Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique



Projet de fin d'étude

Présenté en vue de l'obtention du
Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

Thème

Étude et détermination du nombre de la coloration de packing de quelques types de graphes

Par

BESSERI Manel et HADJADJ Imene

Soutenu devant le jury composé de:

A.	Bendali Braham	MCB	U.D.Y.F-Médéa	Président.
R.	LEMDANI	MAA	U.D.Y.F-Médéa	Promoteur.
M.	ZEMIR	MCB	U.D.Y.F-Médéa	Examinateur.
A.	SAHRAOUI	MCB	U.D.Y.F-Médéa	Examinateur.

Date de soutenance : 18/07/2021

Résumé

Le but de ce travail est consacré à l'étude du nombre chromatique de packing, il s'agit de trouver le plus petit nombre de couleurs à affecter aux sommets d'un graphe G, de telle sorte que, si deux sommets u et v ont la même couleur i, alors $d_G(u, v) > i$. Le nombre chromatique de packing de G, noté par $\chi_p(G)$. Nous déterminons la valeur exacte du nombre chromatique de packing d'un graphe puissance pour les graphes suivants: les étoiles, les graphes bipartis complets, arbres à diamétre 3, arbres à diamétre 4 et la borne inférieure du nombre chromatique de packing du graphe puissance pour les cycles. Nous déterminons également le nombre $\chi_p(G)$, où G est le graphe subdivisé super fini des graphes suivants: graphe splitting d'une chaîne, graphe splitting d'une étoile, graphe splitting d'un arbre, la couronne voisinage de deux chaînes, la couronne voisinage d'un cycle avec une chaîne et la couronne d'un graphe complet avec une chaîne. Nous déterminons aussi le nombre chromatique de packing d'un graphe joint pour un graphe complet avec une chaîne et le nombre chromatique de packing de la couronne voisinage d'un graphe complet avec une chaîne.

Mots clés: Nombre chromatique de packing, graphe puissance, couronne de deux graphes, couronne voisinage de deux graphes.

Abstract

The purpose of this work is devoted to the study of a packing chromatic number, it acts to find the smallest number of colors has to assign to the vertices of a graph G, such that if two vertices u and v have the same color i, then $d_G(u, v) > i$. The packing chromatic number of G, denoted by $\chi_p(G)$. We determine the exact value of the packing chromatic number of a power graph of graphs : stars, complete bipartite graphs, trees with diameter 3, trees with diameter 4 and the lower bound of the packing chromatic number of power graph of cycle. We also determine the number $\chi_p(G)$, where G is the finite super subdivision of graphs: splitting graph of path, splitting graphe of star, splitting graph of tree, neighborhood corona of two paths, neighborhood corona of a cycle with a path and the corona of a complete graph with a path. We determine also the packing chromatic number of a join of complete graph with a path and the packing chromatic number of a neighborhood corona of a complete graph with path.

Key words: Packing chromatic number, power graph, corona of two graphs, neighborhood corona of two graphs.

Remerciements

Avant tout, nous remercions **Allah,** le tout puissant de nous avoir donné le courage et la patience pour terminer ce travail.

Nos remerciements vont à Monsieur **Rachid LEMDANI**, notre promoteur pour ses conseils, ses sincères contributions pour la réalisation de notre travail et pour la qualité de son encadrement exceptionnelle,
pour sa patience, sa rigueur
et sa disponibilité durant la préparation de ce mémoire.

Je tiens à remercier Madame **A. Bendali Braham**, qui a bien voulu nous faire l'honneur en acceptant de présider le jury.

Nous exprimons nos sincères remerciements au membres de jury, Mr. **M. ZEMIR**, Mr. **A. SAHRAOUI**, pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de faire partie du jury.

Nous tenons également à remercier tous les membres de nos familles pour leurs aide tout au long de la réalisation de ce travail.

Enfin, que mes enseignants et amis trouvent ici l'expression de ma parfaite considération et mon profond respect.

Dédicace

Grace à Allah le tout puissant, j'ai achevé la réalisation de ce modeste travail
que je tiens très charleureusement à le dédier à :
Mes parents source d'amour, qui ont sacrifié pour que je puisse arriver jusque-là,
qui m'ont encouragé et soutenu durant mon cursus et pour leurs patience
que Allah les protègent et les gardes pour moi.
Ma sœur Ilham qui était toujours présente pour moi aux besoins.
Toute ma famille source de confort et de bien être;
Mes tantes, mes oncles et leurs enfants.
Mes très chères amies Yousra et Marwa pour tous les moments d'échange et de débat aux personnes
qui m'ont toujours aidé et soutenu.
Mon binôme Imene, avec la quelle j'ai le plaisir de partager ce travail,
je te souhait beaucoup de réussite à l'avenir.

Manel BESSERI

Dédicace

C'est avec de profonds sentiments, de respect et d'amour, que
je dédie ce travail aux êtres les plus chers à mon coeur :
La meilleure ma mère Samira
Qui m'a soutenu durant toute ma vie, qui m'a aidé durant années
d'études, qui m'a appris à aimer le travail et le bon comportement, pour son
amour infini et sa bienveillance jour et nuit.
Je souhaite prouver mon grand remerciement qui ne sera jamais suffisant à
elle que j'espère la rendre fiére par ce travail.
Mon trés cher père Samir
Pour être le bon exemple de père par son soutien, ses encouragements et
aides de mes premiers pas d'études jusqu'a ce jour.
Mes frères Mohammed et Mahfoud,
Ma petite sœur Feriel,
Mon cher fiancé Aziz et toute sa famille,
Mes grandes méres et mes tantes,
Mon binôme Manel qui m'a accompagnée pas à pas tout au long de ce travail,
Mes meilleures amies Youssra et Marwa.
Que Allah nous garde si tendres et aimants les uns envers les autres.

Imene HADJADJ

Table des matières

Résumé **ii**

Abstract **iii**

Introduction **xiii**

1 Notions fondamentales sur la théorie des graphes **1**

1.1 Concepts fondamentaux 1

1.1.1 Graphe et sa présentation 1

1.1.2 Graphe non orienté 2

1.1.3 Multigraphe 2

1.1.4 Graphe simple 2

1.1.5 Voisinage, degré d'un sommet 3

1.1.6 Distance, excentricité et diamètre 3

1.1.7 Chaîne et Cycle 4

1.1.8 Quelques graphes particuliers 4

1.1.9 La couronne 10

1.1.10 Joint de deux graphes 10

1.1.11 Invariants de graphes 11

1.1.12 Concept de minimalité, maximalité, minimum et maximum 13

1.2 La coloration dans les graphes 13

1.2.1 Coloration des sommets 13

1.2.2 Le nombre chromatique 13

1.2.3 Bornes sur le nombre chromatique 14

2 Quelques résultats obtenus sur le nombre de la coloration de packing 15

2.1 Motivation et définition du problème de la coloration de packing 15

2.1.1 i-packing 16

2.1.2 Coloration de packing de certains graphes particuliers 16

2.1.3 Graphes avec petit nombre de la coloration de packing 17

2.1.4 Coloration de packing pour les arbres 18

2.2 Coloration de packing de la couronne d'un graphe 20

2.2.1 La couronne d'une chaîne 20

2.2.2 La couronne d'un cycle 21

2.3 Détermination du nombre de la coloration de packing de graphe splitting . . 21

2.3.1 La coloration de packing de graphe splitting pour les chaines 21

2.3.2 La coloration de packing de graphe splitting pour les cycles 22

2.3.3 La coloration de packing de graphe splitting de l'étoile 22

2.3.4 La coloration de packing de graphe splitting de l'étoile double 22

2.3.5 La coloration de packing de graphe splitting pour les graphes complets 23

2.4 Coloration de packing du graphe subdivisé super fini d'un graphe 23

3 Détermination du nombre de la coloration de packing de quelques types de graphes 25

3.1 Coloration de packing du graphe puissance 25

3.1.1 Coloration de packing du graphe puissance d'un graphe biparti complet 26

3.1.2 Coloration de packing du graphe puissance d'une étoile 26

3.1.3 Coloration de packing du graphe puissance d'un arbre à diamètre 3 . 27

3.1.4 Coloration de packing du graphe puissance d'un arbre à diamètre 4 . 27

3.1.5 Coloration de packing du graphe puissance d'un cycle 28

3.2 Coloration de packing du graphe splitting 29

3.2.1 Coloration de packing du graphe subdivisé super fini de splitting d'une chaîne 29

3.2.2 Coloration de packing du graphe subdivisé super fini de splitting d'une étoile 30

3.2.3 Coloration de packing du graphe subdivisé super fini de splitting d'un arbre 31
3.3 Joint d'un graphe complet et une chaîne 31
3.4 La couronne voisinage de deux graphes 33
3.4.1 Coloration de packing du graphe subdivisé super fini d'une couronne voissinage de deux chaînes 33
3.4.2 Coloration de packing du graphe subdivisé super fini d'une couronne voissinage d'un cycle et une chaîne 43
3.4.3 Coloration de packing de la couronne voisinage d'un graphe complet avec une chaîne 50
3.5 La couronne de deux graphes 51
3.5.1 Coloration de packing de la couronne d'un graphe complet avec une chaîne 51
3.5.2 Coloration de packing d'un graphe subdivisé super fini de la couronne d'un graphe complet et une chaîne 53

Conclusion et perspectives **57**

Liste des Figures

1.1.1 Un multigraphe 2
1.1.2 Un graphe simple G 2
1.1.3 La chaîne P_5 et le cycle C_5 4
1.1.4 Un graphe G avec un sous-graphe et un sous graphe partiel. 5
1.1.5 Un graphe complet K_5 5
1.1.6 Le cycle C_4 et son complémentaire 5
1.1.7 Un graphe G, 3-régulier 6
1.1.8 Un graphe biparti 6
1.1.9 Un graphe biparti complet 7
1.1.10 Un graphe connexe 7
1.1.11 Un sommet d'articulation 8
1.1.12 Un arbre T 8
1.1.13 Une forêt T 8
1.1.14 Une étoile $K_{1,5}$ 9
1.1.15 Une étoile double $S_{3,2}$ 9
1.1.16 La subdivision du graphe G 10
1.1.17 La couronne de C_4 10
1.1.18 Le graphe adjoint de G_1 et G_2 11
1.1.19 Le sous-graphe engendré par l'ensemble $C = \{a, b, c, d\}$ est une clique. . . . 11
1.1.20 Un graphe G 12

2.1.1 Un graphe G et un $T-$ajout du sommet v 18
2.1.2 Les plus petits arbres avec $\chi_p\,(T) = 4$ 19

2.2.1 La couronne de P_n 20
2.2.2 Coloration de packing de $Cr(P_{10})$, $Cr(P_2)$, $Cr(P_4)$ 20
2.2.3 La couronne d'un C_n 21
2.3.1 Le graphe splitting de P_7 21
2.3.2 Splitting d'un graphe C_5 22
2.3.3 Splitting d'une étoile $K_{1,5}$ 22
2.3.4 Splliting d'une étoile double $S_{3,3}$ 23
2.3.5 Splliting d'un graphe complet K_4 23
2.4.1 Un graphe complet K_5, $\chi_p(FSSD_m(K_5)) = 6$ 24

3.1.1 Un graphe puissance G^2 25
3.1.2 Une coloration de packing de $K^2_{4,3}$ 26
3.1.3 Une coloration de packing de $K^2_{1,5}$ 26
3.1.4 Une coloration de packing de $S^2_{2,2}$ 27
3.1.5 Une coloration de packing de T^2 28
3.1.6 Une coloration de packing de C^2_7 29
3.2.1 Une coloration de packing de $FSSD_1(S'(P_5))$ 30
3.2.2 Une coloration de packing de $FSSD_1(S'(K_{1,4}))$ 31
3.2.3 Une coloration de packing de $FSSD_1(S'(T))$ 31
3.3.1 Une coloration de packing de $(P_5 + K_4)$ 33
3.4.1 Une coloration de packing de $FSSD_1(P_2 \bigstar P_3)$ 39
3.4.2 Une coloration de packing de $FSSD_1(P_3 \bigstar P_2)$ 40
3.4.3 Une coloration de packing de $FSSD_1(P_2 \bigstar P_4)$ 41
3.4.4 Une coloration de packing de $FSSD_1(P_3 \bigstar P_4)$ 42
3.4.5 Une coloration de packing d'un graphe $FSSD_1(P_6 \bigstar P_4)$ 43
3.4.6 Une coloration de packing de $FSSD_m(C_4 \bigstar P_2)$ 46
3.4.7 Une coloration de packing de $FSSD_2(C_3 \bigstar P_2)$ 46
3.4.8 Une coloration de packing de $FSSD_2(C_8 \bigstar P_2)$ 47
3.4.9 Une coloration de packing de $FSSD_1(C_6 \bigstar P_2)$ 48
3.4.10 Une coloration de packing de $FSSD_1(C_7 \bigstar P_2)$ 50
3.4.11 Une coloration de packing de $K_4 \bigstar P_2$ 51

3.5.1 Une coloration de packing de $K_6 \odot P_2$ 53
3.5.2 Une coloration de packing d'un graphe $FSSD_m(K_4 \odot P_3)$ 56

Introduction

La théorie des graphes constitue une branche à part entière des mathématiques. Elle représente l'un des instruments les plus courants et les plus efficaces pour résoudre les problèmes discrets de la Recherche Opérationnelle.

Parmi les problèmes les plus anciens de la Recherche Opérationnelle, ayant suscité l'intérêt de beaucoup de chercheurs, on peut citer le problème de coloration des graphes planaires. Il s'agit de répondre à la question: "Suffit-il de quatre couleur pour dessiner n'importe quelle carte géographique ? ". Dans le language des graphes, ce problème se formalise: " Peut-on colorer un graphe planaire en utilisant quatre couleurs de telle sorte que toutes les arêtes aient des extrémités de couleurs différentes ? ". Ce problème a été posé sous forme de conjecture par **Francis Guthrie** en 1852, est devenu célèbre sous le nom de problème des quatres couleurs et n'a pu trouver une réponse positive en 1976, que grâce à l'ordinateur par **Appel** et **Haken**.

Actuellement, on trouve dans la littérature plusieurs types de colorations: Elles sont définies par la coloration des éléments du graphe (sommets, arêtes, faces,...) avec une ou plusieurs contraintes supplémentaires.

En 2002, **Sloper** [13] a introduit la coloration de packing. Il sagit de trouver le plus petit nombre de couleurs, noté $\chi_p(G)$, à affecter aux sommets d'un graphe G de telle sorte que si deux sommets u et v ont la même couleur $\pi(u) = \pi(v)$, alors $d_G(u, v) > \pi(u)$ où π est une fonction de V dans l'ensemble $\{1, 2, ...\}$.

Dans ce présent travail, nous nous intéressons principalement à l'étude de cet invariant, et l'étudions sur quelques types de graphes.

Après une introduction générale, le mémoire s'articule autour de trois chapitres:

Le premier chapitre portera des généralités sur la théorié des graphes, nous introduisons les définitions fondamentales, et les notations de base dans le domaine. A la fin de ce chapitre, nous précisons la définition de la coloration propre dans les graphes et nous présentons quelques bornes sur cet invariant.

Dans le deuxieme chapitre, on étudie la coloration de packing sur les graphes, les définitions, les notations ainsi que les résultats obtenus par les chercheurs dans [1,3,13,14,16,18,19] sont énoncés.

Dans le dernier chapitre, nous présentons nos résultats sur la détermination du nombre chromatique de packing dans quelques types de graphes.

Nous donnons des démonstrations à tous les résultats obtenus dans ce mémoire. Des figures illustratives pour chaque résultat en utilisant le logiciel Geogebra sont mêmes insérées.

Le mémoire s'achève par une conclusion générale avec des perspectives sur l'ensemble du travail réalisé.

Chapitre 1

Notions fondamentales sur la théorie des graphes

Dans ce chapitre, nous donnons quelques concepts de base de la théorie des graphes, ainsi que les définitions nécessaires utilisées tout au long de ce mémoire, ensuite nous rappelons quelques paramètres de coloration que nous avons étudie.

1.1 Concepts fondamentaux

1.1.1 Graphe et sa présentation

Définition 1.1.1 *Un graphe $G = (V, E)$ est défini par deux ensembles finis non vide, un ensemble de sommets V et un ensemble d'arêtes E. Le cardinal de V est appelé l'ordre de G; noté par $n\ (G)$ et le cardinal de E est appelé la taille de G; noté par $m\ (G)$. Une arête $e \in E$ est un couple de sommets (u, v) noté par $e = uv$, ou u et v sont les extrémités de e. On dira dans ce cas que u et v sont adjacents et que e est incidente à u et v. Les graphes tiennent leur nom du fait qu'on peut les représenter par des dessins. A chaque sommet de G, on fait correspondre un point distinct du plan et on relie par une courbe simple les points correspondant aux extrémités de chaque arête. Une boucle est une arête dont les deux extrémités sont confondues.*

1.1.2 Graphe non orienté

Définition 1.1.2 *Un graphe non orienté n'est qu'un graphe orienté symétrique, si un arc relie le sommet u au sommet v, un autre arc relie le sommet v au sommet u. On ne trace alors qu'un trait entre u et v que l'on appelle une « arête ».*

1.1.3 Multigraphe

Définition 1.1.3 *Un multigraphe $G = (V, E)$ est un graphe dans lequel il peut exister plusieurs arêtes entre une paire de sommets.*

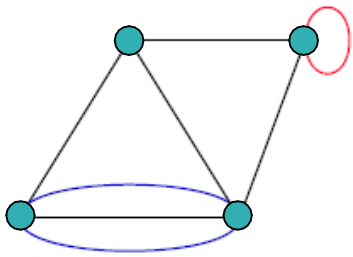


Figure 1.1.1 : Un multigraphe

1.1.4 Graphe simple

Définition 1.1.4 *Un graphe est dit simple s'il est sans boucles et sans arêtes multiples (deux arêtes distinctes joignantes la même paire de sommets).*

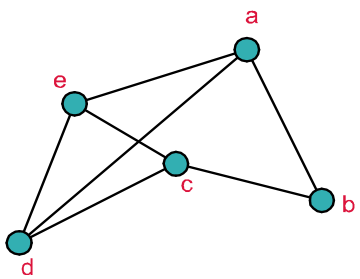


Figure 1.1.2 : Un graphe simple G

1.1.5 Voisinage, degré d'un sommet

Définition 1.1.5 *Soit G (V, E) un graphe pour un sommet v de G, le voisinage ouvert de v est*

$$N_G(v) = \{u \in V_G(v) : uv \in E(G)\}.$$

Le voisinage fermé de v est défini par

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}.$$

Pour un sous-ensemble $S \subseteq V(G)$, le voisinage ouvert de S est

$$N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v).$$

le voisinage fermé de S est

$$N_G[S] = \cup_{v \in S} N_G[S].$$

Définition 1.1.6 *Le degré d'un sommet est la taille de son voisinage. Soit $v \in V$ (G), le degré de v est noté par*

$$d_G(v) = |N_G(v)|.$$

Le degré d'un graphe est le degré maximum de tous ses sommets, noté par

$$\Delta(G) = \max\{d_G(v) : v \in V(G)\}.$$

Le degré minimum d'un graphe est le degré minimum de tous ses sommets, noté par

$$\delta(G) = \min\{d_G(v) : v \in V(G)\}.$$

Par exemple pour le graphe G de la Figure 1.1.2, le voisinage ouvert du sommet a est $\{b, d, e\}$ et son voisinage fermé est $[a, b, d, e]$. Le graphe G n'a pas de sommets isolés. Le degré minimum du G est donc $\delta(G) = 2$ et le degré maximum est $\Delta(G) = 3$.

1.1.6 Distance, excentricité et diamètre

Définition 1.1.7 *Soit u et v deux sommets d'un graphe G.*

On appelle distance entre u et v, notée $d\ (u, v)$, la longueur de la plus courte chaîne joignante u et v.

L'excentricité d'un sommet v dans G est: $exc(v) = \max\{d(v, w) : w \in V\}$. Un sommet de G ayant une excentricité minimum est appelée un centre.

Le diamètre de G, noté $diam\ (G)$, est égal $\max\{exc(v) : v \in V\}$.

Par exemple pour le graphe $G(V,\ E)$ de la Figure 1.1.2, $d(a, c) = 2$, $exc(a) = 2$ et $diam(G) = 2$.

1.1.7 Chaîne et Cycle

Définition 1.1.8 *Une chaîne joignante deux sommets x et y dans G est une suite de sommets et d'arêtes telle que la première arête de la suite est incidente à x, la dernière arête de la suite est incidente à y et chaque intermédiaire de la suite est adjacente à la précédente par une de ses extrémités.*

On appelle cycle C_n dans un graphe G, une chaîne qui se referme.

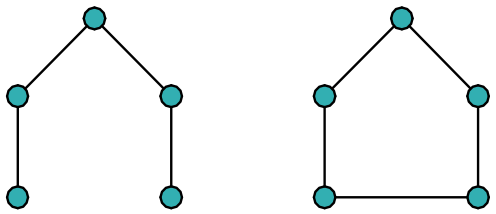


Figure 1.1.3 : La chaîne P_5 et le cycle C_5

1.1.8 Quelques graphes particuliers

Sous-graphes et graphes partiels

Définition 1.1.9 *Soit $G = (V, E)$ un graphe avec V sommets et E arêtes.*

- *Un graphe $H = (V(H), E(H))$ est un sous-graphe de G si $V(H) \subseteq V(G), E(H) \subseteq E(G)$ et toutes les arêtes de $E(H)$ ont leurs extrémités dans $V(H)$. On note $H \subseteq G$.*
- *Un graphe $G' = (V(G'), E(G'))$ est un sous-graphe partiel de G si $V(G') = V(G)$ et $E(G') \subseteq E(G)$.*

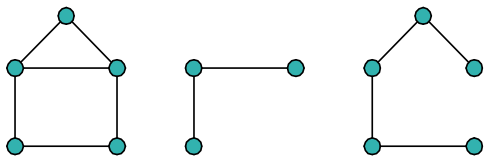


Figure 1.1.4 : Un graphe G avec un sous-graphe et un sous graphe partiel.

Graphe complet

Définition 1.1.10 *Un graphe complet, est un graphe dont toutes les paires de sommets sont adjacentes. Le graphe complet d'ordre n est noté K_n et chaque sommet est de degré $n-1$. La Figure 1.1.5 illusre un graphe complet K_5.*

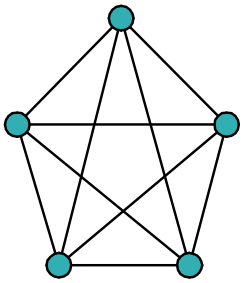


Figure 1.1.5 : Un graphe complet K_5

Graphe complémentaire

Définition 1.1.11 *Le graphe complémentaire d'un graphe simple, noté $\overline{G} = (V, \overline{E})$, défini par $V\ (\overline{G}) = V\ (G)$ et $E\left(\overline{G}\right) = \{u\ v : u \in V\,(G)\ ,\ v \in V\ (G)\ \text{ et } u\ v\ \notin E(G)\}$. La Figure 1.1.6 représente un graphe C_4 et son complémentaire.*

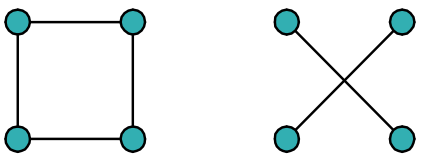


Figure 1.1.6 : Le cycle C_4 et son complémentaire

Un graphe k-régulier

Définition 1.1.12 *Un graphe G est dit $k-$régulier si tous les sommets de G sont de degré k.*

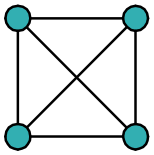


Figure 1.1.7 : Un graphe G, 3-régulier

Un graphe discret (nul)

Définition 1.1.13 *Un graphe est dit discret si tous les sommets sont non adjacents. Un graphe discret G est un graphe $(0)-$ régulier.*

Graphe biparti

Définition 1.1.14 *Un graphe $G = (V, U)$ est dit biparti si V peut se partitionner en deux sous ensembles V_1 et V_2, de sorte que tous les sommets d'un même ensemble sont non adjacents. La Figure 1.1.8 illustre un graphe biparti.*

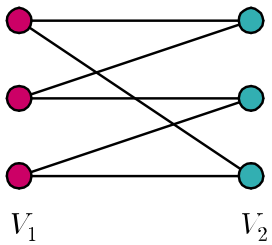


Figure 1.1.8 : Un graphe biparti

Un graphe biparti complet

Définition 1.1.15 *Un graphe biparti est dit complet si chaque sommet de V_1 est adjacent à tous les sommets de V_2. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$, alors le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$, $p, q \geq 1$. Plus généralement, un graphe $G = (V; E)$ est dit $k-$parti $(k \geq 2)$, si V peut être*

partitionné en k stables $\{V_1, V_2, ...V_k\}$. *Il est dit multiparti-complet si pour tout* $i \neq j$, *tout sommet de* V_i *est adjacent à tout sommet de* V_j. *La Figure 1.1.9 illustre un graphe biparti.*

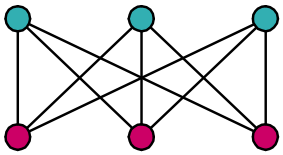


Figure 1.1.9 : Un graphe biparti complet

Graphe connexe

Définition 1.1.16 *Un graphe* $G = (V, E)$ *est un graphe connexe s'il existe une chaîne entre toutes les paires de sommets du graphe. Une composante connexe d'un graphe* G *est un sous graphe.*

Une arête e est appelée un isthme (arête d'articulation du graphe G*) si le graphe* $G - e$ *possède plus de composantes connexes que* G, *(i.e, si* G *est connexe alors* $G - e$ *n'est pas connexe). (Voir la Figure 1.1.10).*

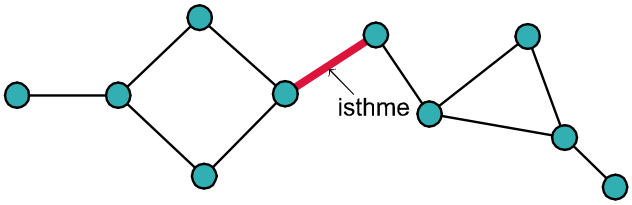


Figure 1.1.10 : Un graphe connexe

Définition 1.1.17 *Un sommet* v *du graphe* G *est appelé un sommet d'articulation du graphe* G *si le graphe* $(G - v)$ *a plus de composantes connexes que* G, *(i.e, si* G *est connexe alors* $(G - v)$ *n'est pas connexe). (Voir la Figure 1.1.11).*

Graphe $h-$connexe

Définition 1.1.18 *Pour un graphe connexe* G, *la connectivité* $k(G)$ *est le nombre minimum de sommets de* G *dont la suppression déconnecte le graphe* G *ou le réduit à un sommet isolé.* G *est dit* $h-$*connexe si sa connectivité* $k(G)$ *est supérieure ou égale à* h.

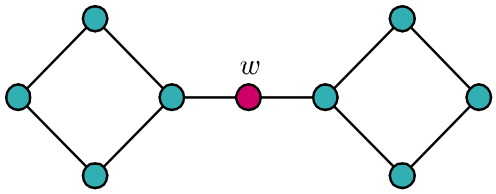


Figure 1.1.11 : Un sommet d'articulation

Arbre

Définition 1.1.19 *On appelle arbre, et on note par T, un graphe connexe et sans cycle. Il comporte exactement $(n-1)$ arêtes. On appelle feuille d'un arbre, un sommet de degré 1, dit aussi sommet pendant. Dans un arbre T, tout sommet adjacent à un sommet pendant est appelé sommet support. La hauteur $h(T)$ de l'arbre T est la longueur du plus long chemin de la racine à une feuille. La Figure 1.1.12 représente un arbre.*

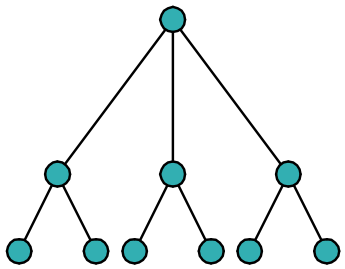


Figure 1.1.12 : Un arbre T

Forêt

Définition 1.1.20 *Une forêt est un graphe sans cycle, chacun de ses composants connexes étant un arbre. La Figure 1.1.13 représente une forêt.*

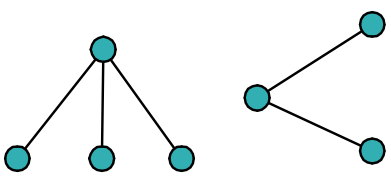


Figure 1.1.13 : Une forêt T

Étoile

Définition 1.1.21 *On appelle étoile et on note par $K_{1,n}$, l'arbre à $n+1$ sommets ayant n feuilles. La Figure 1.114 illustre une étoile $K_{1,5}$.*

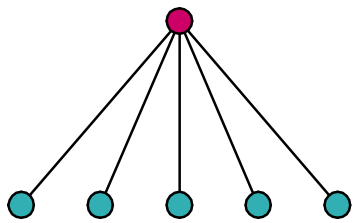


Figure 1.1.14 : Une étoile $K_{1,5}$

L'étoile double

Définition 1.1.22 *L'étoile double, notée $S_{p,q}$, est le graphe obtenu en reliant par une arête le sommet non pendant d'une étoile $K_{1,p}$ au sommet non pendant d' une étoile $K_{1,q}$. La Figure 1.115 illustre une étoile double $S_{3,2}$.*

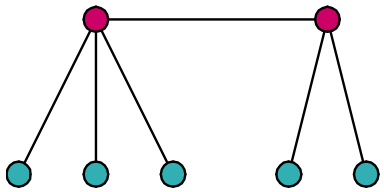


Figure 1.1.15 : Une étoile double $S_{3,2}$

La subdivision

Définition 1.1.23 *Le graphe G subdivisé $S(G)$ d'un graphe G est le graphe obtenu en subdivisant chaque arête uv de G par un sommet x. (Voir la Figure 1.1.16).*

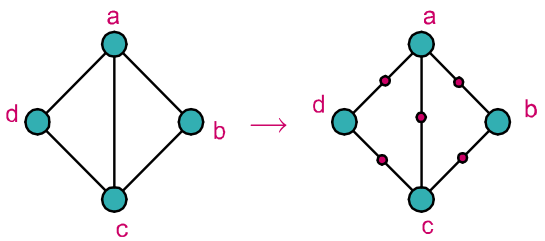


Figure 1.1.16 : La subdivision du graphe G

1.1.9 La couronne

Définition 1.1.24 *La couronne de $G = (V, E)$ notée $Cr\ (G)$, c'est le graphe obtenu en attachant à chaque sommet de G un nouveau sommet. Donc il est évident que l'ordre de $Cr\ (G)$ est égal à $2|V|$. (Voir la Figure 1.1.17).*

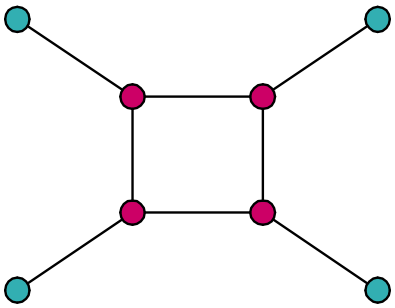


Figure 1.1.17 : La couronne de C_4

1.1.10 Joint de deux graphes

Définition 1.1.25 *Soient G_1 et G_2 deux graphes. Le graphe $G_1 + G_2$ défini par l'ensemble de sommets $V(G_1) \cup V(G_2)$ et l'ensemble d'arêtes $E(G_1) \cup E(G_2)$ et l'ensemble de toutes les arêtes possibles joignant les sommets de $V(G_1)$ à $V(G_2)$, est appelé le graphe adjoint de G_1et G_2. (Voir la Figure 1.1.18).*

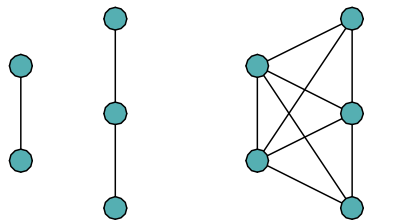


Figure 1.1.18 : Le graphe adjoint de G_1 et G_2

1.1.11 Invariants de graphes

Clique

Définition 1.1.26 *Une clique dans un graphe G est un sous-ensemble de sommets deux a deux adjacents, ou est un sous-graphe complet. (Voir la Figure 1.1.19).*

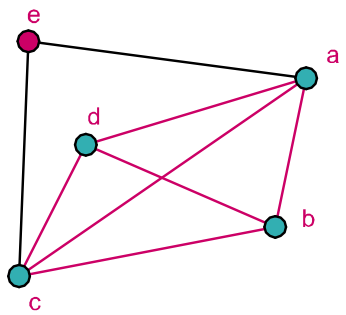


Figure 1.1.19 : Le sous-graphe engendré par l'ensemble $C = \{a, b, c, d\}$ est une clique.

Stable

Définition 1.1.27 *Etant donné un graphe simple G, on appelle stable de G un ensemble de sommets de G deux a deux non adjacents.*

Un stable maximum de G est un stable de cardinalité maximale est appelée nombre de stabilité, et notée $\alpha(G)$.

Transversal

Définition 1.1.28 *Un transversal d'un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble T de sommets de V qui couvre toutes les arêtes de G. Notons qu'un transversal existe pour tout graphe et*

si T est un transversal alors $V-T$ est un stable. Un transversal minimum est un transversal qui a le plus petit nombre possible de sommets. La cardinalité d'un transversal minimum est appelée nombre transversal, et notée $\tau(G)$.

Couplage

Définition 1.1.29 *Etant donné un graphe $G(V,E)$, on appelle un couplage M dans G un sous-ensemble d'arêtes de E deux a deux non adjacentes. Un couplage maximum est un couplage de taille maximale. On désigne par $\alpha_0(G)$ la taille d'un couplage maximum dans G.*

Un sommet x de G est dit saturé par le couplage M, s'il existe une arête de M incidente à x. Un couplage qui sature tout les sommets de G est appelé un couplage parfait dans G, sinon, x est dit insaturé par M .

Recouvrement

Définition 1.1.30 *Etant donné un graphe simple G (V,E) sans sommet isolé, on appelle recouvrement de G un ensemble R d'arêtes de E qui couvre tout les sommets de G.*

Un recouvrement minimum est un recouvrement de cardinalité minimum. On désigne par $\upsilon(G)$ la taille minimum d'un recouvrement de G.

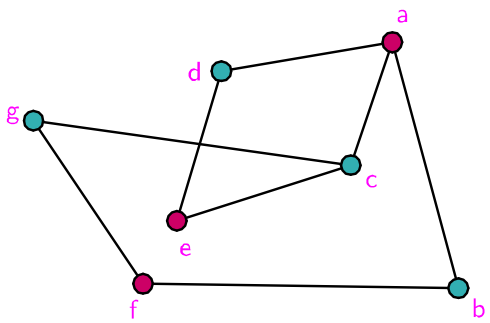


Figure 1.1.20 : Un graphe G

Pour le graphe G dans la Figure 1.1.20, l'ensemble des sommets $\{a,e,f\}$ représente un stable S de cardinalité maximum, l'ensemble des sommets $\{b,c,d,g\}$ représente un transversal T de cardinalité minimum. L'ensemble des arêtes $\{da, ec, fb, gf\}$ représente un recouvrement de cardinalité minimum $\upsilon(G)$. D'oú $\alpha(G)=3$, $\tau(G)=4$, $\upsilon(G)=4$.

1.1.12 Concept de minimalité, maximalité, minimum et maximum

Définition 1.1.31 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et ρ une propriété. On dit qu' un sous ensemble A de V est minimal (respectivement, maximal) par rapport à une propriété ρ si aucun sous ensemble $B \subset A$ (resp, $A \subset B$) tel que $G[B]$ vérifie la propriété ρ.*

On dit qu'un sous-ensemble A de V est minimum ou de taille minimale (respectivement, maximum ou de taille maximale) par rapport à une propriété ρ, s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq V$ tel que $G[B]$ vérifie la propriété ρ et $|B| < |A|$ (resp, $|B| > |A|$).

1.2 La coloration dans les graphes

1.2.1 Coloration des sommets

Définition 1.2.1 *On appelle coloration des sommets d'un graphe, toute attribution d'une couleur a chaque sommet (est une fonction $c : V \to \{1, 2, 3, .., k\}$, $k \in \mathbb{N}$.*

Une coloration est propre si chaque deux sommets voisins portent des couleurs différentes ($c(v) \neq c(w), \forall v, w \in V$ adjacents).

G est $k-$colorable si on peut colorer ses sommets avec k couleurs distinctes, sans que deux sommets voisins aient la même couleur.

Etant donné un graphe $G = (V, E)$. Une coloration triviale de G consiste à attribuer à chacun de ses sommets une couleur différente. Ainsi, tout graphe à n sommets admet une $n-$coloration. Donc il est naturel de se demander quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer G. D'où la définition du nombre chromatique de G.

1.2.2 Le nombre chromatique

Définition 1.2.2 *Le nombre chromatique d'un graphe G, noté $\chi(G)$ est le plus petit nombre de couleurs nécessaires a une coloration propre des sommets de G.*

On le définit comme étant le plus petit entier k tel que G admet une $k-$coloration, il est dit aussi que G est $\chi(G)-$chromatique

Définition 1.2.3 *Une classe de couleur i est un ensemble stable de sommets de V colorés avec la même couleur i.*

Exemple 1.2.1 *$G = P_3$ est $2-$ colorable, $\chi(G) = 2$.*

Remarque 1.2.1 *Soit G un graphe d'ordre n. Il est clair que $1 \leq \chi(G) \leq n$.*

- *$\chi(G) = 1$ si et seulement si G est un graphe discret.*
- *$\chi(G) = n$ si et seulement si G est un graphe complet.*
- *Pour un cycle C_n,*

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2; \text{ si } n \text{ est pair,} \\ 3; \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

1.2.3 Bornes sur le nombre chromatique

Proposition 1.2.1 *[4]Si H est un sous-graphe de G,*

$$\chi(H) \leq \chi(G).$$

Proposition 1.2.2 *[10] Pour tout graphe G,*

$$\chi(G) \geq \omega(G).$$

où $\omega(G)$ est la taille d'une clique maximum de G.

Proposition 1.2.3 *[12] Pour tout graphe G d'ordre n,*

$$\left\lceil \frac{n}{\alpha}(G) \right\rceil \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

oú $\alpha(G)$ est le nombre de stabilité de G, et $\Delta(G)$ est le degré maximum de G.

Proposition 1.2.4 *[2] Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n,*

$$\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1.$$

Théorème 1.2.1 *[11] Soit G un graphe d'ordre n et $\overline{G}$ son complémentaire,*

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1.$$

Chapitre 2

Quelques résultats obtenus sur le nombre de la coloration de packing

Dans ce chapitre, nous exposons la coloration de packing de certains graphes et nous donnons les valeurs exactes du nombre chromatique de la coloration de packing des graphes simples, à savoir: les chaînes, les cycles, les arbres, les graphes puissances, la couronne d'un graphe et graphe splitting.

2.1 Motivation et définition du problème de la coloration de packing

Le problème de la coloration de packing a été posé suite à l'établissement de nombreux régles et réglements par la Commission des communications des Etats-Unis concernant l'attribution des fréquences de radio-diffusion à des stations de radio. En particulier, deux stations de radio qui sont affectées de la même fréquence de diffusion doivent être localisées suffisamment loin l'une de l'autre pour que la diffusion de l'une n'altére pas la réception de l'autre. La distance géographique entre deux stations qui sont affectées de la même fréquence est donc directement liée à la puissance de leurs signaux de radio-diffusion.

2.1.1 i-packing

Définition 2.1.1 *Un sous ensemble de sommets V_i d'un graphe $G = (V, E)$ est dit $i-$packing si et seulement si la distance entre deux sommets quelconques de V_i est supérieure à i.*

Définition 2.1.2 *Soit $G = (V, E)$ un graphe et $k \in \mathbb{N}^\star$. La fonction $f : V \to \{1, ..., k\}$ est appelée coloration de packing d'ordre k si l'égalité $f\ (u) = f\ (v)$ implique $d\ (u, v) > f\ (u)$.*

L'ordre minimum d'une coloration de packing de G est appelé le nombre chromatique de packing, et il est noté par $\chi_p(G)$. La coloration de packing est donc une partition $P_k = \{V_1, V_2, ..., V_k\}$ de V en k $i-$packing. Notons que toute coloration de packing est une coloration propre et donc $\chi(G) \leq \chi_p(G)$. De plus, pour tout sous graphe H d'un graphe G, on a $\chi_p(H) \leq \chi_p(G)$.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que les graphes sont simples.

2.1.2 Coloration de packing de certains graphes particuliers

Tout graphe G d'ordre n admet une coloration de packing d'ordre n, il est possible d'affecter n entiers distincts, entre 1 et n, à chaque sommet de V. Ainsi, une borne supérieure naturelle serait l'ordre du graphe qui n'est pas forcément la meilleure.

Proposition 2.1.1 *[4] Pour $2 \leq n \leq 3$, $\chi_p(P_n) = 2$, et pour $n \geq 4$, $\chi_p(P_n) = 3$.*

l'affectation des couleurs $1, 2, 1, 3, ...$ aux sommets $u_1, u_2, ..., u_n$ de P_n représente une coloration de packing minimum.

Proposition 2.1.2 *[4] Pour les cycles C_n,*

$$\chi_p(C_n) = \begin{cases} 3; & \textit{si } n \equiv 0\,[4] \textit{ ou } n = 3, \\ 4; & \textit{sinon.} \end{cases}$$

La coloration de packing optimale est donnée par l'affectation aux sommets $v_1, ..., v_n$ de C_n les séquences des couleurs:

$$\begin{aligned} 1,2,1,3,1,2,1,3,...,1,2,1,3 \quad si\ n &= 4r, \\ 1,2,1,3,1,2,1,3,...,1,2,1,3,4 \quad si\ n &= 4r+1, \\ 1,2,1,3,1,2,1,3,...,1,2,1,3,1,4 \quad si\ n &= 4r+2, \\ 1,2,1,3,1,2,1,3,...,1,2,1,3,1,2,4 \quad si\ n &= 4r+3. \end{aligned}$$

Proposition 2.1.3 *[4] Soit G un graphe complet. Alors $\chi_p(K_n) = n$.*

Proposition 2.1.4 *[4] Pour tout graphe G, $\chi_p(G) \leq \tau(G) + 1$, avec égalité si G a le diamètre deux.*

Proposition 2.1.5 *[4] Si G est un graphe biparti de diamètre 3. Alors*

$$\tau(G) \leq \chi_p(G) \leq \tau(G) + 1.$$

Proposition 2.1.6 *[4] Pour tout graphe G,*

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \chi_p(G).$$

Proposition 2.1.7 *[4] Soit G un graphe. si $\chi(G) = \chi_p(G)$, alors $\omega(G) \geq \chi(G) - 2$.*

Proposition 2.1.8 *[4] Pour tout graphe connexe G, $\chi_p(G) = 2$ si et seulement si G est une étoile.*

Lemme 2.1.1 *[4] Pour tout sous graphe H d'un graphe G,*

$$\chi_p(H) \leq \chi_p(G).$$

2.1.3 Graphes avec petit nombre de la coloration de packing

En utilisant le fait qu'un graphe G tel que $\chi_p(G) = 2$ ne contient pas P_4 comme sous-graphe induit et vérifie $diam(G) \leq 2$, alors d'aprés la Proposition **2.1.4**, on a forcément $\tau(G) = 1$ c.à.d que G est une étoile. D'où la caractérisation des graphes de nombre de packing chromatique égal à 2.

Proposition 2.1.9 *[17] Pour un graphe connexe G, $\chi_p(G) = 2$ si et seulement si G est une étoile.*

Proposition 2.1.10 *[17] Soit G un graphe $2-$connexe. Alors $\chi_p(G) = 3$ si et seulement si $G = S(H)$ où H est un multi-graphe biparti ou G est le joint de K_2 et d'un stable. Pour un sommet v, on définit un $T-$ajout de v comme étant l'opération qui consiste à ajouter un sommet w_v, un stable X_v, l'arête vw_v et quelques arêtes entre $\{v, w_v\}$ et X_v. Voir la Figure* 2.1.1.

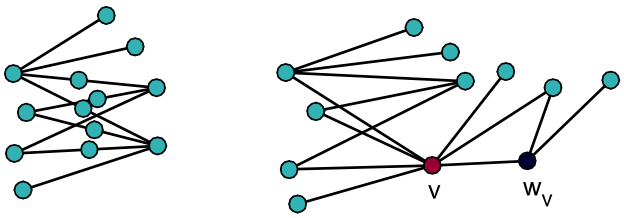


Figure 2.1.1 : Un graphe G et un $T-$ajout du sommet v

Proposition 2.1.11 *[17] Soit G un graphe. $\chi_p(G) = 3$ si et seulement si G peut être formé en prenant un certain multigraphe biparti H avec bipartition (V_2, V_3), en subdivisant chaque arête exactement une fois, en ajoutant des feuilles à certains sommets dans $V_2 \cup V_3$, puis en effectuant un seul T-ajout à certains sommets de V_3.*

2.1.4 Coloration de packing pour les arbres

Nous nous intéressons aux arbres avec un nombre de coloration de paking très grand. Pour cela, il est nécessaire d'examiner les petits cas. Un arbre de diamètre 2 (étoile) a un nombre chromatique de packing égal à 2. Un arbre de diamètre 3 a un nombre chromatique de packing 3. Le cas d'un arbre de diamètre 4 est plus compliqué, mais **Goddard et al** [4] ont pu donner une formule explicite basée sur le sommet central et leurs voisins de degré 1, 2 et 3 et de degré supérieur ou égal à 4. Pour cela on définit un sommet petit s'il est de degré inférieur ou égal à 3 et un sommet grand s'il est de degré supérieur ou égal à 4.

Soit T un arbre de diamètre 4 avec un sommet central v. Pour $i = 1, 2, 3$, soit n_i le nombre de voisins de v de degré i et soit L le nombre de voisins de v de degré supérieur ou égal à 4, alors nous avons la proposition suivante:

Proposition 2.1.12 *[4] Soit T un arbre de diamètre 4. Si $L = 0$, alors*

$$\chi_p(T) = \begin{cases} 4; & si \quad n_3 \geq 2 \quad et \quad n_1 + n_2 + n_3 \geq 3, \\ 3; & sinon. \end{cases}$$

et si $L > 0$, alors

$$\chi_p(T) = \begin{cases} L+3; & si \quad n_3 \geq 1 \quad et \quad n_1 + n_2 + n_3 \geq 2, \\ L+1; & si \quad n_1 = n_2 = n_3 = 0, \\ L+2; & sinon. \end{cases}$$

Proposition 2.1.13 *[4] L'ordre minimum d'un arbre avec $\chi_p(T) = 2$ est 2. Pour $\chi_p(T) = 3$ c'est 4 et pour $\chi_p(T) = 4$ c'est 8. En outre, P_4 est l'arbre unique de 4 sommets qui ont besoin de 3 couleurs. Les deux arbres de 8 sommets qui ont besoin de 4 couleurs sont:*

(*i*) *L'arbre de diamètre 4 avec $n_3 = 2$, $n_1 = 1$ et $L = n_2 = 0$, appelé A_8.*

(*ii*) *L'arbre de diamètre 5 où les deux sommets centraux ont le degré 3 et pour chaque sommet central 3 sommets voisins de degrés 1, 2 et 3 respectivement, appelé B_8. Voir la Figure 2.1.2.*

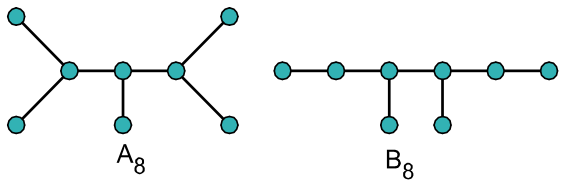


Figure 2.1.2 : Les plus petits arbres avec $\chi_p\ (T) = 4$

Proposition 2.1.14 *[4] Soit T un arbre différent de P_4. Supposons T contient une chaîne $\{t\ u\ v\ w\}$ où t est de degré 1. u et v ont le degré 2. Alors: $\chi_p(T) = \chi_p(T - t)$.*

Théorème 2.1.1 *[4] Pour tout arbre T d'ordre n,*

$$\chi_p(T) \leq \frac{n+7}{4}$$

excepter quand $n = 4$ ou 8, et cette borne est atteinte.

2.2 Coloration de packing de la couronne d'un graphe

Dans cette section, nous exposons des valeurs exactes du nombre chromatique de packing des couronnes des chaînes et des cycles, déterminées par [6]. Des valeurs exactes, et des bornes sur les différentes classes de chenilles sont énoncées. On définit la couronne d'un graphe G, notée $Cr(G)$, est le graphe obtenu à partir d'une copie de G dans laquelle on attache un sommet pendant à chaque sommet de G.

2.2.1 La couronne d'une chaîne

Soit $P_n = \{x_1, ..., x_n\}$ une chaîne de longueur n et $Cr(P_n)$ la couronne de P_n. Notons par $y_1, ..., y_n$ les sommets pendants adjacents aux sommets $x_1, ..., x_n$ respectivement.

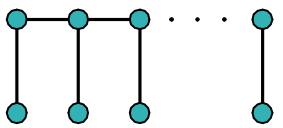


Figure 2.2.1 : La couronne de P_n

Proposition 2.2.1 *[6] Pour tout entier n, $n \geq 2$,*

(1) *Pour $n = 2$, $\chi_p(Cr(P_n)) = 3$.*

(2) *Pour $n \in \{3, ..., 9\}$, $\chi_p(Cr(P_n)) = 4$.*

(3) *Pour $n \geq 10$, $\chi_p(Cr(P_n)) = 5$.*

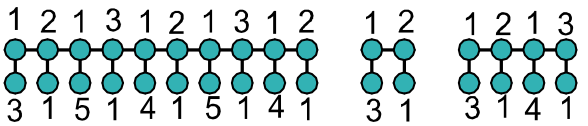


Figure 2.2.2 : Coloration de packing de $Cr(P_{10})$, $Cr(P_2)$, $Cr(P_4)$

2.2.2 La couronne d'un cycle

Soit $Cr(C_n)$ la couronne d'un cycle $C_n = \{x_1, ..., x_n\}$ de longueur n. Notons par $y_1, ..., y_n$ les sommets pendants adjacents aux sommets de C_n.

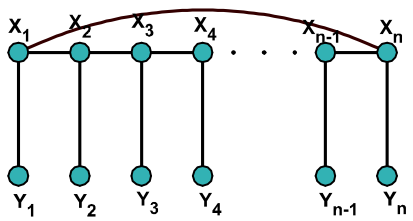


Figure 2.2.3 : La couronne d'un C_n

Pour la couronne du cycle, il y'a un résultat identique à celui de la couronne d'une chaîne. Pour les autres valeurs de n, le résultat est donné par la proposition suivante:

Proposition 2.2.2 *[6] Pour tout entier n,*

$$\chi_p\left(Cr\left(C_n\right)\right) = \begin{cases} 4; & si \quad n \in \{3,4\}, \\ 5; & sinon \end{cases}$$

2.3 Détermination du nombre de la coloration de packing de graphe splitting

Définition 2.3.1 *[16] Pour un graphe G, le graphe splitting d'un graphe G, noté par $S'(G)$, est obtenu en ajoutant un nouveau sommet v' correspondant à chaque sommet v de G, tel que $N(v) = N(v')$.*

2.3.1 La coloration de packing de graphe splitting pour les chaines

Proposition 2.3.1 *[8] Pour tout n, $\chi_p(S'(P_n)) \leq 7$.*

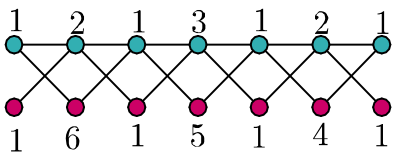


Figure 2.3.1 : Le graphe splitting de P_7

2.3.2 La coloration de packing de graphe splitting pour les cycles

Proposition 2.3.2 *[8] Pour $n \leq 19$, $\chi_p(S'(C_n)) \leq 8$, et pour $n \geq 20$, Si $n \equiv 0[4]$, alors $\chi_p(S'(C_n)) = 7$.*

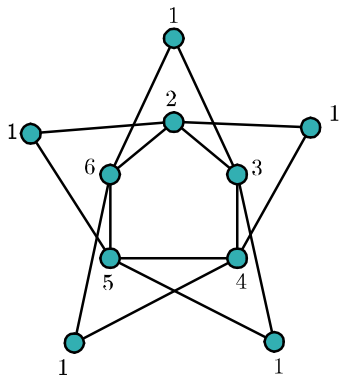


Figure 2.3.2 : Splitting d'un graphe C_5

2.3.3 La coloration de packing de graphe splitting de l'étoile

Proposition 2.3.3 *[19] Soit $K_{1,n}$, $n \geq 2$ une étoile avec n sommets. Alors $\chi_p(S'(K_{1,n})) = 3$.*

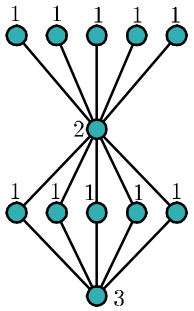


Figure 2.3.3 : Splitting d'une étoile $K_{1,5}$

2.3.4 La coloration de packing de graphe splitting de l'étoile double

Théorème 2.3.1 *[8] Pour le graphe $S'(S_{p,q})$, $\chi_p(S'(S_{p,q})) = 5$.*

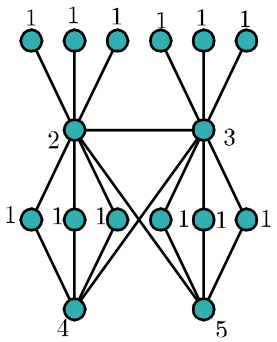


Figure 2.3.4 : Splliting d'une étoile double $S_{3,3}$

2.3.5 La coloration de packing de graphe splitting pour les graphes complets

Proposition 2.3.4 *[9] Pour K_n, $\chi_p(S'(K_n)) = n + 1$.*

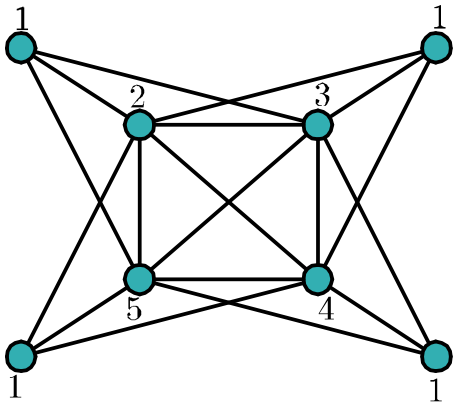


Figure 2.3.5 : Splliting d'un graphe complet K_4

2.4 Coloration de packing du graphe subdivisé super fini d'un graphe

Définition 2.4.1 *Le graphe obtenu en remplaçant chaque arête de G par un graphe biparti complet $K_{2,m}$ est appelé graphe de subdivision super fini de G, noté $FSSD_m(G)$.*

Proposition 2.4.1 *[15] Pour tout $n \geq 3$ et $m \geq 1$,*

$$\chi_p(FSSD_m(K_n)) = n + 1$$

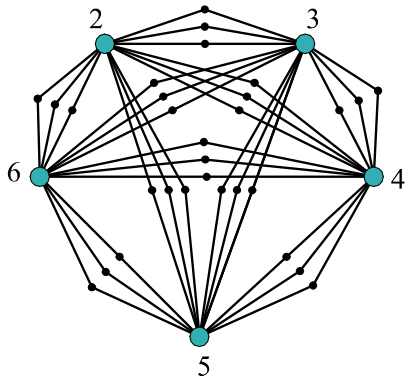


Figure 2.4.1 : Un graphe complet K_5, $\chi_p(FSSD_m(K_5)) = 6$

Théorème 2.4.1 *[15] Pour tout $n \geq 3$, $p \geq 2$ et $m \geq 1$,*

$$\chi_p(FSSD_m(K_n \bigstar P_n)) = n + 3$$

Chapitre 3

Détermination du nombre de la coloration de packing de quelques types de graphes

Dans ce chapitre, nous donnons nos résultats sur la détermination du nombre de coloration de packing de quelques types de graphes.

3.1 Coloration de packing du graphe puissance

Nous définissons maintenant, un nouveau graphe noté le graphe **Puissance**.

Définition 3.1.1 *Le graphe puissance noté G^p pour $p \geq 0$ d'un graphe G, est le graphe obtenu à partir de G en ajoutant une arête entre chaque paire de sommets à distance au plus p dans G. Voir la Figure 3.1.1.*

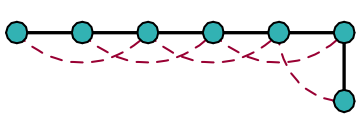


Figure 3.1.1 : Un graphe puissance G^2

3.1.1 Coloration de packing du graphe puissance d'un graphe biparti complet

Proposition 3.1.1 *Pour un graphe $K_{p,q}$, $p, q \geq 1$,*

$$\chi_p(K^2_{p,q}) = p + q$$

Preuve. Puisque $K^2_{p,q} \simeq K_{p+q}$, et comme $\chi_p(K_{p+q}) = p + q$, alors $\chi_p(K^2_{p,q}) = \chi_p(K_{p+q}) = p + q$. La Figure 3.1.2 illustre un graphe puissance d'un graphe biparti complet $K^2_{4,3}$. ■

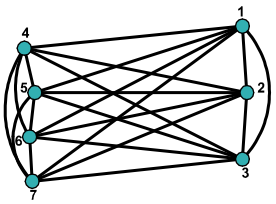


Figure 3.1.2 : Une coloration de packing de $K^2_{4,3}$

3.1.2 Coloration de packing du graphe puissance d'une étoile

Proposition 3.1.2 *Pour tout $n \geq 1$,*

$$\chi_p(K^2_{1,n}) = n + 1$$

Preuve. Puisque $K^2_{1,n} \simeq K_{n+1}$, et comme $\chi_p(K_{n+1}) = n + 1$, alors $\chi_p(K^2_{1,n}) = \chi_p(K_{n+1}) = n + 1$. La Figure 3.1.3 illustre un graphe puissance d'une étoile $K^2_{1,5}$.

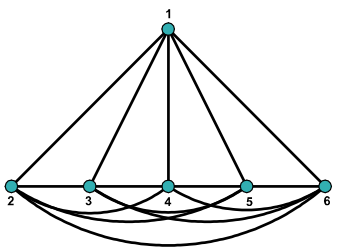


Figure 3.1.3 : Une coloration de packing de $K^2_{1,5}$

■

3.1.3 Coloration de packing du graphe puissance d'un arbre à diamètre 3

Proposition 3.1.3 *Soit $T = S_{p,q}$, $p, q \geq 1$. Alors*

$$\chi_p(T^2) = p + q + 1$$

Preuve. Soit c une coloration a-packing arbitraire de T^2, où $a = p + q + 1$. ■

Posons u_1 le sommet de $S_{p,q}$ de degré p, u_2 le sommet de $S_{p,q}$ de degré q, $v_{1,j}$, $j \in \{1, .., p\}$ les voisins de u_1 et $v_{2,g}$, $g \in \{1, ..., q\}$ les voisins de u_2.

Si $c(u_1) = 1$ (resp. $c(u_2) = 1$), alors les sommets $\{u_2,\ v_{1,j},\ v_{2,j};\ 1 \leq j \leq p\}$ (resp. $\{u_1,\ v_{1,j},\ v_{2,j};\ 1 \leq j \leq p\}$) reçoivent par paire de couleurs différentes de $\{2, ...,\ p + q + 1\}$, par conséquence $\chi_p(S^2_{p,q}) \geq p + q + 1 + 1 \geq p + q + 2$.

D'autre part, si $c(u_i) \neq 1$ pour $i \in \{1,\ 2\}$, alors on peut mettre la couleur 1 sur un seul sommet de $\{v_{1,j},\ 1 \leq j \leq p\}$ et un sommet de $\{v_{2,g},\ 1 \leq g \leq q\}$. Par conséquence $\chi_p(S^2_{p,q}) \geq p + q - 2 + 1 \geq p + q + 1$.

Pour la borne supérieure, on forme une coloration a-packing comme suit: $c(v_{1,2}) = c(v_{2,1}) = 1$ et tous les autres sommets reçoivent de couleurs différentes par paire de $\{2, ...,\ p + q + 1\}$, par conséquence $\chi_p(S^2_{p,q}) \leq p + q + 1$.

D'où $\chi_p(S^2_{p,q}) = p + q + 1$. Voir la Figure 3.1.4.

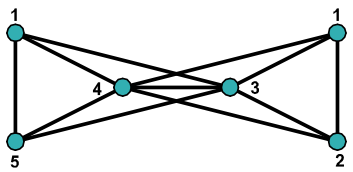


Figure 3.1.4 : Une coloration de packing de $S^2_{2,2}$

3.1.4 Coloration de packing du graphe puissance d'un arbre à diamètre 4

Proposition 3.1.4 *Soit T un arbre de diamètre 4 et d'ordre n, et soit l_1 le nombre de voisins par rapport son sommet central v de degré 1, et l_2 le nombre de voisins par rapport à v de degré supérieur ou égal à 2. Alors*

$$\chi_p(T^2) = \begin{cases} n - l_2; \text{ si } l_1 > 1, \\ n - l_2 + 1; \text{ si } l_2 = 0 \end{cases}$$

Preuve. Soit c une coloration de packing sur T^2, et soit v un sommet central de T. L'arbre T^2 à diamètre 2 donc la seule couleur utilisée plus d'une fois est la couleur 1. ■

Premièrement, si $c(v) = 1$, alors puisque $d(v, u) = 1$ pour tout sommet u de T^2, la couleur 1 ne peut utiliser que sur le sommet v.

D'autre part, s'il existe un sommet support u tel que $c(u) = 1$, alors on ne peut pas utiliser la couleur 1 sur aucun autre sommet support, en plus on peut l'utiliser sur les autres feuilles non adjacentes à u.

Une autre manière, on peut utiliser la couleur 1 sur une seule feuille adjacente à chaque sommet support, et sur un seul sommet de degré 1 adjacent à v.

Donc, $\chi_p(T^2) \geq n - l_2$ si $l_1 > 1$, respectivement, $\chi_p(T^2) \geq n - l_2 + 1$ si $l_1 = 0$.

Pour montrer la borne supérieure, on forme une coloration $(n - l_2)$-packing sur T^2 si $l_1 > 1$, (resp. $(n - l_2 + 1)$-packing si $l_1 = 0$), puisque $diam(T^2) = 2$, on met la couleur 1 sur une seule feuille de T adjacent à chaque sommet support et sur un seul sommet voisin par rapport à v, s'il existe, et une couleur différente de $\{2, 3, ...\}$ aux autres sommets de T^2.

Par conséquence, $\chi_p(T^2) = n - l_2$ si $l_1 > 1$, et $\chi_p(T^2) = n - l_2 + 1$ si $l_1 = 0$. Voir la Figure 3.1.5.

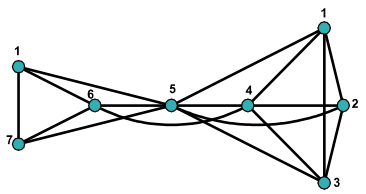


Figure 3.1.5 : Une coloration de packing de T^2

3.1.5 Coloration de packing du graphe puissance d'un cycle

Proposition 3.1.5 *Pour tout* n, $n \geq 3$, $\chi_p(C_n^2) = \begin{cases} n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1; \, n \leq 9, \\ \geq n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1; \, n > 9. \end{cases}$

Preuve. On note par u_i, $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ n\}$ les sommets du cycle C_n. Premièrement, si $n \leq 9$, alors le graphe C_n^2 est de diamétre 2, la couleur 1 est la seule couleur utilisée deux

fois ou plus et comme c est une coloration de packing optimale de ce graphe, elle assigne la couleur 1 au maximum sommets possibles. Alors on peut colorer $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ sommets par la couleur 1. Par conséquence $\chi_p(C_n^2) \geq |C_n^2| - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1 = n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$. ■

Pour montrer que $\chi_p(C_n^2) \leq n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$, on forme une coloration $[n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1]$-packing. On utilise la couleur 1, $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ fois comme suit : on pose $c(u_1) = 1$ et $c(u_{i+3}) = 1$ pour tout $i \geq 1$. Les autres sommets prennent des couleurs différentes par paire de $\left\{2, ..., n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1\right\}$. Par conséquence $\chi_p(C_n^2) \leq n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$.

Deuxièment, pour $n > 9$, la coloration de packing optimale consiste à utiliser le maximum de la couleur 1, c-à-d: $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ fois et donc une borne inférieure peut être donnée par: $\chi_p(C_n^2) \geq |C_n^2| - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$. La Figure 3.1.6 illustre un graphe puissance d'un cycle C_7^2.

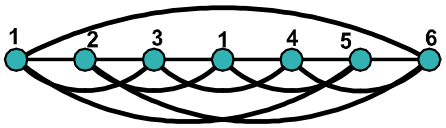


Figure 3.1.6 : Une coloration de packing de C_7^2

3.2 Coloration de packing du graphe splitting

3.2.1 Coloration de packing du graphe subdivisé super fini de splitting d'une chaîne

Proposition 3.2.1 *Pour tout $n \geq 3$,*

$$\chi_p(FSSD_m\ (S'(P_n))) = 3$$

Preuve. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note par u_i les sommets de P_n. On note par v_i les sommets correspondants au sommet u_i. Le graphe $FSSD_m(S'(P_n))$ contient un sous graphe C_8. Par suite $\chi_p(FSSD_m(S'(P_n))) \geq \chi_p(C_8)$ et donc $\chi_p(FSSD_m(S'(P_n))) \geq 3$. Autrement pour montrer que $\chi_p(FSSD_m(S'(P_n))) \leq 3$, on utilise la coloration de packing suivante: ■

On colore les sommets de la subdivision avec la couleur 1 et pour les sommets u_i on utilise la coloration séquentielle $2, 3, 2, 3....$ et pour les sommets v_i on utilise la coloration séquentielle $2, 3, 2, 3.....$ Par conséquence $\chi_p(FSSD_m(S'(P_n))) \leq 3$.

D'où : $\chi_p(FSSD_m(S'(P_n))) = 3$. (Voir la Figure 3.2.1).

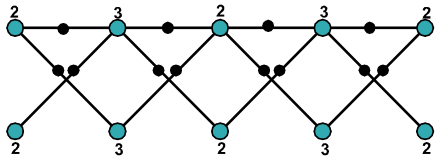


Figure 3.2.1 : Une coloration de packing de $FSSD_1(S'(P_5))$

3.2.2 Coloration de packing du graphe subdivisé super fini de splitting d'une étoile

Proposition 3.2.2 *Pour tout $n \geq 3$,*

$$\chi_p(FSSD_m(S'(K_{1,n}))) = 3$$

Preuve Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note par u_i les sommets de $K_{1,n}$ et on note par v_i les sommets correspondants au sommets u_i. Le graphe $FSSD_m(S'(K_{1,n}))$ contient un sous graphe C_8, donc $\chi_p(FSSD_m(S'(K_{1,n}))) \geq \chi_p(C_8)$ alors $\chi_p(FSSD_m(S'(K_{1,n}))) \geq 3$. Pour montrer la borne inférieure, on utilise la coloration suivante: on colore les sommets de la subdivision avec la couleur 1 et les sommets u_i et les sommets v_i, $i \in \{2, \ldots, n\}$ par la couleur 2 et les sommets u_1 et v_1 par la couleur 3, alors $\chi_p(FSSD_m(S'(K_{1,n}))) \leq 3$. D'où le résultat $\chi_p(FSSD_m(S'(K_{1,n}))) = 3$. (Voir la Figure 3.2.2).

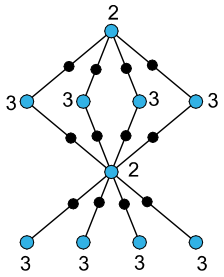


Figure 3.2.2 : Une coloration de packing de $FSSD_1(S'(K_{1,4}))$

3.2.3 Coloration de packing du graphe subdivisé super fini de splitting d'un arbre

Proposition 3.2.3 *Pour tout arbre T d'ordre n,*

$$\chi_{_p}(FSSD_m(S'(T))) = 3$$

Preuve. Le graphe $\chi_{_p}(FSSD_m(S'(T)))$ contient un sous graphe induit C_8 ce qui implique que $\chi_{_p}(FSSD_m(S'(T))) \geq \chi_{_p}(C_8) = 3$ alors $\chi_{_p}(FSSD_m(S'(T))) \geq 3$. Pour montrer la borne supérieure, on untilise la coloration suivante: on colore les sommets de la subdivision par la couleur 1 et les sommets restants avec les couleurs 2 et 3.Donc $\chi_{_p}(FSSD_m(S'(T))) \geq 3$. ■

d'où le résultat. (Voir la Figure 3.2.3).

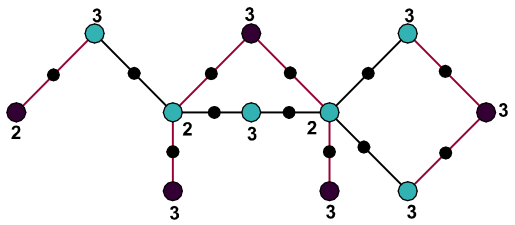


Figure 3.2.3 : Une coloration de packing de $FSSD_1(S'(T))$

3.3 Joint d'un graphe complet et une chaîne

Théorème 3.3.1 *Pour $n \geq 1$ et $k \geq 1$,*

$$\chi_p(P_n + K_k) = \begin{cases} \frac{n+2}{2} + k; \text{ si } n \text{ est pair,} \\ \frac{n+1}{2} + k; \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Preuve. Notons par u_i avec $1 \leq i \leq k$, les sommets de K_k, et par v_j avec $1 \leq j \leq n$. les sommets de P_n. ■

S'il existe $i \in \{1, ..., k\}$ tel que $c(u_i) = 1$, alors $c(v_j) \neq 1$ pour tout $j \in \{1, ..., n\}$ car on a $d(u_i,v_j) = 1$, de même $d(u_i,u_h) = 1$, $h \in \{1, ..., k\}$, $h \neq i$. Par conséquence la couleur 1 est utilisée une seule fois sur le graphe $P_n + K_k$.

D'autre part, s'il existe $j \in \{1, ..., n\}$ tel que: $c(v_j) = 1$, alors $c(u_j) \neq 1$ pour tout $i \in \{1, ..., k\}$ car on a $d(u_i,v_j) = 1$, et dans ce cas, on peut utiliser la couleur 1 sur la chaîne P_n, $\frac{n}{2}$ fois si n est pair (resp. $\frac{n+1}{2}$ fois, si n est impair). Comme c est une coloration de packing optimale, elle consiste à affecter la couleur 1 au maximum sommets de la chaîne P_n.

Comme $V(P_n+K_k) = n+k$, la coloration c utilise au moins $n+k-\frac{n}{2}+1 = \frac{n+2}{2}+k$ couleurs si n est pair (resp. $n+k-\frac{n+1}{2}+1 = \frac{n+1}{2}+k$ si n est impair). Donc $\chi_p(P_n+K_k) \geq \frac{n+2}{2}+k$ si n est pair (resp. $\chi_p(P_n+K_k) \geq \frac{n+1}{2}+k$ si n est impair).

Pour montrer que $\chi_p(P_n+K_k) \leq \frac{n+2}{2}+k$ si n est pair (resp. $\chi_p(P_n+K_k) \leq \frac{n+2}{2}+k$; si n est impair), on forme une coloration $\frac{n+2}{2}+k-$packing si n est pair (resp. $\frac{n+2}{2}+k-$packing; si n est impair) comme suit: $c(v_1) = 1$ et pour tout $j \in \{2, ..., n\}$, $c(v_j) = 1$ si j est impair, et les sommets restants prennent par paire de couleurs différentes de $\{2, ..., \frac{n}{2}\}$ si n est pair (resp $\frac{n-1}{2}$ si n est impair) et donc les sommets de la chaîne utilisent $n-\frac{n}{2}+1 = \frac{n+2}{2}$ couleurs différentes si n est pair (resp. $n-\frac{n+1}{2}+1 = \frac{n+1}{2}$ si n est impair). Les sommets de K_k sont colorés par k couleurs différentes de $\{1, ..., \frac{n+2}{2}\}$ si n est pair (resp. $\{1, ..., \frac{n+1}{2}\}$ si n est impair). Par conséquence $\chi_p(P_n+K_k) \leq \frac{n+2}{2}+k$ si n est pair (resp. $\chi_p(P_n+K_k) \leq \frac{n+1}{2}+k$ si n est impair)

D'où, $\chi_p(P_n+K_k) = \frac{n+2}{2}+k$ si n est pair (resp. $\chi_p(P_n+K_k) = \frac{n+1}{2}+k$ si n est impair). La Figure 3.3.1 illustre le joint d'un graphe complet P_5 et une chaîne K_4.

On utilise les notations suivantes dans la suite des démonstations de $G_1 \bigstar G_2$ et $G_1 \odot G_2$. Soit G_1et G_2 deux graphes de n_1, n_2 sommets, on note par u_i les sommets de G_1, $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Pour tous $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $g \in \{1, 2, ..., p\}$, on note par $v_{i,g}$ les sommets de G_2 correspondants à chaque sommet u_i. On note par $u_{i,j}^{(k)}$ les sommets voisins de u_i et u_j dans le sous graphe G_1, $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ et $k \in \{1, 2, ..., m\}$. On note par $v_{i,g,h}^{(k)}$, $g \neq h$ les sommets voisins de $v_{i,g}$ et $v_{i,h}$ dans le sous graphe G_2, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $g, h \in \{1, 2, ..., p\}$ et

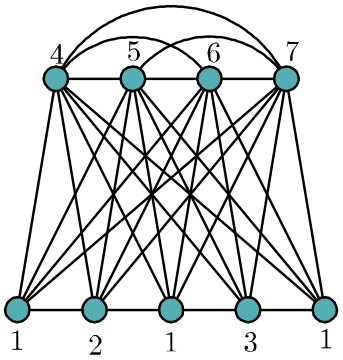


Figure 3.3.1 : Une coloration de packing de $(P_5 + K_4)$

$k \in \{1, 2, ..., m\}$. Pour le graphe $G_1 \bigstar G_2$, on ajoute la notation suivante: $s^{(k)}_{i,j,h}$ les sommets voisins de u_i et $v_{j,h}$, $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, $h \in \{1, 2, ..., p\}$ et $k \in \{1, 2, ..., m\}$.

3.4 La couronne voisinage de deux graphes

Définition 3.4.1 *Soit G_1, G_2 deux graphes de n_1, n_2 sommets et m_1, m_2 arêts. Alors, la couronne voisinage $G_1 \bigstar G_2$ est le graphe obtenu par prendre $n_1$copie de G_2 et pour tout $v_i \in V(G_1)$; $i \in \{1,..., n_1\}$, on relie les sommets de G_2 avec les voisins de v_i. La couronne voisinage $G_1 \bigstar G_2$ de G_1et G_2 a $n_1 + n_1 n_2$ sommets et $n_1(2n_2 + 1) + n_1 n_2$ arêtes, et quand $G_2 = K_1$, le graphe $G_1 \bigstar G_2$ est appelé: le graphe splitting de G_1, et noté par $S'(G_1)$.*

3.4.1 Coloration de packing du graphe subdivisé super fini d'une couronne voissinage de deux chaînes

Avant de déterminer le nombre $\chi_p(FSSD_m(P_n \bigstar P_p))$, nous avons besion du lemme suivant:

Lemme 3.4.1 *Soient $n \geq 3$, $p \geq 2$ et $m \geq 1$ des entiers arbitraires. Alors pour toute coloration a-packing c du graphe $FSSD_m(P_n \bigstar P_p)$ où:*

$$\begin{cases} a \leq 5 \text{ si } n \geq 3,\ p \in \{2, 3\} \\ a \leq 6 \text{ si } n \in \{3, 4, 5\},\ p \geq 4 \text{ ou } n = 2,\ p \geq 4 \\ a \leq 7 \text{ si } n \geq 6,\ p \geq 4 \end{cases}$$

On a les cas suivants:

1. $c(u_i) \neq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$;
2. $c(v_{i,g}) \neq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$ et $g \in \{1, 2, ..., p\}$.

Preuve Soient $n \geq 3$, $p \geq 2$ et $m \geq 1$ des entiers arbitraires, et soit c une coloration a-packing arbitraire de $FSSD_m(P_n \bigstar P_p)$.

1. Nous prouvons que $c(u_i) \neq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Supposons qu'il existe $i \in \{1, 2, ..., n\}$, tel que $c(u_i) = 1$. On distingue deux cas:

Cas 1. $c(u_i) = 1$, $i \neq 1$ et $i \neq n$. Alors u_i a au moins $2p + 2$ voisins qui sont par paire à distance égale à 2, donc c utilise au moins $2p + 3$ couleurs, et donc on a les cas suivants:

Cas 1.1. $n \geq 3$, $p \in \{2, 3\}$.

c utilise au moins 7 couleurs, une contradiction que $a \leq 5$.

Cas 1.2. $n \in \{3, 5, 4\}$, $p \geq 4$.

c utilise au moins 11 couleurs, une contradiction que $a \leq 6$.

Cas 1.3. $n \geq 6$, $p \geq 4$.

c utilise au moins 11 couleurs, une contradiction que $a \leq 7$.

Donc $c(u_i) \neq 1$ pour $i \in \{2, ..., n - 1\}$.

Cas 2. $c(u_1) = 1$ ou $c(u_n) = 1$, on a les cas suivants:

Cas 2.1. $n \geq 3$, $p \in \{2, 3\}$ ou $n = 2$, $p \geq 4$.

Cas 2.1.1. $n \geq 3$, $p \in \{2, 3\}$

On prend le graphe $FSSD_1(P_3 \bigstar P_2)$. Puisque $diam(FSSD_1(P_3 \bigstar P_2)) = 6$, donc les couleurs qui peuvent utilisées plus d'une fois sont: $2, 3, 4$ et 5, et puisque les sommets $s^1_{1,2,1}$, $s^1_{1,2,2}$ et $u^1_{1,2}$ sont par paire à distance 2, donc ils reçoivent 3 couleurs différentes par paire de $\{2, 3, 4, 5\}$. On distingue 4 cas pour colorer les sommets $s^1_{1,2,1}$, $s^1_{1,2,2}$ et $u^1_{1,2}$.

Cas 2.1.1.1. $c(s^1_{1,2,1}) = 2$, $c(s^1_{1,2,2}) = 3$ et $c(u^1_{1,2}) = 4$, (resp. $c(s^1_{1,2,1}) = 3$, $c(s^1_{1,2,2}) = 2$ et $c(u^1_{1,2}) = 4$).

La coloration optimale assigne la couleur 1 aux sommets $v_{2,1}$, $v_{2,2}$ et $u^1_{2,3}$, la couleur 2 au sommet u_2, la couleur 5 au sommet $v^1_{2,1,2}$, mais il n'y a pas de couleur disponible pour le sommet u_3, alors $c(u_3) = 6$, une contradiction.

Cas 2.1.1.2. $c(s^1_{1,2,1}) = 4$, $c(s^1_{1,2,2}) = 2$ et $c(u^1_{1,2}) = 3$.

La coloration optimale assigne la couleur 1 aux sommets $v_{2,1}$, $v_{2,2}$ et $u^1_{2,3}$, la couleur 2 au sommet u_2, la couleur 3 au sommet $v^1_{2,1,2}$ et la couleur 5 au sommet $s^1_{3,2,2}$, mais il n'y a pas de couleur disponible pour le sommet u_3 alors $c(u_3) = 6$, une contradiction.

Cas 2.1.1.3. $c(s^1_{1,2,1}) = 4$, $c(s^1_{1,2,2}) = 3$ et $c(u^1_{1,2}) = 2$.

La coloration optimale assigne la couleur 1 aux sommets $v_{2,1}$ et $v_{2,2}$, la couleur 2 au sommet $v^1_{2,1,2}$ et la couleur 5 au sommet $s^1_{3,2,2}$, mais il n'y a pas de couleur disponible pour le sommet u_2 alors $c(u_2) = 6$, une contradiction.

Finalement, le graphe $FSSD_1(P_n \bigstar P_p)$ contient le sous graphe $FSSD_1(P_3 \bigstar P_2)$ et donc on a $c(u_i) \neq 1$ pour le graphe $FSSD_1(P_n \bigstar P_p)$.

Cas 2.1.2. $n = 2$, $p \geq 4$.

$c(u_1) = 1$, u_1 a au moins 5 voisins qui sont par paire à distance 2, ces voisins reçoivent cinq couleurs différentes $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ par c, ce qui donne une contradiction .

Cas 2.2. $n \in \{3, 5, 4\}$, $p \geq 4$.

On prend le graphe $FSSD_1(P_3 \bigstar P_4)$. Le sommet u_1 à 5 voisins qui sont par paire à distance 2, donc ils reçoivent 5 couleurs differentes de $\{2, 3, 4, 5, 6\}$. Soit c une coloration optimale, donc elle assigne la couleur 1 aux sommets $v_{2,g}$ tels que $g \in \{1, 2, 3, 4\}$. On distingue les cas suivants pour colorer le sommet $u_{1,2}$.

Cas 2.2.1. $c(u_{1,2}) = 2$ (resp. $c(u_{1,2}) = 3$). Alors: les couleurs $2, 3$ peuvent être utilisées au plus 2 fois sur la chaîne $P_{2,4}$, et par conséquence les sommets $s_{3,2,g}$; $g \in \{1, 2, 3, 4\}$ reçoivent des couleurs différentes de $\{7, \ldots\}$. Contradiction que $a \leq 6$.

Cas 2.2.2. $c(u_{1,2}) \neq 2$ (resp. $c(u_{1,2}) \neq 3$). Alors, seulement deux sommets de la subdivision de $P_{2,4}$ peuvent prendre des couleurs différentes de $\{2, 3\}$. L'autre sommet et les sommets $s_{3,2,g}$, $g \in \{1, 2, 3, 4\}$ reçoivent des couleurs differentes de $\{7, \ldots\}$. Contradiction que $a \leq 6$.

Finalement, le graphe $FSSD_1(P_n \bigstar P_p)$ contient le sous graphe $FSSD_1(P_3 \bigstar P_4)$ et donc on a $c(u_i) \neq 1$, $i \in \{1, ..., n\}$ pour le graphe $FSSD_1(P_n \bigstar P_p)$.

Cas 2.3. $n \geq 6$, $p \geq 4$.

On prend le graphe $FSSD_1(P_6 \bigstar P_4)$. Le sommet u_1 a 5 voisins qui sont par paire à distance 2, donc ils reçoivent 5 couleurs différentes de $\{2, 3, 4, 5, 6\}$. Soit c n'importe qu'elle coloration optimale, donc elle assigne la couleur 1 aux sommets $v_{2,g}$ tel que $g \in \{1, 2, 3, 4\}$.

On distingue les cas suivants à la coloration du sommet $u_{1,2}$.

Cas 2.3.1. Si $c(u_{1,2}) = 2$ (resp. $c(u_{1,2}) = 3$), alors les couleurs 2 et 3 peuvent être utilisées au plus 2 fois sur $P_{2,4}$, et donc on peut colorer seulement un seul de sommet $s_{3,2,g}$, $g \in \{1, 2, 3, 4\}$ par la couleur 7 et il n' y a pas de couleurs disponibles pour les autres sommets. Par conséquence les sommets restants reçoivent des couleurs differentes de $\{8, ...\}$. Contradiction que $a \leq 7$.

Cas 2.3.2. Si $c(u_{1,2}) \neq 2$ (resp. $c(u_{1,2}) \neq 3$), alors les couleurs 2 et 3 peuvent être utilisées une seule fois dans les sommets de subdivision de $P_{2,4}$ et l'autre sommet peut recevoir la couleur 7, mais il n' y a pas de couleurs disponibles pour les sommets $s_{3,2,g}$, $g \in \{1, 2, 3, 4\}$, ils reçoivent des couleurs differentes de $\{8, \ldots\}$. Contradiction que $a \leq 7$.

Par conséquence $c(u_i) \neq 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.

Finalement, le graphe $FSSD_1(P_n \bigstar P_p)$ contient le sous graphe $FSSD_1(P_6 \bigstar P_4)$ et donc on a $c(u_i) \neq 1$ pour le graphe $FSSD_1(P_n \bigstar P_p)$.

2. Nous prouvons que $c(v_{i,g}) \neq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $g \in \{1, 2, ..., p\}$.

Supposons au contraire que $c(v_{i,g}) = 1$ pour certains i et g. Puisque $c(u_i) \neq 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, alors les sommets u_i peuvent recevoir des couleurs différentes de $\{2, 3, .., a\}$, soit $c(v_{2,1}) = 1$, alors la coloration optimale c assigne la couleur 1 aux sommets $u^1_{i,r}$, $v^1_{i,g,l}$ et $s^1_{h,i,t}$ sauf les sommets $v^1_{2,1,2}$, $s^1_{1,2,1}$ et $s^1_{3,2,1}$ qui sont des voisins de $v_{2,1}$. D'où les sommets $v_{2,q}$, $q \in \{2, ..., p\}$ reçoivent des couleurs différentes par paire de $\{2, ..., a\}$. On distingue les cas suivants selon n et p.

Cas 1. $n \geq 3$, $p \in \{2, 3\}$.

Dans ce cas, le graphe $FSSD_m(P_n \bigstar P_p)$ contient un sous graphe $FSSD_1(P_3 \bigstar P_2)$, on a le sommet $v_{2,1}$ a 3 voisins qui sont par paire à distance 2, alors ils reçoivent des couleurs différentes par paire de $\{2, 3, 4, 5\}$ nous considérons les cas suivants concernant la coloration des sommets $v^1_{2,1,2}$, $s^1_{1,2,1}$ et $s^1_{3,2,1}$.

Cas 1.1. Si $c(v^1_{2,1,2}) = 2$, alors les sommets $s^1_{1,2,1}$, $s^1_{3,2,1}$ peuvent recevoir des couleurs différentes de $\{3, 4, 5\}$ tel que $c(s^1_{1,2,1}) \neq c(s^1_{3,2,1})$, et donc les sommets qui peuvent recevoir la couleur 2 par c sont u_1 et u_3, le sommet $v_{2,2}$ peut prendre une couleur de $\{3, 4, 5\}$ tel que $c(s^1_{1,2,1}) \neq c(s^1_{3,2,1}) \neq c(v_{2,2})$, alors on distingue les possibilités suivantes pour $c(v_{2,2})$.

• Si $c(v_{2,2}) \neq 3$, alors il n'y a pas de couleur disponible pour le sommet u_2, d'où $c(u_2) = 6$, une contradiction que $a \leq 5$.

• Si $c(v_{2,2}) = 3$, alors le sommet u_2 peut prendre la couleur 3, l'un des sommets $v_{1,1}$ et $v_{1,2}$ peut prendre la couleur 2 et l'autre peut prendre la couleur 4, et l'un des sommets $v_{3,1}$ et $v_{3,2}$ peut prendre la couleur 2, mais il n'y a pas de couleur disponible pour l'autre sommet, alors il peut prendre la couleur 6, une contradiction que $a \leq 5$.

Cas 1.2. Si $c(v^1_{2,1,2}) = 3$, alors les sommets $s^1_{1,2,1}$, $s^1_{3,2,1}$ peuvent recevoir des couleurs de $\{2, 4, 5\}$ tel que $c(s^1_{1,2,1}) \neq c(s^1_{3,2,1})$, alors les sommets qui peuvent prendre la couleur 2 sont u_2 et $v_{2,2}$, et l'un des sommets u_1 et u_3 peut prendre une couleur de $\{4, 5\}$ tel que $c(u_i) \neq c(s^1_{1,2,1}) \neq c(s^1_{3,2,1})$, mais il n'y a pas de couleur disponible pour l'autre sommet alors il peut prendre la couleur 6, une contradiction que $a \leq 5$.

Cas 1.3. Si $c(v^1_{2,1,2}) = a$, $a \in \{4, 5\}$ et les sommets $s^1_{1,2,1}$, $s^1_{3,2,1}$ peuvent recevoir des couleurs de $\{2, 3\}$ tel que $c(s^1_{1,2,1}) \neq c(s^1_{3,2,1})$, alors les sommets qui peuvent prendre la couleur 2 sont u_2 et $v_{2,2}$, et l'un des sommets u_1 et u_3 peut prendre une couleur b tel que $b \in \{4, 5\}$, $b \neq a$, mais il n'y a pas de couleur disponible pour l'autre sommet alors il peut prendre la couleur 6, une contradiction que $a \leq 5$.

Cas 2. Si $n = 2$, $p \geq 4$, alors dans ce cas le graphe $FSSD_m(P_n \bigstar P_p)$ contient un sous graphe $FSSD_1(P_2 \bigstar P_4)$.

Cas 2.1. Si $c(u_1) = a$, $a \in \{2, 3\}$ et $c(u_2) = b$, $b \in \{2, 3\}$, $b \neq a$, alors les sommets $v_{i,2}$, $v_{i,4}$, $i \in \{1, 2\}$ peuvent prendre la couleur b et les sommets $v_{i,3}$ peuvent prendre la couleur 4, si $a = 2$ alors le sommet $s^1_{1,2,1}$ peut prendre la couleur 5 et le sommet $v^1_{2,1,2}$ peut prendre la couleur 5, mais il n'y a pas de couleur disponible pour le sommet $v_{1,1}$ donc $c(v_{1,1}) = 6$, une contradiction que $a \leq 5$.

Cas 2.2. $c(u_1) = c$, $c \in \{4, 5, 6\}$ et $c(u_2) = d$, $d \in \{4, 5, 6\}$, $d \neq c$. Le sommet $v_{2,1}$ a 2 voisins $v^1_{2,1,2}$ et $s^1_{1,2,1}$ qui sont par paire à distance 2 alors ils reçoivent des couleurs différentes de $\{2, 3\}$, donc on a les possibilités suivantes:

• Si $c(v^1_{2,1,2}) = 2$ et $c(s^1_{1,2,1}) = 3$, alors il n'y a pas de couleur disponible pour le sommet $v_{2,2}$ donc $c(v_{2,2}) = 6$.

• Si $c(v^1_{2,1,2}) = 3$ et $c(s^1_{1,2,1}) = 2$, alors l'un des sommets $v_{2,1}$ et $v_{2,2}$ peut prendre la couleur 2, mais il n'y a pas de couleur disponible pour l'autre sommet, une contradiction.

Cas 2.3. $c(u_i) = a$, $i \in \{1,2\}$, $a \in \{2,3\}$ et $c(u_j) = b$, $j \in \{1,2\}$, $j \neq i$ et $b \in \{4,5,6\}$. On distingue deux possibilités:

• Si $c(u_1) = 2$, alors le sommet $v^1_{2,1,2}$ peut prendre la couleur 2, mais il n'y a pas de couleur disponible pour le sommet $s^1_{1,2,1}$, une contradiction.

• Si $c(u_2) = 2$, alors le sommet $s^1_{1,2,1}$ peut prendre la couleur 2 et le sommet $v^1_{2,1,2}$ peut prendre la couleur, d'après le **Cas 2.2.** on a une contradicton.

Cas 3. Si $n \geq 3$, $p \geq 4$, alors dans ce cas le graphe $FSSD_m(P_n \bigstar P_p)$ contient un sous graphe $FSSD_1(P_3 \bigstar P_4)$, on distingue les cas suivants:

Cas 3.1. Si $c(u_1) = 2$, $c(u_2) = 3$ et $c(u_3) = 2$, alors le sommet $v^1_{2,1,2}$ peut recevoir l'une des couleurs de $\{2,3,..,\ 6\}$ tel que $c(v^1_{2,1,2}) \neq c(v_{2,q})$ pour tout $q \in \{2,3,4\}$, et l'un des sommets $s^1_{1,2,1}$, $s^1_{3,2,1}$ peut recevoir une couleurs de $\{3,...,\ 6\}$ tel que $c(s^1_{1,2,1}) \neq c(s^1_{3,2,1}) \neq c(v_{2,q})$ pour tout $q \in \{2,3,4\}$ mais il n'y a pas de couleur disponible pour l'autre sommet alors il peut prendre la couleur 7, une contradiction.

Cas 3.2. Si $c(u_1) = 3$, $c(u_2) = 2$ et $c(u_3) = 3$, alors les sommets $v_{2,2}$, $v_{2,4}$ et $s^1_{1,2,1}$ peuvent prendre la couleur 2 par c, et les sommets $v_{2,3}$, $v^1_{2,1,2}$, $s^1_{3,2,1}$ peuvent prendre des couleurs différentes par paire de $\{4,5,6\}$ .D'où les sommets $v_{i,g}$ pour tout $i \in \{2,3\}$, $g \in \{1,2,3,4\}$ peuvent colorer par: la couleur 3 sur deux sommets de $v_{i,g}$, où ils sont par paire à distance 2, d'où les autres sommets peuvent prendre des couleurs différentes par paire de $\{4,5,6,7,...\}$, une contradiction.

Cas 3.3. Si $c(u_1) = c(u_3) = a$, $a \in \{2,3\}$ et $c(u_2) = b$, $b \in \{4,5,6\}$, alors les sommets $v_{2,2}$, $v_{2,4}$ peuvent prendre la couleur c où $c \in \{2,3\}$, $c \neq a$, et le sommet $v_{2,3}$ peut prendre la couleur d où $d \in \{4,5,6\}$, $d \neq b$, si $a = 2$, le sommet $v^1_{2,1,2}$ prend la couleur 2 et le sommet $s^1_{1,2,1}$ prend la couleur 6, mais il n'y a pas de couleur disponible pour le sommet $s^1_{3,2,1}$ alors $c(s^1_{3,2,1}) = 7$, une contradiction. Si $a = 3$, le sommet $s^1_{1,2,1}$ prend la couleur 2 et le sommet $v^1_{2,1,2}$ prend la couleur 6, mais il n'y a pas de couleur disponible pour le sommet $s^1_{3,2,1}$ alors $c(s^1_{3,2,1}) = 7$, une contradiction.

Cas 3.4. $c(u_2) = a$, $a \in \{2,3\}$, $c(u_1) = b$, $b \in \{4,5,6\}$ et $c(u_3) = e$, $e \in \{4,5,6\}$, où $e \neq b$. Les sommets $v_{2,2}$, $v_{2,4}$ peuvent prendre la couleur a, et le sommet $v_{2,3}$ peut prendre la couleur c où $c \in \{2,3\}$, $c \neq a$, si $a = 2$, le sommet $v^1_{2,1,2}$ prend la couleur 2 et le sommet $s^1_{1,2,1}$ prend la couleur 6, mais il n'y a pas de couleur disponible pour le sommet $s^1_{3,2,1}$ alors

$c(s^1_{3,2,1}) = 7$, une contradiction. Si $a = 3$, le sommet $s^1_{1,2,1}$ prend la couleur 2 et le sommet $v^1_{2,1,2}$ prend la couleur 6, mais il n'y a pas de couleur disponible pour le sommet $s^1_{3,2,1}$ alors $c(s^1_{3,2,1}) = 7$, une contradiction.

Cas 3.5. Les sommets u_1, u_2 et u_3 reçoivent des couleurs différentes par paire de $\{4, 5, 6\}$. Les sommets $v_{2,2}$, $v_{2,4}$ et $s^1_{1,2,1}$ peuvent prendre la couleur 2 par c et le sommet $v_{2,3}$ peut prendre la couleur 3, il reste la couleur 7 pour colorer l'un des sommets $v^1_{2,1,2}$, $s^1_{1,2,1}$, mais il n'y a pas de couleur disponible pour l'autre sommet, une contradiction que $a \leq 7$.

Par conséquence, nous déduisons que notre lemme est finalement prouvé.

Théorème 3.4.1 *Pour* $n \geq 2$, $p \geq 2$ *et* $m \geq 1$,

$$\chi_p(FSSD_m(P_n \bigstar P_p)) = \begin{cases} 4; \text{ si } n = 2,\ p \in \{2, 3\}, \\ 5; \text{ si } (n \geq 3,\ p \in \{2, 3\}) \text{ ou } (n = 2,\ p \geq 4), \\ 6; \text{ si } n \in \{3, 4, 5\},\ p \geq 4, \\ 7; \text{ si } n \geq 6,\ p \geq 4. \end{cases}$$

Preuve. Soit $c : V \longmapsto \{1, 2, ...\}$ une coloration sur le graphe $FSSD_m(P_n \bigstar P_p)$ et soit $c(u^k_{i,r}) = c(v^k_{i,g,l}) = c(s^k_{h,i,t}) = 1$. ■

Cas 1. $n = 2$, $p \in \{2, 3\}$.

Le graphe $FSSD_m(P_n \bigstar P_p)$ contient un sous graphe induit C_6, où $\chi_p(C_6) = 4$ et on a $\chi_p(FSSD_m(P_n \bigstar P_p)) \geq \chi_p(C_6)$, donc $\chi_p(FSSD_m(P_n \bigstar P_p)) \geq 4$. Ensuite, si $p = 2$, on peut utiliser la coloration suivante: $c(u_1) = 2$, $c(u_2) = 3$, $c(v_{1,1}) = 3$, $c(v_{1,2}) = 4$, $c(v_{2,1}) = 2$, $c(v_{2,2}) = 4$. Si $p = 3$, alors on garde la même coloration, sauf pour les sommets $v_{i,g}$, $i \in \{1, 2\}$, $g \in \{1, 2, 3\}$, dans ce cas, $c(v_{1,1}) = 2$, $c(v_{1,2}) = 4$, $c(v_{1,3}) = 2$, $c(v_{2,1}) = 3$, $c(v_{2,2}) = 4$, $c(v_{2,3}) = 3$, donc $\chi_p(FSSD_m(P_n \bigstar P_p)) \leq 4$. D'où $\chi_p(FSSD_m(P_n \bigstar P_p)) = 4$. La Figure 3.4.1 fournit une coloration de packing du graphe $FSSD_1(P_2 \bigstar P_3)$.

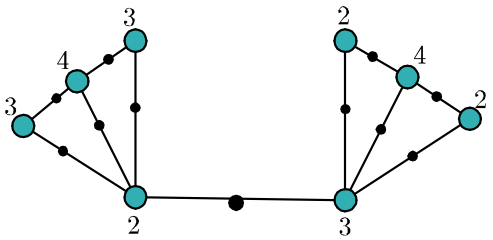


Figure 3.4.1 : Une coloration de packing de $FSSD_1(P_2 \bigstar P_3)$

Cas 2. $(n \geq 3,\ p \in \{2,3\})$ ou $(n = 2,\ p \geq 4)$.

Cas 2.1. $n \geq 3,\ p \in \{2,3\}$, on commence par les sous graphe quand $n = 3,\ p = 2$ et $m = 1$, soit $S = \{u_i,\ 1 \leq i \leq 3\} \cup \{v_{i,g},\ 1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq g \leq 2\}$ et soit c une coloration de packing optimale et on a $diam(FSSD_1(P_3 \bigstar P_2)) = 6$, donc les couleurs qui peuvent être utilisées au plus deux fois sont: $2, 3, 4, 5$.

La coloration c assigne les couleurs $2, 3, 4, 5$ au maximum de sommets possibles, si $c(u_2) = 2$ (resp. $c(u_2) = 3$) alors $\mid c^{-1}(2) \cap S \mid \leq 2$ (resp. $\mid c^{-1}(3) \cap S \mid \leq 2$), autrement, c peut attribuer la couleur 3 (resp. 2) au plus quatre fois $\mid c^{-1}(3) \cap S \mid \leq 4$ (resp. $\mid c^{-1}(2) \cap S \mid \leq 4$), et alors les sommets $u_1,\ u_3$ peuvent prendre la couleur 3 (resp. 2), l'un des sommets des sommets de $P_{2,2}$ peut prendre la couleur 2 (resp. 3) et l'autre prend la couleur 4, d'où l'un des sommets de $P_{1,2},\ P_{3,2}$ prend la couleur 5. Par conséquence, $\chi_p(FSSD_1(P_3 \bigstar P_2)) \geq 5$ et on a $\chi_p(FSSD_m(P_n \bigstar P_p)) \geq \chi_p(FSSD_1(P_3 \bigstar P_2))$, alors $\chi_p(FSSD_m(P_n \bigstar P_p)) \geq 5$.

Ensuite, on a si $p = 2$ alors la borne supérieure est donnée par la séquence suivante: $23, ...$ pour les sommets $u_i, i \in \{1, ...,\ n\}$ et la séquence 24342535 pour les sommets $v_{i,g}$, $i \in \{1, ...,\ n\}$, $g \in \{1, 2\}$. Si $p = 3$ alors on utilise la séquence $23, ...$ pour les sommets $u_i,\ i \in \{1, ...,\ n\}$ et la séquence 242343252353 pour les sommets $v_{i,g},\ i \in \{1, ...,\ n\}$, $g \in \{1, 2, 3\}$.

Donc $\chi_p(FSSD_m(P_n \bigstar P_p)) \leq 5$, d'où $\chi_p(FSSD_m(P_n \bigstar P_p)) = 5$. La Figure 3.4.2 fournit une coloration de packing du graphe $FSSD_1(P_3 \bigstar P_2)$.

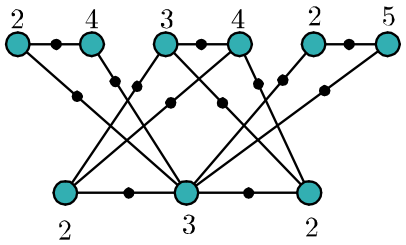


Figure 3.4.2 : Une coloration de packing de $FSSD_1(P_3 \bigstar P_2)$

Cas 2.2. $n = 2,\ p \geq 4$, dans ce cas, si $n = 2,\ p = 4$ et $m = 1$ le graphe $FSSD_1(P_2 \bigstar P_4)$ contient un sous graphe induit C_6 d'où $\chi_p(FSSD_1(P_2 \bigstar P_4)) \geq 4$.

Pour montrer que c n'est pas une coloration 4-packing dans $FSSD_1(P_2 \bigstar P_4)$, on suppose au contraire que c étant une coloration 4-packing dans $FSSD_1(P_2 \bigstar P_4)$. Alors on distingue les cas suivants:

Cas 2.2.1. $c(u_1)$, $c(u_2) \in \{2,3,4\}$.

• $\{c(u_1),\ c(u_2)\} = \{f,\ g\}$ avec $f, g \in \{2,3\}$ et $f \neq g$. Pour les sommets $v_{i,g}$, $i \in \{1,2\}$, $g \in \{1,2,3,4\}$ on distingue deux possibilités, si $c(u_i) = f$ alors on utilise la séquence de couleurs suivante : $g, 4, g, 5$, si $c(u_i) = g$, alors on utilise la séquence de couleurs suivante : f, 4, f, 5, dans les deux possibilités, il suffit d'utiliser une autre couleur, ce qui donne une contradiction avec la supposition que c étant une coloration 4-packing .

• $\{c(u_1),\ c(u_2)\} = \{4,\ g\}$ avec $g \in \{2,3\}$. Pour les sommets $v_{i,g}$, $i \in \{1,2\}$, $g \in \{1,2,3,4\}$ on distingue deux possibilités suivant les sommets u_i, $i \in \{1,2\}$, si $c(u_i) = 4$ alors on utilise la séquence suivante: $2,3,2,3$, si $c(u_i) = g$ alors on utilise la séquence suivante: $f, 4, f, 6$ avec $f, g \in \{2,3\}$ et $f \neq g$. Il y a une contradiction avec le fait que c étant une coloration 4-packing.

Cas 2.2.2. $c(v_{i,g}) \in \{2,3,4\}$, $i \in \{1,2\}$, $g \in \{1,2,3,4\}$.

Supposons que $i, g = 1$:

• Si $c(v_{1,1}) = \{2,3\}$, alors pour colorer les sommets $v_{1,2}$, $v_{1,3}$, $v_{1,4}$, on distingue deux possibilités, si $c(v_{1,1}) = 2$ alors on utilise par ordre les couleurs suivantes: $3,2,3$, si $c(v_{1,1}) = 3$ alors on utilise les couleurs suivantes: $2,3,2$, et le sommet u_1 reçoit la couleur 4 ce cas est symétrique avec le **Cas 2.2.1**. Il y a une contradiction avec le fait que c étant une coloration 4-packing.

• Si $c(v_{1,1}) = 4$, alors pour colorer les sommets $v_{1,2}, v_{1,3}$, $v_{1,4}$ on utilise par ordre les couleurs suivantes: $2,3,2$, et le sommet u_1 reçoit la couleur 5, il y a une contradiction.

Par conséquence, $\chi_p(FSSD_1(P_2 \bigstar P_4)) \geq 5$ d'où $\chi_p(FSSD_m(P_n \bigstar P_p)) \geq 5$.

Pour la borne supérieure on peut utiliser la coloration suivante: $c(u_1) = 4$, $c(u_2) = 5$ et chaque chaine $P_{i,4}$ coloré avec la séquence: $23, 23, ...$, donc $\chi_p(FSSD_m(P_n \bigstar P_p)) \leq 5$.

D'où $\chi_p(FSSD_m(P_n \bigstar P_p)) = 5$. La Figure 3.4.3 fournit une coloration de packing du graphe $FSSD_1(P_2 \bigstar P_4)$.

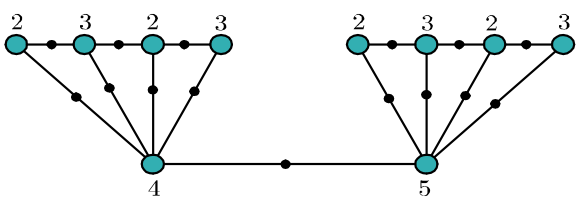


Figure 3.4.3 : Une coloration de packing de $FSSD_1(P_2 \bigstar P_4)$

Cas 3. $n \in \{3,4,5\}$, $p \geq 4$.

On prend le sous graphe $FSSD_1(P_3 \bigstar P_4)$, soit $S = \{u_i,\ 1 \leq i \leq 3\} \cup \{v_{i,g},\ 1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq g \leq 4\}$, si $c(u_2) = 2$ (resp. $c(u_2) = 3$) alors $\mid c^{-1}(2) \cap S \mid \leq 3$ (resp. $\mid c^{-1}(3) \cap S \mid \leq 3$). Autrement c peut attribuer la couleur 3 et 2 au plus six fois, $\mid c^{-1}(2) \cap S \mid \leq 6$ et$\mid c^{-1}(3) \cap S \mid \leq 6$, deux sommets de chaque chaine $P_{i,4}$ peuvent prendre la couleur 2 et les deux autres sommets peuvent prendre la couleur 3, et les sommets u_i, $i \in \{1,2,3\}$ peuvent prendre des couleurs différentes de $\{4,5,6\}$ alors $\chi_p(FSSD_1(P_3 \bigstar P_4)) = 6$, d'où $\chi_p(FSSD_m(P_n \bigstar P_p)) \geq \chi_p(FSSD_1(P_3 \bigstar P_4)) = 6$, $\forall n \in \{3,4,5\}$ et $p \geq 4$.

Pour la borne supérieure, nous utilisons les couleurs $4,5,6$ pour colorer les sommets u_i pour tout $i \in \{1,2,3\}$, les couleurs $4,5,6,4$ pour colorer les sommets u_i pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$, et les couleurs $4,5,6,4,5$ pour colorer les sommets u_i pour $i \in \{1,2,3,4,5\}$. Et nous utilisons la sequence $23,...$ pour colorer chaque chemin $P_{i,p}$, $p \geq 4$. Donc $\chi_p(FSSD_m(P_n \bigstar P_p)) \leq 6$, d'où $\chi_p(FSSD_m(P_n \bigstar P_p)) = 6$. La Figure 3.4.4 fournit une coloration de packing du graphe $FSSD_1(P_3 \bigstar P_4)$.

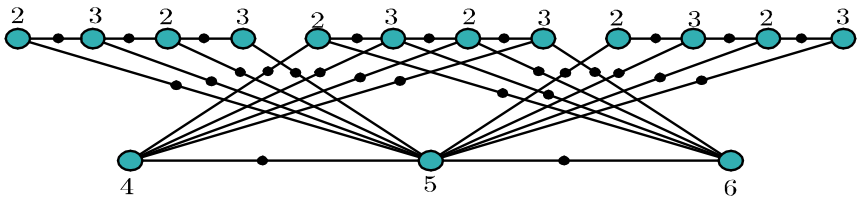


Figure 3.4.4 : Une coloration de packing de $FSSD_1(P_3 \bigstar P_4)$

Cas 4. $n \geq 6$, $p \geq 4$.

On prend le sous graphe $FSSD_1(P_6 \bigstar P_4)$, et soit $S = \{u_i,\ 1 \leq i \leq 6\} \cup \{v_{i,g},\ 1 \leq i \leq 6,\ 1 \leq g \leq 4\}$, s'il existe $i \in \{1,...,\ 6\}$ tel que $c(u_i) = 2$ (resp. $c(u_i) = 3$), alors $\mid c^{-1}(2) \cap S \mid \leq 9$ (resp. $\mid c^{-1}(3) \cap S \mid \leq 9$). Autrement c peut attribuer la couleur 2 (resp. 3) au plus 12 fois, $\mid c^{-1}(2) \cap S \mid \leq 12$ (resp. $\mid c^{-1}(3) \cap S \mid \leq 12$), alors deux sommets de chaque chaine P_4 peuvent prendre la couleur 2, les deux autres sommets peuvent prendre la couleur 3 et les sommets u_i, $i \in \{1,...,\ 6\}$ peuvent prendre des couleurs différentes de $\{4,5,6,7\}$, alors $\chi_p(FSSD_1(P_6 \bigstar P_4)) = 7$, d'où $\chi_p(FSSD_m(P_n \bigstar P_p)) \geq \chi_p(FSSD_1(P_6 \bigstar P_4)) = 7$, $\forall n \geq 6$ et $p \geq 4$.

Pour la borne supérieure, nous utilisons la sequence $456457, ...$ pour les sommets u_i, $i \in \{1, ..., n\}$ et $23, ...$ pour chaque chemin $P_{i,p}$, $p \geq 4$. Donc $\chi_p(FSSD_m(P_n \bigstar P_p)) \leq 7$, d'où $\chi_p(FSSD_m(P_n \bigstar P_p)) = 7$. La Figure 3.4.5 fournit une coloration de packing du graphe $FSSD_1(P_6 \bigstar P_4)$.

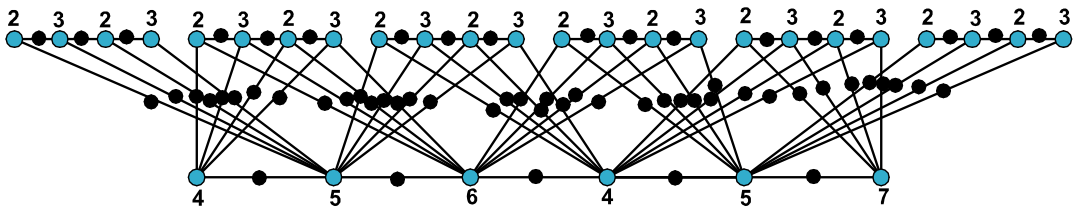


Figure 3.4.5 : Une coloration de packing d'un graphe $FSSD_1(P_6 \bigstar P_4)$

3.4.2 Coloration de packing du graphe subdivisé super fini d'une couronne voissinage d'un cycle et une chaîne

Avant de déterminer le nombre de la coloration de packing du graphe $C_n \bigstar P_p$, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 3.4.2 *Soient $n \geq 3$, $p \geq 2$ et $m \geq 1$ des entiers arbitraires. Alors pour toute coloration a-packing c du graphe $FSSD_m(C_n \bigstar P_p)$ où*

$$\begin{cases} a \leq 5 \text{ si } n \cong 0(\text{mod } 4),\ p \in \{2, 3\} \\ a \leq 7 \text{ si } (n \cong 0(\text{mod } 4),\ p \geq 4) \text{ ou } (n \ncong 0(\text{mod } 4) \text{ et } p \geq 2),\ n \notin \{5, 7, 11\} \\ a \leq 8 \text{ si } n \in \{5, 7, 11\},\ p \geq 2 \end{cases}$$

On a les cas suivants:

1. $c(u_i) \neq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$;

2. $c(v_{i,g}) \neq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$ et $g \in \{1, 2, ..., p\}$.

Preuve. Soient $n \geq 3$, $p \geq 2$ et $m \geq 1$ des entiers arbitraires, et soit c une coloration a-packing arbitraire de $FSSD_m(C_n \bigstar P_p)$. ■

1. Nous prouvons que $c(u_i) \neq 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.

Supposons que $c(u_1) = 1$, (les autres cas sont similaire). Le graphe $FSSD_m(C_n \bigstar P_p)$ contient un sous graphe $K_{1,6}$. Le sommet u_1 a 6 voisins, et puisque $diam(K_{1,6}) = 2$, alors on a au moins 7 couleurs sans contenir les couleurs utilisées pour les autres sommets de ce graphe, par conséquence la meilleure coloration est d'éviter l'utilisation de la couleur 1 sur les sommets u_i pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, d'où $c(u_i) \neq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

2. Nous prouvons que $c(v_{i,g}) \neq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$ et $g \in \{1, 2, ..., p\}$.

Supposons le contraire que $c(v_{i,g}) = 1$ pour certains i et g. Soit $c(v_{2,1}) = 1$, si $m \geq 2$, le sommet $v_{2,1}$ a au moins 6 voisins qui sont par paire à distance 2, et puisque $c(u_i) \neq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, donc c utilise au moins 7 couleurs sans contenir les couleurs utilisées pour les sommets u_i, une contradiction.

Si $m = 1$, puisque $c(u_i) \neq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, alors pour chaque $i \in \{1, 2, ..., n\}$, u_i reçoivent des couleurs différentes de $\{2, 3, ..., a\}$, on distingue les cas suivants:

Cas 1. $n \cong 0(\mathrm{mod}\, 4)$, $p \geq 2$.

Cas 1.1 $n \cong 0(\mathrm{mod}\, 4)$, $p \in \{2, 3\}$.

Dans ce cas, le graphe $FSSD_m(C_n \bigstar P_p)$ contient un sous graphe $FSSD_1(P_4 \bigstar P_2)$, si $c(v_{2,1}) = 1$ d'après le lemme **3.4.1,** c utilise au moins 6 couleurs sans contenir les couleurs utilisées pour les autres sommets où $n = 4$, $p = 2$, une contradiction.

Cas 1.2. $n \cong 0(\mathrm{mod}\, 4)$, $p \geq 4$.

Dans ce cas, le graphe $FSSD_m(C_n \bigstar P_p)$ contient un sous graphe $FSSD_1(P_4 \bigstar P_4)$, si $c(v_{2,1}) = 1$ d'après le lemme **3.4.1**, c utilise au moins 7 couleurs sans contenir les couleurs utilisées pour les autres sommets où $n = 4, p = 4$, une contradiction.

Cas 2. $n \ncong 0(\mathrm{mod}\, 4)$, $p \geq 2$.

Cas 2.1. $n \ncong 0(\mathrm{mod}\, 4)$, $p \in \{2, 3\}$.

Dans ce cas, si $c(v_{2,1}) = 1$, le sommet $v_{2,1}$ a 3 voisins qui sont par paire à distance 2, alors peuvent prendre des couleurs différentes par paire de $\{2, 3, 4\}$, donc les sommets u_1, u_3 et $v_{2,2}$ peuvent prendre des couleurs différentes par paire de $\{5, 6, 7\}$, d'où c utilise au moins 7 couleurs sans contenir les couleurs utilisées pour les autres sommets, une contradiction.

Cas 2.2. $n \ncong 0(\mathrm{mod}\, 4)$, $p \geq 4$.

Ce cas est symétrique avec le **Cas 1.2.** c utilise au moins 7 couleurs sans contenir les couleurs utilisées pour les autres sommets, une contradiction.

Par conséquence, nous déduisons que notre lemme est finalement prouvé.

Théorème 3.4.2 *Soient $n \geq 3$, $p \geq 2$ et $m \geq 1$ des entiers arbitraires. Alors*

$$\chi_p(FSSD_m(C_n \bigstar P_p)) = \begin{cases} 5; \text{ si } n \cong 0(\text{mod}\, 4),\ p \in \{2,3\}, \\ 6; \text{ si } n = 3,\ p \geq 2, \\ 7; \text{ si } (n \cong 0(\text{mod}\, 4),\ p \geq 4) \text{ ou } (n \ncong 0(\text{mod}\, 4) \text{ et } p \geq 2),\ n \notin \{5,7,11\}, \\ 8; \text{ si } n \in \{5,7,11\},\ p \geq 2. \end{cases}$$

Preuve. Soient $n \geq 3$, $p \geq 2$ et $m \geq 1$ des entiers arbitraires. Et soit $c(u^k_{i,j}) = c(v^k_{i,g,,l}) = c(s^k_{h,i,t}) = 1$. ■

Cas 1. $n \cong 0(\text{mod}\, 4)$, $p \in \{2,3\}$.

Dans ce cas, le graphe $FSSD_m(C_n \bigstar P_p)$ contient un sous graphe induit $FSSD_1(P_4 \bigstar P_2)$, et on a d'après le théorème $\chi_p(FSSD_1(P_4 \bigstar P_2)) = 5$, et puisque $\chi_p(FSSD_m(C_n \bigstar P_p)) \geq \chi_p(FSSD_1(P_4 \bigstar P_2))$, alors

$\chi_p(FSSD_m(C_n \bigstar P_p)) \geq 5$.

Pour la borne supérieure, si $p = 2$, alors pour les sommets u_i, $i \in \{1, ..., n\}$, nous utilisons la séquence des couleurs $23, ...$ Pour les sommets $v_{i,g}$, $i \in \{1, ..., n\}$, $g \in \{1,2\}$, nous utilisons la séquence $24342535, ...$ D'où $\chi_p(FSSD_m(C_n \bigstar P_p)) \leq 5$. Si $p = 3$, alors nous utilisons la même séquence pour les sommets u_i, $i \in \{1, ..., n\}$, pour $v_{i,g}$, $i \in \{1, ..., n\}$ et $g \in \{1,2,3\}$, nous utilisons la séquence $242343252353, ...$ D'où $\chi_p(FSSD_m(C_n \bigstar P_p)) \leq 5$.

Par conséquence, $\chi_p(FSSD_m(C_n \bigstar P_p)) = 5$. La Figure 3.4.6 fournit une coloration de packing du graphe $FSSD_m(C_4 \bigstar P_2)$.

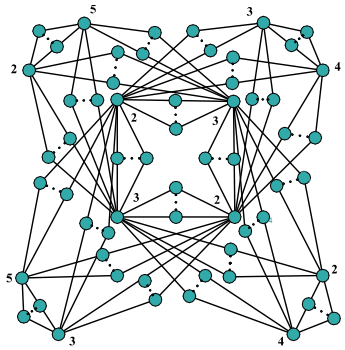


Figure 3.4.6 : Une coloration de packing de $FSSD_m(C_4 \bigstar P_2)$

Cas 2. $n = 3$, $p \geq 2$.

Dans ce cas, le graphe C_3 est isomorphe à K_3 donc $FSSD_m(C_3 \bigstar P_p)$ est isomorphe à $FSSD_m(K_3 \bigstar P_p)$ pour tout $p \geq 2$ et $m \geq 1$, et donc d'après le Théorème 2.5.1, $\chi_p(FSSD_m(C_3 \bigstar P_p))$ $= \chi_p(FSSD_m(K_3 \bigstar P_p)) = n + 3 = 6$, ce qui donne le résultat.

La Figure 3.4.7 fournit une coloration de packing du graphe $FSSD_2(C_3 \bigstar P_2)$.

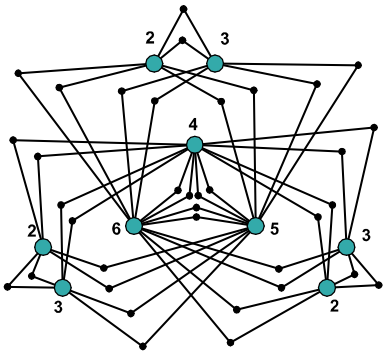


Figure 3.4.7 : Une coloration de packing de $FSSD_2(C_3 \bigstar P_2)$

Cas 3. $(n \cong 0(\mathrm{mod}\, 4),\ p \geq 4)$ ou $(n \ncong 0(\mathrm{mod}\, 4),\ p \geq 2)$, $n \notin \{5, 7, 11\}$.

Cas 3.1. $n \cong 0(\mathrm{mod}\, 4)$, $p \geq 4$.

Dans ce cas, le graphe $FSSD_m(C_n \bigstar P_p)$ contient un sous graphe $FSSD_1(P_4 \bigstar P_p)$. Soit u_1, u_2, u_3, u_4 la chaîne d'un sous graphe de $FSSD_m(C_n \bigstar P_p)$. Supposons que $c(u_1) = c(u_3) = 2$ et $c(u_2) = c(u_4) = 3$ (les autres cas sont similaires). Soit u_2 un sommet tel que: $c(u_2) = 2$, alors les sommets $v_{1,g}$, $g \in \{1, 2, 3, 4\}$ peuvent être colorés comme suit: $c(v_{1,1}) = 3$, $c(v_{1,2}) = 4$, $c(v_{1,3}) = 3$ et $c(v_{1,4}) = 5$ (les autres cas sont similaires). On prend la chaîne $v_{3,1}$, $v_{3,2}$, $v_{3,3}$, $v_{3,4}$, on a $d_{FSSD_m(C_n \bigstar P_4)}(\{v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}, v_{1,4}\}, \{v_{3,1}, v_{3,2}, v_{3,3}, v_{3,4}\}) \leq 4$,

la couleur 3 ne peut être utilisée que deux fois sur cette chaîne et autres nouvelles couleurs sont utilisées, par conséquence $\chi_p(FSSD_m(C_n\bigstar P_p)) \geq 7$.

Si la couleur 2 n'est pas utilisée sur les sommets u_i, $i \in \{1, ..., n\}$, alors on aurra au moins cinq couleurs, soit $c(u_1) = c(u_3) = 3$, $c(u_2) = 4$ et $c(u_4) = 5$ (les autres cas sont similaires). Pour les sommets $v_{i,g}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $g \in \{1, 2\}$, $c(v_{1,1}) = 2$, $c(v_{1,2}) = 2$, $c(v_{2,1}) = 2$, $c(v_{2,2}) = 6$, $c(v_{3,1}) = 2$, $c(v_{3,2}) = 3$, $c(v_{4,1}) = 2$ et $c(v_{4,2}) = 7$. Alors $\chi_p(FSSD_m(C_n\bigstar P_p)) \geq 7$.

Pour la borne supérieure, nous utilisons la séquence des couleurs $4567, ...$ pour les sommets u_i, $i \in \{1, ..., n\}$, et pour les sommets $v_{i,g}$, $i \in \{1, ..., n\}$ et $g \in \{1, ..., p\}$, nous utilisons la séquence $23, ...$ D'où, $\chi_p(FSSD_m(C_n\bigstar P_p)) \leq 7$.

Par conséquence, $\chi_p(FSSD_m(C_n\bigstar P_p)) = 7$. La Figure 3.4.8 fournit une coloration de packing du graphe $FSSD_2(C_8\bigstar P_2)$.

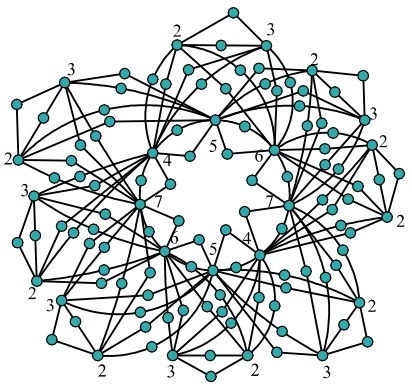


Figure 3.4.8 : Une coloration de packing de $FSSD_2(C_8\bigstar P_2)$

Cas 3.2. $n \ncong 0(\mathrm{mod}\, 4)$, $p \geq 2$, $n \notin \{5, 7, 11\}$.

Supposons que les couleurs 2 et 3 sont utilisées sur les sommets u_i, $i \in \{1, ..., n\}$. Soit u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 les sommets d'un cycle C_n d'un sous graphe de $FSSD_m(C_n\bigstar P_p)$, alors les sommets peuvent être colorés par la séquence: $23, 23, 23$, les sommets $v_{i,g}$, $i \in \{1, ..., 6\}$, $g \in \{1, 2\}$ peuvent être colorés comme suit: $c(v_{1,1}) = 2$, $c(v_{1,2}) = 4$, $c(v_{2,1}) = 3$, $c(v_{2,2}) = 4$, $c(v_{3,1}) = 2$, $c(v_{3,2}) = 5$, $c(v_{4,1}) = 3$, $c(v_{4,2}) = 5$, $c(v_{5,1}) = 2$, $c(v_{5,2}) = 6$, $c(v_{6,1}) = 3$ et $c(v_{6,2}) = 7$, donc $\chi_p(FSSD_m(C_n\bigstar P_p)) \geq 7$. Si la couleur 2 (resp. 3) n'est pas utilisée sur les sommets u_i, $i \in \{1, ..., n\}$, alors on peut utiliser la coloration suivante: $c(u_1) = c(u_3) = c(u_5) = 3$, $c(u_2) = 4$, $c(u_4) = 5$ et $c(u_6) = 6$ (les autres cas sont simulaires). Les sommets

$v_{i,g}$, $i \in \{1, ..., 6\}$, $g \in \{1, 2\}$ peuvent être colorés comme suit: $c(v_{1,1}) = 2$, $c(v_{1,2}) = 4$, $c(v_{2,1}) = 3$, $c(v_{2,2}) = 4$, $c(v_{3,1}) = 2$, $c(v_{3,2}) = 5$, $c(v_{4,1}) = 3$, $c(v_{4,2}) = 5$, $c(v_{5,1}) = 2$, $c(v_{5,2}) = 6$, $c(v_{6,1}) = 3$ et $c(v_{6,2}) = 7$, donc $\chi_p(FSSD_m(C_n \bigstar P_p)) \geq 7$.

Pour la borne supérieure, nous utilisons la séquence des couleurs 23, ... pour les sommets $v_{i,g}$, $i \in \{1, ..., n\}$ et $g \in \{1, ..., p\}$, et pour les sommets u_i, $i \in \{1, ..., n\}$, nous utilisons la coloration suivante:

• Si $n \cong 0(\mathrm{mod}\, 6)$, alors nous utilisons le motif de couleurs 456457.

• Si $n \cong 1(\mathrm{mod}\, 6)$, alors nous commençons la coloration des sommets avec 7546574567456, et nous répetons le motif 457456, si $n = 13$ alors le bloc répété est omis.

• Si $n \cong 2(\mathrm{mod}\, 6)$, alors nous utilisons le motif de couleurs 75465745674564 et nous répetons le motif 754654.

• Si $n \cong 3(\mathrm{mod}\, 6)$, alors nous commençons la coloration des sommets avec les couleurs 4567, et nous répetons le bloc 456457 et nous terminons par 45675, le bloc répété est omis dans le cas où $n = 9$.

• Si $n \cong 4(\mathrm{mod}\, 6)$, alors nous répétons la séquence des couleurs 456457, et nous terminons par 4567.

• Si $n \cong 5(\mathrm{mod}\, 6)$, alors nous commençons la coloration avec le motif 754657456, et nous répétons le bloc 457456 et nous terminons par 75467546.

Donc $\chi_p(FSSD_m(C_n \bigstar P_p)) \leq 7$.

Par conséquence, $\chi_p(FSSD_m(C_n \bigstar P_p)) = 7$. La Figure 3.4.9 fournit une coloration de packing du graphe $FSSD_1(C_6 \bigstar P_2)$.

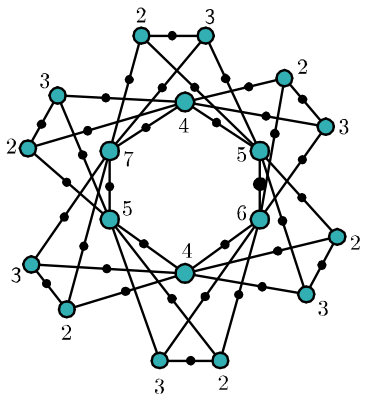


Figure 3.4.9 : Une coloration de packing de $FSSD_1(C_6 \bigstar P_2)$

Cas 4. $n \in \{5, 7, 11\}$

Supposons que les couleurs 2 et 3 sont utilisées sur les sommets u_i, $i \in \{1, ..., n\}$. Soit u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 les sommets du cycle C_n dans le sous graphe de $FSSD_m(C_n \bigstar P_p)$. Soit u_3 un sommet de $FSSD_m(C_n \bigstar P_p)$ tel que: $c(u_3) = 4$, alors immédiatement $c(u_1) = c(u_4) = 2$ et $c(u_2) = c(u_5) = 3$ (les autres cas sont similaires). Alors les sommets $v_{i,g}$, $i \in \{2, 3, 4, 5\}$, $g \in \{1, 2\}$ peuvent être colorés comme suit: $c(v_{2,1}) = 3$, $c(v_{2,2}) = 5$, $c(v_{3,1}) = 5$, $c(v_{3,2}) = 6$, $c(v_{4,1}) = 2$, $c(v_{4,2}) = 7$, $c(v_{5,1}) = 3$ et $c(v_{5,2}) = 8$**,** donc $\chi_p(FSSD_m(C_n \bigstar P_p)) \geq 8$. Si la couleur 2 n'est pas utilisée sur les sommets u_i, $i \in \{1, ..., n\}$, alors nous avons $\chi_p(FSSD_m(C_n \bigstar P_p)) \geq 5$. En effet, soit le sommet u_2 tel que: $c(u_2) = 4$, alors $c(u_1) = c(u_3) = 3$ et $c(u_4) = 5$, $c(u_5) = 6$ (les autres cas sont similaires). Les sommets $v_{i,g}$, $i \in \{2, 3, 4, 5\}$, $g \in \{1, 2\}$ peuvent être colorés comme suit: $c(v_{2,1}) = 2$, $c(v_{2,2}) = 7$, $c(v_{3,1}) = 2$, $c(v_{3,2}) = 3$, $c(v_{4,1}) = 2$, $c(v_{4,2}) = 4$, $c(v_{5,1}) = 2$ et $c(v_{5,2}) = 8$. Donc $\chi_p(FSSD_m(C_n \bigstar P_p)) \geq 8$.

Pour la borne supérieure, nous utilisons la séquence des couleurs 23, ... pour les sommets $v_{i,g}$, $i \in \{1, ..., n\}$ et $g \in \{1, ..., p\}$, et pour les sommets u_i, $i \in \{1, ..., n\}$, nous utilisons la coloration suivante:

- Si $n = 5$, alors nous utilisons le motif de couleurs 45678.
- Si $n = 7$, alors nous utilisons le motif de couleurs 4564578.
- Si $n = 11$, alors nous utilisons le motif de couleurs 75465745648.

Donc $\chi_p(FSSD_m(C_n \bigstar P_p)) \leq 8$.

Par conséquence, $\chi_p(FSSD_m(C_n \bigstar P_p)) = 8$. La Figure 3.4.10 fournit une coloration de packing du graphe $FSSD_1(C_7 \bigstar P_2)$.

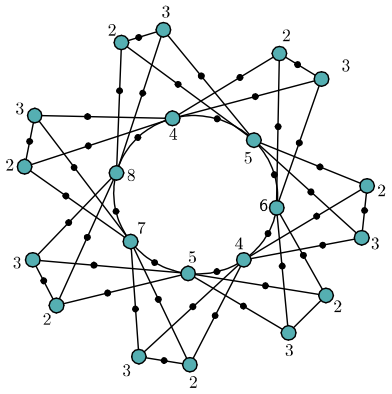


Figure 3.4.10 : Une coloration de packing de $FSSD_1(C_7 \bigstar P_2)$

3.4.3 Coloration de packing de la couronne voisinage d'un graphe complet avec une chaîne

Théorème 3.4.3 *Pour tout $n \geq 3$ et $p \geq 2$,*

$$\chi_p(K_n \bigstar P_p) = \begin{cases} n + n\frac{P}{2} + 1; & \text{si } p \text{ est pair,} \\ n\frac{(P+1)}{2} + 1; & \text{si } p \text{ est impair.} \end{cases}$$

Preuve. Pour montrer la borne inferieure,on note par u_i ; $i \in \{1,\ 2, ...,\ n\}$ les sommets de K_n, $P_{i,p}$ la chaîne correspondante à chaque u_i. Notons par c une coloration de packing optimale du graphe $(K_n \bigstar P_p)$. Soit $S = \{u_i;\ 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_{i,g};\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq g \leq p\}$. Puisque le graphe $(K_n \bigstar P_p)$ est de diamétre 2, alors la seule couleur utilisée deux fois ou plus est 1 et comme c est une coloration de packing optimale de ce graphe, elle assigne la couleur 1 au maximum sommets possibles. S'il existe $i \in \{1,\ 2, ...,\ n\}$ tel que $c(u_i) = 1$, $|c^{-1}(1) \cap S| = \frac{P}{2} + 1$ (resp $\frac{(P+1)}{2} + 1$) si p est pair (resp. p est impair), alors $\chi_p(K_n \bigstar P_p) = (n + np) - [(\frac{P}{2} + 1] + 1 = n + n\frac{P}{2} - \frac{P}{2}$ (resp. $n + np - (\frac{P+1}{2})$) si p est pair (resp. p est impair). Autrement c peut attribuer la couleur 1 seulement au sommets de $P_{i,p}$ tel que: $|c^{-1}(1) \cap S| = n\frac{P}{2}$ (resp. $n\frac{(P+1)}{2}$) si p est pair (resp. si p est imapair), alors $\chi_p(K_n \bigstar P_p) = (n + np) - (n\frac{P}{2}) + 1 = n + n\frac{P}{2} + 1$ (resp. $n\frac{(P+1)}{2} + 1$) si p est pair (resp. si p est imapair). Par conséquence c est optimale si $c(u_i) \neq 1$. ■

Alors, $\chi_p(K_n \bigstar P_p) \geq n + n\frac{P}{2} + 1$ si p est pair, ou $\chi_p(K_n \bigstar P_p) \geq n\frac{(P+1)}{2} + 1$ si p est impair.

Pour montrer la borne supérieure, on forme la coloration suivante: on colore les $\frac{P}{2}$ (resp. $\frac{P+1}{2}$) sommets de $P_{i,p}$ si p est pair (resp. p est impair) avec la couleur 1 et les sommets qui reste avec des couleurs differentes de $\{2, 4, ...\}$. Alors,

$\chi_{_p}(K_n \bigstar P_p) \leq n + n\frac{P}{2} + 1$ si p est pair, ou $\chi_{_p}(K_n \bigstar P_p) \leq n\frac{(P+1)}{2} + 1$ si p est impair.

et notre théorème est prouvé. La Figure 3.4.11 fournit une coloration de packing du graphe $K_4 \bigstar P_2$.

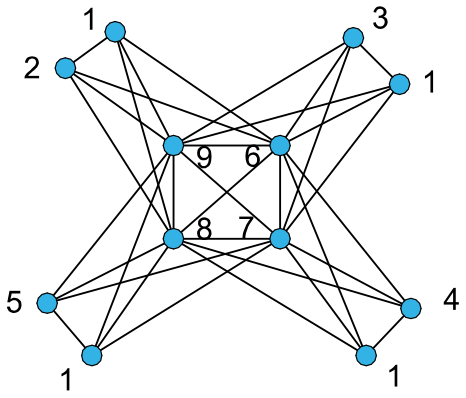


Figure 3.4.11 : Une coloration de packing de $K_4 \bigstar P_2$

3.5 La couronne de deux graphes

3.5.1 Coloration de packing de la couronne d'un graphe complet avec une chaîne

Théorème 3.5.1 *Pour tout $n \geq 3$ et $p \geq 2$,*

$$\chi_{_p}(K_n \odot P_p) = \begin{cases} n\frac{P}{2} + 2 & \text{si } p \text{ est pair,} \\ n\frac{P-1}{2} + 2 & \text{si } p \text{ est impair.} \end{cases}$$

preuve Pour montrer la borne inférieure, on note par u_i; $i \in \{1,\ 2, ...,\ n\}$ les sommets de K_n, $P_{i,p}$ la chaîne correspondante à chaque u_i. Notons par c une coloration de packing optimale du graphe $(K_n \odot P_p)$. Soit $A = \{u_i;\ 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_{i,g};\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq g \leq p\}$. Puisque le graphe $(K_n \odot P_p)$ est de diamétre 3, alors les couleurs utilisées deux fois ou

plus sont 1 et 2 et comme c est une coloration de packing optimale de ce graphe, elle assigne les couleurs 1 et 2 au maximum sommets possibles.

Premièrement, s'il existe $i \in \{1,\ 2, ...,\ n\}$ tel que $c(u_i) = 1$, alors $|c^{-1}(1) \cap A| = (n-1)\frac{P}{2} + 1$ (resp. $(n-1)\frac{(P+1)}{2} + 1$) si p est pair (resp. si p est impair), et $|c^{-1}(2) \cap A| = n$ (un sommet de chaque $P_{i,p}$) et donc $\chi_{_p}(K_n \odot P_p) = (n+np) - [(n-1)\frac{P}{2} + 1 + n] + 2 = n\frac{P}{2} + \frac{P}{2} + 1$ (resp. $n\frac{(P-1)}{2} + \frac{(P+3)}{2}$) si p est pair (resp. p est impair). Autrement c peut attribuer la couleur 1 seulement au sommets de $P_{i,p}$ tel que: $|c^{-1}(1) \cap A| = n\frac{P}{2}$ (resp. $n\frac{(P+1)}{2}$) si p est pair (resp. si p est imapair) et donc $\chi_{_p}(K_n \odot P_p) = (n+np) - (n\frac{P}{2} + n) + 2 = n\frac{P}{2} + 2$ (resp. $n\frac{(P-1)}{2} + 2$) si p est pair (resp. si p est imapair). Par conséquence c est optimale si $c(u_i) \neq 1$.

D'autre part, s'il existe $i \in \{1, ..., n\}$ tel que $c(u_i) = 2$, $|c^{-1}(2) \cap A| = 1$, alors $\chi_{_p}(K_n \odot P_p) = (n + np) - (n\frac{P}{2} + 1) + 2 = n(\frac{P}{2} + 1) + 1$ (resp. $n\frac{(P+1)}{2} + 1$) si p est pair (resp. p est impair). Autrement c peut attribuer la couleur $2n$ fois, d'où : $\chi_{_p}(K_n \odot P_p) = n\frac{P}{2} + 2$ (resp. $n\frac{(P-1)}{2} + 2$) si p est pair (resp. si p est imapair). Par conséquence c est optimale si $c(u_i) \neq 2$.

Alors, $\chi_{_p}(K_n \odot P_p) \geq n\frac{P}{2} + 2$ si p est pair, ou $\chi_{_p}(K_n \odot P_p) \geq n\frac{P-1}{2} + 2$ si p est impair.

Pour montrer la borne supérieure, on forme la coloration suivante, on colore les $\frac{P}{2}$ (resp. $\frac{P+1}{2}$) sommets de $P_{i,p}$ si p est pair (resp. p est impair) avec la couleur 1 et un sommet de chaque $P_{i,p}$ avec la couleur 2 et les sommets restants avec des couleurs differentes de $\{3, 4, ...\}$. Par conséquence,

$\chi_{_p}(K_n \odot P_p) \leq n\frac{P}{2} + 2$ si p est pair, ou $\chi_{_p}(K_n \odot P_p) \leq n\frac{P-1}{2} + 2$ si p est impair.

D'où le résultat .

La Figure 3.5.1 fournit une coloration de packing du graphe $K_6 \odot P_2$.

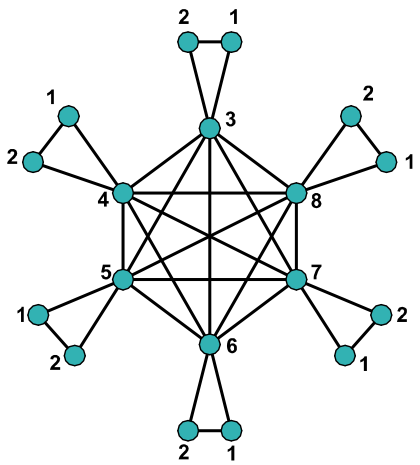


Figure 3.5.1 : Une coloration de packing de $K_6 \odot P_2$

3.5.2 Coloration de packing d'un graphe subdivisé super fini de la couronne d'un graphe complet et une chaîne

Pour déterminer le nombre $\chi_{_p}(FSSD_m(K_n \odot P_p))$, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 3.5.1 *Soient $n \geq 3$, $p \geq 2$ et $m \geq 1$ des entiers arbitraires. Alors, pour toute coloration a-packing c du graphe $FSSD_m(K_n \odot P_p)$, où $a \leq n+3$, on a les cas suivants :*

1. *$c(u_i) \neq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

2. *$c(v_{i,g}) \neq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et $g \in \{1, 2, \ldots, p\}$.*

Preuve. Soient $n \geq 3$, $p \geq 1$ et $m \geq 1$ des entiers arbitraires et soit c une coloration a-packing du graphe $FSSD_m(K_n \odot P_p)$, où $a \leq n+3$. ■

1. Nous prouvons que $c(u_i) \neq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Supposons le contraire que $c(u_i) = 1$ pour certain $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Soit $i = 1$, notons que u_1 a $m(n-1)+mp$ voisins, puisque $m \geq 1$ et $p \geq 2$ donc u_1 a au moins $n+1$ voisins qui sont par paire à distance 2. Alors c utilise des couleurs différentes de $\{2, \ldots, n+2\}$ sur ces voisins.

Cas 1. Si l'un des sommets de $u_{i,j}^{(k)}$; $i, j \in \{2, \ldots, n\}$, $i \neq j$ prend la couleur 2, alors l'un des sommets $v_{1,g}^{(k)}$; $g \in \{1, 2, \ldots, p\}$ peut prendre la couleur 2, mais il n'y a pas des couleurs disponibles pour les autres sommets. Donc c utilise au moins $n+2+1+1 = n+4$, une contradiction.

Cas 2. Si l'un des sommets de $s^{(k)}_{1,1,g}$, $g \in \{1, 2, \ldots, p\}$ prend la couleur 2, alors il n'y a des couleurs disponibles pour les sommets $v^{(k)}_{1,g}$; $g \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Donc c utilise au moins $n + 2 + 1 + 2 = n + 5$, une contradiction.

2. Nous prouvons que $c(v_{i,g}) \neq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et $g \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Supposons que $c(v_{1,1}) = 1$, le sommet $v_{1,1}$ a au moins deux voisins $v^1_{1,1,2}$ et $s^1_{1,1,1}$. On distingue les cas suivants:

Cas 1. Si $c(v^1_{1,1,2}) = 2$ et $c(s^1_{1,1,1}) = 3$, alors l'un des sommets u_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ peut prendre la couleur 2 et les autres sommets peuvent prendre des couleurs différentes par paire de $\{4, \ldots, n + 2\}$. Donc c utilise au moins $n + 2 + 1 + 2 = n + 5$, une contradiction.

Cas 2. Si $c(v^1_{1,1,2}) = a$, $a \in \{3, 4\}$ et $c(s^1_{1,1,1}) = 2$, alors deux sommets de u_i, $i \in \{2, \ldots, n\}$ peut prendre la couleur 2 et a et les sommets restants de K_n peuvent prendre des couleurs différentes de $\{a + 1, \ldots, n + 1\}$. Donc c utilise au moins $n + 1 + 1 + 2 = n + 4$, une contradiction.

D'où le lemme est prouvé.

Théorème 3.5.2 *Si $n \geq 3$, $p \geq 2$ et $m \geq 1$, alors*

$$\chi_\rho(FSSD_m(K_n \odot P_p)) = n + 3.$$

Preuve. Afin de montrer que $\chi_\rho(FSSD_m(K_n \odot P_p)) \leq n + 3$ pour tout $n \geq 3$, $p \geq 1$ et $m \geq 1$, on forme une coloration $(n + 3)$-packing de $FSSD_m(K_n \odot P_p)$. Premièrement, on colore les sommets $u^k_{i,j}$, $v^k_{i,g,h}$ et $s^k_{i,j,g}$ pour tout i, $j \in \{1,\ 2, ..., n\}$, $i \neq j$, g, $h \in \{1,\ 2,..., p\}$, $g \neq h$ et $k \in \{1, ..., m\}$, avec la couleur 1. Alors les sommets non colorés, qui correspondent aux sommets de $V(P_{i,p})$, $i \in \{1,\ 2, ..., n\}$ sont colorés l'un après l'autre avec la séquence de couleurs suivante: 2, 3, 2, 3,.... Finalement, on colore les sommets u_1, u_2,..., u_n avec n nouvelles couleurs. Il est facile de vérifier que la coloration de packing du graphe donné est égale à $n+3$ et donc $\chi_\rho(FSSD_m(K_n \odot P_p)) \leq n+3$. Ensuite, prouvons que $\chi_\rho(FSSD_m(K_n \odot P_p)) \geq n + 3$ pour tout $n \geq 3$, $p \geq 1$ et $m \geq 1$. Premièrement, on considère le sous graphe $FSSD_m(K_n \odot P_2)$, où $n \geq 3$ et $m \geq 1$ sont des entiers arbitraires. Notons par c une coloration de packing optimale de ce graphe. Notons que c est une coloration a-packing, où $a \leq n+3$. En utilisant le Lemme 3.5.1, nous en déduisons que $c(u_i) \neq 1$ et $c(v_{i,g}) \neq 1$ pour tout $i \in \{1,\ 2, ..., n\}$ et $g \in \{1,\ 2\}$. Soit $A = \{u_i;\ 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_{i,g};\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq g \leq 2\}$.

Notons que tous les sommets de $V(FSSD_m(K_n \odot P_2)) \backslash A$ reçoivent la couleur 1 par c et tous les sommets de A reçoivent des couleurs de $\{2,\ 3, ...,\ a\}$ par c. Puisque les sommets de A sont par paire à distance au plus 6, nous avons: $|c^{-1}(i) \cap A| = 1$ pour tout $i \in \{6,\ 7, ...,\ a\}$. En d'autres termes, pour chaque couleur $i \in \{6,\ 7, ...,\ a\}$, il n'y a qu'un seul sommet de A, coloré par i. Alors, puisque c est une coloration de packing optimale de $FSSD_m(K_n \odot P_2)$, elle assigne les couleurs 2, 3, 4 et 5 au maximum de sommets possibles. ■

Cas 1 S'il existe $i \in \{1,\ 2, ...,\ n\}$ tel que $c(u_i) = 2$ (resp. $c(u_i) = 3$), alors $|c^{-1}(2) \cap A| \leq n$ (resp. $|c^{-1}(3) \cap A| \leq n$) et $v^k_{j,1} = 2 \quad (i \neq j)$,$v^k_{i,2} = 3$ et $v^k_{i,1} = 4$ et les autres sommets de K_n peuvent reçoivent les couleurs $\{5, 6, ...,\ a\}$ une seule fois et alors, $\chi_\rho(FSSD_m(K_n \odot P_2)) \geq n + 3$.Sinon, c peut attribuer la couleur 2 (resp. 3) a au plus n sommets (un sommet de chaque P_2 peut être coloré avec la couleur 2 et l'autre avec la couleur 3) et les sommets de K_n peuvent recevoir les couleurs $\{4, 5, ..., a\}$ une seule fois et alors, $\chi_\rho(FSSD_m(K_n \odot P_2)) \geq n + 3$.

Cas 2 S'il existe $i \in \{1,\ 2, ...,\ n\}$ tel que $c(u_i) = 4$ (resp. $c(u_i) = 5$), alors $|c^{-1}(4) \cap A| \leq 1$ (resp. $|c^{-1}(5) \cap A| \leq 1$). Autrement c peut attribuer la couleur 4 (resp. 5) à au plus n sommets (un sommet de chaque P_2 peut être coloré avec la couleur 4), qui est supérieure à 1. Par conséquent, $c(u_i) \neq 4$ et $c(u_i) \neq 5$, et rappelons que $c(u_i) \neq 1$ d'après le Lemme 3.5.1 pour tout $i \in \{1,\ 2, ...,\ n\}$ et les sommets de K_n peuvent recevoir les couleurs $\{2, 3, 6, 7, ...,\ a\}$ une seule fois, ce qui implique que c utilise au moins $n + 3$ couleurs. Par conséquent, $\chi_\rho(FSSD_m(K_n \odot P_2)) \geq n + 3$.

Cas 3 S'il existe i,$j \in \{1, ...,\ n\}$ tel que $c(u_i) = 2$, $c(u_j) = 4$, alors dans ce cas c peut attribuer les couleurs 3 et 5 à chaque P_2 et les couleurs de $\{6, 7, ...\}$ au autres sommets de A. Par conséquence $\chi_\rho(FSSD_m(K_n \odot P_2)) \geq n + 3$.

Cas 4 S'il existe i,$j \in \{1, ...,\ n\}$ tel que $c(u_i) = 3$, $c(u_j) = 4$, alors c peut attribuer les couleurs 2 et 5 à chaque P_2 et les couleurs de $\{6, 7, ...\}$ au autres sommets de A. Par conséquence $\chi_\rho(FSSD_m(K_n \odot P_2)) \geq n + 3$.

cas 6 S'il existe i,$j \in \{1, ..., n\}$ tel que $c(u_i) = 2$, $c(u_j) = 5$, alors dans ce cas c peut attribuer les couleurs 3 et 4 à chaque P_2 et les couleurs de $\{6, 7, ...\}$ au autres sommets de A. Par conséquence $\chi_\rho(FSSD_m(K_n \odot P_2)) \geq n + 3$.

cas 7 S'il existe $i,j \in \{1,...,n\}$ tel que $c(u_i) = 3$, $c(u_j) = 5$, alors dans ce cas c peut attribuer les couleurs 2 et 4 à chaque P_2 et les couleurs de $\{6,7,...\}$ au autres sommets de A. Par conséquence $\chi_\rho(FSSD_m(K_n \odot P_2)) \geq n+3$.

De plus, puisque $\chi_\rho(FSSD_m(K_n \odot P_p))$, $m \geq 1$, $n \geq 3$, $p \geq 2$, contient un sous-graphe isomorphe à $FSSD_m(K_n \odot P_2)$, $\chi_\rho(FSSD_m(K_n \odot P_p)) \geq FSSD_m(K_n \odot P_2) \geq n+3$, ce qui complète la preuve.

La Figure 3.5.2 fournit une coloration de packing du graphe $FSSD_m(K_4 \odot P_3)$.

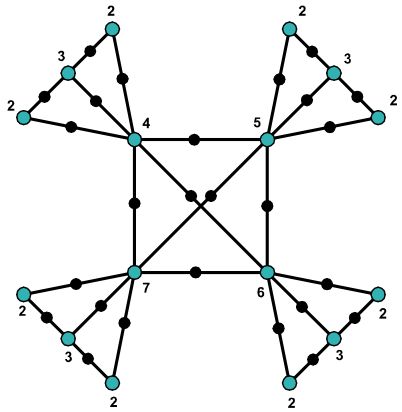


Figure 3.5.2 : Une coloration de packing d'un graphe $FSSD_m(K_4 \odot P_3)$

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéréssés principalement à l'étude du problème de la coloration de packing qui a été introduit par **Goddard** et **al**. [19] . On a commencé dans le premier chapitre par rappeler quelques notions de base sur la théorie des graphes et dans le deuxième chapitre par les différents résultats à propos de la coloration de packing, notamment les résultats trouvés par **Goddard** et **al**. [4]. Le chapitre 3 porte sur notre étude de la coloration de packing. Nos contributions relatives à ce chapitre concerne d'une part la détermination du nombre chromatique de packing de certains graphes. Dans ce contexte, nous avons obtenu les valeurs exactes du nombre chromatique de packing du graphe puissance des graphes: étoile, graphe biparti complet et d'un arbre à diamètre 3 et 4. Nous avons donné aussi la borne inférieure du nombre chromatique de packing d'un graphe puissance de cycle. D'autre part, nous avons déterminé le nombre chromatique de packing des graphes subdivisés super finis d'une couronne voisinage de deux graphes : chaîne avec une chaîne $FSSD_m(P_n \bigstar P_p)$ et cycle avec une chaîne $FSSD_m(C_n \bigstar P_p)$. Ensuite, nous avons déterminé la valeur exacte du nombre chromatique de packing d'une couronne voisinage des deux graphes $K_n \bigstar P_p$, et d'une couronne d'un graphe complet avec une chaîne $K_n \odot P_p$, et pour la couronne voisinage d'un graphe complet par une chaîne $K_n \bigstar P_p$. On a terminé ce mémoire par la détermination du nombre chromatique de packing du graphe subdivisé super fini d'une couronne d'un graphe complet avec une chaîne $FSSD_m(K_n \odot P_p)$.

Finalement, parmi de nombreux problèmes ouverts soulevés par notre étude initiale de la coloration de packing, les suivants problèmes présentent un intérêt particulier pour les chercheurs.

• Détermination des nombres $\chi_{_p}(S'(G))$ et $\chi_{_p}(Cr(H))$ pour d'autres graphes G et H quelconques.

• Détermination des nombres $\chi_{_p}(G \odot H)$ et $\chi_{_p}(FSSD_m(G \odot H))$ pour d'autres graphes G et H quelconques.

• Détermination des nombres $\chi_p(G\bigstar H)$ et $\chi_{_p}(FSSD_m(G\bigstar H))$ pour d'autres graphes G et H quelconques.

• Détermination des nombres $\chi_p(G^p)$ pour d'autre graphe G quelconque et pour $p \geq 2$.

• Détermination des nombres $\chi_p(K_n + P_k)$ pour tout $n \geq 1$ et $k \geq 1$.

Bibliographie

[1] St. Aloysius College, Edathua,Kerala.The spectrum of neighborhood corona of graphs, Kerala, India, 689573.

[2] C. Berge. Graphes, North Holland, 1985.

[3] B. Bresãr, S. Klavsãr, D. F. Rall, On the packing chromatic number of cartesian products, Hexagonal lattice, and trees. Discrete Appl. Math., 155(17) : 2303- 2311; 2007.

[4] W. Goddard, S.M. Hedetniemi, J. M. Harris, D.F. Rall, Packing chromatic numbers of graphs, Ars Combin., 86 : 33-49, 2008.

[5] M. Joice Punitha, Kernel in Interconnection Networks, Ph.D thesis, University of Madras, March 2009.

[6] D. Laiche, Mémoire Présenté pour l'obtention du diplome de magister en recherche opérationnelle. Sur les nombres chromatiques de packing.

[7] D. Laiche et I. Bouchemakh et E. Sopena. Packing coloring of some undirected and oriented coronae graphs, June 30, 2015

[8] R. Lemdani et A.Taibaoui et O. Mezioud . Mémoire Présenté pour l'obtention du diplome de master en recherche opérationnelle. Opérations sur le nombre de la coloration de packing. juin 2015.

[9] R. Lemdani et M. Abbas. On the packing chromatic subdivision number in graphs. April 2015.

[10] D. Miller**.** Introduction à la théorie des graphes, www.apprendre-en-ligne.net/graphes, (2008).

[11] E. A. Nordhaus, J.W. Garddum. On complementary graphs. Ann. Monthly, 63:175 − 177, (1956).

[12] E. Sigward. Introduction à la théorie des graphes.

[13] Christian Sloper. Packing-coloring of trees, Reports in informatics ISSN 0333-3590, 2002.

[14] E. Sopena, Packing coloring of some undirected and oriented coronae graphs, University of Bordeaux, JUNE 2015.

[15] A. SOUADKIA, F.S. DAHMANI, Opérations sur le nombre de la coloration broadcast de quelques types de graphes, Mémoire de Master, 2016.

[16] S. K. Vaidya et P. L. Vihol, Discussion on Some Interesting Topics in Graph Theory, Ph.D Thesis, Saurashtra University, Rajkot, April 2011.

[17] S. Velammel, Studies in Graph Theory : Covering, Independence, Domination and Related Topics, Ph.D. Thesis (Manonmaniam Sundaranar University),1997.

[18] A. William, S. Roy**,** Paking chromatic number of certain graphs. Department of Mathematics, Loyola College, Chennai 600034, INDIA.

[19] A. William, S. Roy, Packing Chromatic Number of Certain Trees and Cycle Related Graphs, Chennai 600034, INDIA.