République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Yahia Farès de Médéa
Département des Mathématiques et de l'Informatique

MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

par

BENAICHOUBA bouamra

Problème d'évolution de la thermistance avec conduction métallique.

Soutenu publiquement le 03 juillet devant le jury composé de

Président :	Kamel.TOUMACHE	*M.C.A*	Université de Médéa
Examinateur :	Noureddine. mekdache	*M.C.A*	Université de Médéa
Encadreur :	Noureddine. BENAICHOUCHE	*M.A.A*	Université de Médéa

Année universitaire : 2022-2023

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers toutes les personnes qui m'ont aidé dans la réalisation de ce travail.

Tout d'abord, Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à mon encadrant ***Dr. BENAICHOUCHE Noureddine****, pour son précieux soutien et ses conseils tout au long de cette expérience de recherche. Sa guidance et son expertise ont été essentielles pour la réussite de ce projet. Je suis reconnaissant de sa disponibilité, de sa patience et de sa volonté de partager ses connaissances. Je lui suis vraiment reconnaissant pour son engagement et son dévouement envers mon développement académique et professionnel.*

Je remercie aussi ***Dr. TOUMACHE Kamel*** *et* ***Dr. AYADI Hocine*** *d'avoir été membre du jury et d'avoir examiné ce travail.*

Je souhaite également remercier mes collègues et amis qui ont contribué à ma réflexion et ont partagé leurs idées tout au long de cette aventure.

Enfin, je tiens à exprimer ma reconnaissance envers ma famille et mes proches pour leur amour, leur patience et leur soutien indéfectible.

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude d'un système couplé comprenant une équation de type parabolique de la forme $Au = -\text{div}(a(\ .\ , \nabla u))$, A étant un opérateur Leray-Lions, et une équation de type elliptique., modélisant la diffusion de chaleur produite par l'effet Joule dans un conducteur électrique dont les inconnues sont la température à l'intérieur d'un matériau semi-conducteur, u, et le potentiel électrique,φ . Sous certaines conditions sur les données, en se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin combinées à la méthode de monotonie et quelques résultats d'analyse fonctionnelle appliquée, nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution faible.

Mots clés : Espaces de Sobolev , Système couplé elliptiques-paraboliques , Solutions faibles.

Abstract

In this memory, we study a coupled system comprising a parabolic equation of the form $Au = -\text{div}(a(\,.\,,\nabla u))$, A being a Leray-Lions operator, and an elliptic equation, modelling the heat diffusion produced by the Joule effect in an electrical conductor whose unknowns are the temperature inside a semiconductor material, u, and the electrical potential, φ . Under certain conditions on the data, based on the Faedo-Galerkin approximations combined with the method of monotonicity and some results of applied functional analysis, we demonstrate the existence and uniqueness of a weak solution.

Keywords : Sobolev spaces , Coupled system paraboli-elliptic , Weak solutions .

Notation

Ω	Un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.
$\partial\Omega$	Frontière topologique de Ω.
$Q=\Omega\times]0,T[$	Ou T>0.
$dx=dx_1dx_2\cdots dx_N$	Mesure de Lebesgue sur Ω.
$\int_\Omega f(x)dx$	L'adhérence de l'ensemble Intégrale de f sur Ω par rapport à la mesure de L
$\rightharpoonup$	La convergence faible.
$\longrightarrow$	La convergence simple.
p.p.	Presque partout.
V	Un espace de Banach.
H	Un espace de Hilbert.
V'	Le dual topologique de V.
$\langle .,. \rangle_{V'\times V}$	Le crochet de dualité entre l'espace V et son dual topologique V'.
$\|.\|$	La norme sur l'espace de Banach V.
$\langle\ \cdot\ \rangle_H$	Le produit scalaire sur l'espace de Hilbert H.
$\|.\|$	La norme sur l'espace de Hilbert H.
$\mathbb{R}^{m\times N}$	L'espace des matrices réelles.
Id	Désigne la matrice d'identité.
$\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$	L'espace des fonctions continues.
∂_i	La i-i ème dérivée partielle; $\partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$.
∂^α	La dérivée d'ordre α; $\partial^\alpha=\frac{\partial^{\|\alpha\|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_N^{\alpha_N}}$.
$\nabla u=(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_N})$	gradient de $v:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$.
div v	La divergence du vecteur $v=(v_1,...,v_N)$.
	div $v=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+...+\frac{\partial v_N}{\partial x_N}$.
$L^p(\Omega)$	$1\leq p<+\infty$,l'espace de Lebesgue.
$W_0^{1,p}(\Omega)$	L'adhérence de D(Ω)dans $W^{1,p}(\Omega)$.
$W^{-1,q}(\Omega)$	Espace dual de $W^{1,p}(\Omega)$.
$f\in V^{'}\ ;\ \|f\|_*$	$\sup_{\|v\|=1}\|<f,v>\|$
$\delta(x)$.	La distribution de Dirac

Table des matières

Résumé **2**

Abstract **3**

Notation **1**

Introduction générale **3**

1 RAPPELS D'ANALYSE FONCTIONNELLE **5**

1.1 Espaces de Lebesgue 5

1.2 Espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ 9

1.3 Théories d'opérateurs monotones 13

2 Certaines méthodes de résolution des systèmes elliptiques et paraboliques non linéaires **16**

2.1 Théorème d'existence 16

3 Existence d'une solution pour un système couplé elliptique-parabolique **23**

3.1 Un peu de modélisation 23

3.2 Notations et hypothèses sur les données 25

3.3 Théorème d'existence 26

3.4 Démonstration de l'existence 26

Conclusion **36**

Bibliographie **36**

Introduction générale

Le problème d'évolution de la thermistance avec conduction métallique est un sujet d'étude important dans le domaine de la thermique et de l'électronique. Une thermistance est un dispositif électronique qui varie sa résistance électrique en fonction de la température. Elle est largement utilisée dans de nombreuses applications, telles que les systèmes de contrôle de température, les thermomètres et les dispositifs de protection contre la surchauffe.

La conduction métallique fait référence à la propagation de la chaleur à travers un matériau conducteur, tel qu'un fil métallique. Lorsqu'une thermistance est intégrée dans un circuit électrique comportant des éléments de conduction métallique, elle subit des changements de température en raison de l'effet Joule causé par le courant électrique qui le traverse. Ces changements de température influencent à leur tour la résistance électrique de la thermistance, ce qui peut avoir un impact significatif sur les performances du circuit.

Comprendre et modéliser l'évolution de la thermistance avec conduction métallique est essentiel pour la conception et l'optimisation de circuits électroniques et de systèmes de contrôle thermique. Cela permet de prédire et de contrôler les variations de température, de résistance et de courant, ce qui est essentiel pour assurer la stabilité et la fiabilité du système.

Dans cette étude, nous nous intéressons à l'analyse théorique du problème d'évolution de la thermistance avec conduction métallique. Nous examinerons les modèles mathématiques existants pour décrire ce phénomène, en prenant en compte les propriétés thermiques et électriques du matériau de la thermistance ainsi que les caractéristiques de conduction du matériau métallique.

L'objectif de cette recherche est de mieux comprendre les mécanismes sous-jacents à l'évolution de la thermistance avec conduction métallique et d'explorer des solutions innovantes pour améliorer la précision et la stabilité des dispositifs électroniques et des systèmes de contrôle thermique.

Dans ce travail, nous nous intéressons au problème de la thermistance, également appelé problème thermistor. Ce problème consiste en un système parabolique-elliptique non linéaire décrivant la température, u, et le potentiel électrique, φ. L'objectif de ce mémoire est d'étudier l'existence de solutions au sens faible pour le système couplé suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(a(.,\nabla u)) = \rho(u)|\nabla\varphi|^2 & \text{dans } Q = \Omega \times (0,T), \\ \operatorname{div}(\rho(u)\nabla\varphi) = 0 & \text{dans } Q, \\ \varphi = \varphi_0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{sur} \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, est un ensemble ouvert et borné, c'est également la région spatiale occupée par le matériau semi-conducteur, T > 0 est le temps final d'observation,
$a : Q \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est un opérateur Leray–Lions, φ est la conductivité électrique et les fonctions φ_0 etu_0 sont données. Le modèle d'évolution temporelle (1) décrit le profil de température d'un dispositif thermistor. Ce problème présente une structure similaire au problème thermistorique appelé thermistor problem qui apparaît en électromagnétisme ([1],[2], [4], [5]).

L'existence d'une solution faible du problème du thermistor associée à (1) dans les espaces de Sobolev classiques, où $Au = -\nabla \cdot (\rho(u)\nabla u)$, a été prouvée par Howinson, Rodrigues et Shillor dans [6].

Dans le présent travail, nous montrons l'existence d'une solution faible au problème du thermistor (3.1)au sens de théorème (3.3). La preuve repose sur le théorème du point fixe de Schauder pour démontrer l'existence d'une solution faible à un problème approximatif.

Ce travail est organisé comme suit. Dans le chapitre 1 , nous rappelons certains notions d'espaces fonctionnels. Dans le chapitre 2 nous introduisons la notion de solution de certaine problème adaptée à notre contexte. problème aux limites parabolique non linéaire avec la condition de Dirichlet du type

$$\begin{cases} u' + A(u) = f, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Enfin, dans le chapitre (3), nous énumérons les hypothèses sur les données et présentons le résultat d'existence et développons sa preuve.

CHAPITRE 1

RAPPELS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail

1.1 Espaces de Lebesgue

Définition 1.1

Soit Ω *un ouvert de* Re^n *à frontière régulière et p un nombre réel supérieur ou égal à 1 : On définit l'espace de Lebesgue* $L^p(\Omega)$ *par :*

Pour $1 \leq p < +\infty$

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad mesurable, \quad \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty \right\},$$

mini de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $L^p(\Omega)$ *muni de la norme* $\|.\|_{L^p(\Omega)}$ *est un espace de Banach.*

- ***si p=2***

L'espace $L^2(\Omega)$*) est un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire*

$$< f, g >_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x) g(x) dx$$

Pour $p = +\infty$

$$L^{+\infty}(\Omega)=\left\{f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}\quad mesurable,\ et\ \exists C>0\ telle\ que\ |f(x)|<C\ p.p\ sur\ \Omega\right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^{+\infty}(\Omega)}=\inf\left\{C>0,\ |f(x)|<C\ p.p\ x\in\Omega\right\}$$

L'espace $L^{+\infty}(\Omega)$ *muni de la norme* $\|f\|_{L^{\infty}(\Omega)}$ *est un espace de Banach*

Remarque 1

Notons que si $f\in L^{\infty}(\Omega)$ *alors on a* $|f(x)|<\|f\|_{L^{\infty}(\Omega)}$ *p.p* $x\in\Omega$

Notation :
soit $p\in\mathbb{R}$ avec $1\leq p\leq+\infty$. On désigne par $p^{'}$ l'exposant conjugué de p. i.e $\frac{1}{P}+\frac{1}{p'}$

Proposition 1.1 (Séparabilité, réflexivité et dual de $L^p(\Omega)$)

1. $L^p(\Omega)$ *est séparable pour* $1\leq P<+\infty$ *et réflexif pour* $1<P<+\infty$.
2. *Le dual de* $L^p(\Omega)$ *pour* $1\leq P<+\infty$ *est isomorphe à* $L^{p^{'}}(\Omega)$ *avec* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
3. $L^1(\Omega)$ *est séparable, ni réflexif et son dual est* $L^{\infty}(\Omega)$.
4. $L^{\infty}(\Omega)$ *ni séparable, ni réflexif et son dual est contient strictement* $L^1(\Omega)$.

Preuve. Voir [7]. ■

Théorème 1.2 (Inégalité de Young) *Soient* $(x_i)_{i=1,n}\geq 0$ *et* $(p_i)_{i=1,n}\geq 0$ *avec*

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+...\frac{1}{p_n}=1,$$

alors

$$x_1x_2...x_n\leq\frac{x_1^{p_1}}{p_1}+\frac{x_2^{p_2}}{p_2}+...\frac{x_n^{p_n}}{p_n}$$

En particulier,on a pour $x\geq 0, y\geq 0$ *et*$\geq\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$xy\leq\frac{1}{p}\epsilon^p x^p+\frac{1}{q}\frac{y^q}{\epsilon^q}$$

Théorème 1.3 (Inégalité de Hölder) *Soient* $f\in L^p$ *et* $g\in L^q$ *avec* $1\leq p\leq\infty$ *alors* $fg\in L^1$ *et*

$$\int|fg|\leq\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$$

Preuve. Voir [7, page 92] ■

Théorème 1.4 (Inégalité de Cauchy-Schwartz)) *Pour $p = p^{'}$ si f et $g \in L^2(\Omega)$ alors $fg \in L^1(\Omega)$,et*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|g\|_{L^2(\Omega)}$$

Théorème 1.5 (Inégalité de Minkowiski)) *Soient f et $g \in L^p(\Omega)$ alors*

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}$$

Définition 1.2 (Convergence forte, convergence faible dans $L^p(\Omega)$) *Soient $p \in [1,\infty[$,et $\{f_n, f\}$ une famille de $L^p(\Omega)$.*

- *on dit que f_n converge fortement vers f dans $L^p(\Omega)$ et on note $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$.
- *on dit que f_n converge faiblement vers f dans $L^p(\Omega)$ et on note $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$ si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_\Omega (f_n - f).g = 0,\ \forall g \in L^{p^{'}}$.
- *on dit que f_n converge faible étoile vers f dans $L^\infty(\Omega)$ et on note $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ dans $L^\infty(\Omega)$ si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_\Omega (f_n - f).g = 0,\ \forall g \in L^1$.

Lemme 1.1 (Lemme de Fatou) *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction mesurable, à valeurs dans $[0,+\infty[$ on a*

$$\int\limits_\Omega \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)\,dx \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int\limits_\Omega f_n(x)\,dx.$$

Preuve. Voir [8] ■

Théorème 1.6 (Théorème de convergence dominée) *Soit $1 \leq p < +\infty$ et $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$. On suppose que,*

1. *$f_n \longrightarrow f \quad p.p \quad dans\,\Omega$.*
2. *il existe $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|f_n| \leq g \quad p.p \quad dans\,\Omega$.*

Alors

$$f_n \longrightarrow f \quad dans \quad L^p(\Omega).$$

Preuve. Voir [8]. ■

Définition 1.3 (Fonction de Carathéodory) *Soient Ω un ouvert borne de $\mathbb{R}^N$. Une fonction*

$$\begin{array}{rccc} f & : & \Omega\times\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,s) & \mapsto & f(x,s) \end{array}$$

est dite une fonction de Carathéodory *si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $f(.,s):\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ *mesurable pour tout* $s\in\mathbb{R}$.
2. $f(x,.):\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *continue p.p,* $x\in\Omega$.

Définition 1.4 (Opérateur de Nemitski) *Soient* $u:\Omega\rightarrow\mathbb{R}$ *et* $f\in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$. *l'opérateur* N_f *défini par* $(N_f u)(x)=f(x,u(x))$ *est appelé opérateur de Nemitski relatif à* f.

Théorème 1.7 *Si* f *est de carathéodory et elle existe une fonction positive* $a\in L^q(\Omega)$ *et une constante* $b>0$, *tels que*

$$|f(x,t)|\leq a(x)+b|t|^{\frac{p}{q}}$$

alors l'opérateur de Nemitski est continu de $L^p(\Omega)$ *dans* $L^q(\Omega)$.

1.2 Espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.5 *L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par :*

$$H^1(\Omega)=\left\{u \in L^2(\Omega) \ ; \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega); i=1,\dots,n\right\}$$

ou $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est prise au sens des distributions
L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$< u, v >_{H^1(\Omega)}= \int_\Omega \left(uv + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) dx$$

et la norme correspondante

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left[\int_\Omega \left(u^2 + \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2\right) dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

Remarque 2
Par définition de la dérivation dans l'espace des distributions $\mathfrak{D}'(\Omega)$ les deux conditions suivantes sont équivalentes
i) $u \in H^1(\Omega)$
ii) $u \in Ł^2(\Omega)$ et $\exists\ g_1, g_2, \dots g_n \in L^2(\Omega)$ tell que

$$\forall\ \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)\ , \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega g_i \varphi\, dx$$

Alors par définition $\frac{\partial u}{\partial x} = g_i$ au sens des distributions.
La définition ci-dessus peut être prolongée lorsqu'on remplace l'espace $L^2(\Omega)$ par l'espace $L^p(\Omega)$, $1 \le p \le +\infty$

Définition 1.6
Pour tout $1 \le p \le +\infty$ l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega)=\left\{u \in L^p(\Omega) \ ; \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)\ i=1,\dots,n\right\}$$

ou $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est prise ou sens des distributions.
L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left[\int_\Omega \left(|u|^p + \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial u}{\partial x_i})^p\right) dx\right]^{\frac{1}{p}} & pour\ \ 1 \le p < +\infty \\ \\ \max\left\{\|u\|_\infty, \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_\infty, \dots, \|\frac{\partial u}{\partial x_n}\|_\infty\right\} & si\ \ p = +\infty \end{cases}$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ peut aussi muni de la norme équivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p(\Omega)}$$

Lorsque $p=2$, $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$

Définition 1.7
On prend $m \in \mathbb{N}$,$m \geq 2$, $1 \leq p \leq +\infty$ L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) ; D^\alpha u \in L^p(\Omega) \forall \ \alpha \in \mathbb{N}^n \ avec |\alpha| \leq m\}$$

où $D^\alpha u$ est la dérivée de v au sens des distributions de symboles α
On rappelle que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n}$, $avec |\alpha| = |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n|$
L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^p}(\Omega) dx \right)^{\frac{1}{p}} \ pour 1 \leq p < +\infty \\ \\ \max_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_\infty \ si \ p = +\infty \end{cases}$$

Lorsque $p=2$,

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega);\ D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leqslant m \right\}$$

$H^m(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$< u, v >_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega D^\alpha u(x) \overline{D^\alpha v(x)} dx$$

et la norme associée

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^2}(\Omega) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Théorème 1.8 *(Théorème 5.1.3) [11]*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$: Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout nombre réel p avec
$1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach. Lorsque $p=2$, $W^{1,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Proposition 1.9
i) si $m \geq m'$ $(m, m' \in \mathbb{N})$ alors $H^m(\Omega)$ est contenu , avec une injection,dans $H^{m'}(\Omega)$.
ii) $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$< u, v >_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega D^\alpha u(x) \overline{D^\alpha v(x)} d\,x$$

Preuve. *Voir [13, proposition 1 p.93]* ■

Définition 1.8

Par définition :

- $H_0^1(\Omega)$ *est la fermeture de* $D(\Omega)$ *dans* $H^1(\Omega)$.
- $H_0^1(\Omega)$ *est le sous-espace de* $H^1(\Omega)$ *des fonctions nulles sur* $\partial\Omega$.
- $W_0^{1,p}(\Omega)$ *est la fermeture de* $D(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$.
- $W_0^{m,p}(\Omega)$ *est la fermeture de* $D(\Omega)$ *dans* $W^{m,p}(\Omega)$.

Puisque (par définition) $D(\Omega)$ *est dense dans* $H_0^1(\Omega)$, *on peut identifier le dual* $H^{-1}(\Omega)$ *de* $H_0^1(\Omega)$ *à un espace de distribution sur* Ω :

$$\begin{cases} H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))' \\ H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset \mathfrak{D}'(\Omega) \end{cases}$$

Définition 1.9

Pour $m \in \mathbb{N}$, *on désigne par* $H_0^m(\Omega)$ *la fermeture de* $\mathfrak{D}(\Omega)$ *dans* $H^m(\Omega)$.
De manière évidente, $H_0^m(\Omega)$ *est un sous-espace fermé de* $H^m(\Omega)$, *mais en général* $H_0^m(\Omega) \neq H^m(\Omega)$.
Signalons deux cas où on a bien l'égalité
i) si $m = 0$, *alors* $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ *et donc* $H_0^0(\Omega) = H^0(\Omega)$
ii) si $\Omega = \mathbb{R}^n$, *alors on peut montrer que* $H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$

Théorème 1.10 (Inégalité de Poincaré Théorème 5.3.1) *[11]*

Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *borné dans une direction. Alors pour tout* $1 \leqslant p < +\infty$, *il existe une constante* $C_{p,n}(\Omega)$ *qui dépend seulement de* p, Ω *et* n *telle que :*

$$\left(\int_\Omega |u|^p d\,x \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C(p,n,\Omega) \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^p d\,x \right)^{\frac{1}{p}} , \forall\ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Théorème 1.11 (Inégalité de Poincaré(Théorème 1.4.6 p.11)) *[15]*

Soit Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *et* $u \in H_0^1(\Omega)$. *Alors il existe une constante positive* C *qui dépend seulement de* Ω *et* n *tell que :*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C(n,\Omega) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} , \forall\ u \in H_0^1(\Omega).$$

Théorème 1.12 (Théorème 1.4.7 p.11) *[15]*

Soit Ω *un ouvert borné de classe* C^1 *de* $\mathbb{R}^n$. *Il y a une constante positive* C *qui dépend seulement de* Ω *et* n *tell que :*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C(n,\Omega)\left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + |\int_\Omega u\,dx|\right),\ \forall\ u\ \in\ H^1(\Omega)$$

Définition 1.10 *Soient deux espaces de Banach E et F tels que $F \subset E$. On dit que F s'injecte de manière continue dans$E$ (en notation $F \hookrightarrow E$) si et seulement si l'opérateur identité*

$$Id : \begin{cases} F \longrightarrow E \\ y \longmapsto y \end{cases}$$

est continu. De même, on dit que F s'injecte de manière compacte dans E (en notation $F \hookrightarrow_c E$) si et seulement si l'opérateur identité de F dans E est compact.

Théorème 1.13 (de Relliche)
Si Ω un ouvert borné et à bord continu, alors

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow_c H^{m-1}(\Omega)\ \forall\ m \in \mathbb{N}^*$$

En particulier,

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow_c\ L^2(\Omega)\ \forall\ m \in \mathbb{N}^*$$

Théorème 1.14 (Injection de Sobolev)
Si Ω un ouvert borné à bord lipschitzien, alors on a les deux injections suivantes :

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow\ L^p(\Omega)\ \forall\ m \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant p < +\infty \text{ tell que } m - \tfrac{n}{2} \leqslant -\tfrac{n}{p}$$
$$H^m(\Omega) \hookrightarrow\ C(\overline{\Omega}),\ \forall\ m \in \mathbb{N}^* \text{ tell que } m - \tfrac{n}{2} > 0$$

Pour les deux théorèmes (1.13) et (1.14) voir [9],[14] .

Théorème 1.15 ([15] Théorème 1.4.4 p.10)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ de classe C^1.
Alors, pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$, l'estimation suivant a lieu

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant C\|u\|^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}$$

avec C une constante positive indépendante de u.

Théorème 1.16 (formule de Green) ***(Théorème 1.3.2 de [12])***
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1
i) Si $u \in C^1(\overline{\Omega})$, $v \in C^1(\overline{\Omega})$ et $\Delta v \in C^1(\overline{\Omega})$, alors

$$\int_\Omega u(x)\Delta v(x)dx = -\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v\,dx + \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial v}{\partial \nu}d\Gamma$$

ii) Si $u, v \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ *et* $\Delta u,\ \Delta v\ \in C(\overline{\Omega})$ *, alors*

$$\int_\Omega (u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x))\,dx = \int_{\partial\Omega}\left(u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial \nu} - v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right)d\Gamma$$

Définition 1.11

Une forme bilinéaire $a : H\times H \longrightarrow \mathbb{R}$

• *Continue s'il existe C tq pour tout* $(u, v)\in H\times H$ *,*

$$|a(u,v)| \leqslant C\|u\|\|v\|$$

• *Coercive s'il existe* $\alpha > 0$ *tq pour tout* $u\in H$*,*

$$a(u,\ u)\geqslant \alpha\|u\|^2$$

Théorème 1.17 (Lax-Milgram[11])

Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle\ \cdot\ \rangle_H$ *et la norme correspondante* $\|.\|_H = \langle\ \cdot\ \rangle_H^{\frac{1}{2}}$.

Soit $a : H\times H \longrightarrow \mathbb{R}$ *une forme bilinéaire qui satisfait les deux condition (i) et (ii) suivantes :*

(i) a est continue, c'est à dire il existe une constante $M > 0$ *telle que*

$$\forall u, v \in H |a(u,v)| \leqslant M\|u\|_H\|v\|_H$$

(ii) a est coercive, c'est à dire il existe une constante $\alpha > 0$ *telle que*

$$\forall u\in H\ a(u,\ u)\geqslant \alpha\|u\|_H^2$$

Alors pour tout $L\in H^{'}$ *(L est une forme linéaire continue sur H),il existe une unique* $u\in H$ *tell que*

$$a(u,v) = L(v)\quad \forall\ v\in H$$

Théorème 1.18 (Théorème du point fixe de Schauder)

Soit X un espace de Banach, K un convexe fermé de X et S une application continue de K dans K telle que $S(K)$ *est relativement compact, alors S admet un point fixe.*

Preuve. voir ([10],page 303) ■

1.3 Théories d'opérateurs monotones

Soit V un espace de Banach, $V^{'}$ son dual topologique, et $A : V \to V^{'}$ un opérateur.

1.3.1 Monotonie

Définition 1.12
Un opérateur $A : V \to V'$ est dit monotone si :

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0, \quad \forall u, v \in V.$$

Définition 1.13
Un opérateur $A : V \to V'$ est dit strictement monotone si :

$$\langle Au - Av, u - v \rangle > 0, \quad \forall u, v \in V,\ u \neq v.$$

Remarque 3 *Si A est strictement monotone, alors A est monotone.*

1.3.2 Bornitude

Soient $(V, \|\cdot\|)$ et $(V', \|\cdot\|_*)$ deux espaces de Banach et $A : V \to V'$ un opérateur.

Définition 1.14
On dit que A est un opérateur borné si l'image d'un ensemble borné de V est bornée dans V', c'est-à-dire s'il existe une constante $R > 0$ telle que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que

$$\|u\| \leq \epsilon \Rightarrow \|Au\|_* \leq M.$$

1.3.3 Hémicontinuité

Définition 1.15
Soit $A : V \to V'$ un opérateur. On dit que $A : V \to V'$ est hémicontinu si

$\forall\ u, v, w \in V$, *la fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(\lambda) = (A(u + \lambda v), w)$ est continue.*

Remarque 4 *Si A est continu, alors A est hémicontinu.*

1.3.4 Coercivité

Définition 1.16
Soit $A : V \to V'$ un opérateur. On dit que $A : V \to V'$ est coercif si et seulement si

$$\exists\, \zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \lim_{s \to +\infty} \zeta(s) = +\infty \text{ et } \langle A(u), u \rangle \geq \zeta(\|u\|)\|u\|.$$

En d'autres termes, A est coercif si

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \frac{\langle A(u), u \rangle}{\|u\|} = +\infty$$

Théorème 1.19
Soit A un opérateur borné, hémicontinu et monotone. Alors A est continu de V fort dans $V^{'}$ faible.

Preuve. voir [8] . ■

Théorème 1.20
Soit $A : V \longrightarrow V^{'}$ un opérateur borné, hémicontinu, monotone et coercif. Alors A est surjectif.

Preuve. voir [9] Théorème 2.1, p. 171 . ■

CHAPITRE

2 Certaines méthodes de résolution des systèmes elliptiques et paraboliques non linéaires

On s'intéresse à l'étude d'un problème paraboliques, non linéaire .

Dans toute la suite, V désigne un espace de Banach réflexif, V' son dual topologique et A est un opérateur défini par :

$$\begin{aligned} A: \quad & V \longrightarrow V' \\ & u \longmapsto Au. \end{aligned}$$

2.1 Théorème d'existence

Soit V un espace de Banach réflexif et séparable, V' son dual, et H un espace de Hilbert tel que $V \subset H$ avec une inclusion continue et dense. Le théorème de Riesz permet d'identifier H à son dual.

Ainsi, on peut identifier H à un sous-espace de V', ce qui nous donne le schéma suivant :

$$V \subset H \subset V'. \tag{2.1}$$

Si l'on considère une fonction $u \in L^p(0,T;V)$ telle que $u' \in L^{p'}(0,T;V')$, où p et p' sont des exposants de Hölder conjugés, alors l'application u définie par

$$\begin{aligned} u: \quad & [0,T] \longrightarrow H \\ & t \longmapsto u(t). \end{aligned}$$

est continue.

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant :

Théorème 2.1 *Soient V et H tels que décrits dans le schéma précédent (2.1). Soit A un opérateur non linéaire de V vers V' ayant les propriétés suivantes :*

1. *A est hémicontinu de $V \longrightarrow V'$,*

2. *A est borné et* $\|A(v)\|_* \leq c\|v\|^{p-1}$,

3. *A est monotone de* $V \longrightarrow V'$,

4. $(A(v), v) \geq \alpha\|v\|^p,\ \alpha > 0,\ \forall v \in V\ (1 < p < \infty)$.

Soient $f \in L^{p'}(0,T;V')$ *et* $u_0 \in H$. *Alors il existe une seule fonction* $u \in L^p(0,T;V)$ *solution de*

$$\begin{cases} u' + A(u) = f, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Démonstration de l'existence

Étape 1 : Solution approchée

Nous adoptons la méthode de Faedo-Galerkin, qui implique d'approximer l'espace V à l'aide d'une suite d'espaces de dimensions finies, permettant ainsi d'approximer le problème par une suite de problèmes formulés dans des espaces de dimensions finies. Nous posons donc :
$E_m = \langle w_1, \cdots, w_m \rangle$ l'espace engendré par les vecteurs $(w_1, \cdots, w_m)$, on introduit $u_m(t)$ « solution approchée » du problème de la façon suivante :
On cherche $u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} u_j(t) \cdot w_j$, vérifiant :

$$\begin{cases} (u'_m(t), w_j) + (A(u_m(t)), w_j) = (f(t), w_j), \quad 1 \leq j \leq m, \\ u_m(0) = u_{0m} \in [w_1, \cdots, w_m],\ u_{0m} \longrightarrow u_0 \text{ dans } L^2(\Omega), \end{cases} \tag{2.3}$$

où $(,)$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

Étape 2 : Estimation à priori

En multipliant (2.3) par $u_j(t)$ en faisant la somme sur j et en intégrant de 0 à t, on obtient :

$$\int_0^t (u'_m(\tau), u_m(\tau))\mathrm{d}\tau + \int_0^t (A(u_m(\tau)), u_m(\tau))\mathrm{d}\tau = \int_0^t (f(\tau), u_m(\tau))\mathrm{d}\tau.$$

Cela définit $u_m(t)$ dans un intervalle $[0, t_m]$, tel que $t_m > 0$. Mais on note que

$$(A(u), u) \geq \alpha\|u\|^p, \alpha > 0, \tag{2.4}$$

et

$$(u'_m(\tau), u_m(\tau)) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}|u_m(\tau)|^2.$$

Alors on déduit de (2.3) que

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2+\int_0^t(A(u_m(\tau)),u_m(\tau))\mathrm{d}\tau=\int_0^t(f(\tau),u_m(\tau))\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2}|u_{0m}|^2 \tag{2.5}$$

D'après l'inégalité de poincaré (1.11) . Donc l'opérateur A vérifie :

$$\langle A(u),u\rangle_{V'\times V}\geq\alpha\|u\|^p,\alpha>0,\forall\, u\in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{2.6}$$

Et donc,

$$\int_0^t\langle A(u_m(\tau)),u_m(\tau)\rangle\mathrm{d}\tau\geq\alpha\int_0^t\|u_m(\tau)\|^p\mathrm{d}\tau \tag{2.7}$$

D'autre part, on a d'après l'inégalité de Hölder (1.3)

$$\begin{aligned}\int_0^t(f(\tau),u_m(\tau))\mathrm{d}\tau&\leq\int_0^t\|f(\tau)\|_*\cdot\|u_m(\tau)\|\mathrm{d}\tau\\&\leq\left(\int_0^t\|f(\tau)\|_*^{p'}\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_0^t\|u_m(\tau)\|^p\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Remarquons que d'après l'inégalité de Young (1.2), nous avons :

$$a\,b=(\varepsilon a)\frac{b}{\varepsilon}\leq\frac{\varepsilon^p}{p}a^p+\frac{\varepsilon^{-p'}}{p'}b^{p'},\forall\varepsilon>0 \tag{2.8}$$

On aura alors

$$\int_0^t(f(\tau),u_m(\tau))\mathrm{d}\tau\leq\frac{\varepsilon^{-p'}}{p'}\int_0^t\|f(\tau)\|_*^{p'}\mathrm{d}\tau+\frac{\varepsilon^p}{p}\int_0^t\|u_m(\tau)\|^p\mathrm{d}\tau.$$

En choisissant ε de sorte que $\frac{\varepsilon^p}{p}=\frac{\alpha}{2}$, on obtient alors :

$$\int_0^t(f(\tau),u_m(\tau))\mathrm{d}\tau\leq c_1\int_0^t\|f(\tau)\|_*^{p'}\mathrm{d}\tau+\frac{\alpha}{2}\int_0^t\|u_m(\tau)\|^p\mathrm{d}\tau. \tag{2.9}$$

De plus, comme $u_{0m}\to u_0$ dans $L^2(\Omega)$ alors :

$$\exists\; c_2>0:\|u_{m0}\|_{L^2(\Omega)}\leq\; c_2.\;\forall m\in\mathbb{N}. \tag{2.10}$$

De (2.7), (2.9) et (2.10) on déduit que :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}|u_m(t)|^2+\alpha\int_0^t\|u_m(\tau)\|^p\mathrm{d}\tau\leq c_1\int_0^t\|f(\tau)\|_*^{p'}\mathrm{d}\tau+\frac{\alpha}{2}\int_0^t\|u_m(\tau)\|^p\mathrm{d}\tau+c_2.\\
\Rightarrow\ &\frac{1}{2}|u_m(t)|^2+\frac{\alpha}{2}\int_0^t\|u_m(\tau)\|^p\mathrm{d}\tau\leq c_1\int_0^t\|f(\tau)\|_*^{p'}\mathrm{d}\tau+c_2=c_3.\\
&\leq c_1\int_0^T\|f(\tau)\|_*^{p'}\mathrm{d}\tau+c_2=c_4
\end{aligned}$$

On déduit alors :

$$\sup_{t\in[0,T]}|u_m(t)|^2_{L^2(\Omega)}\leq c_3 \text{ et } \int_0^t\|u_m(\tau)\|^p\mathrm{d}\tau\leq c_3\qquad\forall\, t\in[0,T].$$

Et donc

$$\int_0^T\|u_m(\tau)\|^p\mathrm{d}\tau\leq c_3.$$

D'où, l'on déduit alors que $t_m=T$ et que : La suite (u_m) demeure dans un ensemble borné de $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^p(0,T;V)$. De plus, l'hypothèse ii) implique que la suite (Au_m) est bornée dans $L^{p'}(0,T;V')$.

Étape 3 : Passage à la limite.

Du fait que les espaces $L^2(\Omega)$, $L^p(0,T;V)$ et $L^{p'}(0,T;V')$ sont réflexifs, tandis que l'espace $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ ne l'est pas, nous pouvons extraire une sous-suite (u_μ) telle que :

$$u_\mu\to u\qquad\text{dans}\qquad L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\text{ faible étoile,}\tag{2.11}$$

$$u_\mu\to u\qquad\text{dans}\qquad L^p(0,T;V)\text{ faible,}\tag{2.12}$$

$$u_\mu(T)\to\xi\qquad\text{dans}\qquad L^2(\Omega)\text{ faible,}\tag{2.13}$$

$$A(u_\mu)\to\chi\qquad\text{dans}\qquad L^{p'}(0,T;V')\text{ faible.}\tag{2.14}$$

Vérification des conditions initiales.

Introduisons $\tilde{u}_m(t)$, $A(\tilde{u}_m(t))$ et $\tilde{f}(t)$, qui sont les prolongements à $\mathbb{R}$ de $u_m(t)$, $A(u_m(t))$ et $f(t)$ en utilisant la valeur 0 en dehors de l'intervalle $[0,T]$. Alors, à partir de l'équation (2.3), on obtient :

$$\left(\frac{d}{dt}\tilde{u}_m(t),w_j\right)+(A\tilde{u}_m(t),w_j)=\left(\tilde{f}(t),w_j\right)+(u_{0m},w_j)\delta(t-0)-(u_m(T),w_j)\delta(t-T).\tag{2.15}$$

On peut maintenant passer à la limite dans l'équation (2.15) avec $m = \mu$ et j fixé, ce qui nous permet de conclure :

$$\left(\frac{d}{dt}\tilde{u}, w_j\right) + (\tilde{\chi}, w_j) = (\tilde{f}, w_j) + (u_0, w_j)\delta(t-0) - (\xi, w_j)\delta(t-T), \quad \forall j \tag{2.16}$$

Et par conséquent,

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} + \tilde{\chi} = \tilde{f} + u_0\delta(t-0) - \xi\delta(t-T). \tag{2.17}$$

En restreignant l'équation (2.17) à l'intervalle $]0, T[$, on en déduit que

$$u' + \chi = f, \tag{2.18}$$

d'où $u' \in L^{p'}(0, T; V')$, donc d'après (2.1), les valeurs de $u(0)$ et $u(T)$ sont bien définies. En comparant avec (2.17), on en déduit que $u(0) = u_0$ et $u(T) = \xi$.

Ainsi, nous avons démontré l'existence d'une solution si nous montrons (ce qui est crucial dans la démonstration) que

$$\chi = A(u). \tag{2.19}$$

De la propriété de monotonie de A, il résulte de (1.12) que

$$\chi_\mu = \int_0^T (A(u_\mu(t)) - A(v(t)), u_\mu(t) - v(t))\mathrm{d}t \geq 0 \ \ \forall v \in L^p(0, T; V). \tag{2.20}$$

Or de (2.5) résulte que

$$\int_0^T (A(u_\mu), u_\mu)\mathrm{d}t = \int_0^T (f, u_\mu)\mathrm{d}t + \tfrac{1}{2}|u_{0\mu}|^2 - \tfrac{1}{2}|u_\mu(T)|^2$$

et donc

$$\chi_\mu = \int_0^T (f, u_\mu)\mathrm{d}t + \tfrac{1}{2}|u_{0\mu}|^2 - \tfrac{1}{2}|u_\mu(T)|^2 - \int_0^T (A(u_\mu, v)\mathrm{d}t - \int_0^T (A(v), u_\mu - v)\mathrm{d}t \tag{2.21}$$

D'après (2.11) - (2.14) on a :

$$\int_0^T (f, u_\mu)\mathrm{d}t \to \int_0^T (f, u)\mathrm{d}t, \tag{2.22}$$

$$\int_0^T (A(u_\mu), v)\mathrm{d}t \to \int_0^T (\chi, v)\mathrm{d}t, \tag{2.23}$$

$$\int_0^T (A(v), u_\mu)\mathrm{d}t \to \int_0^T (A(v), u)\mathrm{d}t, \tag{2.24}$$

Comme $\liminf |u_\mu(T)|^2 \geq |u(T)|^2$, Alors, en prenant la $\limsup \chi_\mu$ on obtient :

$$\int_0^T (f,u)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}|u_0|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 - \int_0^T (\chi,v)\mathrm{d}t - \int_0^T (A(v),u-v)\mathrm{d}t \geq 0. \tag{2.25}$$

En multipliant (2.18) par u et par des intégrations par parties sur $[0,T]$, on obtient

$$\int_0^T (f,u)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}|u_0|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 = \int_0^T (\chi,u)\mathrm{d}t. \tag{2.26}$$

En passant à la limite ($\mu \to +\infty$) dans (2.21) et en utilisant (2.22) - (2.26), on obtient

$$\int_0^T (\chi - A(v), u-v)\mathrm{d}t \geq 0, \qquad \forall v \in L^p(0,T;V) \tag{2.27}$$

En prenant $v = u - \lambda w, \lambda > 0$, avec $w \in L^p(0,T;V)$ quelconque ; alors (2.27) donne

$$\lambda \int_0^T (\chi - A(u-\lambda w), w)\mathrm{d}t \geq 0 \quad \forall w \in L^p(0,T;V).$$

donc (comme $\lambda > 0$)

$$\int_0^T (\chi - A(u-\lambda w), w)\mathrm{d}t \geq 0; \qquad \forall w \in L^p(0,T;V). \tag{2.28}$$

Faisant $\lambda \to 0$ dans (2.28) d'après l'hémicontinuité de A (définition (1.15)) et d'après le théorème de Lebesgue (1.6), on en déduit que

$$\int_0^T (\chi - A(u), w)\mathrm{d}t \geq 0 \qquad \forall w \in L^p(0,T;V). \tag{2.29}$$

Prenant maintenant $v = u + \lambda w$ dans (2.27), on aboutit, avec les mêmes arguments, à :

$$\int_0^T (\chi - A(u), w)\mathrm{d}t \leq 0 \qquad \forall w \in L^p(0,T;V). \tag{2.30}$$

De (2.29) et (2.30) on a :

$$\int_0^T (\chi - A(u), w)\mathrm{d}t = 0 \qquad \forall w \in L^p(0,T;V), \tag{2.31}$$

donc $\chi - A(u) = 0$ dans $L^q(0,T;V')$ et on déduit alors que

$$\chi = A(u).$$

Ce qui prouve l'existence d'une solution u pour le problème (2.2).

L'unicité de la solution

Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème. Alors $w = u_1 - u_2$ vérifie

$$w' + A(u_1) - A(u_2) = 0, w(0) = 0,$$

En multipliant par w on a :

$$(w', w) + (A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2) = 0$$

Et grâce à la monotonie :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 \leq 0,$$

d'où $w = 0$, ce qui preuve l'unicité de la solution du problème (2.2).

CHAPITRE

3 Existence d'une solution pour un système couplé elliptique-parabolique

Ce chapitre est consacré à l'étude des résultats d'existence pour un système elliptique non linéaire couplé décrivant la température u et le potentiel électrique φ avec des termes du premier ordre ayant une croissance naturelle par rapport au gradient. Plus précisément,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(a(.,\nabla u)) = \rho(u)|\nabla\varphi|^2 & \text{dans } Q = \Omega \times (0,T), \\ \operatorname{div}(\rho(u)\nabla\varphi) = 0 & \text{dans } Q, \\ \varphi = \varphi_0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

3.1 Un peu de modélisation

3.1.1 La thermistance

Le problème du thermomètre à liquide est qu'il ne convertit pas une température en une tension (puisqu'il la convertit en une hauteur), ce qui le rend inexploitable pour une chaîne d'acquisition électronique (par exemple pour une station météo électronique). On utilise donc en électronique d'autres capteurs de températures pour fabriquer des thermomètres électroniques : le plus souvent il s'agit de composants électroniques dont la résistance varie avec la température à laquelle ils sont soumis.Ces composants sont appelés "thermistances". Il existe :

les thermistances CTP (Coefficient de Température Positif), leur résistance augmente lorsque la température augmente)

les thermistances CTN (Coefficient de Température Négatif), leur résistance diminue lorsque la température augmente.

Les appareils de mesure à thermistances, faisant partie d'un système de contrôle de la température, constituent le meilleur moyen de mesurer et de contrôler le chauffage et le refroidissement d'un appareil à effet Peltier.

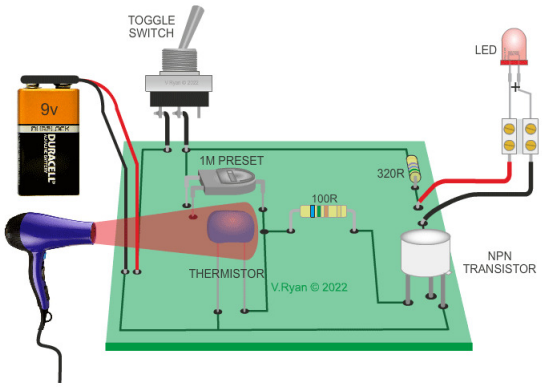


FIGURE 3.1 – Schéma d'un circuit éléctrique contenant une thermistance

3.1.2 Modélisation d'un conducteur de la chaleur et de l'électricité.

Considérons un corps conducteur de la chaleur et de l'électricité. Supposons que le potentiel électrique φ_0 et la température u_1 sont donnés à la surface pour $t \geq 0$, tandis que la répartition de la température u_1 est connue lorsque $t = 0$. Nous voulons trouver le potentiel $\varphi(x,t)$ et la température $u(x,t)$ dans le corps pour tout $t \geq 0$.
Soit $\mathbf{J}$ la densité de courant électrique et $\mathbf{Q}$ le vecteur de flux de chaleur. Selon les lois d'ohm et de Fourier, nous avons :

$$\mathbf{J} = -\sigma(u)\nabla\varphi \tag{3.2}$$

$$\mathbf{Q} = -\kappa(u)\nabla u. \tag{3.3}$$

où $\sigma(u)$ et $\kappa(u)$ sont respectivement les conductivités électrique et thermique qui sont supposées être des fonctions données en fonction de la température. D'après les lois de conservation

$$\begin{cases} \rho(u)c\,\frac{\partial u}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{Q} = \mathbf{J}.\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

où $\mathbf{E}$ représente le champ électrique, ρ la densité du conducteur, c sa capacité thermique. Si on suppose que $\rho\, c = 1$, à partir du système (3.4) nous obtenons le système couplé suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\cdot(\kappa(u)\nabla u) = \sigma(u)|\nabla\varphi|^2 & \text{dans } \Omega\times(0,T), \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\big(\sigma(u)\nabla\varphi\big) = 0 & \text{dans } \Omega\times(0,T). \end{cases} \tag{3.5}$$

Avec les conditions initiales et conditions aux limites décrites précédemment, nous avons :

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_0, \quad u = u_1 \text{ dans } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0 \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{3.6}$$

où Ω est un ouvert borné représentant le corps, Γ son bord.

3.2 Notations et hypothèses sur les données

Nous considérons pour $p \geq 2$, l'espace de Banach W défini comme suit.

$$W = \left\{ v \in L^p(0,T,W_0^{1,p}(\Omega)) / \frac{dv}{dt} \in L^{p'}(0,T,W_0^{-1,p'}(\Omega)) \right\}, \tag{3.7}$$

équipé de la norme standard

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} + \left\| \frac{dv}{dt} \right\|_{L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))} \tag{3.8}$$

Nous posons les hypothèses suivantes sur les données :

— **[(A,1)]**La fonction $a : Q \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une fonction de Carathéodory, c'est-à-dire que $a(.,.,\xi)$ est mesurable pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, et $a(x,t,.)$ est continue dans $\mathbb{R}^N$ pour presque tous les $(x,t) \in Q$.

— **[(A.2)]**Il existe une fonction positive $c \in L^{p'}(Q)$ et une constante $\alpha > 0$ telle que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et presque partout $(x,t) \in Q$, on a :

$$|a(x,t,\xi)| \leq \alpha \left[c(x,t) + |\xi|^{p-1} \right],$$

— **[(A,3)]** Il existe une constante $\epsilon > 0$ telle que, pour tout $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^N$, $\xi \neq \xi'$, et presque partout $(x,t) \in Q$, on a l'inégalité suivante :

$$(a(x,t,\xi) - a(x,t,\xi^*))(\xi - \xi^*) \geq \alpha |\xi - \xi^*|^p$$

— **[(A,4)]** $(a(x,t,0)=0$.

— **[(A.5)]**

$$\begin{cases} \rho \in C(\mathbb{R}) \text{ et il existe } \rho_1 \text{ et } \rho_2 \in \mathbb{R} \text{ tel que} \\ 0<\rho_1 \leq \rho(s) \leq \rho_2, \forall s \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.9}$$

— **[(A.6)]** $\varphi_0 \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$.

— **[(A.7)]** $u_0 \in L^2(\Omega)$.

3.3 Théorème d'existence

Théorème 3.1 *Supposons que (A.1) - (A.6) sont vérifiées. Alors il existe une solution faible* (u,φ) *au problème* (3.1)*, c'est-à-dire*

$u \in W$

$\varphi - \varphi_0 \in L^\infty(0,T;H^1 0(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$.

$u(.,0) = u_0$ *dans* Ω,

$$\int_0^t \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \phi \right\rangle + \int_0^t \int_\Omega a(x,t,\nabla u)\nabla\phi = \int_0^t \int_\Omega \varphi(u)|\nabla\varphi|^2\phi.$$

pour tout $\phi \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ *pour tout* $t \in [0,T]$,

$$\int_\Omega \rho(u)\nabla\varphi\nabla\psi = 0 \text{ pour tout } \psi \in H_0^1(\Omega)\ t \in (0,T)\ .$$

3.4 Démonstration de l'existence

Preuve. Afin de prouver l'existence d'une solution faible, le théorème du point fixe de Schauder sera appliqué en conjonction avec l'existence et l'unicité d'une solution faible à une équation elliptique. Pour tout $\omega \in L^p(Q)$ et presque partout $t \in (0,T)$, nous considérons le problème elliptique :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\rho(\omega)\nabla\varphi) = 0 \quad \text{in } \Omega \\ \varphi = \varphi_0 \ \text{ on } \ \partial\Omega \times (o,T). \end{cases} \tag{3.10}$$

On pose $\varphi = \psi + \varphi_0$
φ est solution de problème (3.10) si et seulement si ψ est solution du problème

$$\begin{cases} -\text{div}(\rho(\omega)\nabla\psi) = \text{div}(\rho(\omega)\nabla\varphi_0) \quad \text{dans } \Omega \\ \psi = 0 \text{ on } \partial\Omega \times (o,T). \end{cases} \tag{3.11}$$

La formulation variationnelle du problème (3.11) est

$$\begin{cases} \psi \in H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \rho(\omega)\nabla\psi\nabla\phi\, dx = \left\langle \text{div}(\rho(\omega)\nabla\varphi_0); \phi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\text{tel que} \begin{cases} b_\omega(\psi,\phi) = \displaystyle\int_\Omega \rho(\omega)\nabla\psi\nabla\phi \\ l_\omega = \text{div}\,\rho(\omega)\nabla\varphi_0 \end{cases}$$

On montre que les condition de théorème de Lax-Milgram sont vérifiées .

i. b_ω **est une forme bilinéaire** :
ceci découle directement de la linéarité du gradient et celle de l'intégrale

ii. b_ω **est continue** : soit $\psi, \phi \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} |b_\omega(\psi,\phi)| &\leq \int_\Omega \rho(\omega)|\nabla\psi\nabla\phi| \\ &\leq \rho_2 \left(\int_\Omega |\nabla\psi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla\phi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \rho_2 ||\psi||_{H_0^1(\Omega)} ||\phi||_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

donc b_ω est continue

iii. b_ω **est coercive** : soit $\phi \in H_0^1(\Omega)$

$$b_\omega(\phi,\phi) = \int_\Omega \rho(\omega)|\nabla\phi|^2 \geq \rho_1 \int_\Omega |\nabla\phi|^2 = \rho_1 ||\phi||^2_{H_0^1(\Omega)}$$

ce qui prouve bien que $b\omega$ est coercive

iv. l_ω **est une forme linéaire continue**
l_ω est linéaire grâce a la linéarité de l'intégrale il reste , de montrer la continuité

continuité de l_ω : soit $\phi \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} |l(\phi)| = \left| \left\langle \operatorname{div}(\rho(\omega)\nabla\varphi_0); \phi \right\rangle \right| &= \left| -\int_\Omega \rho(\omega)\nabla\varphi_0 \nabla\phi \right| \\ &\leq \rho_2 \int_\Omega |\nabla\varphi_0||\nabla\phi| \\ &\leq \rho_2 \left(\int_\Omega |\nabla\varphi_0|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla\phi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \rho_2 ||\varphi_0||_{H^1(\Omega)} ||\phi||_{H_0^1(\Omega)} \\ &= C||\phi||_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

donc l_ω est continue

comptant sur (i).....(v) on en déduire,par le théorème de Lax-Milgram que le problème (3.12) admet une unique solution faible $\psi \in H_0^1(\Omega)$ ce qui prouve bien que $\varphi(t) = \psi(t) + \varphi_0$ la seule solution du problème (3.10), appartient a l'espace $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$. grâce au principe du maximum, nous avons :

$$||\varphi||_{L^\infty(Q)} \leq ||\varphi_0||_{L^\infty(Q)} \tag{3.13}$$

En effet, on pose $k = \|\varphi_0\|_{L^\infty(\Omega)}$. Pour presque tout $t \geq 0$, on va prendre $(\varphi - k)^+ \in H_0^1(\Omega)$ comme fonction test dans la première équation de (3.10), on obtient

$$\int_\Omega \rho(\omega)\nabla\varphi\nabla(\varphi - k)^+ = 0$$

ce qui implique que

$$\int_\Omega \rho(\omega)|\nabla(\varphi - k)^+|^2 = 0$$

d'où

$$(\varphi - k)^+ = 0,$$

i.e.

$$(\varphi \leq k, \tag{3.14}$$

Et de la même façon, on va prendre $(\varphi + k)^- \in H_0^1(\Omega)$ comme fonction test dans (3.10) on obtient

$$(\varphi + k)^- = 0,$$

i.e.

$$\varphi \geq -k, \tag{3.15}$$

en vertu de (3.14) et (3.15) on obtient (3.13).
En utilisant $\varphi - \varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$ en tant que fonction de test dans (3.10), nous obtenons :

$$\int_\Omega \rho(\omega)\ \nabla\varphi(\nabla\varphi - \varphi_0) = 0$$

par conséquence

$$\rho_1 \int_\Omega |\nabla(\varphi)|^2 \, dx \leq \int_\Omega \rho(\omega)|\nabla\varphi||\nabla(\varphi_0)| \, dx \leq \rho_2 \int_\Omega |\nabla\varphi||\nabla(\varphi_0)| \, dx$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$\rho_1 \int_\Omega |\nabla(\varphi)|^2 \, dx \leq C(\rho_1;\rho_2;\varphi_0) = C. \tag{3.16}$$

Maintenant, nous introduisons le problème parabolique suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(a(.,\nabla u)) = \rho(\omega)|\nabla\varphi|^2 & \text{dans } Q = \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(.,0) = u_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.17}$$

On remarque que le terme de seconde membre de la première équation de système appartient à l'espace $L^1(\Omega)$, Grâce à la deuxième équation elliptique, ce terme appartient également à l'espace $H^{-1}(\Omega)$. En effet, soit $\phi \in L^2(0,T;D(\Omega))$ et prenons $\xi = \phi\varphi$ dans l'équation (3.10) en tant que fonction test. Nous avons alors :

$$\int_\Omega \rho(\omega) \, \nabla\varphi \nabla(\phi\varphi) = 0$$

Cela signifie que

$$\int_\Omega \rho(\omega)|\nabla(\varphi)|^2 \, \phi \, dx = -\int_\Omega \rho(\omega)\varphi\nabla\varphi\nabla\phi, \, dx = \left\langle \operatorname{div}(\rho(\omega)\nabla\varphi_0); \phi \right\rangle_{D'(\Omega);D(\Omega)}$$

Cela signifie que

$$\rho(\omega)|\nabla(\varphi)|^2 = \operatorname{div}(\rho(\omega)\varphi\nabla\varphi) \in D'(\Omega)$$

et comme $\rho(\omega)\varphi\nabla\varphi \in L^2(Q)^N$ alors le terme $\rho(\omega)|\nabla(\varphi)|^2$ appartient à l'espace $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. en vertu de (3.9), (3.13) et (3.16), on a $\operatorname{div}(\rho(\omega)\varphi\nabla\varphi) \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$.

Cela nous permet de reformuler la première équation du système (3.1) sous la forme va-

riationnelle suivante :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \phi \right\rangle + \int_Q a(x,t,\nabla u)\nabla\phi = -\int_Q \rho(\omega)\varphi\nabla\varphi\nabla\phi. \\ \text{pour tout } \phi \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)), \\ u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)), \\ u(.,0) = u_0 \text{ dans } L^2(\Omega), \end{cases} \tag{3.18}$$

L'existence et l'unicité du problème (3.18) sont déduites par une application direct du résultat obtenu dans [16] chapitre 3.

Théorème 3.2 *Soit $f \in L^{p'}\left(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)\right)$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. Le problème (3.18) admet une solution unique $u \in L^p\left(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\right) \cap \mathscr{C}\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$.*

Preuve. On vérifie les conditions du théorème 2.1. Soit $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme de gradient. Comme $p > 2$, alors l'injection de Sobolev donne

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega).$$

On considère l'opérateur : $A = -\text{div}(a(\,.\,,\nabla u)) : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ défini pour $u,\ \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ par

1. L'opérateur A est borné

$$\langle Au,\varphi\rangle = -\left\langle \text{div}(a(.\,,\nabla u)),\varphi\right\rangle = \int_\Omega (a(x,t,\nabla u))\nabla\varphi \ \text{dx}$$

d'après l'inégalité de Hölder on a :

$$\begin{aligned} |\langle Au,\varphi\rangle| \le |a(.\,,\nabla u)|\,|\nabla\varphi| \quad &\le \left(\int_\Omega |a(x,t,\nabla u|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|a(.\,,\nabla u)\|\,\|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\ &\le C\left(1+\|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right)\|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} \|a(.\,,\nabla u)\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)} = \int_\Omega |a(x,t,\nabla u|^{p'}\,\text{dx} \quad &\le C_1\left(\int_\Omega |c(x,t)|^{p'}\,\text{dx} + \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-1}\right)^{p'}\,\text{dx}\right) \\ &\le C\left(1+\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right), \end{aligned}$$

donc

$$\|a(.\,,\nabla u)\|_{L^{p'}(\Omega)} \le C\left(1+\|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right)$$

ce qui montre que, pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, Au est bien défini et que A est borné. De plus

$$\|Au\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq C\|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

2. L'opérateur A est hémicontinu.
   En effet, soient $u, v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\lambda \longrightarrow \langle a(.\,, \nabla(u+\lambda v)), \omega\rangle\,,$$

est continue. Soit fixé $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $\{\lambda_n\}$ une suite de $\mathbb{R}$ convergeant vers λ. Posons

$$S_n = \langle a(.\,, \nabla(u+\lambda_n v)\,), \omega\rangle = \int_\Omega a(x,t,\nabla(u+\lambda_n v))\nabla\omega\, dx$$

$$\nabla(u+\lambda_n v) = \nabla u + \lambda_n \nabla v \longrightarrow \nabla u + \lambda v$$

Comme l'application $a(.\,, \nabla(u+\lambda_n v)) \longrightarrow a(.\,, \nabla(u+\lambda v))$ est continue de $L^p(\Omega)$ dans $L^{p'}(\Omega)$, on a

$$a(.\,, \nabla(u+\lambda_n v)), \nabla\omega \longrightarrow a(.\,, \nabla(u+\lambda v)), \nabla\omega \text{ p.p. dans } \Omega,$$

et comme (λ_n) est convergent alors elle est bornée par une constante M donc $\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}
|a(.\,, \nabla(u+\lambda_n v)), \nabla\omega| &\leq |a(.\,, \nabla(u+\lambda_n v))||\nabla\omega| \\
&\leq \alpha\left(c(x,t) + |\nabla(u+\lambda_n v)|^{p-1}\right)|\nabla\omega| \\
&\leq \alpha c(x,t)|\nabla\omega| + |\nabla(u+\lambda_n v)|^{p-1}|\nabla\omega| \\
&\leq \alpha c(x,t)|\nabla\omega| + c_1|\nabla u|^{p-1}|\nabla\omega| + M^{p-1}|\nabla v|^{p-1}|\nabla\omega| \\
&= \left(\alpha c(x,t) + c_1|\nabla u|^{p-1} + + M^{p-1}|\nabla v|^{p-1}\right)|\nabla\omega|,
\end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\alpha c(x,t) + c_1|\nabla u|^{p-1} + + M^{p-1}|\nabla v|^{p-1}\right)|\nabla\omega| &\leq \left(\int_\Omega |\alpha c(x,t) + c_1|\nabla u|^{p-1} + + M^{p-1}|\nabla v|^{p-1}|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq c\left(\int_\Omega |c(x,t)|^{p'} dx + \int_\Omega |\nabla u|^p + |\nabla v|^p\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |\nabla
\end{aligned}$$

Il résulte alors du théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$\lim_{n\to+\infty} \langle a(.\,, \nabla(u+\lambda_n v)\,), \omega\rangle = \langle a(.\,, \nabla(u+\lambda v)\,), \omega\rangle\,,$$

d'où l'hémicontinuité de A.

3. L'opérateur A est strictement monotone : Soient $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $u \neq v$, on a

$$\begin{aligned}\langle -\operatorname{div}(a(.,\nabla u)) + \operatorname{div}(a(.,\nabla v)), u-v\rangle &= -\langle \operatorname{div}(a(.,\nabla u)) - \operatorname{div}(a(.,\nabla v)), u-v\rangle \\ &= \int_\Omega (a(x,t,\nabla u) - a(x,t,\nabla v))\nabla(u-v)dx \\ &= \int_\Omega (a(x,t,\nabla u) - a(x,t,\nabla v))(\nabla u \nabla v)dx \\ &\geq \alpha \int_\Omega |\nabla(u-v)|^p > 0.\end{aligned}$$

4. L'opérateur A est coercive Soit $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$
   d'apre l'hypothèse (A,3) et (A,4) on a

$$\langle Av, v\rangle = \langle -\operatorname{div}(a(.,\nabla v)\,), v\rangle = \int_\Omega a(x,t,\nabla v)\nabla v \geq \alpha \int_\Omega |\nabla v|^p \mathrm{dx} = \alpha \|v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

   En vertu le théorème , le problème admet une solution unique $u \in L^p\left(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)\right)$. De plus, comme A applique $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$, alors $A(u) \in L^{p'}\left(0,T; W^{-1,p'}(\Omega)\right)$. Il résulte que

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^{p'}\left(0,T; W^{-1,p'}(\Omega)\right)$$

   Ceci implique en particulier que u est continue de $[0,T] \to W^{-1,p'}(\Omega)$. Puisque $u \in L^p\left(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)\right)$ et $p > 2$, alors $u \in \mathscr{C}\left([0,T]; L^2(\Omega)\right)$ et donc la condition $u(x,0) = u_0$ a un sens.

- Prouvons maintenant l'estimation suivante :

$$\int_0^t \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx. \leq C_0 \quad \text{a.e. in } t \in (0,T).$$

En effet, en prenant $\phi = u$ en tant que fonction test dans (3.18), pour tout t $\in [0,T]$,

$$\int_0^t \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, u \right\rangle + \int_0^t \int_\Omega a(x,t,\nabla u)\nabla u = -\int_0^t \int_\Omega \rho(\omega)\varphi \nabla\varphi \nabla u. \tag{3.19}$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |u(x,t)|^2 - \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \int_\Omega a(x,t,\nabla u)\nabla u = -\int_0^t \int_\Omega \rho(\omega)\varphi\nabla\varphi\nabla u.$$

À partir de (A.3), (A.4), (3.9), (3.13), et de l'inégalité de Young, nous obtenons, pour tout t$\in[0,T]$,

$$\alpha\int_0^t\int_\Omega|\nabla u|^p\leq\frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\alpha^{\frac{-p'}{p}}\rho_2^{p'}}{p'}\|\varphi_0\|^{p'}_{L^\infty}\int_0^t\int_\Omega|\nabla\varphi|^{p'}+\frac{\alpha}{p}\int_0^t\int_\Omega|\nabla u|^p \tag{3.20}$$

Comme $L^2(\Omega)\hookrightarrow L^{p'}(\Omega)$, alors

$$\alpha\int_0^t\int_\Omega|\nabla u|^p\leq\frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\alpha^{\frac{-p'}{p}}\rho_2^{p'}}{p'}\|\varphi_0\|^{p'}_{L^\infty}C(\Omega,p)\int_0^t\int_\Omega|\nabla\varphi|^2+\frac{\alpha}{p}\int_0^t\int_\Omega|\nabla u|^p.$$

$$\int_0^t\int_\Omega|\nabla u|^p.\leq C(u_0,\varphi_0,\rho_2,T,\alpha,p)=C_0\quad\text{p.p tout } t\in(0,T). \tag{3.21}$$

En plus pour tout $\phi\in L^p(0,T,W_0^{1,p}(\Omega))$

$$\int_0^T\left\langle\frac{\partial u}{\partial t},\phi\right\rangle+\int_0^t\int_\Omega a(x,t,\nabla u)\nabla\phi=-\int_0^t\int_\Omega\rho(\omega)\varphi\nabla\varphi\nabla\phi.$$

En appliquent l'inégalité de Cauchy Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T\left\langle\frac{\partial u}{\partial t},\phi\right\rangle\right|&\leq\left(\int_0^T\int_\Omega|a(x,t,\nabla u)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_0^T\int_\Omega|\nabla\phi|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&+\rho_2^{p'}\|\varphi_0\|^{p'}_{L^\infty(\Omega)}\left(\int_0^T\int_\Omega|\nabla\varphi|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_0^T\int_\Omega|\nabla\phi|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leq C\left(\int_0^T\int_\Omega|\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_0^T\int_\Omega|\nabla\phi|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&+C\rho_2^{p'}\|\varphi_0\|^{p'}_{L^\infty(\Omega)}\left(\int_0^T\int_\Omega|\nabla\varphi|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T\int_\Omega|\nabla\phi|^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

en vertu de (3.16) et (3.21), on a :

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))}\leq C \tag{3.22}$$

Nous définissons l'opérateur

$$\begin{aligned} G: \quad & L^p(Q) \to L^p(Q) \\ & \omega \mapsto G(\omega) = u. \end{aligned}$$

u étant la solution unique de (3.18). Notre stratégie consiste à montrer que G satisfait les hypothèses du théorème du point fixe de Schauder, ce qui donnera alors la solution faible souhaitée. À partir de (3.21) et(3.22), nous avons que, pour $R > 0$ suffisamment grand, G applique $B_R = \left\{ v \in L^p(Q) : \|v\|_{L^p(Q)} \leq R \right\} \subset L^p(Q)$ sur lui-même. De plus, $u = G(\omega) \in \omega$ avec $\|G(\omega)\|_{\mathscr{H}} \leq C$. Puisque l'inclusion $\omega \hookrightarrow L^p(Q)$ est compacte, G est un opérateur compact.
Pour compléter la preuve, il reste à montrer que G est un opérateur continu. Ainsi, soit $(\omega_n) \subset B_R$ une séquence telle que $\omega_n \to \omega$ fortement dans $L^p(Q)$ et considérons les fonctions correspondantes à ω_n, c'est-à-dire $u_n = G(\omega_n)$ et φ, et posons $F_n = \rho(\omega_n)\varphi_n \nabla \varphi_n$ et $F = \rho(\omega)\varphi \nabla \varphi$. Nous devons montrer que :

$$u_n \mapsto u = G(\omega). \text{ converge fortement dans } L^p(Q).$$

En fait, en soustrayant les équations respectives de (3.18) pour u_n et u, et en prenant $\phi = u_n - u$ pour tout $t \in [0, T]$; on a

$$\int_0^t < \frac{\partial u}{\partial t}(u_n - u), \phi > + \int_0^t \int_\Omega (a(x, \nabla u_n) - a(x, \nabla u)) \nabla \phi = - \int_0^t \int_\Omega (F_n - F) \nabla \phi$$

$$\int_0^t < \frac{\partial u}{\partial t}(u_n - u), u_n - u > = \frac{1}{2} \int_\Omega |u_n(t) - u(t)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_\Omega |u_n(0) - u(0)|^2 dx$$

comme : $u_n(0) = u(0) = u_0$. par conséquent :

$$\frac{1}{2} \|u_n(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \int_\Omega [a(x,t,\nabla u_n) - a(x,t,\nabla u)] \nabla (u_n - u) - \int_0^T \int_\Omega (F_n - F) \nabla (u_n - u) \tag{3.23}$$

Grâce à (A.3), nous avons :

$$[a(.,\nabla u_n) - a(.,\nabla u)] \nabla (u_n - u) \geq \alpha |\nabla (u_n - u)|^p.$$

D'où, grâce à l'inégalité de Hölder (1.3) et à l'inégalité de Young (1.2), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \|u_n(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)} + \alpha \int_0^t \|\nabla (u_n - u)\|^p_{L^p(\Omega)^N} & \leq \int_0^t \|F_n - F\|_{L^{p'}(\Omega)^N} \|\nabla (u_n - u)\|_{L^p(\Omega)^N} \\ & \leq \tfrac{1}{p'} \left(\tfrac{1}{\alpha}\right)^{\frac{p'}{p}} \int_0^t \|F_n - F\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)^N} + \frac{\alpha}{p} \int_0^t \|\nabla (u_n - u)\|^p_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau l'inégalité de Young pour le deuxième terme du côté gauche de la

dernière inégalité, on obtient pour tout ϵ>0 :

$$\alpha \int_0^t \|\nabla(u_n-u)\|^p_{L^p(\Omega)^N} \leq \frac{1}{p'}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{p'}{p}} \int_0^t \|F_n-F\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)^N}$$

Par conséquent, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\alpha\left(1+\frac{1}{p}\right)\int_0^T \|\nabla(u_n-u)\|^p_{L^p(\Omega)^N} \leq \frac{1}{p'}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{p'}{p}} \int_0^T \|F_n-F\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)^N}$$

D'autre part, nous avons

$$\int_0^T \|F_n-F\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)^N} \leq C\left(\Omega,p\right)\int_0^T \|F_n-F\|^2_{L^2(\Omega)^N}$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|F_n-F\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \int_0^T \|\rho(\omega_n)\varphi_n\nabla\varphi_n-\rho(\omega_n)\varphi_n\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}dt.....(I_1)\\
&+\int_0^T \|\rho(\omega_n)\varphi_n\nabla\varphi-\rho(\omega_n)\varphi\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}dt.....(I_2)\\
&+\int_0^T \|\rho(\omega_n)\varphi\nabla\varphi-\rho(\omega)\varphi\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}dt.....(I_3)\\
&=I_1+I_2+I_3
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq C\int_0^T\int_\Omega |\nabla\varphi_n-\nabla\varphi|^2 dx\,dt\\
I_2 &\leq C\int_0^T\int_\Omega |\varphi_n-\varphi|^2|\nabla\varphi|^2 dx\,dt\\
I_3 &\leq C\int_0^T\int_\Omega |\rho(\omega_n)-\rho(\omega)|^2|\nabla\varphi|^2 dx\,dt
\end{aligned}$$

puisque $\omega_n \longrightarrow \omega$ presque partout dans $\mathbb{Q}$ pour une sous suite et (3.16) et a partir du théorème de convergence dominée on peut obtenir $I_3 \longrightarrow 0$. Ensuite, φ_n satisfait (3.10).
Et par conséquent,

$$\int_\Omega \rho(\omega_n)\nabla\varphi_n\nabla(\varphi_n-\varphi)dx = \int_\Omega \rho(\omega)\nabla\varphi_\nabla(\varphi_n-\varphi)dx$$

et

$$\int_\Omega \rho(\omega_n)|\nabla(\varphi_n-\varphi)|^2 dx = \int_\Omega (\rho(\omega-\rho(\omega_n)))\nabla\varphi\nabla(\varphi_n-\varphi)dx$$

qui implique :

$$\int_\Omega |\nabla(\varphi_n-\varphi)|^2 dx \leq C\int_\Omega |\rho(\omega_n)-\rho(\omega)|^2|\nabla\varphi|^2 dx$$

alors,

$$I_1 \leq C \int_0^T \int_\Omega |\nabla(\varphi_n - \varphi)|^2 dx\,dt \leq C \int_0^T \int_\Omega |\rho(\omega_n - \rho(\omega))|^2 |\nabla\varphi|^2 dx\,dt \longrightarrow 0$$

comme ci dessus I_3 . par l'inégalité de Poincaré ce ci implique que :

$$\int_0^T \int_\Omega |\varphi_n - \varphi|^2 dx\,dt \longrightarrow 0$$

pour une sous suite extraite de(φ_n) on peut supposer.

$$\varphi_n - \varphi \longrightarrow 0 \;\; p.p \;\; ds \;\; \mathbb{Q}$$

alors par le théorème de convergence dominée, nous obtient $I_2 \longrightarrow 0$:
Et enfin : $\int_0^T \|F_n - F\|^2_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0.$
Donc on peut déduire que

$$u_n \longrightarrow u \text{ fortement dans } L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)) \subset L^p(Q).$$

et c'est toute la séquence (u_n) qui converge vers $u = G(\omega)$. Cela montre que G est continu et cela conclut la démonstration du Théorème . ■

Bibliographie

[1] S.N ;Antontsev ;Chipot ;M *The thermistor problem : existence, smoothness, uniqueness, blowup. SIAM J. Math. Anal. 25, 1128–1156 (1994)*

[2] Allegretto, W., Lin, Y., Ma, S. : Existence and long time behaviour of solutions to obstacle thermistor equations. Discrete Contin. Dynam. Syst. Ser. A (DCDS-A) 8(3), 757–780 (2002)

[3] Bénilan, Ph, Boccardo, L., Gallouët, Th, Gariepy, R., Pierre, M., Vázquez, J.L. :*An L1 theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 22, 241–273 (1995)*

[4] González Montesinos, M. T., and Ortegón Gallego, F. : The evolution thermistor problem with degenerate thermal conductivity. Commun. Pure Appl. Anal. 1(3), 313–325 (2002)

[5] González Montesinos, M.T., Ortegón Gallego, F. : Existence of a capacity solution to a coupled nonlinear parabolic-elliptic system. Commun. Pure Appl. Anal., 6(1), 23–42 (2007)

[6] Howinson, S.D., Rodrigues, J.F., Shillor, M. : Stationary solutions to the thermistor Problem. J. Math. Anal. Appl. 174, 573–588 (1993)

[7] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.

[8] H. Le Dret, *Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations*. Springer International Publishing :, 2018.

[9] J.Lions et E.Magenes,*Problèmes aux limites non homogènes et Applications*,Tome 1 ,Dunod 196.

[10] H. K. Pathak, *an introduction to nonlinear analysis and fixed point theory*.springer.

[11] Attouch, Giuseppe Buttazzo, Gérard Michaille,*Analysis in Sobolev and BV Spaces* Applications to PDEs and Optimization,.

[12] V. Barbu, *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems* , Springer-Science+ Business Media, B.V 1998.

[13] R. Dautray, Jacques-Louis Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Tehnology, Volume 2 Functional and variational methods*,Springer.2000.

[14] J.Necas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques* , Masson, Paris,1967

[15] Z. Lu, S. Zheng, *Semigroups associated with dissipative systems,, Direct all inquiries* to CRC press LLC, 2000 Corporate Blvd., N.W., Boca Raton, Florida 33431.

[16] KENOUDI.N.H, *Équation parabolique non linéaires a données mesures,* mémoire 2021-2022.