques élevées par rapport à une structure monocouche. À cet égard, de nombreux travaux ont été menés sur les performances des plaques stratifiées renforcées par les NTCs. Basé sur la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre Lei et al. [112] ont étudié les réponses à la flexion de plaques composites renforcées par les NTCs parfaitement liées en utilisant la méthode kp-Ritz. Basé sur la même approche Lei et al. [113] ont étudié le comportement au flambement de la plaque stratifiée composite renforcée par les NTCs à l'aide de la méthode kp-Ritz sans maillage. Shen et Xiang [114] ont utilisé la théorie des coques avec déformation par cisaillement du troisième ordre de Reddy, y compris les effets du changement de température, pour examiner le comportement post-flambement des coques cylindriques stratifiées renforcées de plaquettes de Graphène FG soumises à une charge thermomécanique en utilisant une approche analytique. En utilisant la méthode kp-Ritz, Lei et al. [115] ont analysé le comportement vibratoire de panneaux cylindriques laminés rotatifs parfaitement collés avec des couches composites renforcées par les NTCs. Malekzadeh et Zarei [116] ont utilisé le FSDT pour étudier les caractéristiques de vibration libre des plaques stratifiées quadrilatérales minces moyennement épaisses avec des couches renforcée par les NTCs. Les auteurs ont conclu que, pour les plaques minces

et moyennement épaisses, la distribution des NTCs dans la direction de l'épaisseur correspondant aux modèles FG-X conduit à une plaque composite plus rigide par rapport aux autres modèles de distribution. En utilisant une approche semi-analytique Malekzadeh et Heydarpour [117] ont présenté l'analyse statique tridimensionnelle et des vibrations libres de plaques stratifiées parfaitement collées avec des couches composites renforcées en NTC. En étudiant deux modèles de plaques sandwich différents, les auteurs ont constaté que la rigidité de la plaque stratifiée est affectée par la configuration de la plaque. Basé sur la théorie FSDT, Lei et al. [94] ont étudié le comportement vibratoire des plaques composites rectangulaires renforcées par les NTCs laminées fines moyennement épaisses et parfaitement collées, l'effet des modèles de distribution des NTCs et leur fraction volumique, le nombre de couches et les paramètres géométriques ont été discutés. En utilisant un modèle FSDT simple à quatre variables, Huang et al. [118] ont étudié les problèmes de vibrations libres et de flexion des plaques composites renforcées par les NTCs. Les auteurs ont conclu que la fraction volumique de NTC, les types de distribution de NTC, le nombre de plis et les paramètres géométriques ont une influence remarquable sur les caractérisations dynamiques des plaques laminées renforcées par les NTCs.

En outre, Fan et Wang [119] ont étudié la vibration de grande amplitude et le post-flambage thermique des plaques stratifiées hybrides thermiquement post-flambées contenant des fibres classiques et des couches en NTCs. Lei et al. [120] ont présenté un modèle mathématique pour l'analyse des vibrations non linéaires d'une plaque stratifiée hybride composée des couches en NTC et des couches en graphite. Dans leur étude, les différents types de distribution de NTC, la densité des fissures de la matrice, la fraction volumique de NTC, le nombre de plis et les paramètres géométriques ont été pris en compte. Lei et al. [121] ont étudié le comportement en bandes et aux vibrations de plaques stratifiées hybrides fissurées et non fissurées contenant des couches composites renforcées de fibres de graphite et des couches composites renforcées de NTC. Les auteurs ont présenté une étude paramétrique détaillée pour éxaminer l'influence des paramètres du matériau, des conditions aux limites et des paramètres géométriques sur les réponses aux bandes et aux vibrations de la plaque hybride stratifiée. En utilisant le schéma FSDT, Pan et al. [122] ont proposé un modèle pour le comportement de grande déformation géométriquement non linéaires d'une coque profonde à double courbure en composite hybride composée de couches renforcées de fibres de graphite et de couches

composites renforcées de NTC. En comparant les deux modèles de plaques sandwich, les auteurs ont conclu que pour le processus de conception, il est important de prendre en considération l'influence des fissures dans la matrice pour la réponse de déformation non linéaire. En outre, en comparant les types de structure à deux plaques, les auteurs ont constaté que la configuration de la coque stratifiée peut améliorer la résistance à la déformation sous des charges externes.

1.5 L'incertitude dans les profils fonctionnellement gradués

Jusqu'à présent, seuls quelques chercheurs ont étudié l'influence de la distribution non linéaire du nano-renforcement sur le comportement mécanique des structures. García et al. [106] ont étudié le comportement en flexion et la vibration de plaques composites renforcées de Graphène et de nanotubes de carbone fonctionnellement graduée en utilisant la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre. Les auteurs ont conclu que la PLG fonctionnellement graduée peut ajuster la rigidité globale des plaques composites. De plus, il a été montré que les charges concentrées au niveau des sous-couches supérieure et inférieure des plaques conduisent aux fréquences naturelles les plus élevées. Jiao et al. [125] ont étudié le comportement de flambement de plaques minces rectangulaires en composite renforcé de nanotubes de carbone fonctionnellement graduée soumises à des charges de compression réparties arbitrairement. Les auteurs ont constaté que la charge de flambement critique de la plaque FG-X augmente à mesure que l'indice d'incertitude augmente, qui est exactement contrastée avec le type FG-O. La capacité de charge de la plaque CRNTC dans l'ingénierie réelle peut être encore améliorée en dispersant plus de NTC à proximité des surfaces supérieure et inférieure de la plaque dans une certaine plage. Vo-Duy et al. [126] ont proposé un type de nouvelles distributions non linéaires pour améliorer la rigidité des poutres composites renforcées de nanotubes de carbone. Les auteurs ont constaté que le nouveau type de distributions de NTC peut aider à augmenter considérablement la rigidité en flexion des poutres, dans laquelle la distribution de NTC plus proche du haut et du bas rend les poutres CRNTC plus rigides que celles proches du plan médian.

PARTIE II. FORMULATION THÉORIQUE

Chapitre 2

Caractérisation géométrique et mécanique des matériaux fonctionnellement gradués

2.1 Introduction

L'objective de ce chapitre consiste à présenter les caractéristiques géométriques considérant différents types des distributions des nano-renforts et les caractéristiques mécaniques des nanocomposites où différentes approches de prédiction des propriétés mécaniques du nanocomposite sera discuté. Aussi ce chapitre a pour objectif de développer les équations fondamentales des plaques stratifiées, où la théorie utilisée est celle de la déformation du premier ordre (FSDT).

2.2 Caractérisation géométrique et mécanique d'une multicouche renforcée par des nanofibres fonctionnellement gradué

Considérons une plaque composite multicouche de propriétés mécaniques fonctionnellement graduées constituée d'un mélange de nanofibres à base de carbone (NTC ou PLG) et d'une matrice polymère isotrope. La plaque de dimensions $a\ (0 \le x \le a) \times b\ (0 \le y \le b) \times h\ (-h/2 \le z \le h/2)$ est rapportée à un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) comme le montre la figure 2.1. La plaque est subdivisée suivant son épaisseur à un nombre de sous-couches N_L d'épaisseur égale, donnée par $h_L = h/N_L$. Les nanofibres sont dispersées de manière homogène dans le plan (x, y) et graduellement répartie dans l'épaisseur en suivant différents types de distributions à savoir ; uniformément distribuée (UD), fonctionnellement gradué (FG) en forme de V (FG-V), en forme de Λ (FG-Λ), en forme de O (FG-O) et en forme de X (FG-X).

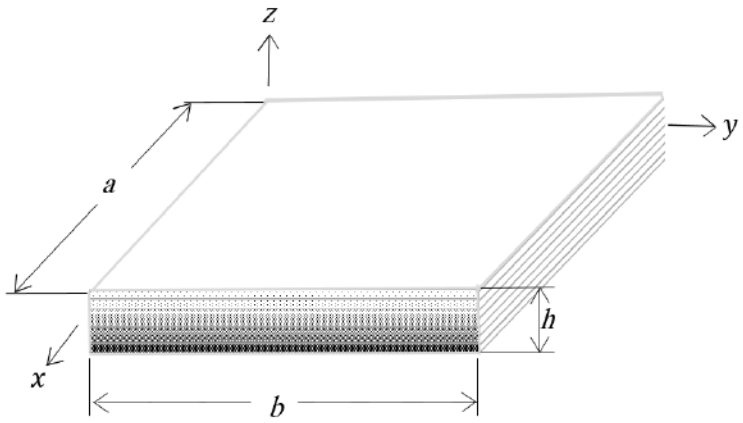


Figure 2.1 *Système de coordonnées et géométrie d'une plaque fonctionnellement graduée.*

Comme le montre la figure 2.2, dans le type UD, les nanofibres sont réparties d'une manière équitable à travers toute l'épaisseur de multicouche, par contre, dans les types FG-V, FG-Λ, FG-O et FG-X, les nano-renforts sont réparties d'une manier graduelle et linéaire ou non-linéaire. Le type FG-V permet d'avoir une répartition des nanofibres forte sur la surface supérieure de la plaque, autrement dit la fraction volumique des nanofibres est maximale, elle décroit graduellement jusqu'à la surface inférieure, où elle arrive à un taux de répartition des nanofibres très faible, le phénomène inverse est observé dans le cas du type FG-Λ. Le modèle FG-X présente une répartition des nanofibres forte sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque, alors que sur la surface moyenne la répartition des nanofibres est faible. Quant au type FG-O, la répartition est inversée par apport au type FG-X.

En fonction du type des distributions présentées auparavant, la fraction volumique des nanofibres dans une sous-couche *k* peut être exprimée sous la forme suivante [127,128]:

UD: $$f_r^{(k)} = f_r^* \tag{2.1}$$

FG-V: $$f_r^{(k)} = f_r^*(\mathrm{P_{in}}+1)\left(\frac{k-0.5}{N_L}\right)^{\mathrm{P_{in}}} \tag{2.2}$$

FG-Λ: $$f_r^{(k)} = f_r^*(\mathrm{P_{in}}+1)\left(\frac{0.5-k+N_L}{N_L}\right)^{\mathrm{P_{in}}} \tag{2.3}$$

FG-O : $$f_r^{(k)} = f_r^*(\mathrm{P_{in}}+1)\left(1-\frac{|2k-N_L-1|}{N_L}\right)^{\mathrm{P_{in}}} \tag{2.4}$$

FG-X : $$f_r^{(k)} = f_r^*(\mathrm{P_{in}}+1)\left(\frac{|2k - N_L - 1|}{N_L}\right)^{\mathrm{P_{in}}} \quad (2.5)$$

où

$k = 1,2,3... N_L$,

$\mathrm{P_{in}}$ l'indice de puissance (permettant le contrôle de la forme de distribution des nanofibres)

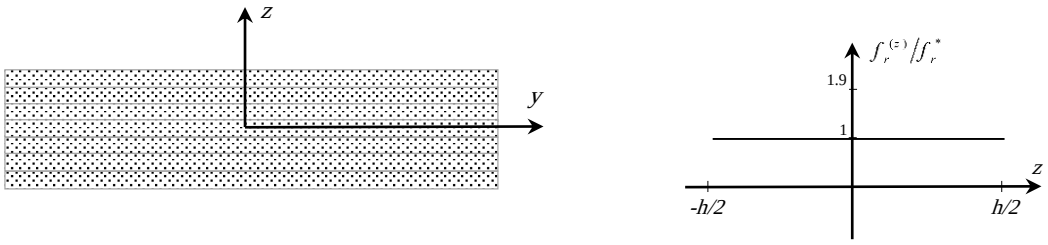
et f_r^* est la fraction volumique totale où il peut s'exprimer comme suit:

$$f_r^* = \frac{w_r}{w_r + (\rho^r / \rho^m)(1 - w_r)} \quad (2.6)$$

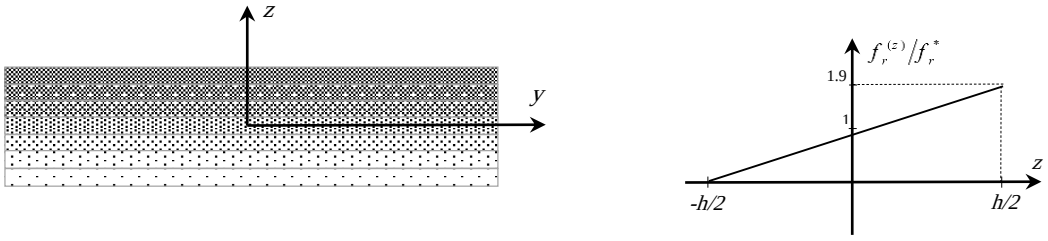
avec w_r la fraction massique des nanofibres; et ρ^r, ρ^m sont respectivement les masses volumique des nanofibres et de la matrice polymère.

Afin de faire une comparaison significative entre les différents modèles de distribution des nanofibres, il convient de noter que les profils fonctionnellement gradués et uniformes auront la même fraction volumique totale des nanofibres.

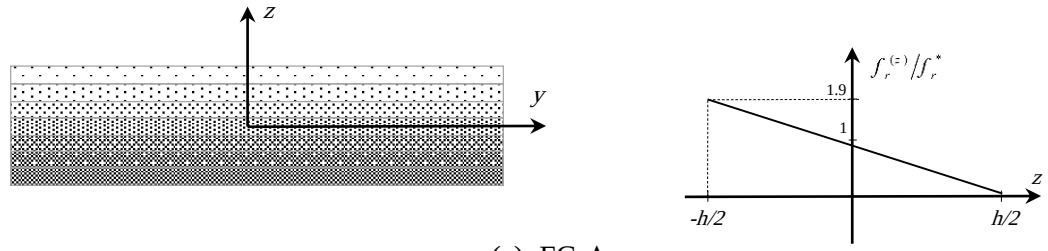
Dans le but de donner plus d'explications sur la dispersion des nanofibres à travers l'épaisseur de la plaque, la figure 2.3 montre la variation du rapport des fractions volumiques des nanofibres ($f_r^{(k)}/f_r^*$) en fonction de l'épaisseur de la plaque pour différents types de distributions des nano-renforts et différents valeurs de l'indices de puissance. Comme le montre la figure, le type UD représente un cas particulier, les nanofibres sont réparties de manière équitable à travers l'épaisseur de la plaque résultant un rapport $f_r^{(k)}/f_r^*$ constant quel que soit les valeurs de *z/h*. Pour les autres types de distribution (non-uniformes), le rapport des fractions volumiques varie sous une forme linéaire dans le cas où $\mathrm{P_{in}}$=1 et d'une forme non linéaire pour les autres valeurs de $\mathrm{P_{in}}$ (0.4, 0.8, 1.4, et 1.8), de plus, on observe que les rapports de fraction volumique $f_r^{(k)}/f_r^*$ varient d'une manière symétrique par rapport au *z/h* pour les plaques de type UD, FG-O et FG-X et de manière non-symétrique pour les plaques du types FG-V et FG-Λ.



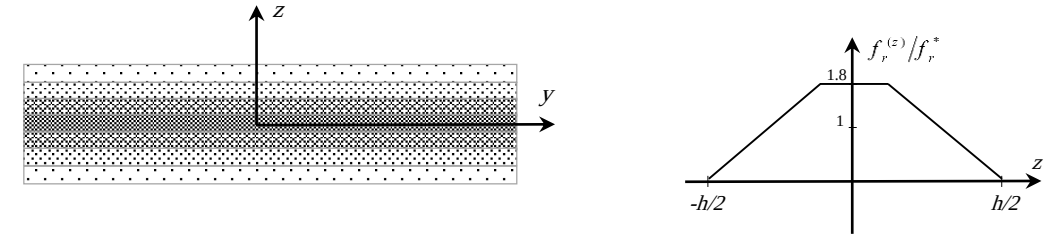
(a): UD



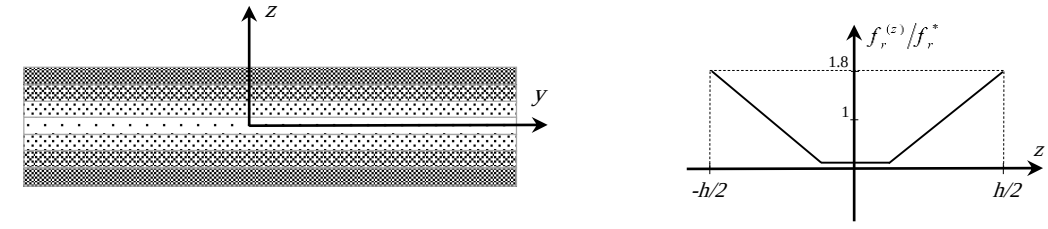
(b): FG-V



(c): FG-Λ



(d): FG-O



(e): FG-X

Figure 2.2 Différents types de distribution des nanofibres

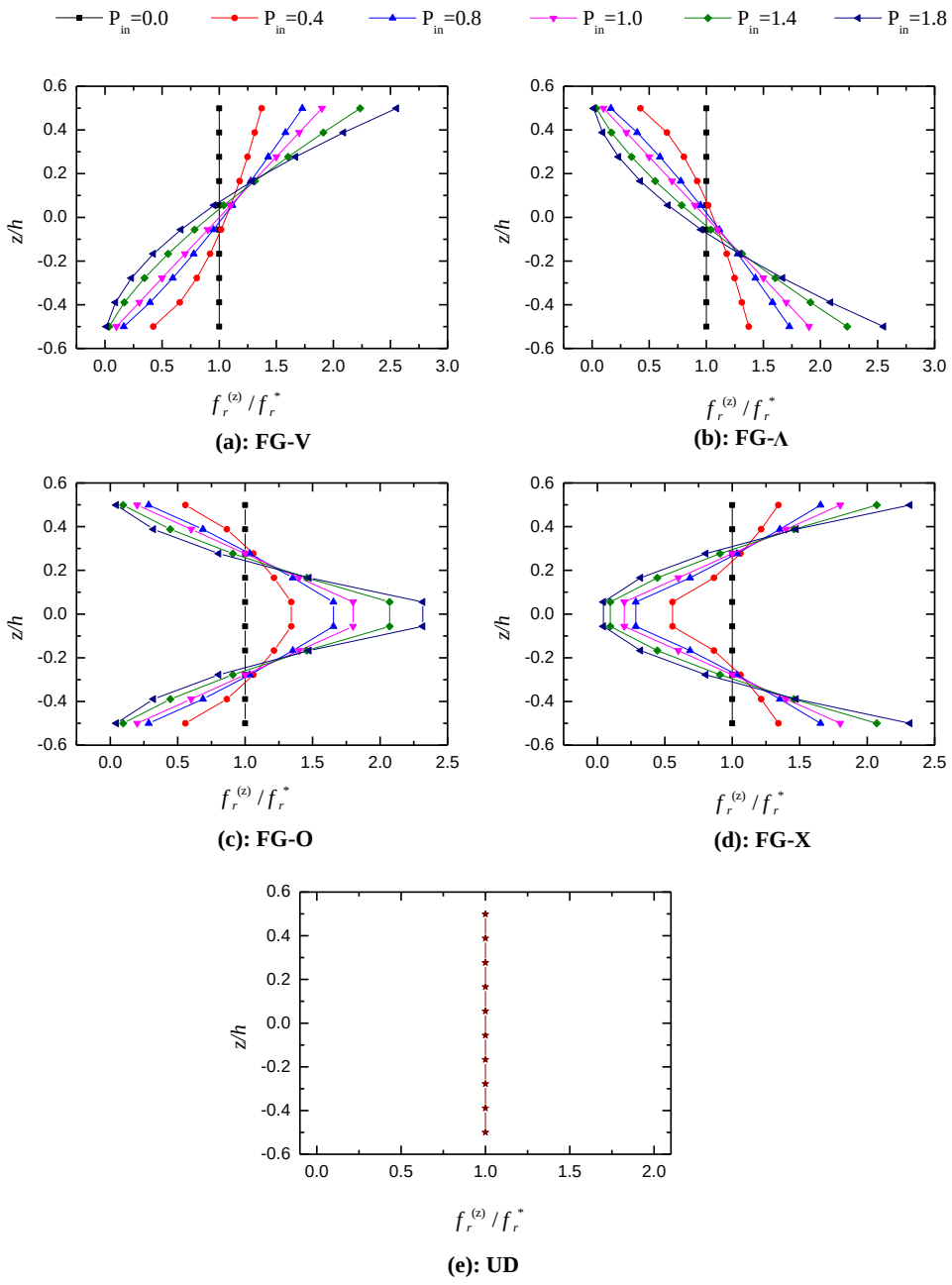


Figure 2.3 variation de la fraction volumique des nanocharges le long de la direction de l'épaisseur pour les types de distribution UD, FG-V, FG-Λ, FG-O et FG-X.

2.3 Propriétés mécaniques des plaques nanocomposites

Il existe trois approches permettant le calcul des propriétés mécaniques des structures nanocomposites à savoir ; la loi du mélange, le modèle Halpin-Tsai modifié et l'approches Mori-Tanaka. En tant que modèle mathématique, toutes ces approches peuvent être utilisées pour calculer les propriétés élastiques du matériau composite ; soit en fonction de la géométrie et de l'orientation des fibres (modèle Halpin-Tsai), soit sur la base des propriétés élastiques des fibres et la matrice (lois de mélange classiques), ou soit

sur les modules élastiques de Hill (Mori-Tanaka). Dans ce qui suit, ces trois approches de caractérisation seront présentées en détail.

2.3.1 Propriétés mécaniques du nanocomposite renforcé par les NTCs

Il existe principalement deux méthodes utilisées pour estimer les propriétés mécaniques de la plaque renforcée par les NTCs ; la loi des mélanges étendue et l'approches de Mori-Tanaka.

2.3.1.1 Loi des mélanges étendue

Dans cette approche, les propriétés élastiques de la plaque nanocomposite renforcée par les NTCs peuvent être estimées comme suit [129] [75]:

$$E_{11}^{(k)} = \eta_1 \, f_r^{(k)} \, E_{11}^{NTC} + (1-f_r^{(k)}) \, E_m \tag{2.7}$$

$$E_{22}^{(k)} = \frac{\eta_2}{\dfrac{f_r^{(k)}}{E_{22}^{NTC}} + \dfrac{1-f_r^{(k)}}{E_m}} \tag{2.8}$$

$$G_{12}^{(k)} = \frac{\eta_3}{\dfrac{f_r^{(k)}}{G_{12}^{NTC}} + \dfrac{1-f_r^{(k)}}{G_m}} \tag{2.9}$$

où,

η_i (i=1,2,3) sont les paramètres d'efficacité des NTCs qui peuvent être déterminés en faisant correspondre les propriétés des matériaux élastiques des NTCs obtenus à partir de la simulation de dynamique des molécules (DM) [130,131] à ceux obtenues à partir des loi de mélange afin de tenir en compte de l'effet d'échelle.

E_{11}^{NTC}, E_{22}^{NTC} et E_m sont respectivement les modules d'élasticité du NTC et de la matrice.

G_{12}^{NTC} et G_m sont le module de cisaillement du NTC et de la matrice, respectivement.

La loi de mélange est également utilisée pour déterminer le coefficient de Poisson ν_{12} et la masse volumique ρ de la plaque nanocomposite, exprimée comme suit:

$$\nu_{12}^{(k)} = f_r^{*} \nu_{12}^{NTC} + (1-f_r^{(k)}) \, \nu_m \tag{2.10}$$

$$\rho^{(k)} = f_r^{(k)} \, \rho^{NTC} + (1-f_r^{(k)}) \, \rho_m \tag{2.11}$$

dans lequel,

ν_{12}^{NTC} et ν_m sont respectivement les coefficients de Poisson du NTC et de la matrice.

ρ^{NTC} et ρ_m sont respectivement les mass volumiques du NTC et de la matrice.

2.3.1.2 Approche de Mori-Tanaka

L'approche de Mori-Tanaka permet de calculer les modules de Young (E_{11} et E_{22}), les modules de cisaillement (G_{12}, G_{13}, et G_{23}) et les coefficients de Poisson (ν_{12}, ν_{13}, et ν_{23}) de la plaque renforcée par les NTCs à travers les expressions suivantes [106,132,133]:

$$E_{11}^{(k)} = n - \frac{l^2}{u} \tag{2.12}$$

$$E_{22}^{(k)} = \frac{4\mathrm{m}(un - l^2)}{un - l^2 + mn} \tag{2.13}$$

$$G_{12}^{(k)} = G_{13}^{(k)} = p, \quad G_{23} = \frac{E_{22}^{(k)}}{2(1+\nu_{23}^{(k)})} \tag{2.14}$$

$$\nu_{12}^{(k)} = \nu_{13}^{(k)} = \frac{l}{2u}, \quad \nu_{23}^{(k)} = \frac{n(u-m) - l^2}{n(u+m) - l^2} \tag{2.15}$$

où

$$u = \frac{E_m \ E_m f_m + 2k_r(1+\nu_m)[1+f_r(1-2\nu_m)]}{2(1+\nu_m)[E_m(1+f_r-2\nu_m) + 2f_m k_r(1-\nu_m-2\nu_m^2)]} \tag{2.16}$$

$$l = \frac{E_m \ \nu_m f_m[E_m + 2k_r(1+\nu_m)] + 2f_r k_r(1-\nu_m^2)}{(1+\nu_m)[E_m(1+f_r-2\nu_m) + 2f_m k_r(1-\nu_m-2\nu_m^2)]} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} n = {} & \frac{E_m^2 f_m(1+f_r-f_m\nu_m) + 2f_m f_r(k_r n_r - l_r^2)(1+\nu_m)^2(1-2\nu_m)}{(1+\nu_m)[E_m(1+f_r-2\nu_m) + 2f_m k_r(1-\nu_m-2\nu_m^2)]} \\ & + \frac{E_m * (2f_m^2 k_r(1-\nu_m) + f_r n_r(1+f_r-2\nu_m) + 4f_m l_r \nu_m}{E_m(1+f_r-2\nu_m) + 2f_m k_r(1-\nu_m-2\nu_m^2)} \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$p = \frac{E_m[E_m f_m + 2p_r(1+\nu_m)(1+f_r)]}{2(1+\nu_m)[E_m(1+f_r) + 2f_m p_r(1+\nu_m)]} \tag{2.19}$$

$$m = \frac{E_m[E_m f_{m+} 2m_r(1+\nu_m)(3+f_r-4\nu_m)]}{2(1+\nu_m)\{E_m[f_m + 4f_r(1-\nu_m)] + 2f_m m_r(3-\nu_m-4\nu_m^2)\}} \tag{2.20}$$

dans lequel *u*, *l*, *n*, *p* et *m* sont les modules élastiques de Hill définies comme suit :

- *u* le module d'encombrement en déformation plane normal à la direction de la fibre,

- *l* le module croisé associé,
- *n* le module de tension uni-axial dans le sens de la fibre,
- *p* et *m* sont respectivement les modules de cisaillement dans les plans parallèle et normal à la direction de la fibre.

k_r, l_r, m_r, n_r, et p_r sont les modules élastiques de Hill pour la phase de renforcement (NTC).

E_m et ν_m sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson de de la matrice.

f_r et f_m sont les fractions volumiques du NTC et de la matrice, satisfaisant la relation de $f_r + f_m = 1$.

En utilisant la loi de mélange, la masse volumique du CRNTC peut être obtenue par :

$$\rho = \rho_r f_r + \rho_m f_m \tag{2.21}$$

2.3.2 Propriétés mécaniques du nanocomposite renforcé par les PLGs

Dans la littérature, il existe deux approches utilisées permettant l'estimation des propriétés mécaniques du nanocomposite renforcée par les PLGs, la première est basée sur le modèle de Halpin-Tsai modifié et la deuxième est basée sur le modèle Halpin-Tsai étendu.

2.3.2.1 Modèle Halpin-Tsai modifié

En se basant sur le modèle de Voigt-Reuss [134], le modèle de Halpin-Tsai modifié [135] [105] permet d'écrire le module d'élasticité effectif $E_C^{(k)}$ comme suit :

$$E_C^{(k)} = \frac{3}{8}\left(\frac{1+\xi_L \eta_L f_r^{(k)}}{1-\eta_L f_r^{(k)}}\right)E_m + \frac{5}{8}\left(\frac{1+\xi_w \eta_w f_r^{(k)}}{1-\eta_w f_r^{(k)}}\right)E_m \tag{2.22}$$

où,

$$\eta_L = \frac{(E^{PLG}/E_m)-1}{(E^{PLG}/E_m)+\xi_L},\ \eta_w = \frac{(E^{PLG}/E_m)-1}{(E^{PLG}/E_m)+\xi_w} \tag{2.23}$$

et,

E^{PLG} et E_m sont les modules d'élasticité des PLGs et de la matrice, respectivement.

ξ_w et ξ_L sont représentent les caractéristiques de taille et de géométrie du PLG, elles sont exprimées comme suit:

$$\xi_L = 2\left(\frac{l_{PLG}}{h_{PLG}}\right),\ \xi_w = 2\left(\frac{w_{PLG}}{h_{PLG}}\right) \tag{2.24}$$

avec l_{PLG} , w_{PLG} et h_{PLG} se réfèrent respectivement à la longueur, la largeur et l'épaisseur du PLG.

Le coefficient de Poisson ν_c et la masse volumique ρ_c du CRPLG pour la $k^{\text{ème}}$ couche, en utilisant la loi de mélange sont calculés comme suit:

$$\nu_c^{(k)} = f_r^{(k)}\,\nu^{PLG} + (1 - f_r^{(k)})\,\nu_m \tag{2.25}$$

$$\rho_c^{(k)} = f_r^{(k)}\,\rho^{PLG} + (1 - f_r^{(k)})\,\rho_m \tag{2.26}$$

où,

ν^{PLG} et ν_m sont les coefficients de Poisson des PLGs et de la matrice, respectivement.

ρ^{PLG} et ρ_m sont les masses volumique des PLGs et de la matrice, respectivement.

2.3.2.2 Modèle de Halpin-Tsai étendu

En utilisant le modèle Halpin-Tsai étendu, les modules d'élasticité effectifs correspondant à la $k^{\text{ème}}$ couche de CRPLG peuvent être exprimés comme suit [111]

$$E_{11}^{(k)} = E_m \eta_1 \left(\frac{2(l_{PLG}/h_{PLG})\gamma_{11} f_r^{(k)} + 1}{1 - \gamma_{11} f_r^{(k)}}\right) \tag{2.27}$$

$$E_{22}^{(k)} = E_m \eta_2 \left(\frac{2(w_{PLG}/h_{PLG})\gamma_{22} f_r^{(k)} + 1}{1 - \gamma_{22} f_r^{(k)}}\right) \tag{2.28}$$

$$G_{12}^{(k)} = G_m \eta_3 \left(\frac{1}{1 - \gamma_{12} f_r^{(k)}}\right) \tag{2.29}$$

où

l_{PLG} , h_{PLG} et w_{PLG} sont les paramètres géométriques d'une feuille du Graphène.

η_j (j= 1,2,3) sont les paramètres d'efficacité du mélange, ces paramètres sont obtenus en appariant les données qui sont évaluées par des simulations de dynamique moléculaire et

un modèle micromécanique. Ces paramètres, en général, capturent différents effets tels que les effets de surface et les effets intermoléculaires.

$$\gamma_{11} = \frac{(E_{11}^{PLG} / E_m) - 1}{2(l_{PLG} / h_{PLG}) + (E_{11}^{PLG} / E_m)} \tag{2.30}$$

$$\gamma_{22} = \frac{(E_{22}^{PLG} / E_m) - 1}{2(w_{PLG} / h_{PLG}) + (E_{22}^{PLG} / E_m)} \tag{2.31}$$

$$\gamma_{12} = \frac{(G_{22}^{PLG} / G_m) - 1}{G_{12}^{PLG} / G_m} \tag{2.32}$$

où,

- E_{11}^{PLG}, E_{22}^{PLG}, sont les modules de Young.
- G_{11}^{PLG} est le module de cisaillement d'une feuille du Graphène.
- E^m et G^m sont les modules de Young et le module de cisaillement de la matrice
- f_r et f_m sont respectivement les fractions volumiques du Graphène et de la matrice, sont définis comme $f_m = 1 - f_r$

La masse volumique et le coefficient de Poisson pour le CRPLG sont donnés comme suit:

$$\rho^{(k)} = f_{PLG}^{(k)} \rho^{PLG} + (1 - f_{PLG}^{(k)}) \rho^m \tag{2.33}$$

$$\nu_{12}^{(k)} = f_{PLG}^{(r)} \nu_{12}^{PLG} + (1 - f_{PLG}^{(k)}) \nu_m \tag{2.34}$$

2.3.3 Propriétés mécaniques du composite renforcé de fibres de graphite (CRFG)

En utilisant la loi de mélange, les propriétés mécanique des plaques composites renforcés des fibres de graphite (CRFG) peuvent être exprimées comme suite [136]:

$$E_{11} = f_F E_{11}^F + f_m E^m \tag{2.35}$$

$$\frac{1}{E_{22}} = \frac{f_F}{E_{22}^F} + \frac{f_m}{E^m} - f_F f_m \frac{f_F^2 E^m / E_{22}^F + f_m^2 E_{22}^F / E^m - 2\nu^F \nu^m}{f_F E_{22}^F + f_m E^m} \tag{2.36}$$

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{f_F}{G_{12}^F} + \frac{f_m}{G^m} \tag{2.37}$$

$$\rho = f_F \rho^F + f_m \rho^m \tag{2.38}$$

$$\nu_{12} = f_F \nu^F + f_m \nu^m \tag{2.39}$$

où,

- E , G , et ν sont respectivement le module de Young, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson. Les indices *m et F* réfèrent respectivement à la matrice et à la fibre de graphite.
- f_m et f_F sont respectivement fractions volumiques de la matrice et des fibres de graphite

Les fractions des fibres et de la matrice sont liés par la relation suivante

$$f_m + f_F = 1 \tag{2.40}$$

2.4 Caractérisation géométrique d'une plaque stratifiée hybride renforcée par des nanofibres fonctionnellement gradué

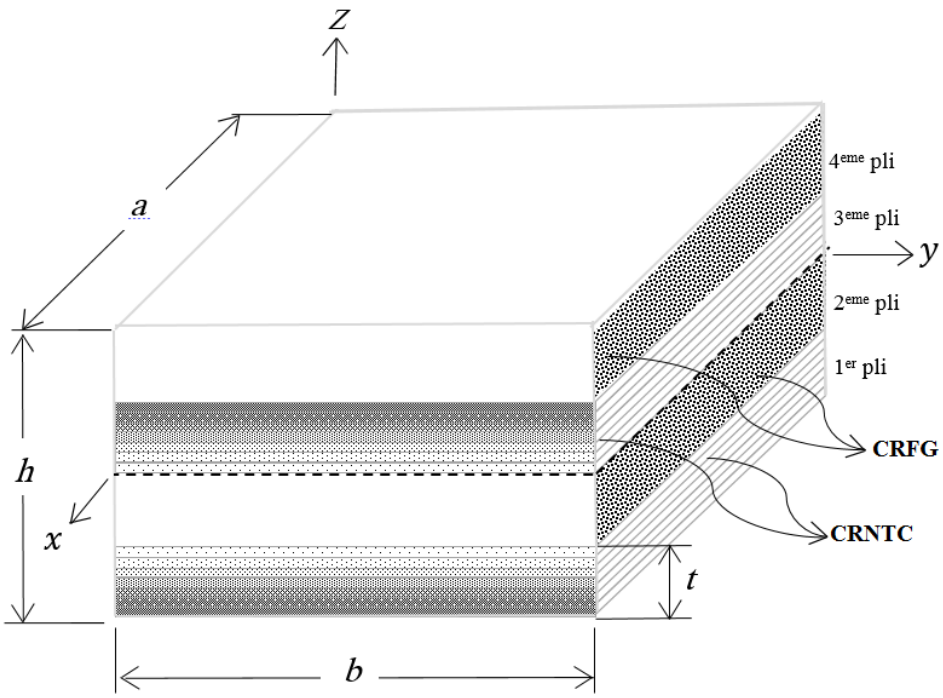


Figure 2.4 Système de coordonnées et géométrie d'une plaque stratifiée hybride parfaitement collé composée des plis renforcés par les NTCs et des plis renforcés par le graphite.

Considèrent une plaque stratifiée hybride avec (n_t) plis dans lesquels chaque pli est soit renforcée par le NTC soit par le graphite. Les plis renforcés par les NTCs sont divisés en (N_L) sous-couches dans lesquelles chaque couche a la même épaisseur ($\Delta h = t/N_L$) où t est l'épaisseur de pli (voir la figure 2.4). On suppose que chaque individuelle sous-couche des plis renforcés par les NTCs a une dispersion uniforme des nanofibres dans le plan (x, y) et une quantité différente de celle-ci d'une sous-couche à l'autre à travers

l'épaisseur du pli. Les fibres du NTC sont dispersées selon cinq modèles à savoir UD, FG-V, FG-Λ, FG-O et FG-X.

2.5 Comportement mécanique des plaques stratifiées

2.5.1 Champ des déplacements

Considérons une plaque stratifiée rectangulaire constituée de *n* couches de même matériau. On définit un système de référence *(x,y,z)* situé sur la surface moyenne de la plaque dont l'axe *z* correspond à la direction suivant l'épaisseur. Les caractéristiques géométriques de la plaque sont indiquées sur la figure 2.5.

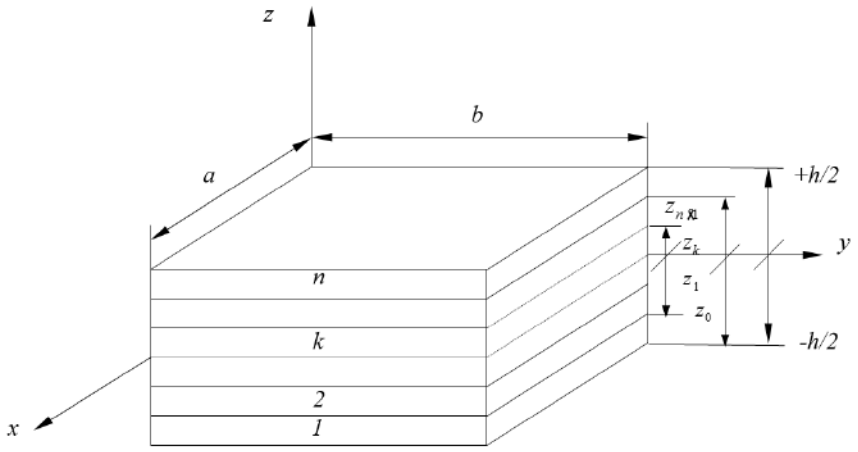


Figure 2.5 Schéma d'une plaque stratifiée.

Le champ des déplacements d'un point quelconque *M*(*x,y,z*) de la plaque en présence du cisaillement transverse est approché par un polynôme linéaire en *z* à coefficients en (*x,y*) de la forme [137][138] :

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) + z\,\theta_x(x,y,t) \\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) + z\,\theta_y(x,y,t) \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned} \tag{2.41}$$

où :

u,v,w sont respectivement, les déplacements suivant les directions *x, y, z*.

u_0,v_0,w_0 sont respectivement, les déplacements suivant les directions *x, y, z*. d'un point situé sur la surface moyenne de la plaque.

θ_x,θ_y sont respectivement, les rotations de la normale à la surface moyenne autour des axes *x, y*.

Cette forme répond aux conditions de compatibilité des déformations et permet de prendre en compte le couplage entre les déformations planes et de courbures.

2.5.2 Champ des deformations

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements (2.41) et s'écrit :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{x0} + z\,\kappa_x \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_{y0} + z\,\kappa_y \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma_{xy0} + z\,\kappa_{xy} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

avec:

$$\varepsilon_{x0} = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \qquad \varepsilon_{y0} = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \qquad \gamma_{xy0} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}$$

$$\kappa_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \qquad \kappa_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \qquad \kappa_{xy} = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}$$

2.5.3 Relation contraintes–deformations

La loi de Hooke généralisée permet, pour une plaque composite stratifiée, d'écrire la relation entre les contraintes et les déformations. Il est nécessaire d'exprimer cette relation pour chaque pli *k* à cause de la discontinuité des contraintes interlaminaires. Par souci de simplification, on définit un système d'axes principal (local) (*1*,*2*,*3*) dont l'axe (*1*) correspond à la direction longitudinale des fibres (figure 2.6).

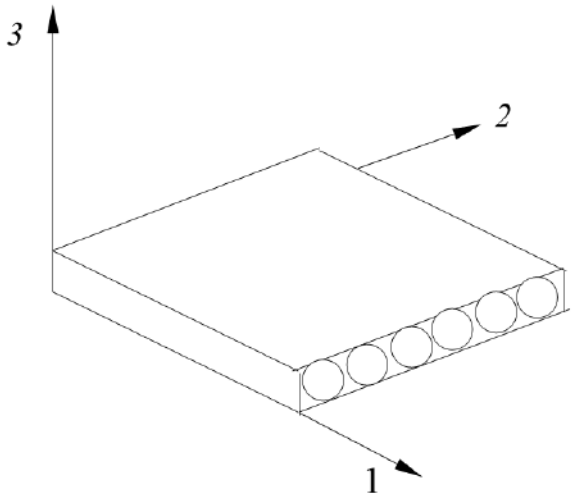


Figure 2.6 Directions principales dans un pli.

La relation contraintes–déformations par raport à ce système d'axe s'écrit [1] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & Q_{33} & 0 & 0 \\ & sym & & Q_{44} & 0 \\ & & & & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}^k \tag{2.43}$$

où :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad , \quad Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad , \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{33} = G_{12} \quad , \quad Q_{44} = G_{23} \quad , \quad Q_{55} = G_{13}$$

avec :

E_1 : Module d'Young longitudinal.

E_2 : Module d'Young transversal.

G_{12} : Module de cisaillement longitudinal.

G_{13}, G_{23} : Modules de cisaillement transversal.

ν_{12} , ν_{21} : Coefficients de Poisson.

La relation (2.43) peut s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$\{\sigma\}^k_{123} = [Q]\{\varepsilon\}^k_{123} \tag{2.44}$$

Généralement, dans un stratifié, la direction des fibres est décalée d'un pli à un autre. Pour faire l'étude du comportement élastique de l'ensemble du stratifié, il est nécessaire d'exprimer la relation (2.43) par rapport au système d'axes global (*x,y,z*), cette opération

est effectuée en faisant intervenir les matrices de changement de base des contraintes et des déformations.

Soit donc pour le champ des contraintes :

$$\{\sigma\}_{xyz}^{k} = [T]\{\sigma\}_{123}^{k} \tag{2.45}$$

où [*T*] est la matrice de changement de base des contraintes, elle est donnée par l'expression suivante :

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & -\cos\theta\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & \cos\theta\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\cos\theta\sin\theta & -2\cos\theta\sin\theta & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

θ est l'angle que font le repère (*1,2)* et le repère (*x,y)*.

L'expression du champ des déformations par rapport au repère (*x,y,z*) s'écrit :

$$\{\varepsilon\}_{xyz}^{k} = [T']\{\varepsilon\}_{123}^{k} \tag{2.47}$$

où [*T'*] est la matrice de changement de base des déformations, elle est donnée par l'expression suivante :

$$[T'] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & -2\cos\theta\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 2\cos\theta\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta\sin\theta & -\cos\theta\sin\theta & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{2.48}$$

Il est a noté que le changement de base est effectué en faisant une rotation -θ autour de la direction *3* (figure 2.7).

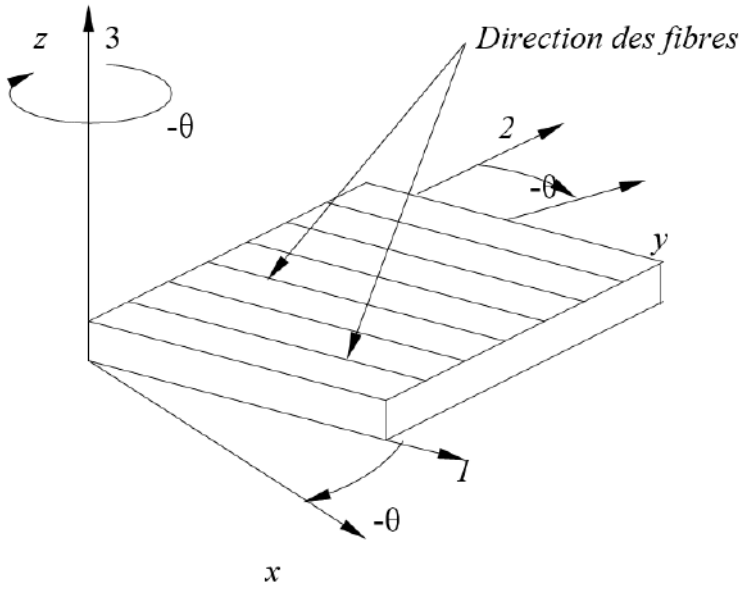


Figure 2.7 Changement du repère dans un pli.

Par substitution de (2.45) et (2.47) dans (2.44), la relation contraintes–déformations devient :

$$\{\sigma\}_{xyz}^{k} = [\overline{Q}]\{\varepsilon\}_{xyz}^{k} \tag{2.49}$$

où $[\overline{Q}]$ est la matrice de rigidité du pli *k* exprimée dans le repère du stratifié (*x*, *y*, *z*) :

$$[\overline{Q}] = [T]^{-1}[Q][T'] \tag{2.50}$$

La relation (2.49) s'écrit sous la forme développée suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{k} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} & 0 & 0 \\ & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} & 0 & 0 \\ & & \overline{Q}_{66} & 0 & 0 \\ & sym & & \overline{Q}_{44} & 0 \\ & & & & \overline{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{k} \tag{2.51}$$

Les éléments de la matrice de rigidité $[\overline{Q}]$ s'écrivent en fonction des coefficients de la matrice dans les axes principaux [*Q*] et de l'angle θ :

$$
\begin{aligned}
\overline{Q}_{11} &= Q_{11}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}s^4 \\
\overline{Q}_{12} &= Q_{12}(c^4 + s^4) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 \\
\overline{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})s^3c \\
\overline{Q}_{22} &= Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + (2Q_{11} + 4Q_{66})s^2c^2 \\
\overline{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})c^3s \\
\overline{Q}_{66} &= (Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(c^4 + s^4) \\
\overline{Q}_{44} &= Q_{44}c^2 + Q_{55}s^2 \\
\overline{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44})cs \\
\overline{Q}_{55} &= Q_{44}s^2 + Q_{55}c^2
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

2.5.4 Résultantes et moments

La discontinuité des contraintes à travers l'épaisseur du stratifié conduit à exprimer la relation contrainte–déformation en termes des résultantes et moments :

Les résultantes en membrane sont définies par :

$$
N(x,y) = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \tag{2.53}
$$

de même, les résultantes en cisaillement sont définies par :

$$
Q(x,y) = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \tau_{zy} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}_k dz \tag{2.54}
$$

Les moments de flexion et de torsion sont donnés par :

$$
M(x,y) = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \tag{2.55}
$$

où *n* représente le nombre de couches constituant le stratifié.

Il faut bien noter que les relations (2.53), (2.54) et (2.55) sont définies par unité de longueur du stratifié.

2.5.5 Equation constitutive

La combinaison des relations (2.51) à (2.55) conduit à formuler l'équation constitutive du stratifié :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ & & & & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ & & sym & & & D_{66} & 0 & 0 \\ & & & & & & F_{44} & F_{45} \\ & & & & & & & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x\,0} \\ \varepsilon_{y\,0} \\ \varepsilon_{xy\,0} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{2.56}$$

ou sous forme contractée :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_f \\ Q \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} \tag{2.57}$$

avec :

$$[C] = \begin{bmatrix} [A] & [B] & 0 \\ [B] & [D] & 0 \\ 0 & 0 & [F] \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

Les coefficients de la matrice d'extension [*A*], la matrice de couplage [*B*] et la matrice de flexion [*D*] sont définis comme suit :

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\overline{Q}_{ij})_k (1, z, z^2) dz, \qquad i, j = 1, 2, 6 \tag{2.59}$$

Par contre, les coefficients de la matrice de cisaillement transverse [*F*] sont définis par :

$$F_{ij} = \alpha_{ij} \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\overline{Q}_{ij})_k \, dz, \qquad i, j = 4, 5 \tag{2.60}$$

où α_{ij} sont les facteurs de correction en cisaillement, permettant d'améliorer la théorie des plaques stratifiées avec cisaillement transverse. La détermination de ces facteurs a fait l'objet de plusieurs recherches [139]. On note que Timoshenko, Reissner et Mindlin ont pris ces facteurs respectivement égaux à 2/3, 5/6 et $\pi^2/12$. Il a été remarqué que les résultats obtenus avec des valeurs de 5/6 sont les plus satisfaisants.

2.6 Équations fondamentales des plaques stratifiées

Il est nécessaire, pour développer les équations fondamentales des plaques stratifiées, de passer par les relations d'équilibre dynamique. Ces relations peuvent être obtenues directement en écrivant les conditions d'équilibre d'un élément infinitésimal

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+f_x=\rho\, a_x\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+f_y=\rho\, a_y\\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+f_z=\rho\, a_z
\end{aligned} \tag{2.61}$$

où :

f_x, f_y, f_z sont les composantes des forces volumiques exercées au point *M* du matériau.

ρ est la masse volumique du point *M*.

a_x, a_y, a_z sont les composantes du vecteur accélération du point *M*.

L'intégration des équations (2.61) suivant l'épaisseur du stratifié, en négligeant les forces volumiques et les contraintes interlaminaires, conduit aux relations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=\rho_s\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}+R\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=\rho_s\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}+R\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}=\rho_s\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=R\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}+I_{xy}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-Q_y=R\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}+I_{xy}\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.62}$$

où : $(\rho_s, R, I_{xy})=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(1, z, z^2)\rho dz$

La substitution de l'équation (2.56) dans les équations (2.62) conduit aux équations fondamentales des plaques stratifiées dont leurs expressions sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
&A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+2A_{16}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\,\partial y}+A_{66}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+A_{16}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+(A_{12}+A_{66})\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\,\partial y}+A_{26}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\\
&B_{11}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2}+2B_{16}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x\,\partial y}+B_{66}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2}+B_{16}\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2}+(B_{11}+B_{66})\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x\,\partial y}+B_{26}\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2}=\\
&\rho_s\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}+R\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.63}$$

$$A_{16}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+(A_{12}+A_{66})\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\,\partial y}+A_{26}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+A_{66}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+2A_{26}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\,\partial y}+A_{22}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+$$
$$B_{16}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2}+(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x\,\partial y}+B_{26}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2}+B_{66}\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2}+2B_{26}\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x\,\partial y}+B_{22}\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2}= \qquad (2.64)$$
$$\rho_s\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}+R\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2}$$

$$F_{55}\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+F_{45}\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x}+\frac{\partial \theta_y}{\partial x}+2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)+F_{44}\left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)=\rho_s\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \qquad (2.65)$$

$$B_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+2B_{16}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\,\partial y}+B_{66}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+B_{16}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\,\partial y}+B_{26}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}$$
$$+D_{11}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2}+2D_{16}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x\,\partial y}+D_{66}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2}+D_{16}\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2}+(D_{12}+D_{66})\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x\,\partial y}+ \qquad (2.66)$$
$$D_{26}\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2}-F_{55}\left(\theta_x+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)-F_{45}\left(\theta_y+\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)=R\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}+I_{xy}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2}$$

$$B_{16}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+(B_{16}+B_{66})\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\,\partial y}+B_{26}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+B_{66}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+2B_{26})\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\,\partial y}+B_{22}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+$$
$$D_{16}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2}+(D_{12}+D_{66})\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x\,\partial y}+D_{26}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2}+D_{66}\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2}+2D_{26}\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x\,\partial y}+D_{22}\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2}- \qquad (2.67)$$
$$F_{45}\left(\theta_x+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)-F_{44}\left(\theta_y+\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)=R\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}+I_{xy}\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2}$$

Les équations (2.63 à 2.67) permettent, en principe, de déterminer les cinq fonctions solutions $u_0(x,y,t)$, $v_0(x,y,t)$, $w_0(x,y,t)$, $\theta_x(x,y,t)$ et $\theta_y(x,y,t)$.

Dans le cas de l'analyse du comportement vibratoire, où le problème consiste à rechercher les fréquences propres de vibration, et pour un mouvement harmonique, il suffit d'exprimer le champ des déplacements sous la forme :

$$\begin{aligned} u_0(x,y,t) &= u_0(x,y)\,e^{i\omega t} \\ v_0(x,y,t) &= v_0(x,y)\,e^{i\omega t} \\ w_0(x,y,t) &= w_0(x,y)\,e^{i\omega t} \\ \theta_x(x,y,t) &= \theta_x(x,y)\,e^{i\omega t} \\ \theta_y(x,y,t) &= \theta_y(x,y)\,e^{i\omega t} \end{aligned} \qquad (2.68)$$

où ω est la fréquence de vibration de la plaque. La détermination des fréquences propres est obtenue en reportant ces expressions dans les équations fondamentales (2.63 à 2.67).

La résolution de ces équations est toutes fois complexe, et ne peut être menée de manière analytique que dans quelques cas particuliers, citons à titre d'exemple le cas des stratifiés orthotropes et les stratifiés symétriques.

Pour bien définir le comportement mécanique des plaques stratifiées et en particulier le comportement vibratoire, dont fait objet de cette étude, il faut avoir recours aux méthodes numériques vu leurs possibilités de résoudre les problèmes complexes. Parmi ces méthodes, la méthode des éléments finis s'impose comme l'outil usuel de l'analyse des structures complexes.

Chapitre 3

Formulation par élément finis

3.1 Introduction

La méthode des éléments finis (M.E.F.) est couramment utilisée et est appliquée dans divers domaines scientifiques : en analyse des structures, en constructions aéronautiques et navales, en génie mécanique, en génie civil, etc. Elle permet de ramener les problèmes des milieux continus à des problèmes discrets à un nombre fini de paramètres inconnus (forces, déplacements) qui sont déterminés par application de critères énergétiques.

Le principe consiste à discrétiser une structure en un nombre fini d'éléments interconnectés entre eux par des nœuds, chaque nœud est repéré par ces coordonnées par rapport à un système d'axe.

L'analyse du comportement vibratoire des plaques stratifiées par la M.E.F. consiste à développer les équations du mouvement à partir des formulations énergétiques et de déterminer par la suite les fréquences propres de vibration, cette analyse nécessite l'utilisation des éléments bidimensionnels pour la discrétisation. Avant d'entreprendre, il est intéressant d'effectuer une comparaison entre ces éléments afin de faire un choix meilleur. Plusieurs tests ont été effectués sur les types des éléments concernant la convergence des solutions, les remarques suivantes ont été tirées[140] :

- Les éléments quadrilatères donnent de meilleurs résultats que les éléments triangulaires.
- Pour un même nombre de degrés de liberté, les éléments à champ quadratique ont une précision meilleure que les éléments à champ linéaire.
- Les éléments basés sur la théorie de MINDLIN avec prise en compte du cisaillement transverse sont les mieux adaptés dans le cas des plaques épaisses, ainsi, la condition de compatibilité inter-éléments ne nécessite qu'une continuité C(0).

- Les éléments quadratiques de la famille de SERENDIP présentent un comportement de verrouillage quel que soit l'ordre d'intégration utilisé ; un comportement sans verrouillage permet d'utiliser l'élément à la fois pour les plaques épaisses et pour les plaques minces.
- Les éléments avec intégration réduite de la famille de LAGRANGE comportent convenablement dans les situations des plaques minces.

D'après ce qui vient d'être dit précédemment, un élément de la famille de LAGRANGE à champ quadratique peut répondre aux exigences imposées par le présent travail.

3.2 Discrétisation

Considérons la plaque de la figure 2.5, la surface moyenne de cette plaque est discrétisée en un nombre fini d'éléments quadrilatères isoparamétriques à 9 nœuds, chaque nœud possède 5 degrés de liberté indépendants (trois déplacements et deux rotations).

Dans la M.E.F. il est intéressant d'utiliser à la place du système de coordonnées physiques un système de coordonnées naturelles ou intrinsèques. Ceci permet de définir une transformation du domaine physique de l'élément en un domaine géométrique simple sans dimension. Ce système est défini par des axes parallèles aux côtés de l'élément, les coordonnées des nœuds de sommets prennent des valeurs unitaires (+1ou –1), les nœuds d'interfaces prennent les valeurs 0 et 1 ou -1 (figure 3.1).

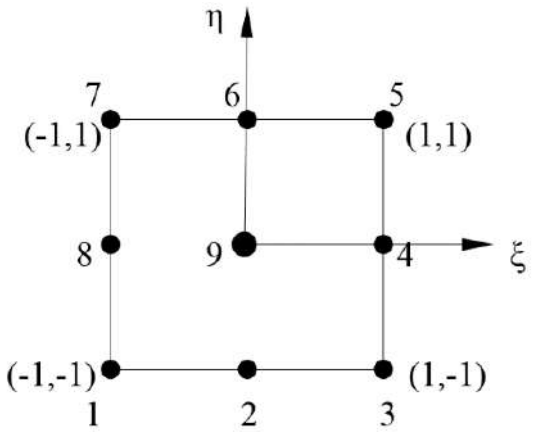


Figure 3.1 Élément de référence

Les déplacements élémentaires peuvent être définis par l'approximation suivante :

$$\{a\} = \sum_{i=1}^{NN} [N_i(\xi,\eta)]\{d_i\} \tag{3.1}$$

avec:

- $\{a\} = \{u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \theta_x \quad \theta_y\}$
- $\{d_i\}$: le vecteur des déplacements nodaux.

$$\{d_i\}^T = \{u_{0i} \quad v_{0i} \quad w_{0i} \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi}\}$$

- NN : le nombre de nœuds par élément.
- $[N_i]$: les fonctions d'interpolations des déplacements exprimées en terme de coordonnées naturelles.

Les fonctions d'interpolations N_i doivent être choisies de manière qu'elles vérifient la complétude et la continuité inter-élément. Pour un élément à 9 nœuds, ces fonctions sont définies comme suit [141] :

Pour les nœuds de sommets : $\xi_i = \pm 1$; $\eta_i = \pm 1$

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)\xi\eta$$

Pour les nœuds d'interfaces :

$$N_i = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta\eta_i)\eta\eta_i \qquad \text{à} \qquad \xi_i = 0 \quad ; \quad \eta_i = \pm 1$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi\xi_i)\xi\xi_i \qquad \text{à} \qquad \xi_i = \pm 1 \quad ; \quad \eta_i = 0$$

Pour le nœud du centre :

$$N_i = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$$

La relation déformations–déplacements élémentaires est obtenue de (3.1) comme suit :

$$\{\varepsilon\} = \sum_{i=1}^{NN} [B_i].\{d_i\} \tag{3.2}$$

où $[B_i]$ est la matrice d'interpolation des déformations, elle est donnée par l'expression suivante :

$$[B_i]=\begin{bmatrix} \partial N_i/\partial x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_i/\partial y & 0 & 0 & 0 \\ \partial N_i/\partial y & \partial N_i/\partial x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial N_i/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial N_i/\partial y \\ 0 & 0 & 0 & \partial N_i/\partial y & \partial N_i/\partial x \\ 0 & 0 & \partial N_i/\partial x & N_i & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_i/\partial y & 0 & N_i \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Les éléments de la matrice $[B_i]$ sont définis sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{3.4}$$

[J] est la matrice Jacobienne, elle permet le passage du système de coordonnées cartésiennes au système de coordonnées naturelles.

La matrice Jacobienne est définie comme suit :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

dans laquelle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} x_i \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} y_i \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} x_i \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} y_i \end{aligned} \tag{3.6}$$

Les relations (3.1) et (3.2) peuvent êtres écrits sous les formes matricielles contractées suivantes :

$$\begin{aligned} \{a\} &= [N]\{a_e\} \\ \{\varepsilon\} &= [B]\{a_e\} \end{aligned} \tag{3.7}$$

avec:

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad .... \quad N_{NN}]$$
$$[B] = [B_1 \quad B_2 \quad .... \quad B_{NN}]$$
$$\{a_e\} = \{\{d_1\} \quad \{d_2\} \quad .... \quad \{d_{NN}\}\}^T$$

3.3 Équations du mouvement

L'analyse vibratoire d'une telle structure revient à négliger les forces extérieures appliquées. Dans le cas où ces forces ne sont pas négligeables, l'analyse devient dynamique.

Les équations du mouvement des plaques stratifiées peuvent être obtenues en utilisant l'équation de Lagrange [140] :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{a}_r}\right) - \frac{\partial E}{\partial a_r} + \frac{\partial \pi}{\partial \dot{a}_r} = 0 \qquad r = 1, 2, \ldots, R \tag{3.8}$$

où :

R est le nombre de degrés de liberté total de la structure.

E est l'énergie cinétique totale de la plaque.

π est l'énergie potentielle totale de la plaque

L'expression de l'énergie potentielle totale π en absence du travail des forces extérieures est :

$$\pi = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\}\, d\Omega = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \{\varepsilon\}^T [C]\{\varepsilon\}\, d\Omega \tag{3.9}$$

Ω représente la surface de la plaque.

Par contre, l'énergie cinétique E est donnée par l'expression suivante :

$$E = \frac{1}{2}\int_V \{\dot{\Delta}\}^T \rho \{\dot{\Delta}\}\, dV \tag{3.10}$$

avec :

$\{\dot{\Delta}\}$ le vecteur vitesse d'un point *M(x, y, z)* du stratifie, $\{\dot{\Delta}\}^T = \{u \quad \dot{v} \quad \dot{w}\}$

V le volume de la plaque

L'intégration de (3.10) suivant l'épaisseur de la plaque conduit à écrire :

$$E = \frac{1}{2}\int_\Omega \{\dot{a}\}^T [\bar{m}]\{\dot{a}\}\, d\Omega \tag{3.11}$$

où $[\bar{m}]$ est la matrice d'inertie.

$$[\bar{m}] = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

avec :

$$I_i = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^i \rho^k dz \qquad i = 0,1,2. \tag{3.13}$$

n représente le nombre de plis constituant le stratifié.

Dans le cas d'une plaque discrète, l'énergie potentielle totale est la somme de toutes les énergies potentielles élémentaires :

$$\pi = \sum_{e=1}^{NE} \pi_e \tag{3.14}$$

NE est le nombre des éléments.

L'énergie potentielle élémentaire peut être obtenue en utilisant la relation (3.9) :

$$\pi_e = \frac{1}{2}\{a_e\}^T [K_e]\{a_e\} \tag{3.15}$$

où $[K_e]$ est la matrice de rigidité élémentaire, elle est donnée par la relation suivante :

$$[K_e] = \int_{\Omega_e} [B]^T [C][B]\, d\Omega_e \tag{3.16}$$

où Ω_e est la surface d'un élément.

De même, l'énergie cinétique de la plaque est la somme de toutes les énergies cinétiques élémentaires :

$$E = \sum_{e=1}^{NE} E_e \tag{3.17}$$

L'énergie cinétique pour un élément, en utilisant la relation (3.11), s'écrit :

$$E_e = \frac{1}{2}\{\dot{a}_e\}^T [M_e]\{\dot{a}_e\} \tag{3.18}$$

où $[M_e]$ est la matrice de masse élémentaire, son expression est donnée comme suit :

$$[M_e] = \int_{\Omega_e} [N]^T [\bar{m}][N]\, d\Omega_e \tag{3.19}$$

Par substitution de (3.15) et (3.18) dans (3.8), l'équation de Lagrange, pour un élément, devient :

$$[M_e]\{\ddot{a}_e\} + [K_e]\{a_e\} = 0 \tag{3.20}$$

où $\ddot{a}_e$ est le vecteur des accélérations élémentaires.

La relation (3.20) représente les équations du mouvement pour un seul élément de la plaque, les équations du mouvement globales sont obtenues en utilisant les relations (3.14) et (3.17) :

$$[M]\{\ddot{a}\} + [K]\{a\} = 0 \tag{3.21}$$

avec :

$\{\ddot{a}\}$: vecteur des accélérations globales.

$\{a\}$: vecteur des déplacements globaux.

$[M]$: matrice de masse globale.

$[K]$: matrice de rigidité globale.

3.3.1 Matrice de rigidité

Les matrices de rigidité élémentaires sont définies par la relation (3.16). Elles sont symétriques d'ordre 45 × 45, leur forme est donnée comme suit :

$$[K_e]=\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] & 0 & [K^{14}] & [K^{15}] \\ & [K^{22}] & 0 & [K^{24}] & [K^{25}] \\ & & [K^{33}] & [K^{34}] & [K^{35}] \\ & Sym & & [K^{44}] & [K^{45}] \\ & & & & [K^{55}] \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

Les éléments des matrices $[k^{\alpha\beta}]$ (α, β = 1,2, …5) sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{11} &= A_{11}S_{ij}^{\xi} + A_{16}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + A_{66}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{12} &= A_{12}S_{ij}^{\xi\eta} + A_{16}S_{ij}^{\xi} + A_{26}S_{ij}^{\eta} + A_{66}S_{ji}^{\xi\eta} \\
K_{ij}^{14} &= B_{11}S_{ij}^{\xi} + B_{16}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + B_{66}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{15} &= B_{12}S_{ij}^{\xi\eta} + B_{16}S_{ij}^{\xi} + B_{26}S_{ji}^{\eta} + B_{66}S_{ji}^{\xi\eta} \\
K_{ij}^{22} &= A_{22}S_{ij}^{\eta} + A_{26}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + A_{66}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{24} &= B_{16}S_{ij}^{\xi} + B_{66}S_{ij}^{\xi\eta} + B_{12}S_{ji}^{\xi\eta} + B_{26}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{25} &= B_{66}S_{ij}^{\xi} + B_{26}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + B_{22}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{33} &= F_{44}S_{ij}^{\xi} + F_{45}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + F_{55}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{34} &= F_{44}S_{ij}^{\xi 0} + F_{45}S_{ij}^{\eta 0} \\
K_{ij}^{35} &= F_{45}S_{ij}^{\xi 0} + F_{55}S_{ij}^{\eta 0} \\
K_{ij}^{35} &= F_{45}S_{ij}^{\xi 0} + F_{55}S_{ij}^{\eta 0} \\
K_{ij}^{44} &= D_{11}S_{ij}^{\xi} + D_{16}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + D_{66}S_{ij}^{\eta} + F_{44}S_{ij}^{0} \\
K_{ij}^{45} &= D_{12}S_{ij}^{\xi\eta} + D_{16}S_{ij}^{\xi} + D_{26}S_{ji}^{\eta} + D_{66}S_{ij}^{\xi\eta} + F_{45}S_{ij}^{0} \\
K_{ij}^{55} &= D_{66}S_{ij}^{\xi} + D_{26}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + D_{22}S_{ij}^{\eta} + F_{55}S_{ij}^{0}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

où :

$$S_{ij}^{\xi\eta} = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\frac{\partial N_j}{\partial \eta}\left|J\right| \, d\xi \, d\eta$$
$$S_{ij}^{00} = S_{ij} \qquad (i, j = 1, 9) \qquad (3.24)$$
$$S_{ij}^{\xi\xi} = S_{ij}^{\xi}$$

$\left|J\right|$ est le déterminant de la matrice Jacobienne.

Les quantités S_{ij} peuvent être évaluées en utilisant l'intégration numérique dans le domaine (ξ ,η). La technique de l'intégration sélective avec 3×3 points de Gauss pour les termes de membrane, flexion et 2×2 points de Gauss pour les termes de cisaillement, donne avec un temps de calcul réduit, de meilleurs résultats [140].

L'intégrale (3.24) peut s'écrire :

$$S_{ij} = \sum_{a=1}^{g}\sum_{b=1}^{g} W_a W_b \left|J\right| \qquad (3.25)$$

où :

W_a, W_b sont les coefficients de pondération aux points d'intégration ξ_a ,η_b

g est le nombre de points d'intégration.

La matrice de rigidité globale [*K*] est obtenue par assemblage des matrices de rigidité élémentaires, l'assemblage s'effectue en additionnant terme à terme les éléments des matrices élémentaires communs en nœud et en degré de liberté.

3.3.2 Matrice de masse

Deux classes principales peuvent être envisagées pour la représentation des masses : les masses cohérentes et les masses concentrées.

1. La représentation cohérente des masses consiste à calculer les matrices de masse élémentaires en choisissant pour la discrétisation spatiale de l'énergie cinétique les mêmes fonctions d'interpolation que pour l'énergie de déformation. Cette méthode conduit généralement à des matrices masse symétriques mais non diagonales. Les matrices de masses élémentaires sont

calculées d'après l'expression (3.19) par intégration numérique, dans ce cas, on peut utiliser la même méthode d'intégration que pour les matrices de rigidité élémentaires.

2. La technique des masses concentrées consiste à discrétiser les masses soit au niveau élémentaire, soit au niveau de la structure complète de manière à obtenir une matrice de masse diagonale. En effet, on peut obtenir des matrices de masse diagonale en affectant aux différents nœuds de chaque élément des masses (inerties) concentrées égales de manière à respecter la masse totale de l'élément.

La construction de la matrice de masse globale est tout à fait identique à celle de la matrice de rigidité globale.

3.4 Équations caractéristiques

Pour un mouvement harmonique, le champ des déplacements $\{a\}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\{a\} = \{a_0\}e^{iwt} \tag{3.26}$$

par substitution de (3.26) dans (3.21), l'équation du mouvement devient :

$$([K] - \omega^2[M])\{a_0\} = \{0\} \tag{3.27}$$

si on pose $\lambda = \omega^2$, la relation (3.27) s'écrit :

$$([K] - \lambda[M])\{a_0\} = \{0\} \tag{3.28}$$

L'équation (3.28) représente la forme générale d'un problème aux valeurs propres qui peut être résolu par plusieurs méthodes, (méthode de Householder, méthode de Q-R, méthode d'itération sur sous espace, etc.).

En effet, le choix d'une méthode de résolution dépend des caractéristiques des matrices [*K*] et [*M*], de leurs tailles, de la largeur de bande et de nombre de solutions requis.

La méthode d'itération sur sous-espace est la plus utilisée dans les programmes de calcul des structures. Elle permet de calculer les plus petites valeurs propres des matrices de grande taille.

La méthode est basée sur des itérations inverses effectuées en parallèle sur un groupe de vecteurs de départs, les matrices [*K*] et [*M*] tendent vers la forme diagonale au fur et à

mesure que le nombre d'itération augmente, ce qui rend très attrayante la méthode de Jacobi généralisée pour la résolution du problème aux valeurs propres réduit.

3.5 Conditions aux limites

Les conditions aux limites à chaque bord pour les plaques simplement appuyée ou encastrée sont données comme suit :

I. Bords entièrement simplement appuyé (SSSS)

- Stratifié croisé :

  à x = 0,a : $v_0 = w_0 = \theta_y = 0.$

  à y = 0,b : $u_0 = w_0 = \theta_x = 0.$

- Stratifié équilibré :

  à x = 0,a : $u_0 = w_0 = \theta_y = 0.$

  à y = 0,b : $v_0 = w_0 = \theta_x = 0.$

II. Bords entièrement encastré (CCCC)

- Sur tous les bords $u_0 = v_0 = w_0 = \theta_x = \theta_y = 0.$

PARTIE III. RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

Chapitre 4

Analyse vibratoire des plaques composites renforcées par les NTCs et PLGs fonctionnellement graduées.

4.1 Introduction

Dans le cadre de l'étude de comportement vibratoire des plaques nanocomposites, nous avons établi un code de calcul informatique basé sur la méthode des éléments finis permettant le calcul les réponses vibratoires (fréquences propres et déformées modales) des plaques composites. Le programme développé peut être utilisé pour l'analyse des plaques minces ou épaisses en matériau isotrope ou composite stratifié renforcé par des plis en nanofibres fonctionnellement graduées. La validité du programme sera testée par des études comparatives. Par la suite, une étude paramétrique détaillée sera effectuée tenant en compte les effets de distribution linéaire et non linéaire des nanofibres, les fractions volumiques des nanofibres ainsi que leurs types de distributions à travers l'épaisseur, sur les fréquences naturelles des plaque nanocomposites.

4.2 Études comparatives

Afin de donner une idée sur la précision du code informatique développé, des études de validation spécifiques sont effectuées sur trois cas de plaques, à savoir : (i) plaques renforcées par un mélange céramique/métal fonctionnellement graduée (FGM), (ii) plaques composites renforcées par les NTCs (CRNTC) fonctionnellement graduées, et (iii) plaques composites renforcées par les PLGs (CRPLG) fonctionnellement graduées.

(i) plaque fonctionnellement graduée renforcée par un mélange céramique/métal :

Afin d'examiner l'effet de la distribution non linéaire des fractions volumiques des matériaux de renforcement à travers l'épaisseur de la plaque, le cas d'une plaque carrée simplement appuyé composée d'alumine/aluminium (Al_2O_3/Al) est traité. Cet exemple a été choisi en raison de la non disponibilité des travaux traitant la distribution non linéaire des NTC ou PLG dans la littérature.

La surface supérieure de la plaque est supposée riche en Al, tandis que la surface inférieure est supposée riche en Al_2O_3. Pour la modélisation numérique, la plaque est divisée suivant son épaisseur en un nombre de sous-couches égal à 10 (N_L=10).

Les propriétés mécaniques d'une sous-couche *k* du mélange Al_2O_3/Al peuvent être exprimée en fonction des propriétés mécaniques de chaque matériau et l'indice de puissance P_{in} comme suit :

$$E^{(k)} = E_{\mathrm{Al}} + (E_{\mathrm{Al_2O_3}} - E_{\mathrm{Al}})\left(\frac{k-0.5}{N_L}\right)^{\mathrm{P_{in}}} \tag{4.1}$$

$$\rho^{(k)} = \rho_{\mathrm{Al}} + (\rho_{\mathrm{Al_2O_3}} - \rho_{\mathrm{Al}})\left(\frac{k-0.5}{N_L}\right)^{\mathrm{P_{in}}} \tag{4.2}$$

$$\nu^{(k)} = \nu_{\mathrm{Al}} + (\nu_{\mathrm{Al_2O_3}} - \nu_{\mathrm{Al}})\left(\frac{k-0.5}{N_L}\right)^{\mathrm{P_{in}}} \tag{4.3}$$

où $k = 1,2,3\ldots N_L$,

et $E_{\mathrm{Al}} = 70.0\times10^9\,\mathrm{Pa}$, $\nu_{\mathrm{Al}} = 0.3$, $\rho_{\mathrm{Al}} = 2702\,\mathrm{kg/m^3}$,

$E_{\mathrm{Al_2O_3}} = 380\times10^9\,\mathrm{Pa}$, $\nu_{\mathrm{Al_2O_3}} = 0.3$, $\rho_{\mathrm{Al_2O_3}} = 3800\,\mathrm{kg/m^3}$.

Tableau 4.1 Comparaison des fréquence fondamentale no- dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega h\sqrt{\rho_{\mathrm{Al_2O_3}}/E_{\mathrm{Al_2O_3}}}$ *d'une plaque simplement appuyée renforcée par Al2O3/Al fonctionnellement graduée avec a/b=1 et* N_L*=10.*

b/h	Références	P_{in}				
		0.0	0.5	1.0	4.0	10.0
5	Present	0.21120	0.18140	0.16330	0.13880	0.13080
	Song et al. [95]	0.21120	0.18090	0.16340	0.13930	0.13160
	Reddy et al. [105]	0.21910	0.18530	0.16820	0.14120	0.13440
	Matsunaga [142]	0.21210	0.18190	0.16400	0.13830	0.13060
10	Present	0.05769	0.04923	0.04426	0.03805	0.03612
	Song et al. [95]	0.05769	0.04912	0.04427	0.03811	0.03632
	Reddy et al. [105]	0.05834	0.04915	0.04477	0.03848	0.03690
	Matsunaga [142]	0.05777	0.04917	0.04426	0.03811	0.03642
20	Present	0.01480	0.01261	0.01133	0.00978	0.00930
	Hosseini et al. [143]	0.01480	0.01281	0.01150	0.01013	0.00963
	Reddy et al. [105]	0.01484	0.01249	0.01138	0.00985	0.00947

Le tableau 4.1 compare les résultats en terme de fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega} = \omega h\sqrt{\rho_{\mathrm{Al_2O_3}}/E_{\mathrm{Al_2O_3}}}$ obtenus par la présente étude avec ceux de la littérature obtenus respectivement Song et *al.* [95] (basé sur le FSDT), Matsunaga [142] (basé sur HSDT) et Reddy et *al.* [105] (obtenu par le logiciel éléments finis STRAND7).

Différentes valeurs d'indice de puissance P_{in} (0, 0.5, 1, 4, et 10) et rapports géométriques largeur/épaisseur *b/h* (5, 10 et 20) sont considérées. Il est bien clair comme le montre le tableau que nos résultats sont en bonne concordance avec ceux de la littérature.

(ii) Plaque composite renforcée par les NTCs :

La deuxième étude de comparaison est réalisée sur une plaque carrée renforcée par les NTCs avec différents types de distribution (UD, FG-V, FG-O et FG-X) et deux conditions aux limites (SSSS et CCCC). La fraction volumique des NTCs est prise égale à 0,11 avec les paramètres d'efficacité suivants $\eta_1 = 0.149$, $\eta_2 = 0.934$, $\eta_3 = 0.934$. Le rapport géométrique *b/h* est pris égal à 10. La plaque est divisée en 20 sous-couches (N_L=20) dont les propriétés mécaniques sont établies à l'aide des équations (2.7-2.11).

À des fins de validation, nous nous sommes référés aux résultats publiés par Zhu et al. [75] dans lequel ils ont utilisé le PmPV [poly (m phénylènevinylène) -co - [(2,5-répertoire-p-phénylène) vinylène] comme matrice polymère, avec un module d'élasticité de 2,1 GPa, une masse volumique de 1150 kg/m^3 et un coefficient de Poisson de 0,34. La fréquence propre est adimensionnée par l'expression : $\bar{\omega} = \omega (b^2/h) \sqrt{\rho_m / E_m}$.

Tableau 4.2 Comparaison des six premières valeurs des fréquences non-dimensionnelles $\bar{\omega} = \omega (b^2/h) \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque renforcée par les NTCs fonctionnellement graduée ($f_r^* = 0.11$, b/h=10, a/b=1 et N_L=20).

CL	Mode	FG-O		FG-V		UD		FG-X	
		Présent	Réf [75]	Présent	Réf [75]	Présent	Réf [75]	Présent	Réf [75]
CCCC	(1,1)	16.775	16.707	17.279	17.211	17.705	17.625	18.171	18.083
	(1,2)	22.180	22.253	22.746	22.818	22.981	23.041	23.547	23.606
	(1,3)	32.331	32.378	33.029	33.070	33.081	33.592	33.821	34.338
	(1,4)	32.439	32.857	33.132	33.552	33.810	33.729	34.560	34.467
	(2,1)	35.836	35.809	36.556	36.528	37.057	37.011	37.399	37.447
	(2,2)	37.399	37.447	37.394	37.437	37.274	37.317	37.839	37.786
SSSS	(1,1)	11.593	11.550	12.478	12.452	13.564	13.532	14.653	14.616
	(1,2)	16.24	16.265	17.023	17.060	17.669	17.700	18.614	18.646
	(1,3)	19.477	19.499	19.477	19.499	19.427	19.449	19.477	19.499
	(1,4)	19.477	19.499	19.477	19.499	19.427	19.449	19.477	19.499
	(2,1)	26.138	26.513	26.957	27.340	27.194	27.569	28.132	28.519
	(2,2)	30.318	30.280	31.449	31.417	32.621	32.563	33.677	33.598

Les six premières fréquences propres non-dimensionnelles sont reportées sur le tableau 4.2 avec celles publiées par Zhu et *al*. [75]. Comme il est montré nos résultats sont en bon accord avec ceux publiés dans la littérature.

(iii) Plaque composite renforcée par les PLGs :

Le troisième test de validation numérique concerne le cas d'une plaque composite carrée simplement appuyée de dimensions *a*=*b*=0.45*m* et de rapport géométrique *b/h*=10,

renforcée en plaquettes de Graphène /époxy avec fraction massique de Graphène (w_t) de 1%. Quatre types de distribution des PLGs sont considérés ; UD, FG-Λ, FG-O et FG-X. le nombre de sous-couches N_L est pris égal 10.

Les propriétés de PLG et la matrice sont données par: $E_{\mathrm{GPL}} = 1.101\mathrm{TPa},\ \nu_{\mathrm{GPL}} = 0.186,$ $\rho_{\mathrm{GPL}} = 1060\ kg/m^3,\ E_{\mathrm{m}} = 3.0\ \mathrm{GPa},\ \nu_{\mathrm{m}} = 0.34,\ \rho_{\mathrm{m}} = 1200\ kg/m^3$.

Il est à noter que les propriétés mécaniques des plaques (CRPLG) ont été calculées à l'aide des équations (2.22-2.26).

Tableau 4.3 Comparaison des six premières valeurs des fréquences non-dimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_{\mathrm{m}} / E_{\mathrm{m}}}$ *d'une plaque renforcée par les PLGs fonctionnellement graduée avec* $w_t = 1\%$, *b/h=10, a/b=1 et* N_L*=10.*

	Mode	Époxy pur	UD	FG-Λ	FG-O	FG-X
Présent	(1,1)	0.0584	0.1216	0.1118	0.1020	0.1378
FSDT Song et al. [95]	(1,1)	0.0584	0.1216	0.1118	0.1020	0.1378
Reddy et al. [105]	1	0.0588	0.1225	0.1080	0.0912	0.1420
TSDT Kumar et Srinivas [144]	(1,1)	0.0588	0.1223	0.1059	0.0908	0.1452
Présent	(2,1)	0.1391	0.2895	0.2673	0.2456	0.3249
FSDT Song et al. [95]	(2,1)	0.1391	0.2895	0.2673	0.2456	0.3249
Reddy et al. [105]	2	0.1412	0.2941	0.2589	0.2246	0.3245
TSDT Kumar et Srinivas [144]	(2,1)	0.1409	0.2932	0.2551	0.2208	0.3410
Présent	(2,2)	0.2131	0.4436	0.4110	0.3796	0.4938
FSDT Song et al. [95]	(2,2)	0.2132	0.4436	0.4110	0.3796	0.4939
Reddy et al. [105]	3	0.2176	0.4531	0.4088	0.3532	0.4810
TSDT Kumar et Srinivas [144]	(2,2)	0.2171	0.4518	0.3947	0.3443	0.5166
Présent	(3,1)	0.2595	0.5401	0.5014	0.4646	0.5985
FSDT Song et al. [95]	(3,1)	0.2595	0.5400	0.5013	0.4645	0.5984
Reddy et al. [105]	4	0.2658	0.5535	0.5009	0.4378	0.5750
TSDT Kumar et Srinivas [144]	(3,1)	0.2651	0.5519	0.4833	0.4235	0.6250
Présent	(3,2)	0.3251	0.6766	0.6299	0.5860	0.7454
FSDT Song et al. [95]	(3,2)	0.3251	0.6767	0.6299	0.5860	0.7454
Reddy et al. [105]	5	0.3341	0.6956	0.6351	0.5581	0.7031
TSDT Kumar et Srinivas [144]	(3,2)	0.3337	0.6947	0.6103	0.5381	0.7770
Présent	(3,3)	0.4260	0.8867	0.8285	0.7752	0.9687
FSDT Song et al. [95]	(3,3)	0.4261	0.8869	0.8287	0.7755	0.9690

Les six premières fréquences propres non-dimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_{\mathrm{m}} / E_{\mathrm{m}}}$ sont présentés dans le tableau 4.3. Dans le même tableau, les résultats publiés par Song et *al.* [95] sont également présenté. On constate que les présents résultats sont en excellent accord avec ceux donnés par la Reference [95].

4.3 Analyse vibratoire des plaques renforcées par les NTCs

Considérons une plaque nanocomposite réalisée avec du PmPV comme matrice polymère et du nanotube de carbone mono-feuillet (SWCNT) comme renfort. Les

propriétés mécaniques de la matrice PmPV et de SWCNT à température ambiante (T=300 K) sont données dans le tableau 4.4 où $G_{12} = G_{13} = G_{23}$. Trois valeurs de fractions volumiques de NTC (f_r^*) sont utilisées ; 0,11, 0,14 et 0,17, leurs paramètres d'efficacité $\eta_i \quad i = 1,2,3$ sont données par le tableau 4.5. Les dimensions de la plaque sont $a \times b = 1m \times 1m$

Les propriétés mécaniques de la plaque CRNTC sont estimées à l'aide des équations (2.7-2.11). Les fréquences propre sont exprimés sous forme adimensionnelle par: $\bar{\omega} = \omega (b^2 / h) \sqrt{\rho_m / E_m}$.

Tableau 4.4 Propriétés mécaniques de la matrice PmPV et de SWCNTs [74,130].

Matrice (PmPV)	(10,10) SWCNTs
$E_m = 2.1$ GPa	$E_{11}^{CNT} = 5646.6$ GPa
$\rho_m = 1150$ kg/m^3	$E_{22}^{CNT} = 7080.0$ GPa
$\upsilon_m = 0.34$	$G_{12}^{CNT} = 1944.5$ GPa
	$\rho^{CNT} = 1400$ kg/m^3
	$\upsilon^{CNT} = 0.175$

Tableau 4.5 Paramètres d'efficacités de NTC [74].

f_r^*	η_1	η_2	η_3
0.11	0.149	0.934	0.934
0.14	0.150	0.941	0.941
0.17	0.149	1.381	1.381

La figure 4.1 montre les effets du nombre de sous-couches N_L et les types de distribution de NTC sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega}$). Les résultats indiquent que la fréquence correspondant à la plaque avec le type UD n'est pas affectée par le changement de N_L, ceci est dû au fait que les NTCs sont réparties de manière équitable à travers l'épaisseur de la plaque. Les résultats indiquent également que la fréquence de la plaque pour les types FG-Λ et FG-O diminue à mesure que le nombre de sous-couches augmente près de N_L=10~20, puis reste presque constante quand N_L augmente. En revanche, cette tendance est inversée pour la plaque avec le type FG-X. Il convient également de noter que parmi les trois modèles de distribution non-uniformes de NTC, la fréquence non-dimensionnelle de la plaque avec le type de distribution FG-Λ est la moins influencée par la variation du N_L. Dans les applications qui suivent, le nombre total de sous-couches (N_L) est pris égal à 20 sous-couches.

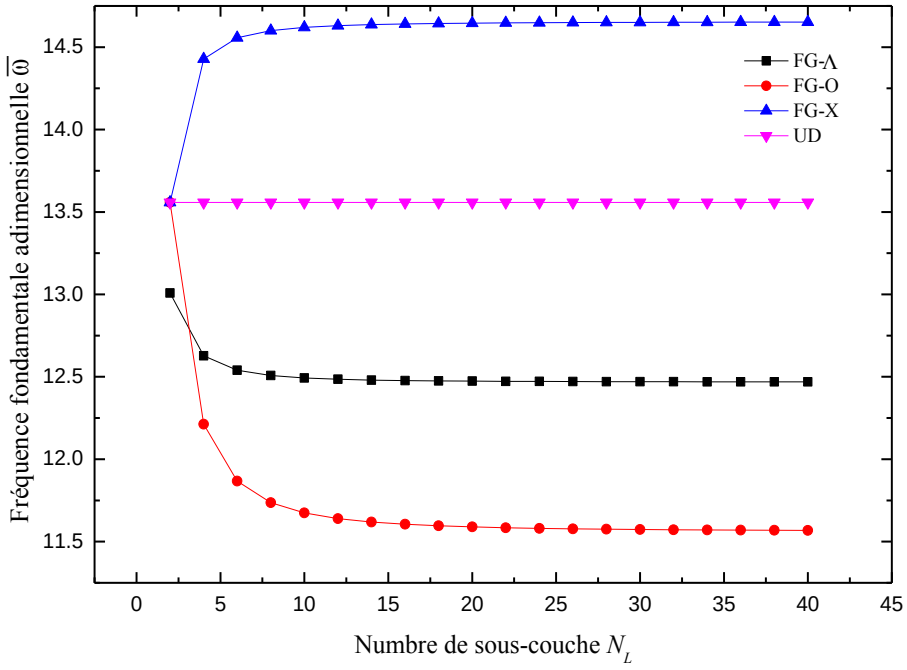


Figure 4.1 Effet du nombre de sous-couches N_L sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega(b^2/h)\sqrt{\rho_m / E_m}$ pour une plaque renforcée par les NTCs (a/b=1, b/h=10 et $f_r^* = 0.11$).

Les résultats relatifs à l'influence du rapport géométrique *b/h* ainsi que la distribution des NTCs et leurs fractions volumiques f_r^* sur la fréquence fondamentale sont présentés dans les tableaux 4.6 et 4.7. Les condition limites SSSS et CCCC sont considérées. Les résultats montrent que pour une valeur fixe de l'indice de puissance, une augmentation de *b/h* et de la fraction volumique de NTC conduit à une augmentation de la fréquence non-dimensionnelle. Aussi, pour des déférentes valeurs de *b/h*, la plus petite valeur du $\bar{\omega}$ est obtenue avec le type de distribution FG-O, tandis que les valeurs les plus élevées sont obtenues avec le types de distribution FG-X.

Les effets du rapport géométrique de la plaque *a/b*, la fraction volumique de NTC et leur types de distribution sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle sont présentés dans les tableaux 4.8 et 4.9 respectivement pour le cas des conditions limites SSSS et CCCC. On peut observer que plus le rapport *a/b* augmente, la fréquence non-dimensionnelle diminue. Pour différentes valeurs de *a/b*, la plaque avec le type de distribution FG-O donne les plus petites valeurs de $\bar{\omega}$ tandis que celui du type FG-X donne les valeurs les plus élevées.

Tableau 4.6 Fréquence fondamentale non- dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega (b^2/h)\sqrt{\rho_m / E_m}$ *d' une plaque renforcée par les NTCs avec différentes valeurs de fractions volumiques de NTC, rapport b/h de plaque et types de distributions de NTC (SSSS, a/b=1).*

f_r^*	*b/h*	Types de distribution	P_{in}					
			0.0	0.4	0.8	1.0	1.4	1.8
0.11	10	FG-Λ	13.564	13.165	12.706	12.478	12.045	11.646
		FG-O	13.564	12.735	11.950	11.593	10.954	10.405
		FG-X	13.564	14.141	14.512	14.653	14.879	15.054
	20	FG-Λ	17.334	16.476	15.540	15.100	14.297	13.596
		FG-O	17.334	15.619	14.167	13.552	12.512	11.672
		FG-X	17.334	18.648	19.549	19.902	20.476	20.924
	50	FG-Λ	19.160	18.000	16.780	16.220	15.220	14.366
		FG-O	19.160	16.890	15.068	14.324	13.095	12.128
		FG-X	19.160	21.009	22.336	22.870	23.754	24.456
0.14	10	FG-Λ	14.360	13.976	13.528	13.304	12.872	12.469
		FG-O	14.360	13.550	12.766	12.403	11.744	11.167
		FG-X	14.360	14.922	15.286	15.427	15.657	15.842
	20	FG-Λ	18.933	18.017	17.001	16.529	15.648	14.871
		FG-O	18.933	17.098	15.519	14.843	13.690	12.748
		FG-X	18.933	20.324	21.272	21.644	22.249	22.726
	50	FG-Λ	21.324	20.017	18.632	17.993	16.846	15.865
		FG-O	21.324	18.763	16.702	15.855	14.451	13.339
		FG-X	21.324	23.397	24.881	25.479	26.465	27.251
0.17	10	FG-Λ	16.849	16.348	15.774	15.492	14.956	14.468
		FG-O	16.849	15.790	14.792	14.338	13.527	12.832
		FG-X	16.849	17.608	18.114	18.313	18.647	18.925
	20	FG-Λ	21.424	20.347	19.176	18.625	17.622	16.750
		FG-O	21.424	19.267	17.442	16.667	15.362	14.308
		FG-X	21.424	23.090	24.246	24.704	25.459	26.064
	50	FG-Λ	23.614	22.167	20.643	19.943	18.694	17.636
		FG-O	23.614	20.776	18.506	17.576	16.040	14.832
		FG-X	23.614	25.923	27.586	28.257	29.372	30.265

Tableau 4.7 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega (b^2/h)\sqrt{\rho_m / E_m}$ *d' une plaque renforcée par les NTCs avec différentes valeurs de fractions volumiques de NTC, rapport largeur/épaisseur de plaque et types de distributions de NTC (CCCC, a/b=1).*

f_r^*	*b/h*	Types de distribution	P_{in}					
			0.0	0.4	0.8	1.0	1.4	1.8
0.11	10	FG-Λ	17.705	17.551	17.371	17.279	17.096	16.913
		FG-O	17.705	17.347	16.966	16.775	16.403	16.046
		FG-X	17.705	17.949	18.108	18.171	18.277	18.367
	20	FG-Λ	28.433	27.667	26.764	26.312	25.437	24.614
		FG-O	28.433	26.823	25.248	24.516	23.178	22.000
		FG-X	28.433	29.528	30.220	30.481	30.900	31.224
	50	FG-Λ	39.519	37.395	35.085	33.998	32.015	30.282
		FG-O	39.519	35.295	31.737	30.235	27.693	25.636
		FG-X	39.519	42.779	45.026	45.909	47.347	48.471
0.14	10	FG-Λ	18.223	18.094	17.951	17.878	17.735	17.594
		FG-O	18.223	17.904	17.567	17.399	17.067	16.745
		FG-X	18.223	18.459	18.625	18.700	18.822	18.937
	20	FG-Λ	29.994	29.274	28.417	27.983	27.131	26.319
		FG-O	29.994	28.460	26.927	26.203	24.858	23.652
		FG-X	29.994	31.038	31.708	31.966	32.389	32.732
	50	FG-Λ	43.442	41.160	38.650	37.459	35.269	33.338
		FG-O	43.442	38.895	35.013	33.359	30.539	28.239
		FG-X	43.442	46.916	49.297	50.232	51.757	52.955
0.17	10	FG-Λ	22.106	21.921	21.722	21.624	21.437	21.260
		FG-O	22.106	21.637	21.155	20.917	20.454	20.015
		FG-X	22.106	22.467	22.734	22.850	23.067	23.275
	20	FG-Λ	35.347	34.381	33.253	32.688	31.596	30.596
		FG-O	35.347	33.290	31.289	30.359	28.660	27.168
		FG-X	35.347	36.791	37.744	38.121	38.752	39.284
	50	FG-Λ	48.800	46.136	43.234	41.866	39.371	37.193
		FG-O	48.800	43.504	39.047	37.165	33.977	31.400
		FG-X	48.800	52.909	55.767	56.900	58.766	60.254

Tableau 4.8 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega (b^2/h)\sqrt{\rho_m / E_m}$ *d' une plaque renforcée par les NTCs avec différentes valeurs de fractions volumiques de NTC, rapport longueur/Largeur de plaque et types de distributions de NTC (SSSS, b/h=10).*

f_r^*	a/b	Types de distribution	P_{in}					
			0.0	0.4	0.8	1.0	1.4	1.8
0.11	1.0	FG-Λ	13.564	13.165	12.706	12.478	12.045	11.646
		FG-O	13.564	12.735	11.950	11.593	10.954	10.405
		FG-X	13.564	14.141	14.512	14.653	14.879	15.054
	1.5	FG-Λ	7.741	7.472	7.185	7.051	6.810	6.603
		FG-O	7.741	7.184	6.705	6.501	6.157	5.882
		FG-X	7.741	8.161	8.446	8.557	8.737	8.879
	2.0	FG-Λ	5.357	5.190	5.027	4.956	4.836	4.742
		FG-O	5.357	5.010	4.724	4.610	4.427	4.289
		FG-X	5.357	5.638	5.838	5.918	6.051	6.157
0.14	1.0	FG-Λ	14.360	13.976	13.528	13.304	12.872	12.469
		FG-O	14.360	13.550	12.766	12.403	11.744	11.167
		FG-X	14.360	14.922	15.286	15.427	15.657	15.842
	1.5	FG-Λ	8.274	7.994	7.690	7.548	7.288	7.064
		FG-O	8.274	7.687	7.171	6.949	6.567	6.257
		FG-X	8.274	8.712	9.008	9.124	9.315	9.468
	2.0	FG-Λ	5.704	5.521	5.340	5.260	5.124	5.018
		FG-O	5.704	5.313	4.994	4.862	4.648	4.484
		FG-X	5.704	6.015	6.235	6.323	6.470	6.591
0.17	1.0	FG-Λ	16.849	16.348	15.774	15.492	14.956	14.468
		FG-O	16.849	15.790	14.792	14.338	13.527	12.832
		FG-X	16.849	17.608	18.114	18.313	18.647	18.925
	1.5	FG-Λ	9.602	9.262	8.907	8.744	8.457	8.219
		FG-O	9.602	8.885	8.273	8.012	7.574	7.228
		FG-X	9.602	10.152	10.535	10.689	10.947	11.160
	2.0	FG-Λ	6.649	6.438	6.242	6.160	6.029	5.939
		FG-O	6.649	6.188	5.822	5.675	5.439	5.267
		FG-X	6.649	7.026	7.309	7.414	7.607	7.771

Tableau 4.9 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega (b^2/h)\sqrt{\rho_m / E_m}$ *d' une plaque renforcée par les NTCs avec différentes valeurs de fractions volumiques de NTC, rapport longueur/largeur de plaque et types de distributions de NTC (CCCC, b/h=10).*

f_r^*	a/b	Types de distribution	P_{in}					
			0.0	0.4	0.8	1.0	1.4	1.8
0.11	1.0	FG-Λ	17.705	17.551	17.371	17.279	17.096	16.913
		FG-O	17.705	17.347	16.966	16.775	16.403	16.046
		FG-X	17.705	17.949	18.108	18.171	18.277	18.367
	1.5	FG-Λ	11.935	11.768	11.585	11.496	11.328	11.173
		FG-O	11.935	11.552	11.175	10.997	10.673	10.387
		FG-X	11.935	12.203	12.378	12.447	12.562	12.656
	2.0	FG-Λ	9.321	9.176	9.031	8.966	8.854	8.760
		FG-O	9.321	8.983	8.677	8.543	8.313	8.128
		FG-X	9.321	9.571	9.742	9.810	9.923	10.016
0.14	1.0	FG-Λ	18.223	18.094	17.951	17.878	17.735	17.594
		FG-O	18.223	17.904	17.567	17.399	17.067	16.745
		FG-X	18.223	18.459	18.625	18.700	18.822	18.937
	1.5	FG-Λ	12.366	12.214	12.052	11.974	11.828	11.694
		FG-O	12.366	12.000	11.638	11.466	11.147	10.861
		FG-X	12.366	12.632	12.815	12.890	13.021	13.135
	2.0	FG-Λ	9.680	9.538	9.402	9.342	9.238	9.155
		FG-O	9.680	9.334	9.020	8.880	8.635	8.434
		FG-X	9.680	9.941	10.124	10.200	10.331	10.445
0.17	1.0	FG-Λ	22.106	21.921	21.722	21.624	21.437	21.260
		FG-O	22.106	21.637	21.155	20.917	20.454	20.015
		FG-X	22.106	22.467	22.734	22.850	23.067	23.275
	1.5	FG-Λ	14.884	14.673	14.459	14.359	14.182	14.032
		FG-O	14.884	14.367	13.871	13.641	13.223	12.863
		FG-X	14.884	15.274	15.554	15.672	15.884	16.080
	2.0	FG-Λ	11.620	11.433	11.267	11.199	11.100	11.030
		FG-O	11.620	11.151	10.740	10.562	10.261	10.030
		FG-X	11.620	11.991	12.263	12.378	12.585	12.773

Les résultats présentés dans les tableaux 4.6, 4.7, 4.8 et 4.9 montrent clairement qu'en augmentant l'indice de puissance P_{in}, la fréquence augmente pour la plaque avec le type

de distribution FG-X et diminue pour les plaques avec les types FG-Λ et FG-O. Par conséquent, plus que P_{in} augmente, plus que la concentration des charges de NTC augmente dans la surface moyenne pour le type de distribution FG-O, dans la surface inférieure pour le type de distribution FG-Λ et dans les surfaces supérieure et inférieure pour le type de distribution FG-X. De plus, les fréquences de la plaque correspondant à la condition au limite entièrement encastré (CCCC) sont plus élevées que celles correspondant à la condition au limite entièrement simplement appuyée (SSSS).

Afin de prendre une idée sur l'effet de l'indice de puissance P_{in} sur l'évolution des fréquences fondamentales, on procède au calcul de pourcentage de la différence entre les fréquences correspondant à $P_{in} = 0$ et ceux correspondant à $P_{in} \neq 0$; ce pourcentage est obtenu à l'aide de l'expression suivante:

$$\Delta\bar{\omega}_p = 100 \times (\bar{\omega}_p - \bar{\omega}_u)/\bar{\omega}_u \tag{4.4}$$

dans lequel $\bar{\omega}_p$ représente la fréquence avec $P_{in} \neq 0$ et $\bar{\omega}_u$ représente la fréquence avec $P_{in} = 0$ (Type UD).

La figure 4.2 présente l'effet de P_{in} sur le changement de la fréquence fondamentale ($\Delta\bar{\omega}_p$) de plaque renforcée par les NTCs en fonction des fractions volumiques de NTC f_r^*, rapport *b/h* et conditions limites. On peut observer que pour les valeurs de P_{in} considérées, la fréquence fondamentale augmente jusqu'à 28% lorsque le type FG-X, est utilisé et diminue jusqu'à 25% pour le type FG-Λ et 37% pour le type FG-O.

La figure 4.3 montre également comment le rapport géométrique *a/b* peut affecter le changement de fréquence fondamentale ($\Delta\bar{\omega}_p$) lors de l'utilisation d'une plaque rectangulaire, avec une valeur fixe du rapport *b/h*=10. On constate que pour le type FG-X, la fréquence fondamentale augmente avec l'augmentation de P_{in} et diminue dans les cas des types FG-Λ et FG-O.

Les figures 4.2 et 4.3 représentent l'effet significatif des types de distribution des NTCs sur le changement de fréquence fondamentale ($\Delta\bar{\omega}_p$). En effet, l'utilisation de diverses valeurs de l'indice de puissance a bien fait apparaitre ce phénomène. On peut conclure que les modèles de distribution des NTCs, les rapports géométriques, la fraction volumique des NTCs et les conditions aux limites affectent la rigidité et la performance de la plaque avec des proportions variables.

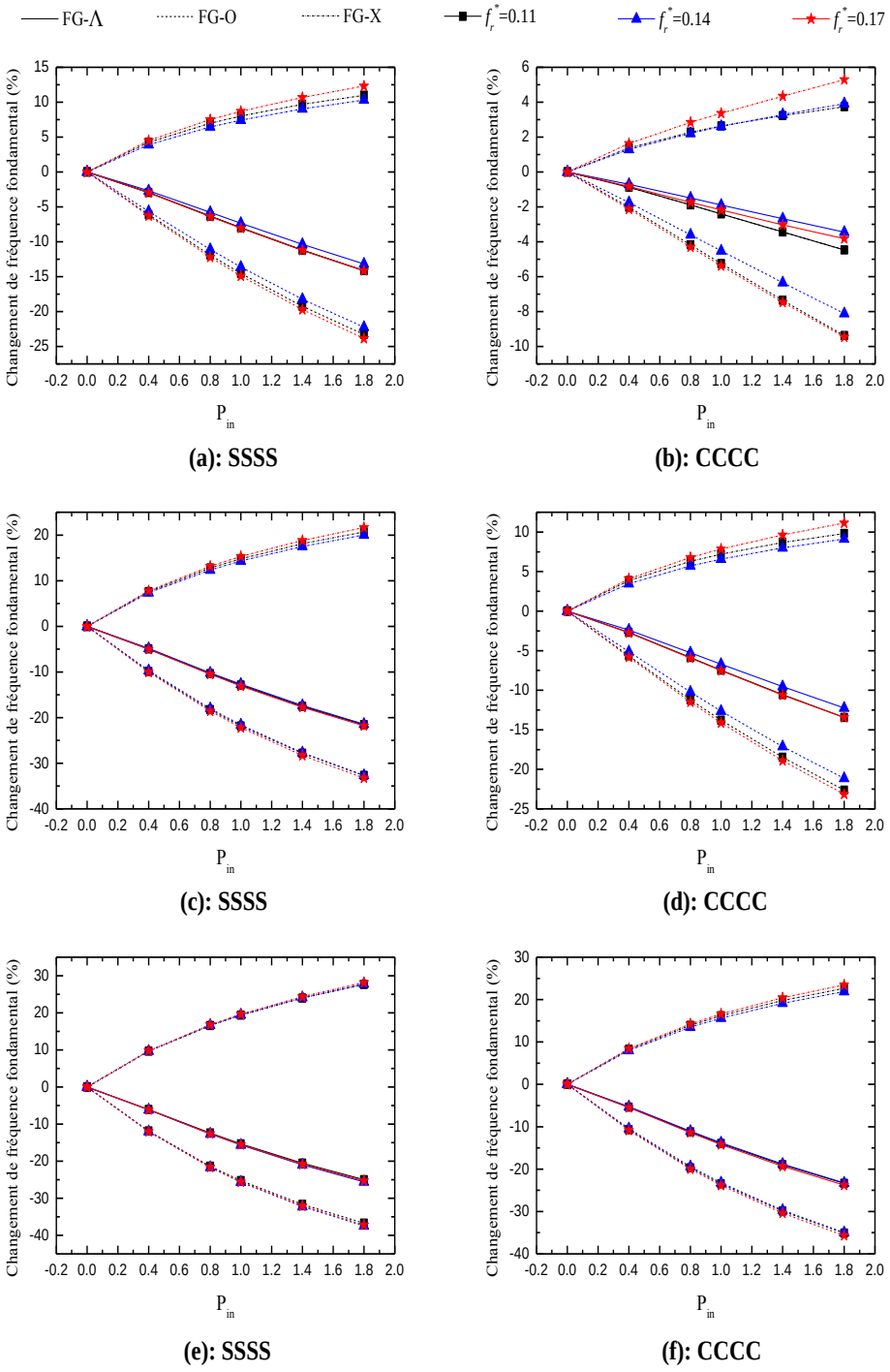


Figure 4.2 Effet de P_{in} sur le pourcentage de changement de fréquence fondamentale $\Delta\bar{\omega}_p = (\bar{\omega}_p - \bar{\omega}_u)/\bar{\omega}_u$ d'une plaque renforcée par les NTCs (a/b=1) en fonction de la fraction volumique de NTC (f_r^*), rapport géométrique (b/h) et conditions aux limites, ((a) et (b) b/h=10, (c) et (d) b/h=20, (e) et (f) b/h=50).

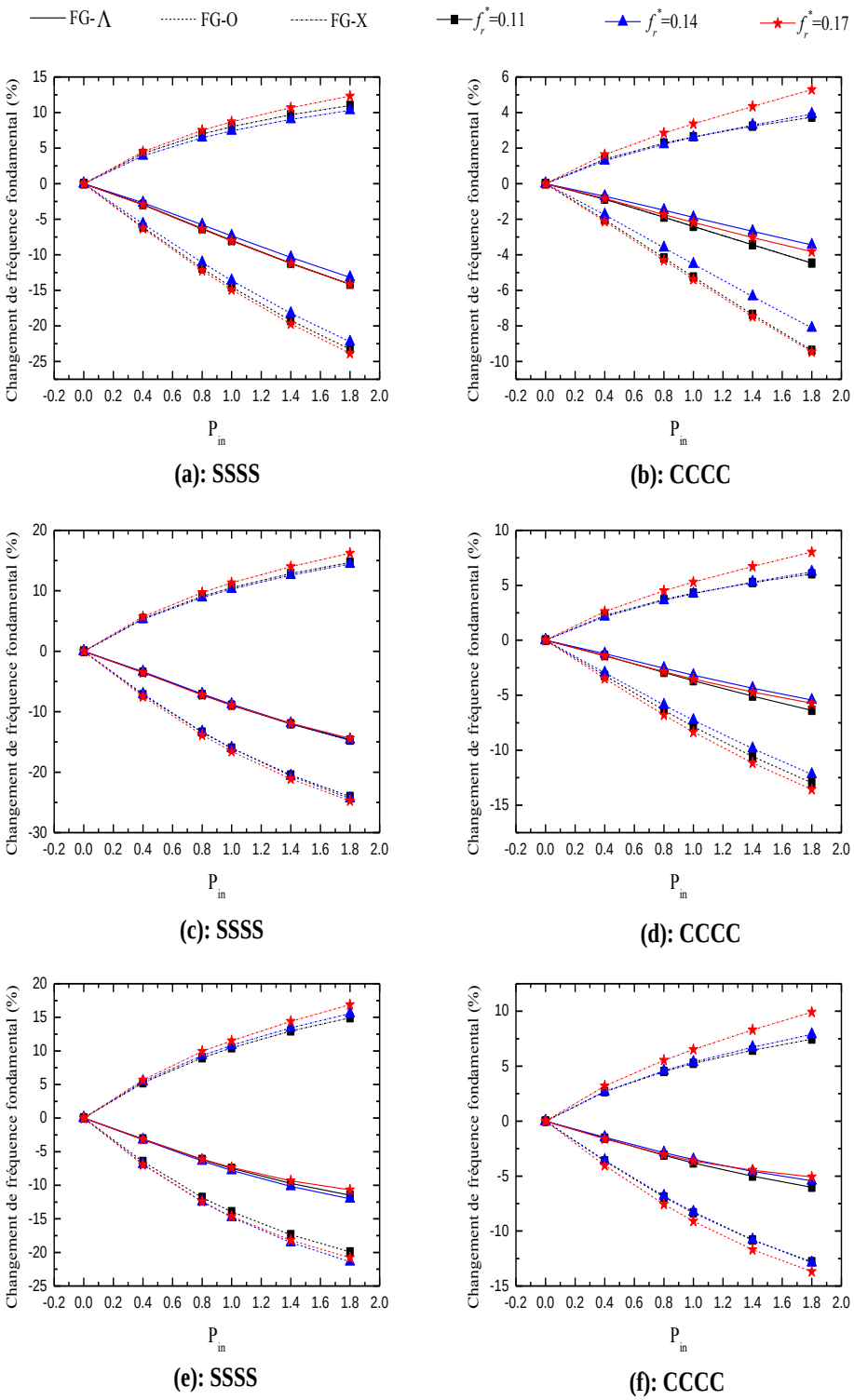


Figure 4.3 Effet de P_{in} sur le pourcentage de changement de fréquence fondamentale $\Delta\bar{\omega}_p = (\bar{\omega}_p - \bar{\omega}_u)/\bar{\omega}_u$ d'une plaque renforcée par les NTCs (a/b=1) en fonction de la fraction volumique de NTC (f_r^*), rapport géométrique (a/b) et conditions aux limites, ((a) et (b) a/b=1.0, (c) et (d) a/b=1.5, (e) et (f) a/b=2.0).

Les effets des modèles de distribution de NTC sur les six premières fréquences non-dimensionnelles $\overline{\omega}$ des plaques carrées pour les conditions aux limites SSSS et CCCC sont présentés respectivement sur les figures 4.4 et 4.5. Les résultats sont obtenus pour *b/h* = 50 et $f_{NTC}^{*} = 0.11$. On peut observer que pour les deux types de conditions aux limites, les six premiers valeurs de $\overline{\omega}$ augmentent avec l'augmentation de l'indice de puissance pour le type FG-X et une diminution pour les types FG-O et FG-Λ. Les fréquences correspondant aux type FG-X sont les plus élevées, alors que les valeurs les plus bas correspondent à celles du type FG-O. On remarque aussi que les fréquences des plaques en appuis simples sont les plus basses, celles des plaques encastrées les plus élevés.

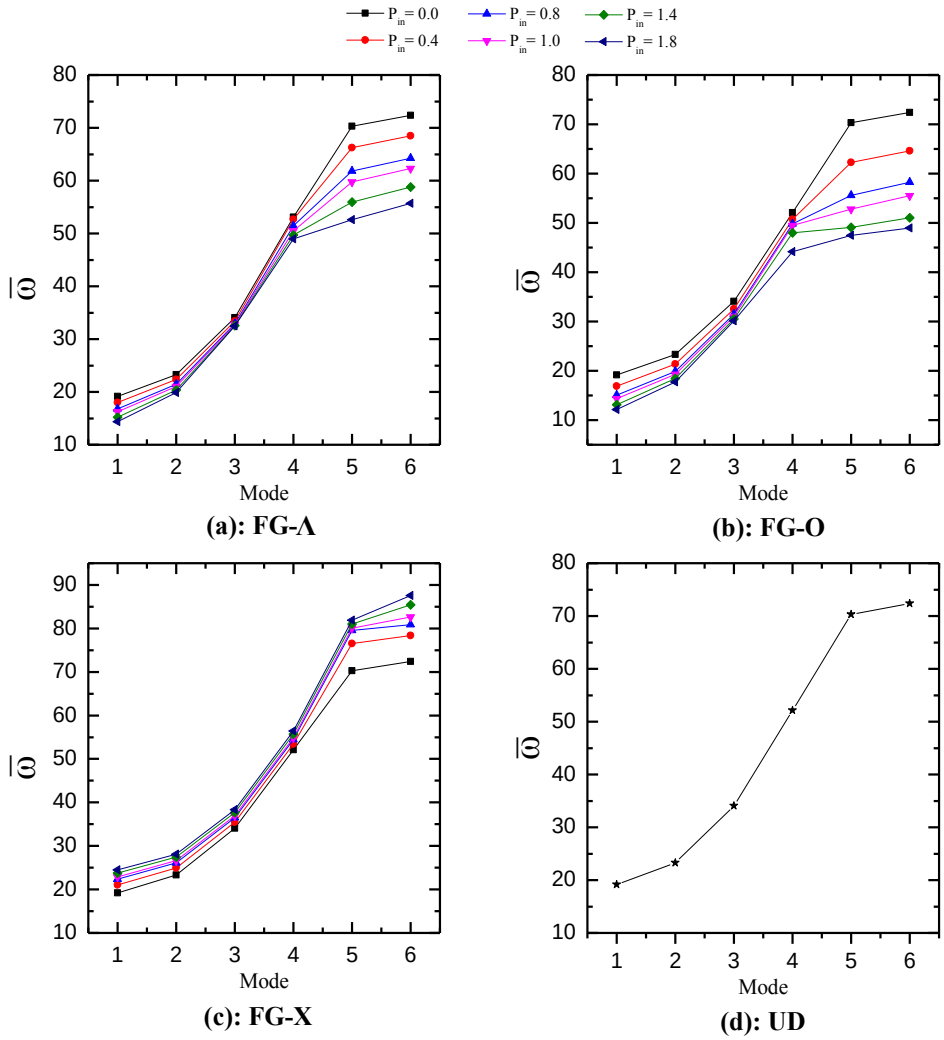


Figure 4.4 Effet de différents types de distribution de NTC sur les six premiers fréquences naturelle $\overline{\omega} = \omega (b^2/h)\sqrt{\rho_m / E_m}$ *d'une plaque simplement appuyée renforcée par les NTCs (b/h=5 et a/b=1).*

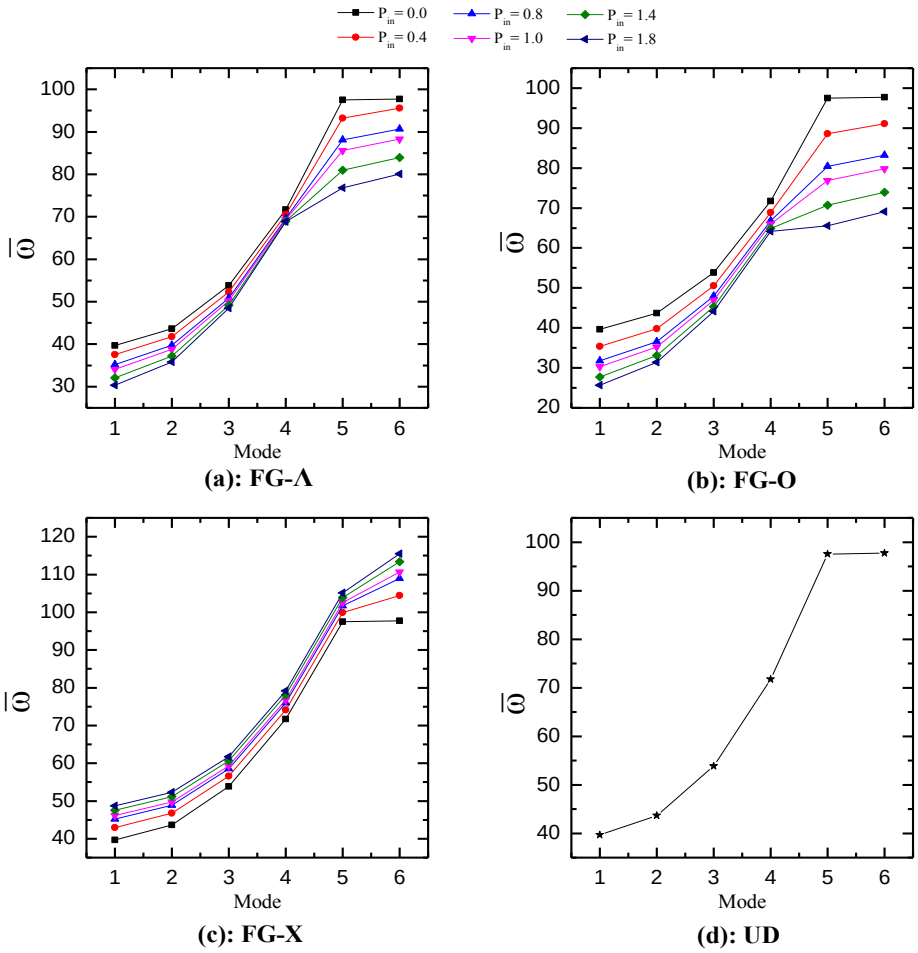


Figure 4.5 Effet de différents modèles de distribution de NTC sur les six premiers fréquences naturelles $\bar{\omega} = \omega (b^2/h)\sqrt{\rho_m / E_m}$ *d'une plaque encastrée renforcée par les NTCs (b/h=50 et a/b=1).*

4.4 Analyse vibratoire des plaques renforcées par les PLGs

Dans cette section, les nanofibres de PLG d'une épaisseur $h_{GPL} = 1.5n\,\mathrm{m}$, largeur $w_{GPL} = 1.5\mu\,\mathrm{m}$ et longueur $l_{GPL} = 2.5\mu\,\mathrm{m}$ sont choisis comme renfort, l'époxy est choisie comme matrice polymère. Les propriétés mécaniques des PLGs et de l'époxy sont présentées dans le tableau 4.10. Les dimensions de la plaque sont $a \times b = 0.45m \times 0.45m$. les fréquences fondamentales sont exprimées sous forme non-dimensionnelle par $\bar{\omega} = \omega h\sqrt{\rho_m / E_m}$.

Tableau 4.10 Propriétés mécanique de l'époxy et des nanocharges de PLG [16].

Epoxy	Nanocharges de PLGs
$E_m = 3.0\ \mathrm{GPa}$	$E^{GPL} = 1010\ \mathrm{GPa}$
$\rho_m = 1200\ \mathrm{kg/m^3}$	$\rho^{GPL} = 1060\ \mathrm{kg/m^3}$
$\upsilon_m = 0.34$	$\upsilon^{GPL} = 0.186$

Sur la figure 4.6, nous présentons le pourcentage de changement de fréquence fondamentale par rapport au nombre de sous-couches N_L pour une plaque carrée simplement appuyée avec différents modèles de distribution de PLG. Le pourcentage de changement de fréquence est calculé à l'aide de l'expression suivante: $\Delta\bar{\omega}=100\times(\bar{\omega}_c-\bar{\omega}_e)/\bar{\omega}_e$, où $\bar{\omega}_c$ et $\bar{\omega}_e$ sont respectivement la fréquence avec et sans PLG. On peut observer à partir de la figure 4.6 que les changements de fréquence fondamentale des plaques correspondant au type UD, comme cas particulier, ne sont pas affectées par le changement du nombre de sous-couches N_L. Ceci est dû à la même raison mentionnée dans l'application précédente des plaques renforcées par les NTCs, où les nanofibres sont réparties de manier équitable d'une sous-couche à l'autre. Des constatations similaires à celles de l'application précédente sont également observées, bien évidemment, en augmentant le nombre de sous-couches dans l'intervalle N_L = 10-20, une diminution de $\Delta\bar{\omega}$ pour les types FG-Λ et FG-O et une augmentation pour le type FG-X est observée qui devient presque constante dans l'intervalle N_L = 20-40. De plus, parmi les trois types de distribution non-uniforme de PLG, le changement de fréquence propre de la plaque avec le type de distribution FG-Λ est le moins influencé par l'augmentation de N_L.

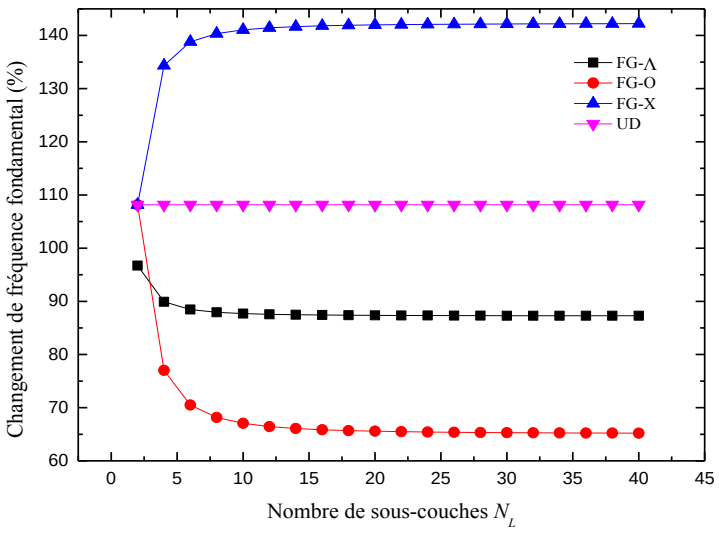


Figure 4.6 Effet du nombre de sous-couches N_L sur le pourcentage de changement de fréquence naturelle $\Delta\bar{\omega}=(\bar{\omega}_c-\bar{\omega}_e)/\bar{\omega}_e$ d'une plaque renforcée par les PLGs (a/b=1 et b/h=10).

Les résultats correspondants à l'effet du rapport *b/h*, ainsi que la distribution de PLG associe à la fraction massique w_t sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelles sont présentés dans les tableaux 4.11 et 4.12 respectivement pour les conditions aux

limites SSSS et CCCC. Le rapport *a/b* et le nombre total de sous-couches sont respectivement considérés égal à 1 et 10. Il ressort de ces tableaux que la fréquence correspondant aux plaques encastrées sont plus élevés que celles des plaques simplement appuyées. De plus, pour une valeur fixée de l'indice de puissance, il est constaté que lorsque *b/h* augmente la fréquence diminuée, et lorsque la fraction massique augmente, la fréquence augmente pour tous les modèles de distribution de PLG et aussi pour les conditions aux limites SSSS et CCCC. À partir de ce constat, il serait possible de dire que les types de distribution de PLG jouent un rôle remarquable sur la fréquence fondamentale où la plaque avec le type FG-O donne les valeurs les plus basses de la fréquence naturelle par rapport à celles du type FG-X.

Tableau 4.11 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega h\sqrt{\rho_m / E_m}$ *d' une plaque renforcée par les PLGs avec différentes valeurs de fractions massiques de PLG, rapport géométrique b/h et profiles de distributions de PLG (SSSS, a/b=1).*

W_t (%)	*b/h*	Types de distribution	P_{in}					
			0.0	0.4	0.8	1.0	1.4	1.8
0.4	10	FG-Λ	0.08920	0.08690	0.08510	0.08500	0.08370	0.08330
		FG-O	0.08920	0.08340	0.07860	0.07660	0.07350	0.07120
		FG-X	0.08920	0.09450	0.09840	0.09990	0.10250	0.10450
	20	FG-Λ	0.02290	0.02230	0.02180	0.02170	0.02150	0.02140
		FG-O	0.02290	0.02140	0.02010	0.01960	0.01870	0.01810
		FG-X	0.02290	0.02430	0.02540	0.02580	0.02650	0.02760
	50	FG-Λ	0.00370	0.00360	0.00352	0.00349	0.00346	0.00344
		FG-O	0.00370	0.00344	0.00323	0.00315	0.00302	0.00292
		FG-X	0.00370	0.00393	0.00410	0.00417	0.00428	0.00437
0.8	10	FG-Λ	0.11180	0.10770	0.10370	0.10210	0.09950	0.09774
		FG-O	0.11180	0.10250	0.09440	0.09110	0.08580	0.08170
		FG-X	0.11180	0.12020	0.12620	0.12860	0.13260	0.13560
	20	FG-Λ	0.02870	0.02760	0.02660	0.02610	0.02550	0.02500
		FG-O	0.02870	0.02620	0.02410	0.02320	0.02180	0.02080
		FG-X	0.02870	0.03100	0.03260	0.03330	0.03430	0.03520
	50	FG-Λ	0.00463	0.00445	0.00428	0.00421	0.00411	0.00403
		FG-O	0.00463	0.00422	0.00388	0.00374	0.00351	0.00334
		FG-X	0.00463	0.00500	0.00527	0.00538	0.00555	0.00570
1.2	10	FG-Λ	0.13060	0.12490	0.11910	0.11660	0.11250	0.10940
		FG-O	0.13060	0.11850	0.10800	0.10360	0.09650	0.09110
		FG-X	0.13060	0.14130	0.14890	0.15200	0.15690	0.16080
	20	FG-Λ	0.03350	0.03200	0.03050	0.02990	0.02880	0.02800
		FG-O	0.03350	0.03030	0.02750	0.02640	0.02450	0.02310
		FG-X	0.03350	0.03640	0.03850	0.03930	0.04070	0.04180
	50	FG-Λ	0.00541	0.00516	0.00492	0.00481	0.00464	0.00451
		FG-O	0.00541	0.00488	0.00443	0.00425	0.00395	0.00372
		FG-X	0.00541	0.00588	0.00622	0.00636	0.00658	0.00676

De plus, l'augmentation de l'indice de puissance affecte la fréquence où il s'accroit pour la plaque avec le type FG-X et diminue pour la plaque avec les types FG-Λ et FG-O pour les mêmes raisons évoquées ci-dessus pour le cas du renfort NTC. Là encore, on peut conclure que plus les nanofibres sont dispersées à proximité des sous-couches inférieure et supérieure de la plaque (par exemple, le cas du type FG-X), des valeurs de fréquence s'accroissent. En outre, si les nanofibres sont dispersées uniquement dans les sous-couches inférieures de la plaque (par exemple, le cas du type FG-Λ) ou dans les

sous-couches centrales de la plaque (par exemple, le cas du type FG-O), la plaque fournit une diminution des valeurs de fréquence.

Tableau 4.12 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega h\sqrt{\rho_m / E_m}$ *d'une plaque renforcée par les PLGs avec différentes valeurs de fractions massiques de PLG, rapport géométrique b/h et profiles de distributions de PLG (CCCC, a/b=1).*

w_t (%)	*b/h*	Types de distribution	P_{in}					
			0.0	0.4	0.8	1.0	1.4	1.8
0.4	10	FG-Λ	0.15170	0.14830	0.14550	0.14460	0.14340	0.14270
		FG-O	0.15170	0.14300	0.13550	0.13240	0.12750	0.12380
		FG-X	0.15170	0.15960	0.16520	0.16740	0.17100	0.17380
	20	FG-Λ	0.04090	0.04000	0.03910	0.03880	0.03840	0.03830
		FG-O	0.04090	0.03830	0.03600	0.03510	0.03370	0.03260
		FG-X	0.04090	0.04340	0.04510	0.04590	0.04710	0.04800
	50	FG-Λ	0.00671	0.00653	0.00640	0.00635	0.00629	0.00626
		FG-O	0.00671	0.00626	0.00588	0.00573	0.00549	0.00531
		FG-X	0.00671	0.00713	0.00744	0.00757	0.00777	0.00794
0.8	10	FG-Λ	0.19020	0.18390	0.17780	0.17530	0.17140	0.16860
		FG-O	0.19020	0.17600	0.16350	0.15820	0.14970	0.14310
		FG-X	0.19020	0.20260	0.21120	0.21460	0.22000	0.22420
	20	FG-Λ	0.05130	0.04940	0.04760	0.04690	0.04570	0.04490
		FG-O	0.05130	0.04700	0.04330	0.04180	0.03930	0.03740
		FG-X	0.05130	0.05520	0.05790	0.05900	0.06080	0.06230
	50	FG-Λ	0.00841	0.00809	0.00778	0.00766	0.00747	0.00733
		FG-O	0.00841	0.00769	0.00706	0.00680	0.00639	0.00608
		FG-X	0.00841	0.00908	0.00956	0.00975	0.01007	0.01032
1.2	10	FG-Λ	0.22210	0.21360	0.20470	0.20080	0.19440	0.18950
		FG-O	0.22210	0.20380	0.18730	0.18040	0.16890	0.16000
		FG-X	0.22210	0.23800	0.24880	0.25310	0.26000	0.26520
	20	FG-Λ	0.06000	0.05730	0.05470	0.05350	0.05170	0.05030
		FG-O	0.06000	0.05430	0.04950	0.04750	0.04420	0.04170
		FG-X	0.06000	0.06480	0.06840	0.06980	0.07200	0.07380
	50	FG-Λ	0.00982	0.00938	0.00894	0.00875	0.00843	0.00820
		FG-O	0.00982	0.00888	0.00806	0.00773	0.00718	0.00677
		FG-X	0.00982	0.01067	0.01129	0.01153	0.01194	0.01225

L'effet du type de distribution de PLG sur le changement de fréquence fondamentale $\Delta\bar{\omega}_p = (\bar{\omega}_p - \bar{\omega}_u)/\bar{\omega}_u$ des plaques CRPLG est illustré sur la figure 4.7 avec prise en compte les fractions massiques du PLG, les conditions aux limites et les rapports géométriques *b/h*. $\bar{\omega}_p$ et $\bar{\omega}_u$ référent aux fréquences fondamentales respectivement pour $P_{in} \neq 0$ et $P_{in} = 0$. Il est évident que l'augmentation de P_{in} provoque une augmentation de $\Delta\bar{\omega}_p$ dans le cas de FG-X, qui peut atteindre les 25%; en revanche, le changement de fréquence fondamentale diminue de plus de 17% dans le cas de FG-Λ et de plus de 31% dans le cas de FG-O.

Les résultats présentés sur la figure 4.7, exprimés en pourcentage, confirment l'effet significatif des modèles de distribution des nanofibres de PLG sur la fréquence naturelle par rapport à ceux du type UD. On peut conclure que la rigidité de la plaque renforcée par les PLGs est affectée par la fraction massique des PLGs, par les modèles de distribution et par les conditions aux limites.

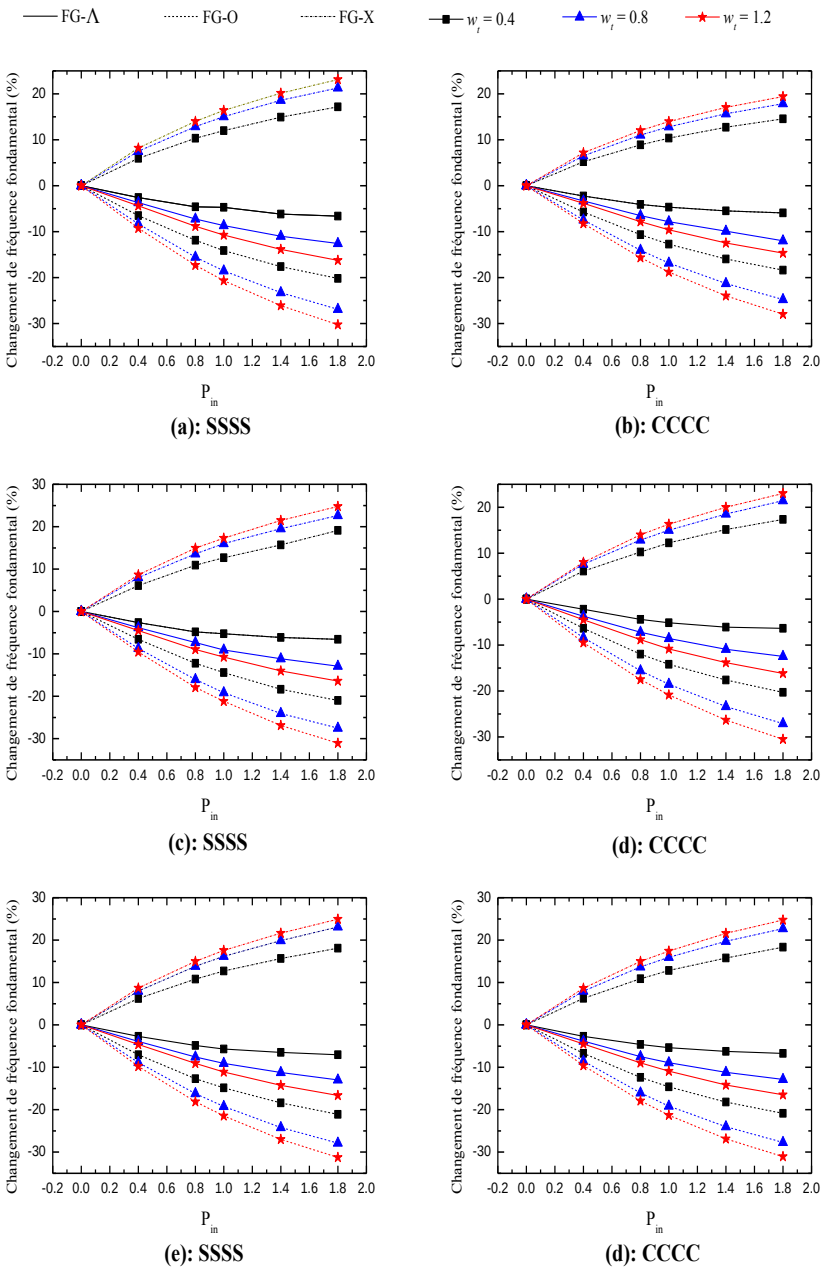


Figure 4.7 Effet de P_{in} sur le pourcentage de changement de fréquence fondamentale $\Delta\bar{\omega}_p = (\bar{\omega}_p - \bar{\omega}_u)/\bar{\omega}_u$ *d'une plaque renforcée par les PLGs (a/b=1) en fonction de la fraction volumique de PLG (*w_t*), rapport largeur/épaisseur (b/h) et conditions aux limites, ((a) et (b) b/h=10, (c) et (d) b/h=20, (e) et (f) b/h=50).*

La figure 4.8 présente les effets de la géométrie et de la taille des PLGs, en termes de rapport longueur/largeur de PLG (l_{GPL}/w_{GPL}) et rapport longueur/épaisseur de PLG (l_{GPL}/h_{GPL}), sur le changement de fréquence fondamentale $\Delta\bar{\omega}=(\bar{\omega}_c - \bar{\omega}_e)/\bar{\omega}_e$, où la longueur du PLG reste constante. Différents modèles de distribution de PLG et conditions aux limites (SSSS et CCCC) sont considérés. Le rapport largeur/épaisseur de la plaque et

la fraction massique de PLG sont respectivement *b/h* = 10 et *wt* = 1%. On constate que pour les deux cas de PLG, à savoir: des plaques carré ($l_{GPL}/w_{GPL}=1$) et rectangulaire ($l_{GPL}/w_{GPL}\neq 1$), il y a une forte augmentation de la variation de fréquence naturelle jusqu'à $l_{GPL}/h_{GPL}=1000$ suivie d'une légère augmentation pour $l_{GPL}/h_{GPL}>1000$. Puisqu'un rapport de (l_{GPL}/h_{GPL}) plus élevé représente des PLGs avec moins de couches de Graphène, les résultats indique clairement que les PLGs avec moins de couches seraient plus efficaces pour améliorer les fréquences naturelles. Aussi, les résultats indiquent que les fréquences propres correspondant aux PLG carrées sont plus élevées à ceux des PLG rectangulaires, bien évidemment, pour les quatre modèles de distribution, les fréquences propres correspondant aux plaques avec des bords simplement appuyées ont des fréquences plus élevées que à correspondant aux plaques avec des bords encastrés.

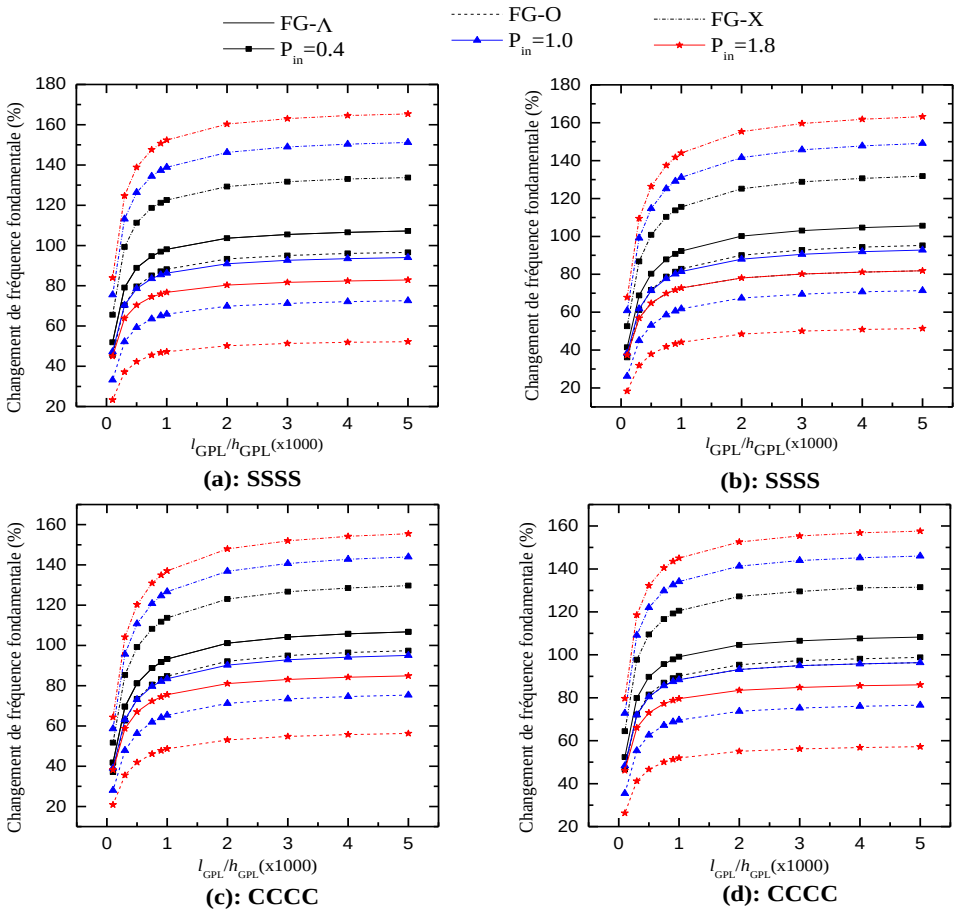


Figure 4.8 Effet du rapports longueur / épaisseur et longueur / largeur des PLGs sur le changement de fréquence naturelle $\Delta\bar{\omega}_p = (\bar{\omega}_p - \bar{\omega}_u)/\bar{\omega}_u$ *des plaques renforcées par les PLGs pour différent types de distributions de PLG, et des conditions aux limites.(a) et (c)* $l_{GPL}/w_{GPL}=1.0$*; (b) et (d)* $l_{GPL}/w_{GPL}=2.0$.

Les figures 4.9 et 4.10 présentent l'effet des modèles de distribution de PLG sur les six premières fréquences pour respectivement les conditions aux limites SSSS et CCCC. Le

rapport *b/h* de la plaque et la fraction massique de PLG sont respectivement prisent égaux à (*b/h* = 10) et ($w_t = 1\%$). On peut observer que pour les deux types de conditions aux limites (SSSS et CCCC), les six premières fréquences augmentent avec l'augmentation de l'indice de puissance pour le type FG-X et diminuent pour les types FG-Λ et FG-O. Les six premières fréquences correspondant aux plaques avec les types FG-O et FG-X sont respectivement les plus bas et les plus élevés. En outre, les six premières déformées modales correspondant au type de distribution FG-X sont présentées sur la figure 4.11, les valeurs du rapport largeur/épaisisseur de la plaque, le rapport hauteur/largeur et la fraction massique de PLG sont respectivement à (*b/h* = 50), (*a/b* = 1) et ($w_t = 1.2\%$).

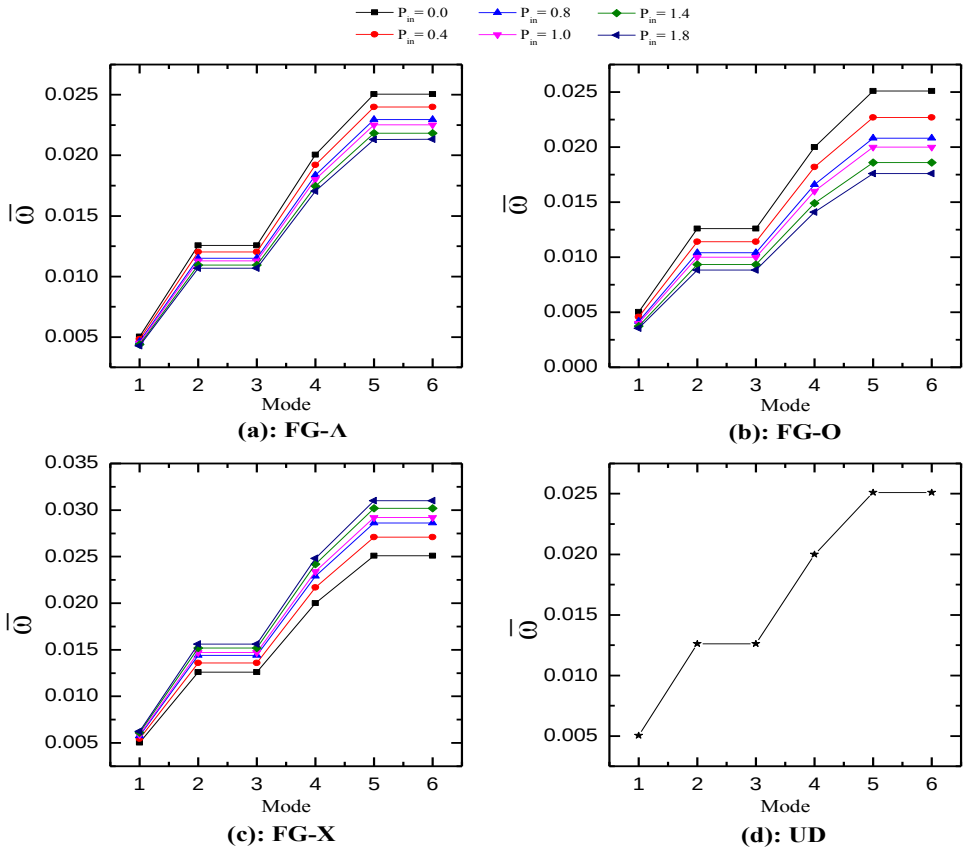


Figure 4.9 Effet de différents modèles des distributions de PLG sur les six premiers fréquences naturelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ *d'une plaque simplement appuyée renforcée par les PLGs (b/h=50, a/b=1 et* $w_t = 1\%$*).*

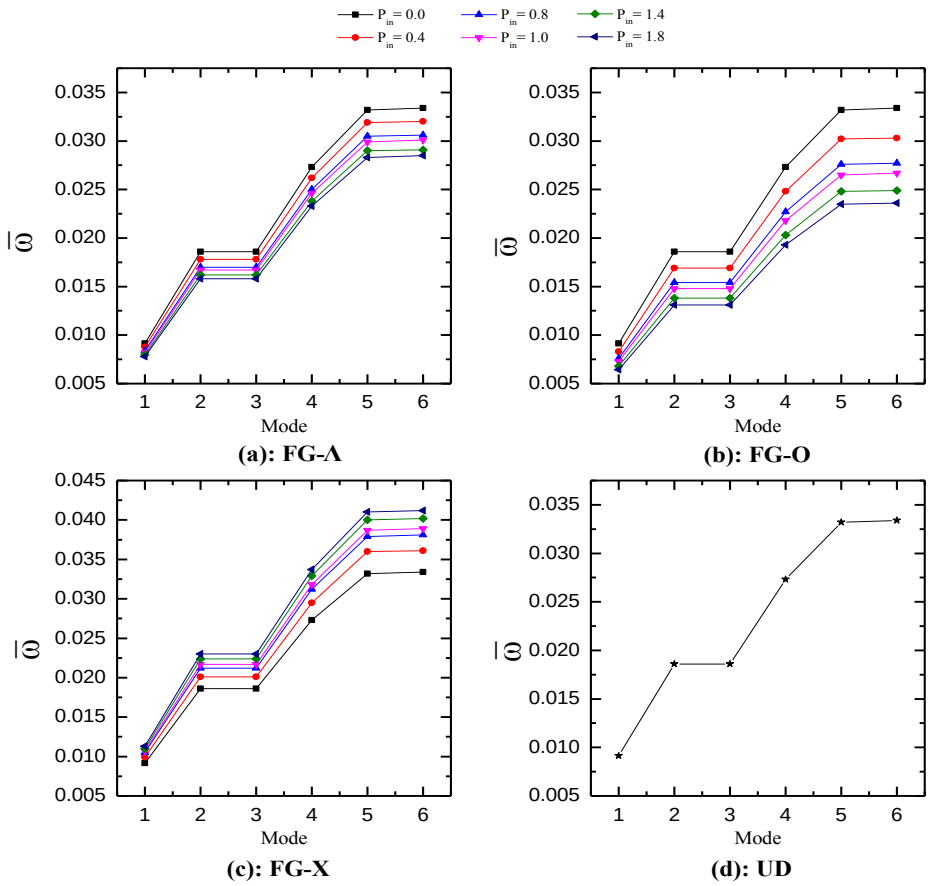


Figure 4.10 Effet de différents modèles des distributions de PLG sur les six premiers fréquences naturelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ *d'une plaque encastrée renforcée par les PLGs (b/h=50, a/b=1 et* $w_t = 1\%$*).*

La dernière application examine l'effet de diverses conditions aux limites sur les fréquences fondamentales d'une plaque carrée renforcée par les PLGs de type FG-X. Le rapport largeur/épaisseur de la plaque et la fraction massique du PLG sont respectivement (b/h = 10) et ($w_t = 1.2$). Les conditions aux limites utilisées sont présentées sur la figure 4.12 dans laquelle « F» désigne un bord libre, «C» un bord encastrée et «S» un bord simplement appuyée. Le tableau 4.13 montre l'effet de l'indice de puissance sur les cinq premières fréquences non-dimensionnelles avec divers types de conditions aux limites. On peut observer que pour chaque combinaison de conditions aux limites, la fréquence augmente progressivement à mesure que l'indice de puissance augmente de 0 (c'est-à-dire le modèle UD) à 1,8. Les cinq premières fréquences sont été classées des plus hautes (fréquences correspondant aux CCCC) aux plus basses (fréquences correspondant aux FSSC), et diminuent progressivement entre les deux. On peut conclure que plus les conditions aux limites sont restreintes (par exemple, de libre, à simplement appuyée et finalement encastrée), plus les cinq premières fréquences non dimensionnelles sont élevées.

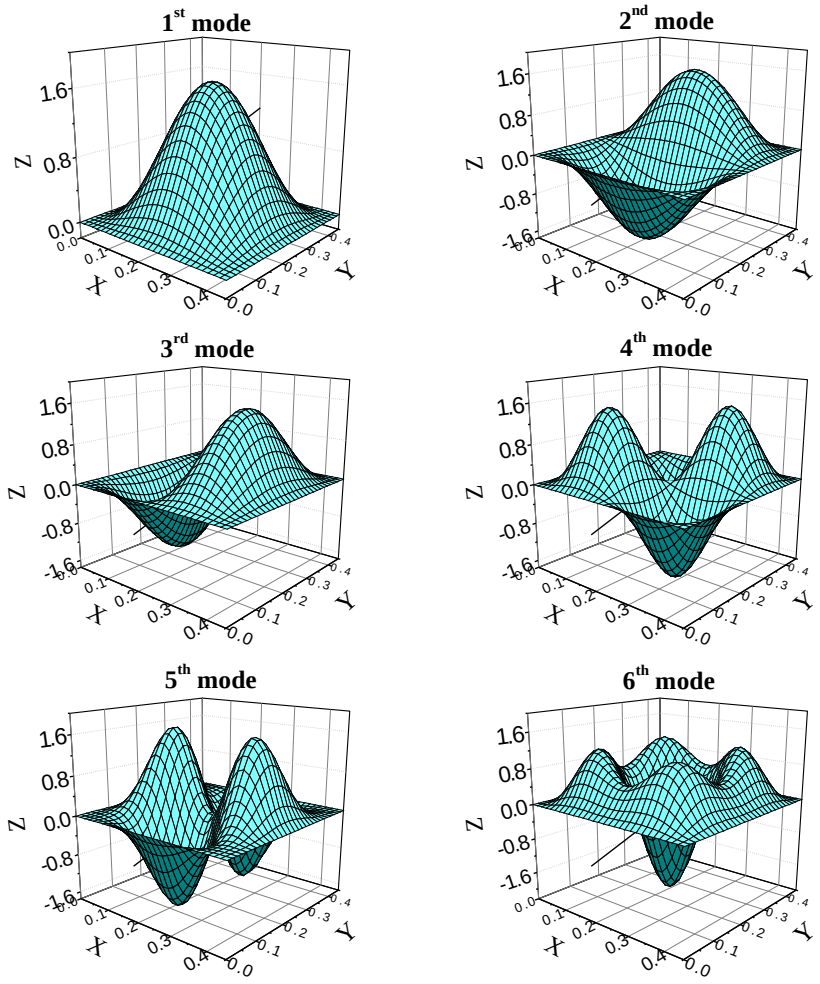


Figure 4.11 Six premières déformées modales d'une plaques encastrée renforcée par les PLGs (FG-X, b/h=50, a/b=1, $w_t = 1.2\%$ et P_{in}=1.8).

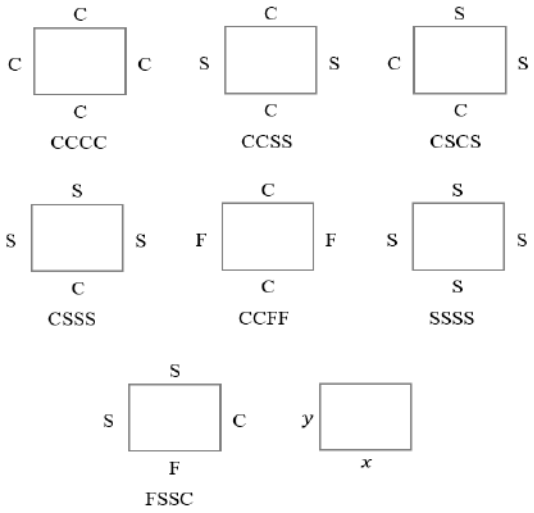


Figure 4.12 Combinaison de conditions aux limites.

Tableau 4.13 Cinq premières fréquences no-dimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ *d'une plaque renforcée par les PLGs avec différents indices de puissances et conditions aux limites (FG-X, b/h=10, a/b=1 et* $w_t = 1.2\%$ *).*

Conditions aux limites	P_{in}					
	0.0	0.4	0.8	1.0	1.4	1.8
CCCC	0.2221	0.2380	0.2488	0.2531	0.2600	0.2652
	0.4272	0.4544	0.4724	0.4794	0.4905	0.4988
	0.4272	0.4544	0.4725	0.4794	0.4905	0.4988
	0.5951	0.6302	0.6531	0.6618	0.6756	0.6860
	0.7324	0.7704	0.7942	0.8031	0.8172	0.8276
CCSS	0.1825	0.1962	0.2056	0.2093	0.2153	0.2199
	0.3361	0.3604	0.3772	0.3837	0.3943	0.4025
	0.4087	0.4309	0.4301	0.4297	0.4290	0.4284
	0.4295	0.4351	0.4527	0.4595	0.4703	0.4785
	0.5385	0.5726	0.5953	0.6040	0.6179	0.6284
CSCS	0.1730	0.1864	0.1957	0.1993	0.2053	0.2099
	0.3666	0.3921	0.4094	0.4162	0.4270	0.4353
	0.3689	0.3947	0.4122	0.4191	0.4300	0.4384
	0.4952	0.4912	0.4903	0.4898	0.4890	0.4884
	0.5332	0.5678	0.5908	0.5997	0.6067	0.6058
CSSS	0.1533	0.1654	0.1740	0.1773	0.1828	0.1871
	0.3227	0.3468	0.3634	0.3700	0.3806	0.3887
	0.3584	0.3837	0.4010	0.4077	0.4185	0.4268
	0.4295	0.4309	0.4301	0.4297	0.4290	0.4284
	0.5053	0.5120	0.5111	0.5105	0.5097	0.5091
CCFF	0.1412	0.1518	0.1593	0.1622	0.1669	0.1706
	0.1633	0.1754	0.1837	0.1870	0.1924	0.1965
	0.2622	0.2815	0.2948	0.3001	0.3086	0.3151
	0.3646	0.3885	0.3948	0.3944	0.3938	0.3933
	0.3925	0.3956	0.4043	0.4104	0.4202	0.4276
SSSS	0.1306	0.1413	0.1489	0.1520	0.1577	0.1608
	0.3119	0.3357	0.3522	0.3587	0.3692	0.3773
	0.3119	0.3357	0.3522	0.3587	0.3692	0.3773
	0.4295	0.4309	0.4301	0.4297	0.4290	0.4284
	0.4324	0.4364	0.4311	0.4311	0.4292	0.4288
FSSC	0.1159	0.1249	0.1312	0.1337	0.1378	0.1410
	0.1991	0.2143	0.2250	0.2292	0.2361	0.2414
	0.3232	0.3459	0.3614	0.3674	0.3771	0.3846
	0.3904	0.4072	0.4065	0.4060	0.4054	0.4049
	0.4059	0.4190	0.4388	0.4465	0.4465	0.4460

Chapitre 5

Analyse vibratoire des plaques stratifiées hybrides contenant des plis en nanotubes de carbone fonctionnellement graduées.

5.1 Introduction

Les recherches récentes ont montré que les structures stratifiées des poutres, plaques et coques présentent des performances mécaniques supérieures à celles des structures monocouches. Les qualités des structures stratifiées ont également poussé les chercheurs à développer des études avancées ayant trait le comportement mécanique des composites stratifiés renforcés par le NTC.

Ce chapitre a pour but d'étudier l'effet de la séquence d'empilements sur les réponses vibratoires des plaques composites stratifiées hybrides contenant des plis de composite renforcés par les NTCs (CRNTC) fonctionnellement gradué et des plis de composite renforcés par les fibres de graphite (CRFG), la modélisation de leur comportement est basée sur la théorie de déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT).

Une analyse paramétrique détaillée est menée afin d'étudier l'effet de différents paramètres d'influence sur le comportement vibratoire des plaques stratifié hybrides à savoir : la fraction volumique de NTC, l'indice de puissance, les paramètres géométriques de la plaque, les conditions aux limites et le nombre de plis.

Avant d'entreprendre, il est nécessaire de définir les propriétés du matériau des CRNTC et CRFG. Le poly (m-phenylenevinylene)-co-[(2,5-dioctoxy-p-phenylene) vinylene] (PmPV) polymère est choisi comme matrice pour les plis renforcés par les NTCs et ce renforcés par le graphite, les propriétés de la matrice polymère sont les suivantes $E^m = 2.1$ GPa, $\nu^m = 0.34$, $\rho^m = 1150$ kg/m^3. Comme renfort des plis renforcés par les NTCs, on choisit le (10, 10) nanotube de carbone mono-feuillet (SWCNT), dont les propriétés sont présentées dans le tableau 4.4. Les paramètres d'efficacité des NTCs

correspondant à la fraction volumique de NTC (pour les valeurs 0.11, 0.14 et 0.17) sont donnés dans le tableau 4.5.

En Parallèle, les fibres de graphite dont leurs propriétés suivent sont sélectionnées pour le renforcement des CRFG; $E_{11}^{F} = 233.05$ GPa, $E_{22}^{F} = 23.1$ GPa, $G_{12}^{F} = 8.96$ GPa, $\nu^{F} = 0.2$, $\rho^{F} = 1750$ kg/m^3 avec $G_{12} = G_{13}$ et $G_{23} = 1.2\ G_{12}$. La fraction volumique des fibres de graphite et de la matrice sont respectivement 0,6 et 0,4. La fréquence fondamental est exprimée sous forme non-dimensionnelle par $\bar{\omega} = \omega\ (b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$. L'indice de puissance P_{in} est pris égal à 1,0, sauf indication contraire.

5.2 Etudes comparatives

Dans le but d'évaluer l'exactitude et la fiabilité de la présente approche, trois exemples de validation sont réalisés.

Le premier cas de validation est relatif au calcul des fréquences fondamentales non-dimensionnelles ($\bar{\omega} = \omega\sqrt{\rho_c/E_c}$) d'une plaque fonctionnellement graduées FGM, dans laquelle nos résultats sont comparées avec ceux rapportés par Matsunaga [142] et Song et al. [95] et sont dressés dans le tableau 5.1. Les calculs sont effectués pour des différents rapports *b/h*, et P_{in}, plusieurs cas de maillage sont considérés. Les matériaux constitutifs de la plaque FGM sont le céramique Al_2O_3 et métal Al, dont les propriétés sont :

$E_c = 380.0$ Gpa, $\nu_c = 0.3$, $\rho_c = 3800$ kg/m^3.

$E_m = 70.0$ Gpa, $\nu_m = 0.3$, $\rho_m = 2702$ kg/m^3.

où les indices *c* et *m* désigne respectivement le céramique et le métal.

Le module d'élasticité et le coefficient de Poisson de la plaque FGM sont estimés à l'aide des équations (4.1-4.3)

On constate que les résultats numériques actuels sont en bon accord avec ceux de la littérature. En outre, le maillage 8×8 donne des résultats raisonnablement convainquons. Par conséquent, pour tous les applications numériques qui suivent, le maillage de 8×8 est utilisé.

Tableau 5.1 Comparaison de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega} = \omega\sqrt{\rho_c / E_c}$) d'une plaque simplement appuyée renforcée par Al/Al_2O_3 fonctionnellement graduée avec différents indice de puissances P_{in}, rapport b/h et tailles de maillage.

b/h	Réf	P_{in}				
		0.0	0.5	1.0	4.0	10.0
05	Present 4×4	0.2111	0.1811	0.1630	0.1388	0.1306
	Present 6×6	0.2112	0.1812	0.1631	0.1389	0.1307
	Present 8×8	0.2112	0.1812	0.1631	0.1389	0.1308
	Present 12×12	0.2112	0.1812	0.1631	0.1389	0.1308
	Matsunaga [142]	0.2121	0.1819	0.1640	0.1383	0.1306
	Song et al. [95]	0.2112	0.1809	0.1634	0.1393	0.1316
10	Present 4×4	0.05767	0.04921	0.04423	0.03804	0.03611
	Present 6×6	0.05769	0.04923	0.04424	0.03805	0.03613
	Present 8×8	0.05769	0.04923	0.04425	0.03805	0.03613
	Present 12×12	0.05769	0.04923	0.04425	0.03805	0.03613
	Matsunaga [142]	0.05777	0.04917	0.04426	0.03811	0.03642
	Song et al. [95]	0.05769	0.04912	0.04427	0.03811	0.03632

Le tableau 5.2 compare les six premières fréquences non-dimensionnelles d'une plaque stratifié croisé ($0^0/90^0/0^0/90^0/0^0$) renforcée par les NTCs, sur le même tableau on reporte les résultats de Lei et al. [94]. Les conditions aux limites simplement appuyée (SSSS) et encastrée (CCCC) sont utilisées. Aussi, quatre modèles de distributions de NTC (FG-O, FG-V, UD et FG-X) sont pris en compte dans cette comparaison. En plus, la fraction volumique des NTCs et le rapport géométrique *b/h* de la plaque sont choisis respectivement 0,11 et 10. Les présents résultats sont obtenus par la même théorie utilisée par Lei et al. [94], Cela a conduit à l'obtention de résultats très proches de ceux obtenus par lui.

Tableau 5.2 Comparaison des six premières fréquences non-dimensionnelles ($\bar{\omega} = \omega\ (b^2/h)\sqrt{\rho^m / E^m}$) d'une plaque stratifiée croisée ($0^0/90^0/0^0/90^0/0^0$) renforcée par les NTCs avec deux types de conditions aux limites pour a/b=1, b/h=10, N_L=20 et $f^*_{CNT} = 0.11$.

CLs	FG-O		FG-V		UD		FG-X	
	Présent	Réf [94]	Présent	Réf [94]	Présent	Réf [94]	Présent	Réf [94]
SSSS	14.096	14.207	14.118	14.241	14.17	14.277	14.276	14.383
	19.257	19.463	19.253	19.463	19.208	19.414	19.257	19.463
	19.257	19.468	19.253	19.468	19.208	19.419	19.257	19.468
	26.497	26.955	26.536	27.026	26.654	27.098	26.882	27.318
	30.278	30.578	30.276	30.602	30.288	30.579	30.415	30.704
	37.048	38.240	37.016	38.296	36.956	38.312	37.05	38.526
CCCC	19.737	19.652	19.758	19.678	19.771	19.680	19.878	19.784
	30.666	30.862	30.681	30.902	30.722	30.906	30.895	31.074
	32.672	32.752	32.678	32.773	32.664	32.736	32.794	32.862
	39.848	40.549	39.839	40.585	39.868	40.554	40.051	40.732
	45.361	46.270	45.369	46.324	45.407	46.315	45.639	46.552
	48.13	49.277	48.128	49.294	48.071	49.209	48.231	49.369

Le dernier test de comparaison concerne la fréquence fondamentale non-dimensionnelle des plaques stratifiées simplement appuyées renforcées par les NTCs. Les résultats obtenus sont comparés dans le tableau 5.3 avec les résultats de Huang et al [118]. Dans l'analyse, la fraction volumique de NTC et le rapport *b/h* de la plaque sont choisis

respectivement pour être de 0,11 et 10. Trois valeurs du nombre de pli (n = 1, 2 et 4) et deux types de séquences d'empilement pli croisé ($0^0/90^0$) et pli équilibré ($45^0/-45^0$) sont considérés. Comme le montre le tableau 5.3, les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux de Huang et al [118] pour les quatre modèles de distribution de NTC.

Tableau 5.3 Comparaison de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$) des plaques stratifiées croisées $(0^0/90^0)_n$ et équilibrées $(45^0/-45^0)_n$ renforcées par les NTCs avec différents nombre de sous-couches pour a/b=1, b/h=50, N_L=20, et $f^*_{CNT} = 0.11$.

séquences d'empilement	n	FG-O		FG-V		UD		FG-X	
		Présent	Réf [118]	Présent	Réf [118]	Présent	Réf [118]	Présent	Réf [118]
$(0^0/90^0)$	1	09.156	9.182	10.134	10.056	11.341	11.348	13.092	13.064
	2	17.495	17.378	17.51	17.495	17.688	17.714	17.985	17.975
	4	18.883	18.856	18.884	18.883	18.922	18.958	18.995	18.995
$(45^0/-45^0)$	1	12.116	11.974	13.189	14.116	15.094	15.109	17.653	17.697
	2	23.946	23.761	23.87	23.946	24.134	24.180	24.55	24.601
	4	25.871	25.818	25.793	25.871	25.85	25.912	25.951	26.012

5.3 Vibration libre des plaques stratifiées hybrides

Dans cette partie, on adopte comme notation, la lettre F pour les CRFG, et pour les C on utilise les lettres ; Λ, V, O, X et UD selon le type de distribution. Par exemple, l'arrangement [Λ-F-V-F] représenté sur la figure 2.4, signifie que le premier pli du stratifié est renforcé par le NTC (distribution type FG-Λ), le deuxième est en CRFG, le troisième est renforcé par le NTC (distribution type FG-V) et le quatrième pli est en CRFG.

Les tableaux 5.4, 5.5 et 5.6 présentent respectivement les effets de la fraction volumique des NTCs, du rapport géométrique *b/h* et du rapport *a/b* de la plaque sur la fréquence non-dimensionnelle d'une plaque stratifiée hybride croisée $(0^C/90^F)_n$. Les résultats sont calculés pour un nombre de plis n = 1, 2 et 4, différents types de distribution de NTC et les conditions aux limites SSSS et CCCC. On observe que la fréquence augmente avec l'augmentation de la fraction volumique des NTCs, ceci est dû au fait que les propriétés mécaniques de NTC sont supérieures à la matrice polymère. En plus la fréquence augmente et diminue respectivement lorsque les rapports *b/h* et *a/b* augmentent. On constate également que le nombre de plis à un effet significatif sur la fréquence fondamentale où elle connait une augmentation rapide à mesure que le nombre de plis augmente pour les quatre modèles de distribution de NTC. En plus, du fait que le type FG-X présente une concentration des NTCs près des surfaces inférieure et supérieure des plis, et la distribution des NTCs dans le type FG-O est concentrée près de la surface

moyenne des plis, les configurations $[X\text{-}F]_n$ et $[O\text{-}F]_n$ ont respectivement la plus grand et la plus petit fréquence.

Tableau 5.4 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$) d'une plaque hybride croisée ($0^C/90^F)_n$ renforcée par les NTCs et CRFG avec différentes valeurs de fractions volumiques de NTC (a/b=1 et b/h=10).

	f^*_{CNT}	SSSS				CCCC			
		$[UD\text{-}F]_n$	$[\Lambda\text{-}F]_n$	$[O\text{-}F]_n$	$[X\text{-}F]_n$	$[UD\text{-}F]_n$	$[\Lambda\text{-}F]_n$	$[O\text{-}F]_n$	$[X\text{-}F]_n$
n=1	0.11	11.442	11.384	10.796	12.027	20.511	20.393	19.520	21.295
	0.14	11.804	11.750	11.021	12.502	21.028	19.954	19.898	21.890
	0.17	12.493	12.437	11.600	13.297	22.285	21.933	20.996	23.281
n=2	0.11	15.939	15.874	15.853	16.032	25.292	25.266	25.211	25.392
	0.14	16.566	16.520	16.472	16.673	25.935	25.891	25.866	26.042
	0.17	17.464	17.411	17.365	17.591	27.538	27.488	27.470	27.678
n=4	0.11	16.656	16.651	16.640	16.681	25.884	25.881	25.876	25.915
	0.14	17.322	17.310	17.307	17.352	26.528	26.519	26.432	26.569
	0.17	18.264	18.259	18.255	18.305	28.186	28.174	28.166	28.255

Tableau 5.5 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$) d'une plaque hybride croisée ($0^C/90^F)_n$ renforcée par les NTCs et CRFG avec différentes valeurs de rapport largeur/épaisseur de la plaque (a/b=1, $f^*_{CNT} = 0.11$).

	b/h	SSSS				CCCC			
		$[UD\text{-}F]_n$	$[\Lambda\text{-}F]_n$	$[O\text{-}F]_n$	$[X\text{-}F]_n$	$[UD\text{-}F]_n$	$[\Lambda\text{-}F]_n$	$[O\text{-}F]_n$	$[X\text{-}F]_n$
n=1	10	11.442	11.384	10.796	12.027	20.511	20.393	19.520	21.295
	20	12.230	12.163	11.491	12.925	24.847	24.651	23.311	26.210
	50	12.491	12.421	11.720	13.225	26.719	26.485	24.924	28.397
n=2	10	15.939	15.874	15.853	16.032	25.292	25.266	25.211	25.392
	20	18.030	17.972	17.919	18.146	34.872	34.760	34.682	35.076
	50	18.820	18.786	18.699	18.945	40.568	40.477	40.301	40.842
n=4	10	16.656	16.651	16.640	16.681	25.884	25.881	25.876	25.915
	20	19.112	19.103	19.089	19.141	36.483	36.470	36.448	36.537
	50	20.075	20.064	20.048	20.105	43.198	43.163	43.139	43.265

Tableau 5.6 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$) d'une plaque hybride croisée ($0^C/90^F)_n$ renforcée par les NTCs et CRFG avec différentes valeurs de rapport longueur /largeur de la plaque (b/h=10, $f^*_{CNT} = 0.11$).

	a/b	SSSS				CCCC			
		$[UD\text{-}F]_n$	$[\Lambda\text{-}F]_n$	$[O\text{-}F]_n$	$[X\text{-}F]_n$	$[UD\text{-}F]_n$	$[\Lambda\text{-}F]_n$	$[O\text{-}F]_n$	$[X\text{-}F]_n$
n=1	1.0	11.442	11.384	10.796	12.027	20.511	20.393	19.520	21.295
	1.5	8.856	8.783	8.676	9.036	16.171	16.005	15.801	16.510
	2.0	8.205	8.191	8.143	8.276	15.022	14.936	14.876	15.174
n=2	1.0	15.939	15.874	15.853	16.032	25.292	25.266	25.211	25.392
	1.5	12.855	12.840	12.830	12.887	20.417	20.381	20.378	20.473
	2.0	11.923	11.923	11.921	11.925	18.979	18.966	18.965	19.011
n=4	1.0	16.656	16.651	16.640	16.681	25.884	25.881	25.876	25.915
	1.5	13.485	13.483	13.480	13.495	20.931	20.931	20.930	20.952
	2.0	11.918	11.918	11.917	11.920	19.459	19.449	19.443	19.454

Sur les tableaux 5.7, 5.8 et 5.9 on reporte les résultats relatifs au cas d'une plaque stratifiée hybrides de séquence d'empilement $(45^C/\text{-}45^F)_n$, obtenus respectivement en fonction de la fraction volumique des NTCs, les rapports géométriques *b/h* et *a/b*. les

conditions aux limites SSSS et CCCC sont considéré. Des observations similaires à celles de l'application précédente sont constatées. Aussi, on constate que la configuration $[O\text{-}F]_n$ donne des fréquences basses tandis que la configuration $[X\text{-}F]_n$ donne des fréquences hautes.

Les résultats obtenus montrent également que pour les quatre modèles de distributions des NTCs et les deux séquences d'empilement, les fréquences fondamentales correspondant au cas des plaques encastrées sont plus élevées que celles correspondant aux plaques simplement appuyées.

Tableau 5.7 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$) d'une plaque hybride équilibrée ($45^C/\text{-}45^F)_n$ renforcée par les NTCs et CRFG avec différentes valeurs de fractions volumiques de NTC (a/b=1, b/h=10).

	f^*_{CNT}	SSSS				CCCC			
		$[UD\text{-}F]_n$	$[\Lambda\text{-}F]_n$	$[O\text{-}F]_n$	$[X\text{-}F]_n$	$[UD\text{-}F]_n$	$[\Lambda\text{-}F]_n$	$[O\text{-}F]_n$	$[X\text{-}F]_n$
n=1	0.11	17.179	16.785	16.411	17.786	19.544	19.458	18.630	20.265
	0.14	17.702	17.089	16.819	18.382	20.022	19.836	18.984	20.819
	0.17	18.693	18.136	17.685	19.476	21.228	20.971	20.044	22.150
n=2	0.11	22.307	22.291	22.232	22.396	24.242	24.193	24.161	24.341
	0.14	23.005	22.987	22.936	23.101	24.879	24.849	24.807	24.985
	0.17	24.345	24.304	24.288	24.467	26.393	26.375	26.338	26.530
n=4	0.11	23.199	23.195	23.190	23.226	24.859	24.856	24.843	24.882
	0.14	23.903	23.902	23.900	23.938	25.497	25.494	25.491	25.536
	0.17	25.369	25.368	25.355	25.379	27.064	27.046	27.039	27.130

Tableau 5.8 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$) d'une plaque hybride équilibrée ($45^C/\text{-}45^F)_n$ renforcée par les NTCs et CRFG avec différentes valeurs de rapport largeur/épaisseur de la plaque (a/b=1, $f^*_{CNT} = 0.11$).

	b/h	SSSS				CCCC			
		$[UD\text{-}F]_n$	$[\Lambda\text{-}F]_n$	$[O\text{-}F]_n$	$[X\text{-}F]_n$	$[UD\text{-}F]_n$	$[\Lambda\text{-}F]_n$	$[O\text{-}F]_n$	$[X\text{-}F]_n$
n=1	10	17.179	16.785	16.411	17.786	19.544	19.458	18.630	20.265
	20	19.706	19.075	18.649	20.580	23.708	23.548	22.256	24.931
	50	20.702	20.024	19.519	21.697	25.748	25.538	23.970	27.292
n=2	10	22.307	22.291	22.232	22.396	24.242	24.193	24.161	24.341
	20	28.373	28.347	28.230	28.523	32.962	32.857	32.781	33.155
	50	31.402	31.328	31.217	31.588	38.638	38.643	38.368	38.912
n=4	10	23.199	23.195	23.190	23.226	24.859	24.856	24.843	24.882
	20	30.266	30.236	30.230	30.306	34.472	34.460	34.438	34.523
	50	34.048	34.015	34.006	34.094	41.074	41.049	41.015	41.141

Tableau 5.9 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega} = \omega\ (b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$) d'une plaque hybride équilibrée $(45^C/-45^F)_n$ renforcée par les NTCs et CRFG avec différentes valeurs de rapport longueur/largeur de la plaque (b/h=10, $f^*_{CNT} = 0.11$).

	a/b	SSSS				CCCC			
		$[UD\text{-}F]_n$	$[\Lambda\text{-}F]_n$	$[O\text{-}F]_n$	$[X\text{-}F]_n$	$[UD\text{-}F]_n$	$[\Lambda\text{-}F]_n$	$[O\text{-}F]_n$	$[X\text{-}F]_n$
n=1	1.0	17.179	16.785	16.411	17.786	19.544	19.458	18.630	20.265
	1.5	12.620	12.242	12.011	13.106	15.193	15.119	14.434	15.807
	2.0	10.800	10.503	10.283	11.216	13.715	13.649	13.025	14.283
n=2	1.0	22.307	22.291	22.232	22.396	24.242	24.193	24.161	24.341
	1.5	16.933	16.910	16.866	17.008	19.343	19.295	19.269	19.430
	2.0	14.669	14.623	14.609	14.735	17.607	17.575	17.538	17.688
n=4	1.0	23.199	23.195	23.190	23.226	24.859	24.856	24.843	24.882
	1.5	16.192	16.184	16.175	16.219	19.913	19.907	19.900	19.921
	2.0	13.919	13.912	13.904	13.943	15.484	15.476	15.444	15.572

L'étude suivante concerne l'effet de la séquence d'empilement ainsi que le nombre de pli sur les fréquences fondamentales. La fraction volumique des NTCs est fixée à 0.11 et le rapport géométrique *a/b* est pris égal à 10. Les six premières valeurs non-dimensionnelles de $\bar{\omega}$ pour les empilements croisé et équilibré sont présentées respectivement dans les tableaux 5.10 et 5.11. On observe que les fréquences relatives à la séquence avec des plis FG-V dans la moitié supérieure et des plis FG-Λ dans la moitié inférieure de la plaque sont plus élevées que celles du type FG-X.

Tableau 5.10 Six premières fréquences non-dimensionnelles ($\bar{\omega} = \omega\ (b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$) d'une plaque hybride croisée $(0^0/90^0)$ avec différentes configurations des plis (a/b=1, b/h=10, et $f^*_{CNT} = 0.11$).

BCs	Configuration des plis	Modes					
		1	2	3	4	5	6
SSSS	[Λ-F-V]	15.695	22.503	22.517	23.176	38.257	38.501
	[X-F-X-F]	16.032	23.654	23.686	35.233	35.816	45.589
	[Λ-F-V-F]	16.615	23.654	23.686	36.084	36.777	45.590
	[Λ-F-X-F-V]	16.540	22.957	22.982	32.101	38.454	44.410
	[Λ-F-Λ-F-V-F-V]	16.775	23.139	23.168	34.020	38.183	44.550
	[X-F-X-F-X-F-X-F]	16.681	23.608	23.646	35.987	36.686	45.194
	[Λ-F-Λ-F-V-F-V-F]	16.979	23.609	23.646	36.778	36.832	45.195
CCCC	[Λ-F-V]	22.089	30.921	40.737	45.497	46.346	56.338
	[X-F-X-F]	25.392	41.179	41.929	52.476	61.100	61.474
	[Λ-F-V-F]	25.730	41.505	42.862	53.190	61.106	61.693
	[Λ-F-X-F-V]	25.091	38.791	42.588	51.283	57.573	58.975
	[Λ-F-Λ-F-V-F-V]	25.671	40.115	42.873	52.191	59.419	59.607
	[X-F-X-F-X-F-X-F]	25.915	41.765	42.372	52.932	61.104	62.069
	[Λ-F-Λ-F-V-F-V-F]	26.187	41.935	42.850	53.305	61.107	62.193

Tableau 5.11 Six premières fréquences non-dimensionnelles ($\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$) d'une plaque hybride équilibrée (45^0/-45^0) avec différentes configurations des plis (a/b=1, b/h=10, et $f^*_{CNT} = 0.11$).

BCs	Configuration des plis	Modes					
		1	2	3	4	5	6
SSSS	[Λ-F-V]	19.189	28.390	30.527	36.009	42.279	49.214
	[X-F-X-F]	22.396	31.540	36.837	37.037	54.441	55.990
	[Λ-F-V-F]	22.893	31.612	37.542	37.962	55.152	56.982
	[Λ-F-X-F-V]	22.350	30.892	35.073	38.202	52.292	55.218
	[Λ-F-Λ-F-V-F-V]	22.994	30.972	36.313	38.350	53.912	56.077
	[X-F-X-F-X-F-X-F]	23.226	31.300	37.460	37.838	55.238	56.511
	[Λ-F-Λ-F-V-F-V-F]	23.479	31.338	38.032	38.091	55.618	57.021
CCCC	[Λ-F-V]	20.902	31.945	37.790	43.813	51.392	55.639
	[X-F-X-F]	24.341	40.955	40.973	55.431	59.879	61.087
	[Λ-F-V-F]	24.880	41.435	41.856	56.108	60.604	61.091
	[Λ-F-X-F-V]	24.050	38.936	41.267	53.324	58.287	58.968
	[Λ-F-Λ-F-V-F-V]	24.628	40.205	41.744	54.778	59.341	59.597
	[X-F-X-F-X-F-X-F]	24.882	41.468	41.622	56.038	60.305	61.091
	[Λ-F-Λ-F-V-F-V-F]	25.157	41.861	41.933	56.400	60.693	61.093

L'effet combiné de la séquence d'empilement, le nombre de plis et les conditions aux limites sur les six premières fréquences fondamentales non-dimensionnelles $\bar{\omega}$ des plaques renforcées purement en NTCs est présenté sur les tableaux 5.12 et 5.13 et ce pour les stratifications croisé ($0^0/90^0/0^0/90^0$) et équilibré (45^0/-45^0/45^0/-45^0). La fraction volumique des NTCs, *b/h* et *a/b* sont fixées respectivement à 0,11, 10 et 1. Les résultats reportés sur les tableaux 5.12 et 5.13 indiquent que pour n=1, les fréquences les plus élevées sont obtenues avec la configuration [X-X], celles les plus basses sont obtenus avec la configuration [V-Λ]. Pour les autres valeurs de n (n= 4 ou 8), les fréquences maximales sont obtenues dans le cas où l'endroit des couches FG-V et FG-Λ se trouve respectivement dans la moitié supérieure et inférieure de la plaque, affectant d'une manière positif sa rigidité. Comme résultats, on peut dire que la rigidité de la plaque dépend du type de distribution des NTCs et l'endroit de leurs plis à travers l'épaisseur.

De plus, l'effet combiné de l'indice de puissance, de la fraction volumique des NTCs et de la configuration de la plaque stratifiée sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques stratifiées hybrides est présenté dans les tableaux 5.14 et 5.15 et ce respectivement pour l'empilement croisé ($0^0/90^0/0^0/90^0$) et l'empilement équilibré (45^0/-45^0/45^0/-45^0). Les résultats montrent que l'augmentation de l'indice de puissance P_{in} conduit à l'augmentation des fréquences non-dimensionnelles, dans laquelle la configuration [Λ-F-V-F] est plus affectée par cette augmentation que la configuration [X-F-X-F], ces constatations sont observées sur les deux séquences d'empilement choisies aussi bien que sur les conditions aux limites utilisées. On peut conclure que, les plaques avec l'empilement [Λ-F-V-F] présente de meilleure rigidité que les plaques avec

l'empilement [X-F-X-F], autrement dit, la rigidité est meilleure si la concentration des fibres NTC se localise sur les surfaces latérales du pli pour l'arrangement [Λ-F-V-F]. Afin de donner plus d'explications sur ce phénomène, les figures 5.1 et 5.2 montrent le pourcentage d'augmentation de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\Delta\bar{\omega}$) en fonction de l'indice de puissance P_{in} respectivement pour les empilements ($0^0/90^0/0^0/90^0$) et ($45^0/-45^0/45^0/-45^0$) et en considérant différentes valeurs de fraction volumique de NTC. Ici, $\Delta\bar{\omega}=100\times(\bar{\omega}_p-\bar{\omega}_u)/\bar{\omega}_u$, et $\bar{\omega}_u$, $\bar{\omega}_p$ sont respectivement la fréquence non-dimensionnelle pour $P_{in}=0$ et $P_{in}\neq 0$. Comme il est montré sur les figures, la plus grande valeur de $\Delta\bar{\omega}$ est atteint pour des fractions volumiques élevées. De plus, ces résultats donnent également un aperçu du principal avantage que le renfort fonctionnellement gradué peut apporter au domaine des matériaux nanocomposites, où la rigidité globale de la structure peut s'accorder en ajustant la distribution des nanofibres à travers l'épaisseur du pli.

Tableau 5.12 Six premières fréquences non-dimensionnelles ($\bar{\omega}=\omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$) d'une plaque stratifiée croisée ($0^0/90^0$) renforcée par les NTCs avec différentes configurations des plis (a/b=1, b/h=50, et $f^*_{CNT}=0.11$).

BCs	Configuration des plis	Modes					
		1	2	3	4	5	6
SSSS	[Λ-V]	10.425	29.301	29.353	41.145	63.382	63.672
	[V-Λ]	9.721	26.981	27.005	38.439	58.134	58.271
	[X-X]	13.092	36.911	36.958	51.394	79.461	79.714
	[Λ-Λ-V-V]	19.912	55.691	55.738	76.508	97.336	97.336
	[V-V-Λ-Λ]	15.124	42.557	42.597	58.986	90.938	91.140
	[X-X-X-X]	17.985	50.482	50.527	69.550	97.334	97.334
	[Λ-Λ- Λ-Λ-V-V-V-V]	20.005	55.881	55.908	76.736	97.324	97.324
	[V-V-V-V-Λ-Λ- Λ-Λ]	17.789	49.915	49.940	68.773	97.324	97.324
	[X-X-X-X- X-X-X-X]	18.995	53.194	53.220	73.148	97.322	97.322
CCCC	[Λ-V]	22.442	46.229	46.326	62.015	90.403	91.004
	[V-Λ]	20.544	42.417	42.463	57.386	83.260	83.604
	[X-X]	28.264	57.745	57.829	76.981	111.198	111.684
	[Λ-Λ-V-V]	42.495	84.213	84.282	111.008	153.888	154.211
	[V-V-Λ-Λ]	32.567	65.978	66.045	87.603	125.113	125.488
	[X-X-X-X]	38.581	77.173	77.242	101.988	143.185	143.532
	[Λ-Λ- Λ-Λ-V-V-V-V]	42.641	84.448	84.488	111.256	154.152	154.370
	[V-V-V-V-Λ-Λ- Λ-Λ]	38.155	76.372	76.412	100.910	141.845	142.080
	[X-X-X-X- X-X-X-X]	40.626	80.852	80.892	106.653	148.755	148.981

Tableau 5.13 Six premières fréquences non-dimensionnelles ($\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$) d'une plaque stratifiée (45^0/-45^0) renforcée par les NTCs avec différentes configurations des plis (a/b=1, b/h=50, et $f^*_{CNT} = 0.11$.

BCs	Configuration des plis	Modes					
		1	2	3	4	5	6
SSSS	[Λ-V]	17.826	32.836	32.931	58.929	59.960	66.261
	[V-Λ]	16.577	30.241	30.289	54.546	55.256	62.084
	[X-X]	21.451	40.897	40.968	73.349	73.387	79.918
	[Λ-Λ-V-V]	32.531	61.510	61.564	107.577	107.691	116.067
	[V-V-Λ-Λ]	26.142	47.770	47.821	84.141	86.059	94.293
	[X-X-X-X]	30.024	56.066	56.119	98.414	99.309	107.607
	[Λ-Λ- Λ-Λ-V-V-V-V]	33.605	62.086	62.117	107.940	109.233	118.312
	[V-V-V-V-Λ-Λ- Λ-Λ]	30.663	55.900	55.930	97.485	99.635	108.652
	[X-X-X-X- X-X-X-X]	32.286	59.301	59.332	103.260	104.954	114.003
CCCC	[Λ-V]	21.586	43.240	43.286	67.888	78.451	79.063
	[V-Λ]	19.849	39.926	39.948	62.333	73.053	73.607
	[X-X]	27.062	53.849	53.890	84.087	96.511	97.373
	[Λ-Λ-V-V]	40.313	78.534	78.571	119.985	135.870	137.478
	[V-V-Λ-Λ]	31.094	61.487	61.520	95.372	108.987	110.058
	[X-X-X-X]	36.684	71.905	71.941	110.581	125.621	127.010
	[Λ-Λ- Λ-Λ-V-V-V-V]	40.450	78.756	78.778	120.224	136.082	137.700
	[V-V-V-V-Λ-Λ- Λ-Λ]	36.555	71.522	71.785	110.123	125.091	126.479
	[X-X-X-X- X-X-X-X]	38.583	75.361	75.383	115.438	130.873	132.376

Tableau 5.14 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$) d'une plaque hybride croisée ($0^C/90^F/0^C/90^F$) avec différentes valeurs de l'indice de puissance et de la fraction volumique de NTC (a/b=1, b/h=10).

BCs	f^*_{CNT}	Configuration des plis	P_{in}					
			0.0	0.4	0.8	1.0	1.4	1.8
SSSS	0.11	[X-F-X-F]	15.939	15.988	16.018	16.032	16.055	16.075
		[Λ-F-V-F]	15.939	16.275	16.512	16.606	16.763	16.887
	0.14	[X-F-X-F]	16.566	16.622	16.657	16.673	16.700	16.726
		[Λ-F-V-F]	16.566	16.937	17.201	17.306	17.480	17.618
	0.17	[X-F-X-F]	17.464	17.529	17.572	17.591	17.629	17.664
		[Λ-F-V-F]	17.464	17.911	18.210	18.331	18.531	18.694
CCCC	0.11	[X-F-X-F]	25.292	25.343	25.375	25.392	25.418	25.443
		[Λ-F-V-F]	25.292	25.543	25.757	25.840	25.975	26.080
	0.14	[X-F-X-F]	25.935	25.988	26.025	26.042	26.076	26.109
		[Λ-F-V-F]	25.935	26.169	26.378	26.460	26.594	26.703
	0.17	[X-F-X-F]	27.538	27.602	27.652	27.678	27.728	27.782
		[Λ-F-V-F]	27.538	27.919	28.158	28.255	28.420	28.561

Tableau 5.15 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle ($\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$) d'une plaque hybride équilibrée (45^C/-45^F/45^C/-45^F) avec différentes valeurs de l'indice de puissance et de la fraction volumique de NTC (a/b=1, b/h=10).

BCs	f^*_{CNT}	Configuration des plis	P_{in}					
			0.0	0.4	0.8	1.0	1.4	1.8
SSSS	0.11	[X-F-X-F]	22.307	22.355	22.382	22.396	22.418	22.439
		[Λ-F-V-F]	22.307	22.578	22.776	22.854	22.980	23.080
	0.14	[X-F-X-F]	23.005	23.054	23.086	23.101	23.129	23.156
		[Λ-F-V-F]	23.005	23.267	23.468	23.548	23.678	23.783
	0.17	[X-F-X-F]	24.345	24.404	24.447	24.467	24.512	24.557
		[Λ-F-V-F]	24.345	24.720	24.949	25.041	25.197	25.329
CCCC	0.11	[X-F-X-F]	24.242	24.293	24.325	24.341	24.367	24.391
		[Λ-F-V-F]	24.242	24.497	24.713	24.797	24.934	25.041
	0.14	[X-F-X-F]	24.879	24.923	24.968	24.985	25.019	25.051
		[Λ-F-V-F]	24.879	25.124	25.339	25.423	25.562	25.674
	0.17	[X-F-X-F]	26.393	26.457	26.508	26.530	26.585	26.639
		[Λ-F-V-F]	26.393	26.776	27.021	27.120	27.289	27.432

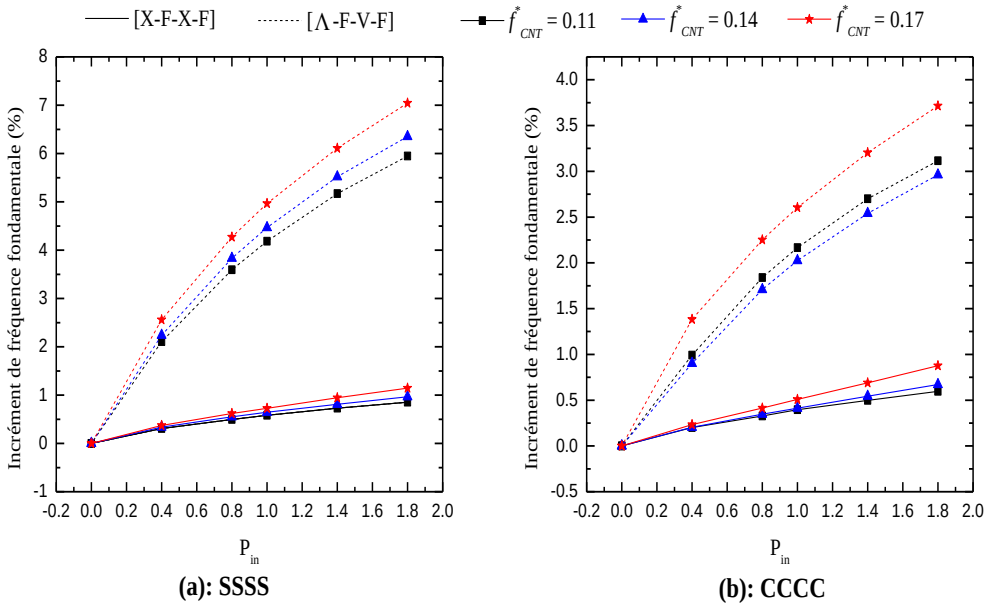


Figure 5.1 Pourcentage d'augmentation de la fréquence fondamentale ($\Delta\bar{\omega}=100\times(\bar{\omega}_p - \bar{\omega}_u)/\bar{\omega}_u$) d'une plaque hybride croisée ($0^0/90^0/0^0/90^0$) en fonction de l'index de puissance avec différentes conditions aux limites (b/h=10, a/b=1.0).

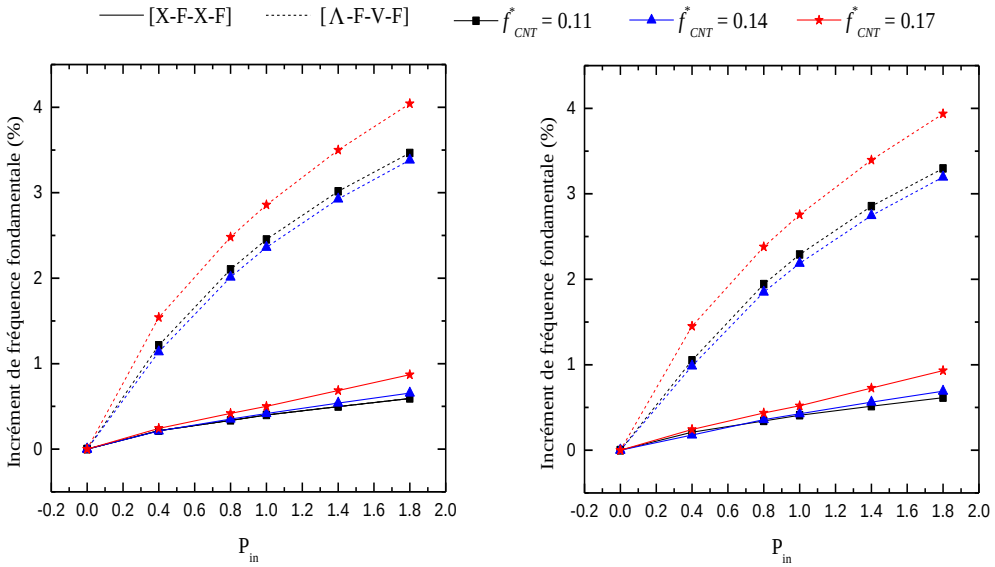


Figure 5.2 Pourcentage d'augmentation de la fréquence fondamentale ($\Delta\bar{\omega}=100\times(\bar{\omega}_p-\bar{\omega}_u)/\bar{\omega}_u$) d'une plaque hybride équilibrée ($45^0/-45^0/45^0/-45^0$) en fonction *l'index de puissance avec différentes conditions aux limites (b/h=10, a/b=1.0).*

Les figures 5.3 et 5.4 montrent les effets de la fraction volumique des NTCs et leur angle d'orientation θ sur la fréquence fondamentale non-dimensionnelle d'une plaque stratifiée hybride sous les conditions aux limites SSSS et CCCC. Les rapports *a/b* et *h/b* sont respectivement pris égaux à 10 et 1. On observe que la fréquence augmente puis décroit d'une manière symétrique autour l'angle 45°. Ce comportement est sur toutes les configurations de plaques étudiées.

L'effet du rapport *b/h* conjointement à l'effet de l'angle d'orientation θ sur la fréquence non-dimensionnelle sont aussi examinés et sont illustrés sur les figures. 5.5 et 5.6. Dans la modélisation, le rapport *b/h* de la plaque et la fraction volumique de NTC sont respectivement fixés à 1 et 0,11, les conditions aux limites SSSS et CCCC sont utilisées. A l'exception du cas de *b/h*=50 pour les conditions aux limites CCCC, le même comportement est observé on le comparant avec l'application précédente.

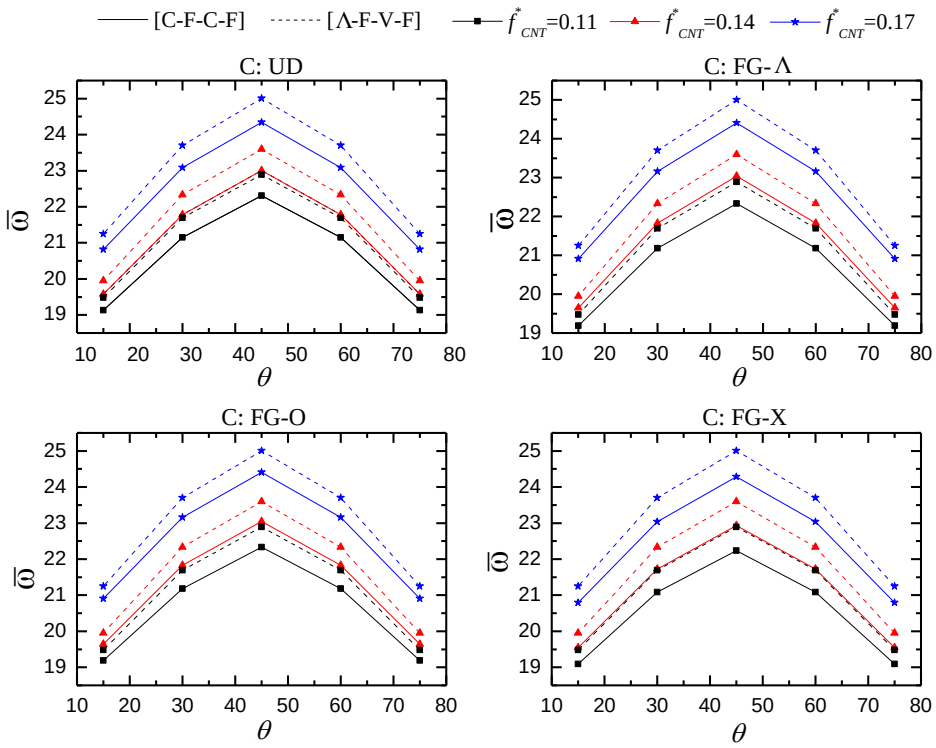


Figure 5.3 Effet de l'angle d'orientation θ de nanofibre sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$ *d'une plaque hybride équilibrée (θ/- θ/ θ/- θ) avec différentes valeurs de fraction volumique de NTC (SSSS, a/b=1 et b/h=10).*

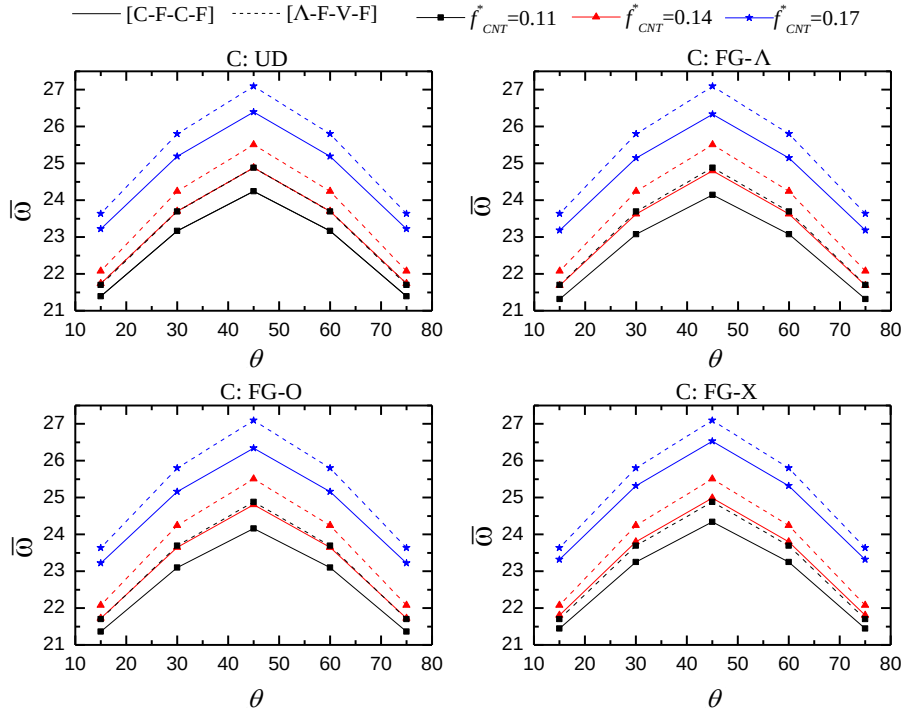


Figure 5.4 Effet de l'angle d'orientation θ de nanofibre sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$ *d'une plaque hybride équilibrée (θ/- θ/ θ/- θ) avec différentes valeurs de fraction volumique de NTC (CCCC, a/b=1, et b/h=10).*

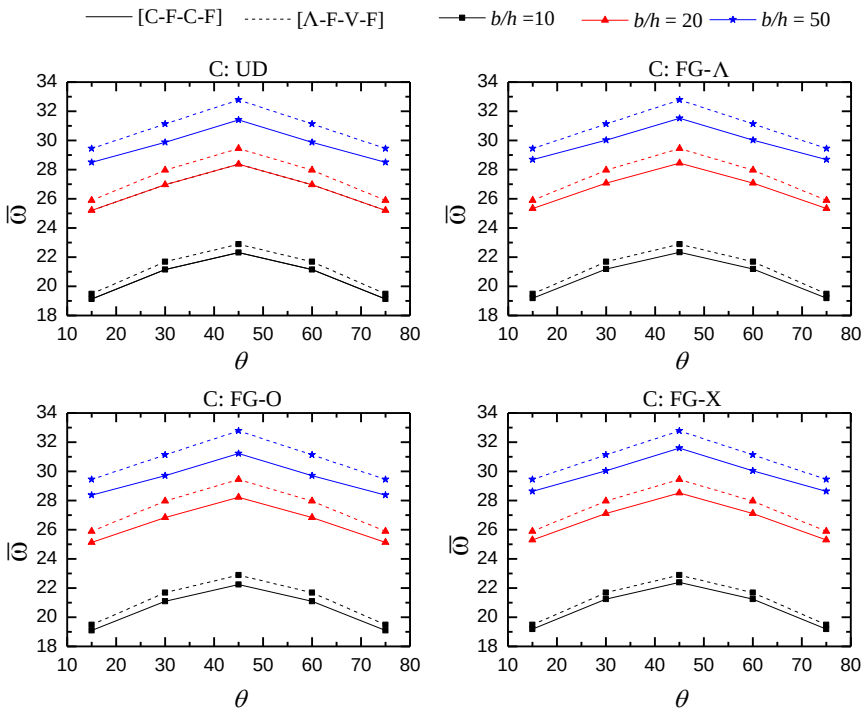


Figure 5.5 Effet de l'angle d'orientation θ de nanofibre sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$ *d'une plaque hybride équilibrée (θ/- θ/ θ/- θ) avec différents rapports largeur/épaisseur de la plaque (SSSS, a/b=1 et* $f^*_{CNT} = 0.11$*).*

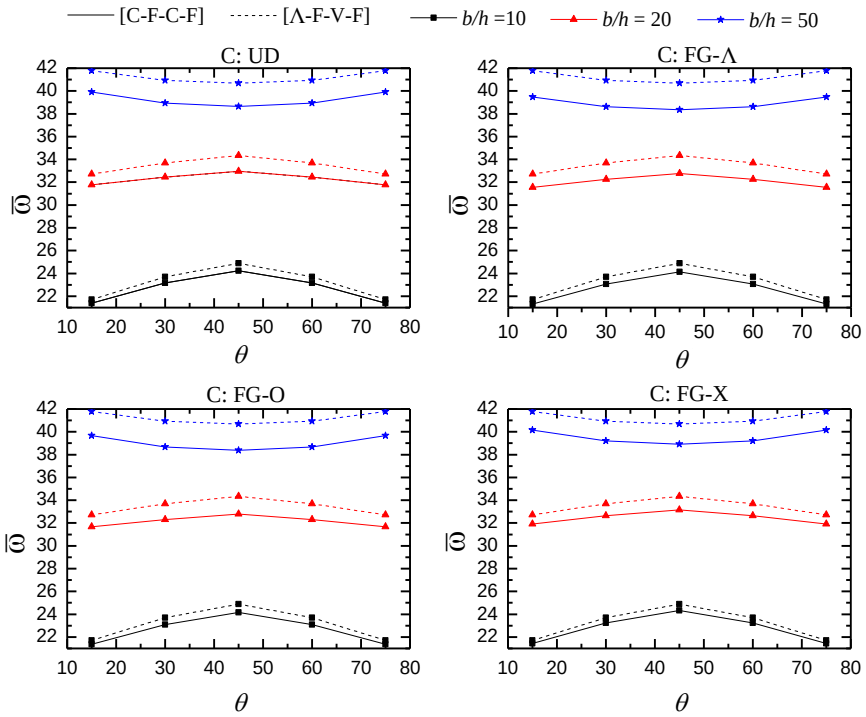


Figure 5.6 Effet de l'angle d'orientation θ de nanofibre sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$ *d'une plaque hybride équilibrée (θ/- θ/ θ/- θ) avec différents rapports largeur/épaisseur de la plaque (CCCC, a/b=1 et* $f^*_{CNT} = 0.11$*).*

Les figures 5.7 et 5.8 présentent la variation de la fréquence non-dimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque stratifiée hybride sous l'effet combiné du rapport géométrique *a/b* et l'angle d'orientation des nanofibres *θ*. le rapport *b/h* et la fraction volumique des NTCs sont pris respectivement 10 et 0,11, ainsi les conditions aux limites SSSS et CCCC sont considérées. On remarque que dans le cas où de la plaque carrée (*a/b* = 1), la courbe relative à la variation de la fréquence est symétrique de par rapport l'angle 45°, par contre, la fréquence augmente avec l'augmentation de l'angle d'orientation pour les autres rapports de *a/b* (*a/b*= 1,5 et 2,0). Il ressort également des figures 5.3 à 5.8, que la configuration [Λ-F-V-F] donnent les valeurs les plus élevées de la fréquence non-dimensionnelles.

Sur les figures. 5.9 et 5.10, on représente les six premières déformées modales d'une plaque stratifiée hybride équilibrée (45^0/-45^0/45^0/-45^0) de rapport *b/h* égal à 10 et de configuration [Λ-F-V-F]. La fraction volumique des NTCs est pris égale à 0,11 et les conditions aux limites SSSS et CCCC sont considérées.

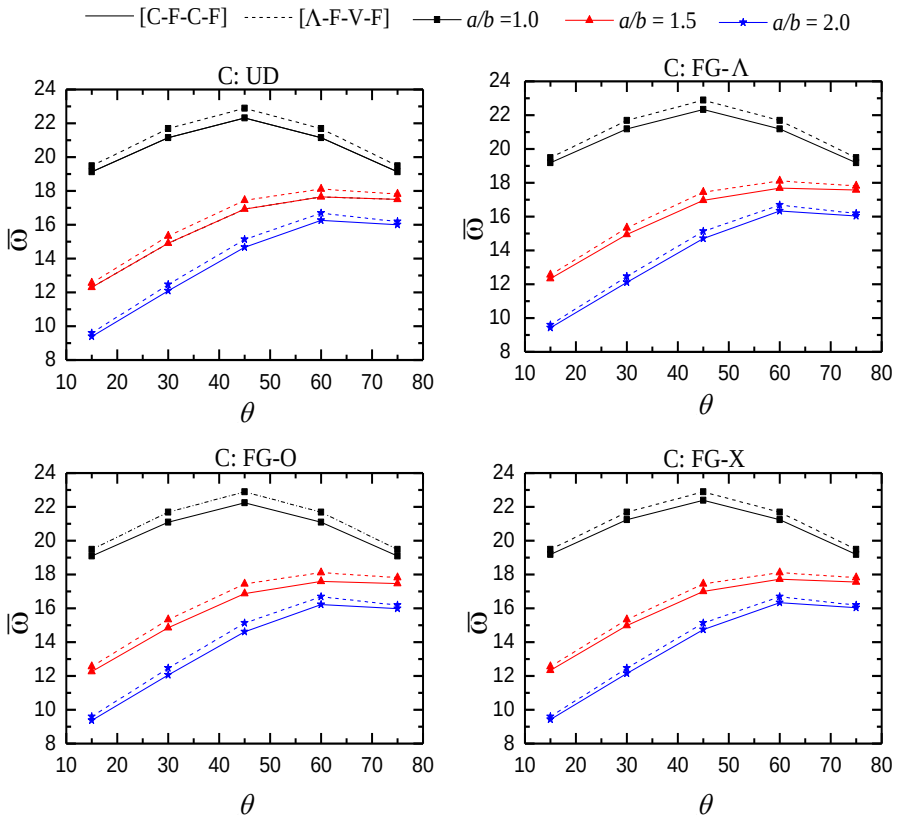


Figure 5.7 Effet de l'angle d'orientation θ de nanofibre sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$ *d'une plaque hybride équilibrée (θ/- θ/ θ/- θ) avec différentes rapports longueur/largeur de la plaque (SSSS, b/h=10 et* $f^*_{CNT} = 0.11$*).*

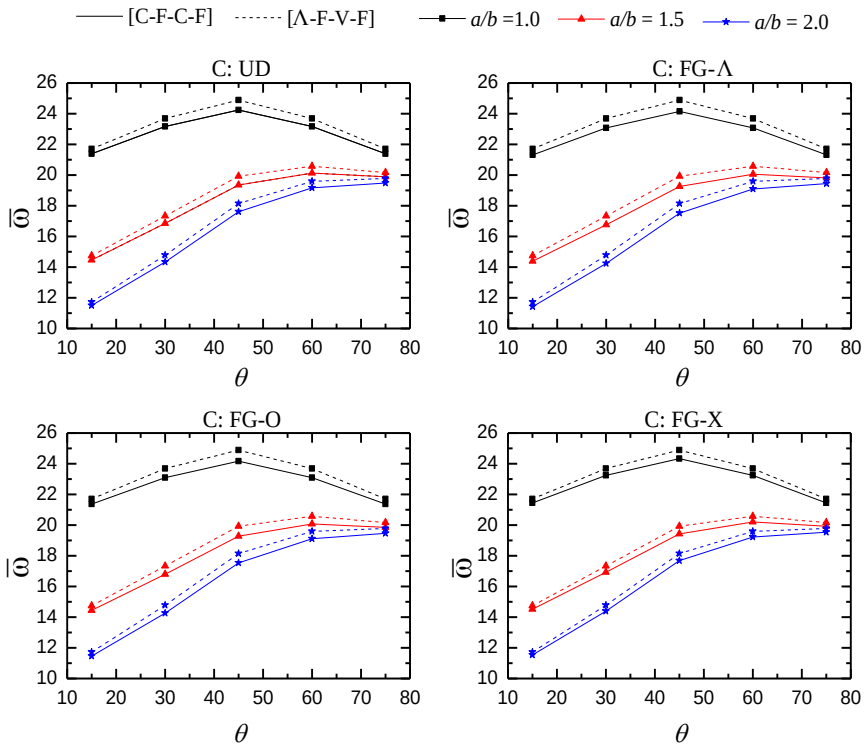


Figure 5.8 Effet de l'angle d'orientation θ de nanofibre sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega\,(b^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$ *d'une plaque hybride équilibrée (θ/- θ/ θ/- θ) avec différents rapports longueur/largeur de la plaque (CCCC, b/h=1et* $f^*_{CNT} = 0.11$*).*

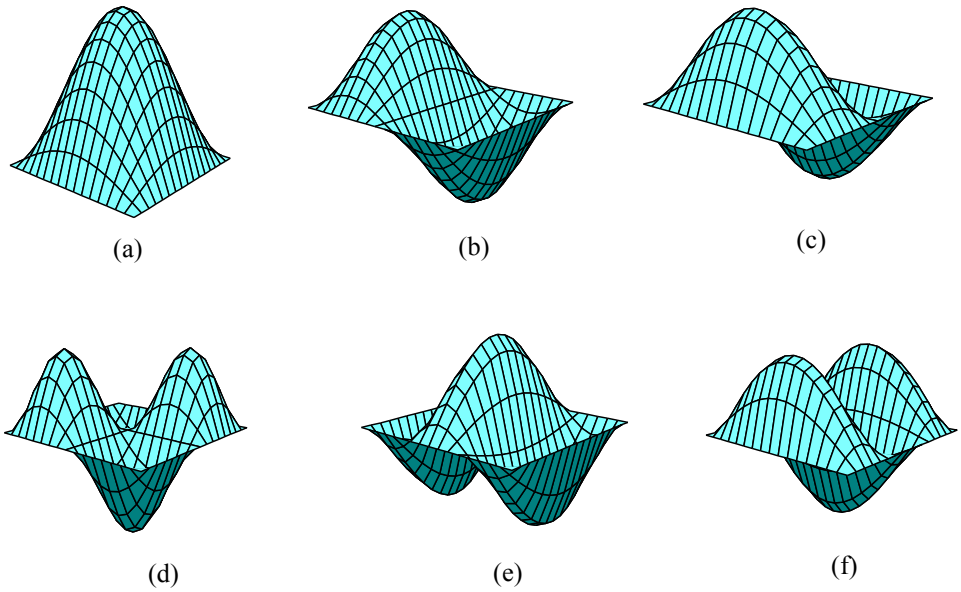


Figure 5.9 Six premières déformées modales d'une plaque hybride équilibrée (45⁰/-45⁰/45⁰/-45⁰) simplement appuyée avec empilement [Λ-F-V-F]. (a) Mode 1, (b) Mode 2, (c) Mode 3, (d) Mode 4, (e) Mode 5, (f) Mode 6.

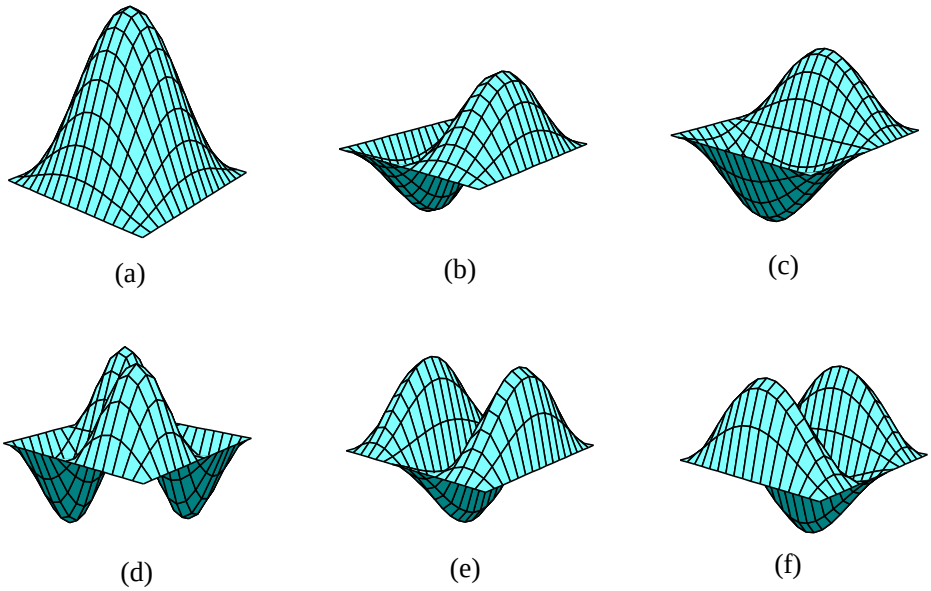


Figure 5.10 Six premières déformées modales d'une plaque hybride équilibrée (45^0/-45^0/45^0/-45^0) encastrée avec empilement [Λ-F-V-F]. (a) Mode 1, (b) Mode 2, (c) Mode 3, (d) Mode 4, (e) Mode 5, (f) Mode.

Conclusion générale

La connaissance des fréquences propres des vibrations des plaques est importante afin d'éviter les coïncidences avec les fréquences d'excitation. Étant donné que les fréquences propres des plaques nanocomposite sont sensibles aux propriétés du matériau, il est indispensable de donner une prédiction précise des fréquences naturelles par prise en compte de l'incertitude dans les différents types de distribution des nano-renfort qui peuvent émerger durant la fabrication de ces types de composite.

Dans ce travail, la modélisation du comportement vibratoire des plaques nanocomposites renforcées par des nano-renfort à base de carbone fonctionnellement graduées a été étudiée en utilisant la méthode des éléments finis. Les formulations théoriques sont basées sur la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre. Le principe de Hamilton a été utilisé pour obtenir les fréquences naturelles. La loi étendue du mélange et les modèles Halpin–Tsai ont été utilisés pour estimer les propriétés mécaniques des différents types de plaques nanocomposites.

Par utilisation d'un modèle de formulation par couche que nous avons proposé, l'influence des types des distributions des nanocharges sous sa forme linéaire et non linéaire sur les fréquences naturelles a été étudiée de manière approfondie. Un ensemble de nombreuses études paramétrique numériques a été présenté afin d'enrichir la recherche existante. Ce travail étudie le comportement vibratoire des trois types de plaques nanocomposites : les plaques nanocomposites renforcées par les NTCs ou les PLGs fonctionnellement graduée, les plaques nanocomposites stratifiées renforcée par les NTCs fonctionnellement graduée , dans lesquelles les paramètres d'influence suivants sont pris en considération: (i) le nombre total de sous-couches de plaque, (ii) la fraction volumique des nano-renfort et leur types de distribution, (iii) la géométrie de la plaque, (iv) l'empilement des plis, (v) le nombre des plis, et (vi) les conditions aux limites.

Globalement, les remarques finales sont scindées en deux parties :

i. Les remarques finales concernant les plaques nanocomposites monocouches :

- Les fréquences naturelles des plaques composites renforcées par les NTC et PLG augmentent pour le type FG-X et diminuent pour les types FG-V et FG-O lorsque le nombre total de sous-couches N_L augmente à 20 pour devenir presque constantes lorsque N_L>20. De là, on peut conclure que les plaques nanocomposites

divisées en 20 sous-couches (N_L=20) peuvent fournir des résultats suffisamment précis.

- Pour les plaques nanocomposites renforcée par les NTCs ou les PLGs, l'intervalle des fréquences naturelles obtenue pour différents types de distributions de nano-renfort se situe entre deux extrêmes, celui des basses fréquences données par le type FG-O et celui des hautes fréquences données par le type FG-X. Cependant, les résultats indiquent que la meilleure façon d'augmenter la rigidité des plaques nanocomposite renforcée par des nanorenfort est de les disperser plus près de ces surfaces latérales.

- Les fréquences naturelles non-dimensionnelles des plaques composites renforcée par le NTC augmentent lorsque le rapport géométrique *b/h* augmente et diminuent dans le cas où les plaques sont renforcées par le PLG. Cependant, il convient de noter que les fréquences propres non-dimensionnelles des plaques composites renforcées par le NTC diminuent une fois que le rapport géométrique *a/b* augmente.

- La fraction volumique du non-renfort a une influence remarquable sur l'amélioration de la rigidité effective du nanocomposite, où l'ajout d'une petite quantité du NTC ou PLG peut considérablement augmenter ces fréquences naturelles.

ii. Les remarques finales concernant les plaques nanocomposites stratifiées :

- Les constatations mentionnées dans la partie précédente qui concerne l'effet des paramètres géométriques (*b/h* et *a/b*) sur la fréquence non dimensionnelle des plaques nanocomposites multicouches, sont similaires à celles trouvées dans le cas des plaques nanocomposites stratifiées.
- Il a été constaté que l'arrangement des plis dans les plaques stratifiées avec une disposition spéciale utilisant les types de distribution de NTC peut considérablement améliorer leurs performances. Par exemple, les plaques de configuration [A-F-V-F] ont produit la fréquence fondamentale la plus élevée. De plus, les résultats ont révélé que l'accumulation des charges CNT sur les surfaces extérieures des modèles de distribution FG-Λ et FG-V peut conduire à une grande

amélioration dans la performance des plaques stratifiées hybrides qui ont la configuration [Λ-F-V-F].

- Il a été également constaté que l'angle d'orientation des NTCs et le nombre de plis ont une influence remarquable sur la valeur de la fréquence non dimensionnelle des plaques nanocomposites stratifiées.
- Les fréquences non-dimensionnelles des plaques stratifiées dépendent fortement des conditions aux limites. Les résultats montrent que les plaques avec des bords entièrement encastrés produisent des fréquences naturelles plus grandes que les plaques avec des bords entièrement simplement appuyé.

Les résultats rapportés dans ce travail, montrent clairement le principal avantage des matériaux fonctionnellement graduées, où la rigidité globale des plaques nanocomposites peut être améliorée simplement en ajustant la dispersion des nanorenfort à travers la direction de l'épaisseur des plaques. De plus, concernant l'incertitude dans les nanorenfort fonctionnellement graduées, il est utile de conclure que les distributions des nanocharges à base de carbone non linéaires à travers l'épaisseur (comme cela peut survenir en pratique comme source d'incertitude dans le processus de fabrication) ont un effet substantiel sur la rigidité globale des nanocomposites à bas de polymères. Ainsi, pour une application plus fiable des plaques nanocomposites fonctionnellement graduée dans l'ingénierie, il est essentiel de prendre en considération l'effet de l'incertitude dans les distributions des nanorenforts sur les comportements mécaniques des plaques nanocomposites.

Liste des publications

I. Publications internationales

1) Chiker Y, Bachene M, Guemana M, Attaf B, Rechak S. "Free vibration analysis of multilayer functionally graded polymer nanocomposite plates reinforced with nonlinearly distributed carbon-based nanofillers using a layer-wise formulation model". Aerospace Science and Technology. 2020 Jun 11:105913.
2) Chiker Y, Bachene M, Bouaziz S, Guemana M, Amar MB, Haddar M. "Free vibration analysis of hybrid laminated plates containing multilayer functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plies using a layer-wise formulation". Archive of Applied Mechanics. 2020 Sep 24:1-23.

II. Communications internationales

1) Chiker Y, Bachene M, Guemana M, Attaf B. "Vibration analysis of hybrid composite plates reinforced with one ply of single-walled carbon nanotubes". In2018 International Conference on Applied Smart Systems (ICASS) 2018 Nov 24 (pp. 1-6). IEEE.
2) Chiker Y, Bachene M, Guemana M, Attaf B. "Analyse vibratoire des plaques composites hybrides renforcées avec un pli en nanotubes de carbone mono-feuillets". In2018 International Conference on Advanced Mechanics and Renewable Energies (ICMARE2018), November 28 & 29, 2018 Boumerdes, Algeria
3) Chiker Y, Bachene M, Guemana M, Attaf B, Berkane S. "Free vibration analysis of laminated functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates". In2019 The First International Conference on Materials, Environment, Mechanical and Industrial Systems ICMEMIS'19, June 29 to 30, 2019 Djelfa, Algeria.
4) Chiker Y, Saiah B, Guemana M, Bachene M. "Free vibration analysis of hybrid laminated plates containing functionally graded graphene nanoplate layer". *Submitted to "12th Conference on Mechanical Engineering CME'2020 organized by Ecole Militaire Polytechnique in Bordj El Bahri, Algeria"*, 2020.

5) Saiah B, Chiker Y, Guemana M, Bachene M. "Free vibration behavior of laminated functionally graded graphene nanoplate plates". *"Algerian Symposium on Renewable Energy and Materials ASREM2020 Médéa- Algeria"*, 2020.

Références

[1] J.-M. Berthelot, Matériaux composites: comportement mécanique et analyse des structures, &. 245 (1999) 172.

[2] K.K. Chawla, Composite materials: science and engineering, Springer Science & Business Media, 2012.

[3] E.J. Barbero, Introduction to composite materials design, CRC press, 2017.

[4] L.H. de Carvalho, E.L. Canedo, S.R.F. Neto, A.G.B. de Lima, C.J. Silva, Moisture transport process in vegetable fiber composites: theory and analysis for technological applications, in: Ind. Technol. Appl. Transp. Porous Mater., Springer, 2013: pp. 37–62.

[5] S. Oller, Numerical simulation of mechanical behavior of composite materials, Springer, 2014.

[6] S. Venkatachalam, Ultraviolet and visible spectroscopy studies of nanofillers and their polymer nanocomposites, in: Spectrosc. Polym. Nanocomposites, Elsevier, 2016: pp. 130–157.

[7] J. Hári, B. Pukánszky, Nanocomposites: preparation, structure, and properties, in: Appl. Plast. Eng. Handb., Elsevier, 2011: pp. 109–142.

[8] D. Vollath, Nanoparticles-nanocomposites–nanomaterials: An introduction for beginners, John Wiley & Sons, 2013.

[9] M.J. O'connell, Carbon nanotubes: properties and applications, CRC press, 2006.

[10] S. Iijima, Helical microtubules of graphitic carbon, Nature. 354 (1991) 56–58.

[11] M. Meyyappan, Carbon nanotubes: science and applications, CRC press, 2004.

[12] Y. Gogotsi, V. Presser, Carbon nanomaterials, CRC press, 2013.

[13] M. Ricaud, D. Lafon, F. ROOS, Les nanotubes de carbone: quels risques, quelle prévention?, Hygiène Sécurité Du Trav. (2008) 43–57.

[14] I. Zaman, T.T. Phan, H.-C. Kuan, Q. Meng, L.T.B. La, L. Luong, O. Youssf, J. Ma, Epoxy/graphene platelets nanocomposites with two levels of interface strength, Polymer (Guildf). 52 (2011) 1603–1611.

[15] I. Zaman, H.-C. Kuan, J. Dai, N. Kawashima, A. Michelmore, A. Sovi, S. Dong, L. Luong, J. Ma, From carbon nanotubes and silicate layers to graphene platelets for polymer nanocomposites, Nanoscale. 4 (2012) 4578–4586.

[16] M.A. Rafiee, J. Rafiee, Z. Wang, H. Song, Z.-Z. Yu, N. Koratkar, Enhanced

mechanical properties of nanocomposites at low graphene content, ACS Nano. 3 (2009) 3884–3890.

[17] Y. Geng, S.J. Wang, J.-K. Kim, Preparation of graphite nanoplatelets and graphene sheets, J. Colloid Interface Sci. 336 (2009) 592–598.

[18] C. Soldano, A. Mahmood, E. Dujardin, Production, properties and potential of graphene, Carbon N. Y. 48 (2010) 2127–2150.

[19] M. Shtein, R. Nadiv, M. Buzaglo, K. Kahil, O. Regev, Thermally conductive graphene-polymer composites: size, percolation, and synergy effects, Chem. Mater. 27 (2015) 2100–2106.

[20] C. Yang, H. Wei, L. Guan, J. Guo, Y. Wang, X. Yan, X. Zhang, S. Wei, Z. Guo, Polymer nanocomposites for energy storage, energy saving, and anticorrosion, J. Mater. Chem. A. 3 (2015) 14929–14941.

[21] Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, B.H. Rabin, A. Kawasaki, R.G. Ford, Functionally graded materials: design, processing and applications, Springer Science & Business Media, 2013.

[22] R.M. Mahamood, E.T. Akinlabi, Types of functionally graded materials and their areas of application, in: Funct. Graded Mater., Springer, 2017: pp. 9–21.

[23] H.M. Yin, L.Z. Sun, G.H. Paulino, Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions, Acta Mater. 52 (2004) 3535–3543.

[24] H.-S. Shen, Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells, CRC press, 2016.

[25] M. Niino, Functionally gradient materials as thermal barrier for space plane, J. Jpn. Compos. Mater. 13 (1987) 257–264.

[26] E. Mueller, Č. Drašar, J. Schilz, W.A. Kaysser, Functionally graded materials for sensor and energy applications, Mater. Sci. Eng. A. 362 (2003) 17–39.

[27] J. Qiu, J. Tani, T. Ueno, T. Morita, H. Takahashi, H. Du, Fabrication and high durability of functionally graded piezoelectric bending actuators, Smart Mater. Struct. 12 (2003) 115.

[28] L.S. Liu, Q.J. Zhang, P.C. Zhai, The optimization design on metal/ceramic FGM armor with neural net and conjugate gradient method, in: Mater. Sci. Forum, Trans Tech Publ, 2003: pp. 791–796.

[29] B. Paszkiewicz, R. Paszkiewicz, M. Wosko, D. Radziewicz, B. Ściana, A. Szyszka, W. Macherzynski, M. Tłaczała, Functionally graded semiconductor

layers for devices application, Vacuum. 82 (2007) 389–394.

[30] F. Watari, A. Yokoyama, M. Omori, T. Hirai, H. Kondo, M. Uo, T. Kawasaki, Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application, Compos. Sci. Technol. 64 (2004) 893–908.

[31] J. Li, Y. Guan, G. Wang, G. Zhao, J. Lin, H. Naceur, D. Coutellier, Meshless modeling of bending behavior of bi-directional functionally graded beam structures, Compos. Part B Eng. 155 (2018) 104–111.

[32] G. Giunta, S. Belouettar, A.J.M. Ferreira, A static analysis of three-dimensional functionally graded beams by hierarchical modelling and a collocation meshless solution method, Acta Mech. 227 (2016) 969–991.

[33] X. Li, L. Li, Y. Hu, Z. Ding, W. Deng, Bending, buckling and vibration of axially functionally graded beams based on nonlocal strain gradient theory, Compos. Struct. 165 (2017) 250–265.

[34] X.-F. Li, B.-L. Wang, J.-C. Han, A higher-order theory for static and dynamic analyses of functionally graded beams, Arch. Appl. Mech. 80 (2010) 1197–1212.

[35] A. Pydah, A. Sabale, Static analysis of bi-directional functionally graded curved beams, Compos. Struct. 160 (2017) 867–876.

[36] I. Eshraghi, S. Dag, N. Soltani, Bending and free vibrations of functionally graded annular and circular micro-plates under thermal loading, Compos. Struct. 137 (2016) 196–207.

[37] K.D. Nguyen, H. Nguyen-Xuan, An isogeometric finite element approach for three-dimensional static and dynamic analysis of functionally graded material plate structures, Compos. Struct. 132 (2015) 423–439.

[38] A. Jodaei, 3D elasticity solution for static analysis of functionally graded piezoelectric annular plates on elastic foundations using SSDQM, Meccanica. 49 (2014) 215–237.

[39] T.-K. Nguyen, V.-H. Nguyen, T. Chau-Dinh, T.P. Vo, H. Nguyen-Xuan, Static and vibration analysis of isotropic and functionally graded sandwich plates using an edge-based MITC3 finite elements, Compos. Part B Eng. 107 (2016) 162–173.

[40] S.M. Ghazzawi, W.G. Abdelrahman, Static Analysis of Thick Functionally Graded Plates with Different Property Distribution Functions, Arab. J. Sci. Eng. (2020) 1–10.

[41] F. Tornabene, E. Viola, Static analysis of functionally graded doubly-curved shells and panels of revolution, Meccanica. 48 (2013) 901–930.

[42] E. Viola, L. Rossetti, N. Fantuzzi, F. Tornabene, Static analysis of functionally graded conical shells and panels using the generalized unconstrained third order theory coupled with the stress recovery, Compos. Struct. 112 (2014) 44–65.

[43] B.S. Aragh, H. Hedayati, Static response and free vibration of two-dimensional functionally graded metal/ceramic open cylindrical shells under various boundary conditions, Acta Mech. 223 (2012) 309–330.

[44] E. Viola, L. Rossetti, N. Fantuzzi, F. Tornabene, Generalized stress–strain recovery formulation applied to functionally graded spherical shells and panels under static loading, Compos. Struct. 156 (2016) 145–164.

[45] M. Arefi, O. Civalek, Static analysis of functionally graded composite shells on elastic foundations with nonlocal elasticity theory, Arch. Civ. Mech. Eng. 20 (2020) 1–17.

[46] Ş.D. Akbaş, Forced vibration analysis of functionally graded nanobeams, Int. J. Appl. Mech. 9 (2017) 1750100.

[47] U. Eroglu, In-plane free vibrations of circular beams made of functionally graded material in thermal environment: Beam theory approach, Compos. Struct. 122 (2015) 217–228.

[48] X. Wang, S. Li, Free vibration analysis of functionally graded material beams based on Levinson beam theory, Appl. Math. Mech. 37 (2016) 861–878.

[49] S. Li, Z. Wan, J. Zhang, Free vibration of functionally graded beams based on both classical and first-order shear deformation beam theories, Appl. Math. Mech. 35 (2014) 591–606.

[50] F. Ebrahimi, M. Mokhtari, Free vibration analysis of a rotating Mori–Tanaka-based functionally graded beam via differential transformation method, Arab. J. Sci. Eng. 41 (2016) 577–590.

[51] A. Gupta, M. Talha, B.N. Singh, Vibration characteristics of functionally graded material plate with various boundary constraints using higher order shear deformation theory, Compos. Part B Eng. 94 (2016) 64–74.

[52] S. Kumar, V. Ranjan, P. Jana, Free vibration analysis of thin functionally graded rectangular plates using the dynamic stiffness method, Compos. Struct. 197 (2018) 39–53.

[53] Y.-G. Wang, W.-H. Lin, N. Liu, Large amplitude free vibration of size-dependent circular microplates based on the modified couple stress theory, Int. J. Mech. Sci. 71 (2013) 51–57.

[54] S. Kumar, A. Mitra, H. Roy, Forced vibration response of axially functionally graded non-uniform plates considering geometric nonlinearity, Int. J. Mech. Sci. 128 (2017) 194–205.

[55] W.-Y. Jung, S.-C. Han, W.-T. Park, Four-variable refined plate theory for forced-vibration analysis of sigmoid functionally graded plates on elastic foundation, Int. J. Mech. Sci. 111 (2016) 73–87.

[56] F. Tornabene, N. Fantuzzi, M. Bacciocchi, Free vibrations of free-form doubly-curved shells made of functionally graded materials using higher-order equivalent single layer theories, Compos. Part B Eng. 67 (2014) 490–509.

[57] D. Punera, T. Kant, Free vibration of functionally graded open cylindrical shells based on several refined higher order displacement models, Thin-Walled Struct. 119 (2017) 707–726.

[58] S. Pandey, S. Pradyumna, A finite element formulation for thermally induced vibrations of functionally graded material sandwich plates and shell panels, Compos. Struct. 160 (2017) 877–886.

[59] T.-T. Nguyen, J. Lee, Flexural-torsional vibration and buckling of thin-walled bi-directional functionally graded beams, Compos. Part B Eng. 154 (2018) 351–362.

[60] B. Akgöz, Ö. Civalek, Buckling analysis of functionally graded microbeams based on the strain gradient theory, Acta Mech. 224 (2013) 2185–2201.

[61] E. Taati, On buckling and post-buckling behavior of functionally graded micro-beams in thermal environment, Int. J. Eng. Sci. 128 (2018) 63–78.

[62] S. Li, J. Zhang, Y. Zhao, Thermal post-buckling of functionally graded material Timoshenko beams, Appl. Math. Mech. 27 (2006) 803–810.

[63] G.-L. She, F.-G. Yuan, Y.-R. Ren, Thermal buckling and post-buckling analysis of functionally graded beams based on a general higher-order shear deformation theory, Appl. Math. Model. 47 (2017) 340–357.

[64] L. V Tran, C.H. Thai, H. Nguyen-Xuan, An isogeometric finite element formulation for thermal buckling analysis of functionally graded plates, Finite Elem. Anal. Des. 73 (2013) 65–76.

[65] H.A. Atmane, E.A.A. Bedia, M. Bouazza, A. Tounsi, A. Fekrar, On the thermal buckling of simply supported rectangular plates made of a sigmoid functionally graded Al/Al 2 O 3 based material, Mech. Solids. 51 (2016) 177–187.

[66] V.N. Van Do, C.H. Thai, A modified Kirchhoff plate theory for analyzing

thermo-mechanical static and buckling responses of functionally graded material plates, Thin-Walled Struct. 117 (2017) 113–126.

[67] M. Abdollahi, A.R. Saidi, M. Mohammadi, Buckling analysis of thick functionally graded piezoelectric plates based on the higher-order shear and normal deformable theory, Acta Mech. 226 (2015) 2497–2510.

[68] I. Ramu, S.C. Mohanty, Buckling analysis of rectangular functionally graded material plates under uniaxial and biaxial compression load, Procedia Eng. 86 (2014) 748–757.

[69] D. Van Dung, D.T. Dong, Post-buckling analysis of functionally graded doubly curved shallow shells reinforced by FGM stiffeners with temperature-dependent material and stiffener properties based on TSDT, Mech. Res. Commun. 78 (2016) 28–41.

[70] S. Trabelsi, S. Zghal, F. Dammak, Thermo-elastic buckling and post-buckling analysis of functionally graded thin plate and shell structures, J. Brazilian Soc. Mech. Sci. Eng. 42 (2020) 1–22.

[71] A. Hajlaoui, A. Jarraya, K. El Bikri, F. Dammak, Buckling analysis of functionally graded materials structures with enhanced solid-shell elements and transverse shear correction, Compos. Struct. 132 (2015) 87–97.

[72] X. Zhao, K.M. Liew, A mesh-free method for analysis of the thermal and mechanical buckling of functionally graded cylindrical shell panels, Comput. Mech. 45 (2010) 297–310.

[73] S. Zghal, A. Frikha, F. Dammak, Mechanical buckling analysis of functionally graded power-based and carbon nanotubes-reinforced composite plates and curved panels, Compos. Part B Eng. 150 (2018) 165–183.

[74] H.-S. Shen, Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments, Compos. Struct. 91 (2009) 9–19.

[75] P. Zhu, Z.X. Lei, K.M. Liew, Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plates using finite element method with first order shear deformation plate theory, Compos. Struct. 94 (2012) 1450–1460.

[76] R. Ansari, E. Hasrati, M.F. Shojaei, R. Gholami, A. Shahabodini, Forced vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using a numerical strategy, Phys. E Low-Dimensional Syst. Nanostructures. 69 (2015) 294–305.

[77] M. Trabelssi, S. El-Borgi, M.I. Friswell, A high-order FEM formulation for free and forced vibration analysis of a nonlocal nonlinear graded Timoshenko nanobeam based on the weak form quadrature element method, Arch. Appl. Mech. (2020) 1–24.

[78] M. Bouazza, A.M. Zenkour, Vibration of carbon nanotube-reinforced plates via refined nth-higher-order theory, Arch. Appl. Mech. (2020).

[79] L.W. Zhang, W.C. Cui, K.M. Liew, Vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite thick plates with elastically restrained edges, Int. J. Mech. Sci. 103 (2015) 9–21.

[80] L.W. Zhang, Z.X. Lei, K.-M. Liew, Computation of vibration solution for functionally graded carbon nanotube-reinforced composite thick plates resting on elastic foundations using the element-free IMLS-Ritz method, Appl. Math. Comput. 256 (2015) 488–504.

[81] P.T. Hieu, H. Van Tung, Thermal and thermomechanical buckling of shear deformable FG-CNTRC cylindrical shells and toroidal shell segments with tangentially restrained edges, Arch. Appl. Mech. (2020) 1–18.

[82] A. Farzam, B. Hassani, Thermal and mechanical buckling analysis of FG carbon nanotube reinforced composite plates using modified couple stress theory and isogeometric approach, Compos. Struct. 206 (2018) 774–790.

[83] Z.X. Lei, K.M. Liew, J.L. Yu, Buckling analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using the element-free kp-Ritz method, Compos. Struct. 98 (2013) 160–168.

[84] L.W. Zhang, K.M. Liew, Postbuckling analysis of axially compressed CNT reinforced functionally graded composite plates resting on Pasternak foundations using an element-free approach, Compos. Struct. 138 (2016) 40–51.

[85] L.W. Zhang, K.M. Liew, J.N. Reddy, Postbuckling of carbon nanotube reinforced functionally graded plates with edges elastically restrained against translation and rotation under axial compression, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 298 (2016) 1–28.

[86] A. Alibeigloo, A. Emtehani, Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plate using differential quadrature method, Meccanica. 50 (2015) 61–76.

[87] Y. Kiani, Free vibration of FG-CNT reinforced composite skew plates, Aerosp. Sci. Technol. 58 (2016) 178–188.

[88] L.W. Zhang, On the study of the effect of in-plane forces on the frequency parameters of CNT-reinforced composite skew plates, Compos. Struct. 160 (2017) 824–837.

[89] L.W. Zhang, Z.X. Lei, K.M. Liew, Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite triangular plates using the FSDT and element-free IMLS-Ritz method, Compos. Struct. 120 (2015) 189–199.

[90] L.W. Zhang, Z.X. Lei, K.M. Liew, Free vibration analysis of FG-CNT reinforced composite straight-sided quadrilateral plates resting on elastic foundations using the IMLS-Ritz method, J. Vib. Control. 23 (2017) 1026–1043.

[91] R. Ansari, A. Shahabodini, M.F. Shojaei, Vibrational analysis of carbon nanotube-reinforced composite quadrilateral plates subjected to thermal environments using a weak formulation of elasticity, Compos. Struct. 139 (2016) 167–187.

[92] N. Fantuzzi, F. Tornabene, M. Bacciocchi, R. Dimitri, Free vibration analysis of arbitrarily shaped Functionally Graded Carbon Nanotube-reinforced plates, Compos. Part B Eng. 115 (2017) 384–408.

[93] Z.-X. Wang, H.-S. Shen, Nonlinear vibration and bending of sandwich plates with nanotube-reinforced composite face sheets, Compos. Part B Eng. 43 (2012) 411–421.

[94] Z.X. Lei, L.W. Zhang, K.M. Liew, Free vibration analysis of laminated FG-CNT reinforced composite rectangular plates using the kp-Ritz method, Compos. Struct. 127 (2015) 245–259.

[95] M. Song, S. Kitipornchai, J. Yang, Free and forced vibrations of functionally graded polymer composite plates reinforced with graphene nanoplatelets, Compos. Struct. 159 (2017) 579–588.

[96] Z. Zhao, C. Feng, Y. Wang, J. Yang, Bending and vibration analysis of functionally graded trapezoidal nanocomposite plates reinforced with graphene nanoplatelets (GPLs), Compos. Struct. 180 (2017) 799–808.

[97] A.R. Saidi, R. Bahaadini, K. Majidi-Mozafari, On vibration and stability analysis of porous plates reinforced by graphene platelets under aerodynamical loading, Compos. Part B Eng. 164 (2019) 778–799.

[98] Z.-X. Wang, H.-S. Shen, Nonlinear vibration of sandwich plates with FG-GRC face sheets in thermal environments, Compos. Struct. 192 (2018) 642–653.

[99] H.-S. Shen, Y. Xiang, F. Lin, Nonlinear vibration of functionally graded

graphene-reinforced composite laminated plates in thermal environments, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 319 (2017) 175–193.

[100] S.J. Mehrabadi, B. Sobhaniaragh, V. Pourdonya, Free vibration analysis of nanocomposite plates reinforced by graded carbon nanotubes based on first-order shear deformation plate theory, Adv. Appl. Math. Mech. 5 (2013) 90–112.

[101] E. García-Macías, R. Castro-Triguero, E.I.S. Flores, M.I. Friswell, R. Gallego, Static and free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced skew plates, Compos. Struct. 140 (2016) 473–490.

[102] Y. Kiani, Free vibration of carbon nanotube reinforced composite plate on point supports using Lagrangian multipliers, Meccanica. 52 (2017) 1353–1367.

[103] S. Zghal, A. Frikha, F. Dammak, Free vibration analysis of carbon nanotube-reinforced functionally graded composite shell structures, Appl. Math. Model. 53 (2018) 132–155.

[104] R. Ansari, J. Torabi, M.F. Shojaei, Buckling and vibration analysis of embedded functionally graded carbon nanotube-reinforced composite annular sector plates under thermal loading, Compos. Part B Eng. 109 (2017) 197–213.

[105] R.M.R. Reddy, W. Karunasena, W. Lokuge, Free vibration of functionally graded-GPL reinforced composite plates with different boundary conditions, Aerosp. Sci. Technol. 78 (2018) 147–156.

[106] E. Garcia-Macias, L. Rodriguez-Tembleque, A. Saez, Bending and free vibration analysis of functionally graded graphene vs. carbon nanotube reinforced composite plates, Compos. Struct. 186 (2018) 123–138.

[107] M. Arefi, E.M.-R. Bidgoli, R. Dimitri, F. Tornabene, Free vibrations of functionally graded polymer composite nanoplates reinforced with graphene nanoplatelets, Aerosp. Sci. Technol. 81 (2018) 108–117.

[108] C.H. Thai, A.J.M. Ferreira, P. Phung-Van, Size dependent free vibration analysis of multilayer functionally graded GPLRC microplates based on modified strain gradient theory, Compos. Part B Eng. 169 (2019) 174–188.

[109] P. Malekzadeh, A.R. Setoodeh, M. Shojaee, Vibration of FG-GPLs eccentric annular plates embedded in piezoelectric layers using a transformed differential quadrature method, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 340 (2018) 451–479.

[110] C.H. Thai, A.J.M. Ferreira, T.D. Tran, P. Phung-Van, Free vibration, buckling and bending analyses of multilayer functionally graded graphene nanoplatelets reinforced composite plates using the NURBS formulation, Compos. Struct. 220

(2019) 749–759.

[111] F. Pashmforoush, Statistical analysis on free vibration behavior of functionally graded nanocomposite plates reinforced by graphene platelets, Compos. Struct. 213 (2019) 14–24.

[112] Z.X. Lei, L.W. Zhang, K.M. Liew, Analysis of laminated CNT reinforced functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method, Compos. Part B Eng. 84 (2016) 211–221.

[113] Z.X. Lei, L.W. Zhang, K.M. Liew, Buckling analysis of CNT reinforced functionally graded laminated composite plates, Compos. Struct. 152 (2016) 62–73.

[114] H.-S. Shen, Y. Xiang, Postbuckling behavior of functionally graded graphene-reinforced composite laminated cylindrical shells under axial compression in thermal environments, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 330 (2018) 64–82.

[115] Z.X. Lei, L.W. Zhang, K.M. Liew, Parametric analysis of frequency of rotating laminated CNT reinforced functionally graded cylindrical panels, Compos. Part B Eng. 90 (2016) 251–266.

[116] P. Malekzadeh, A.R. Zarei, Free vibration of quadrilateral laminated plates with carbon nanotube reinforced composite layers, Thin-Walled Struct. 82 (2014) 221–232.

[117] P. Malekzadeh, Y. Heydarpour, Mixed Navier-layerwise differential quadrature three-dimensional static and free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite laminated plates, Meccanica. 50 (2015) 143–167.

[118] B. Huang, Y. Guo, J. Wang, J. Du, Z. Qian, T. Ma, L. Yi, Bending and free vibration analyses of antisymmetrically laminated carbon nanotube-reinforced functionally graded plates, J. Compos. Mater. 51 (2017) 3111–3125.

[119] Y. Fan, H. Wang, Thermal postbuckling and vibration of postbuckled matrix cracked hybrid laminated plates containing carbon nanotube reinforced composite layers on elastic foundation, Compos. Struct. 157 (2016) 386–397.

[120] Z.X. Lei, L.W. Zhang, K.M. Liew, Modeling large amplitude vibration of matrix cracked hybrid laminated plates containing CNTR-FG layers, Appl. Math. Model. 55 (2018) 33–48.

[121] Z.X. Lei, B.B. Yin, K.M. Liew, Bending and vibration behaviors of matrix cracked hybrid laminated plates containing CNTR-FG layers and FRC layers, Compos. Struct. 184 (2018) 314–326.

[122] Z.Z. Pan, L.W. Zhang, K.M. Liew, Modeling geometrically nonlinear large deformation behaviors of matrix cracked hybrid composite deep shells containing CNTRC layers, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 355 (2019) 753–778.

[123] E. García-Macías, R. Castro-Triguero, M.I. Friswell, S. Adhikari, A. Sáez, Metamodel-based approach for stochastic free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced plates, Compos. Struct. 152 (2016) 183–198.

[124] S. Pouresmaeeli, S.A. Fazelzadeh, E. Ghavanloo, P. Marzocca, Uncertainty propagation in vibrational characteristics of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite shell panels, Int. J. Mech. Sci. 149 (2018) 549–558.

[125] P. Jiao, Z. Chen, H. Ma, D. Zhang, P. Ge, Buckling analysis of thin rectangular FG-CNTRC plate subjected to arbitrarily distributed partial edge compression loads based on differential quadrature method, Thin-Walled Struct. 145 (2019) 106417.

[126] T. Vo-Duy, T.T. Truong, K. Nguyen-Quang, T. Nguyen-Thoi, H.C. Vu-Do, A Type of Novel Nonlinear Distributions for Improving Significantly the Stiffness of Carbon Nanotube-Reinforced Composite Beams, Int. J. Comput. Methods. 17 (2020) 1950057.

[127] Y. Chiker, M. Bachene, M. Guemana, B. Attaf, S. Rechak, Free vibration analysis of multilayer functionally graded polymer nanocomposite plates reinforced with nonlinearly distributed carbon-based nanofillers using a layer-wise formulation model, Aerosp. Sci. Technol. (2020) 105913.

[128] Y. Chiker, M. Bachene, S. Bouaziz, M. Guemana, M. Ben Amar, M. Haddar, Free vibration analysis of hybrid laminated plates containing multilayer functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plies using a layer-wise formulation, Arch. Appl. Mech. (2020) 1–23.

[129] J.D. Fidelus, E. Wiesel, F.H. Gojny, K. Schulte, H.D. Wagner, Thermo-mechanical properties of randomly oriented carbon/epoxy nanocomposites, Compos. Part A Appl. Sci. Manuf. 36 (2005) 1555–1561.

[130] C.-L. Zhang, H.-S. Shen, Temperature-dependent elastic properties of single-walled carbon nanotubes: prediction from molecular dynamics simulation, Appl. Phys. Lett. 89 (2006) 81904.

[131] Y. Han, J. Elliott, Molecular dynamics simulations of the elastic properties of polymer/carbon nanotube composites, Comput. Mater. Sci. 39 (2007) 315–323.

[132] B.S. Aragh, A.H.N. Barati, H. Hedayati, Eshelby-Mori-Tanaka approach for

vibrational behavior of continuously graded carbon nanotube-reinforced cylindrical panels, Compos. Part B Eng. 43 (2012) 1943–1954. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.01.004.

[133] D.L. Shi, X.Q. Feng, Y.Y. Huang, K.C. Hwang, H. Gao, The effect of nanotube waviness and agglomeration on the elastic property of carbon nanotube-reinforced composites, J. Eng. Mater. Technol. Trans. ASME. 126 (2004) 250–257. https://doi.org/10.1115/1.1751182.

[134] R.G. De Villoria, A. Miravete, Mechanical model to evaluate the effect of the dispersion in nanocomposites, Acta Mater. 55 (2007) 3025–3031.

[135] J.C.H. Affdl, J.L. Kardos, The Halpin-Tsai equations: a review, Polym. Eng. Sci. 16 (1976) 344–352.

[136] H.-S. Shen, A comparison of buckling and postbuckling behavior of FGM plates with piezoelectric fiber reinforced composite actuators, Compos. Struct. 91 (2009) 375–384.

[137] J.N. Reddy, Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis, CRC press, 2003.

[138] P.C. Yang, C.H. Norris, Y. Stavsky, Elastic wave propagation in heterogeneous plates, Int. J. Solids Struct. 2 (1966) 665–684.

[139] J.M. Whitney, Shear correction factors for orthotropic laminates under static load, (1973).

[140] J.F. Imbert, Analyse des structures par éléments finis, cépadues-editions edn, (1991).

[141] T.Y. Yang, Finite element structural analysis, Prentice Hall, 1986.

[142] H. Matsunaga, Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory, Compos. Struct. 82 (2008) 499–512.

[143] S. Hosseini-Hashemi, H.R.D. Taher, H. Akhavan, M. Omidi, Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory, Appl. Math. Model. 34 (2010) 1276–1291.

[144] P. Kumar, J. Srinivas, Vibration, buckling and bending behavior of functionally graded multi-walled carbon nanotube reinforced polymer composite plates using the layer-wise formulation, Compos. Struct. 177 (2017) 158–170.