République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique
Université Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et L'Informatique

MÈMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Par

Mebarka BELAL

Quelques généralisations du théorème de point fixe de Banach et leurs applications

Soutenu publiquement le 15 Juin 2023, devant le jury composé de

N.BENAICHOUCHE	MAA.**Univ. Médéa**	**Président**
M.L.LEGHMIZI	MCB.**Univ. Médéa**	**Examinateur**
Z.MOSTEFAOUI	MCA.**ENS-Kouba**	**Encadreur**
R.SOUILAH	MCA.**Univ. Médéa**	**Co-encadreur**

Année universitaire 2022/2023

Table des matières

Remeciements **II**

Résumé **III**

Notations **V**

Introduction générale **VI**

1 Préliminaires **1**
1.1 Espace métrique 1
1.2 Convergence d'une suite 5
1.3 Espaces métriques complets 6
1.4 Espace métrique compact 8
1.5 Espace vectoriel normé 9

2 Théorèmes du point fixe dans un espace métrique et applications **11**
2.1 Théorème du point fixe de Banach 11
2.2 Théorème de Picard à paramètres 14
2.3 Théorème du point fixe de Kannan 14
2.4 Théorème de point fixe Chatterjea 16
2.5 Théorème de point fixe de Reich 18
2.6 Théorème de point fixe de Ćirić 18
2.7 Théorème de point fixe de Matkowski 19
2.8 Théorème de point fixe de Caristi 19
2.9 Applications 19
2.9.1 Problème de Cauchy-Lipschitz 19
2.9.2 Équation intégrale de Fredholm 20
2.9.3 Équation intégrale de Voltera 21

3 Théorème du point fixe de Banach sur une classe d'espaces métriques généralisés **24**
3.1 Espace métrique généralisé 24
3.1.1 Quelques théorèmes du point fixe sur les espaces métriques généralisés 27

Conclusion **36**

Bibiography **37**

Remerciements

Tout d'abord merci à *Z.MOSTEFAOUI* **MCA** à ENS kouba, pour sa responsabilité de diriger ce travail. Je remercie sincèrement pour ses conseils avisés à son aide, sa patience et sa disponibilité.

Je tiens remercie Monsieur *R.SOUILAH* **MCA** à l'université Médéa pour ses conseils et ses orientations judicieuses.

Je remercie *N.BENAICHOUCHE* **MAA** à l'université Médéa pour nous avoir fait l'honneur de présider le jury.

Mes remerciements vont à *M.LEGHMIZI* **MCA** à l'université Médéa pour avoir accepté d'examiner ce mémoire.

Je tiens aussi à remercier mes parents et mes frères et ma soeur grâce à leurs tendres encouragements, de soutiens moraux et leurs grands sacrifices, ils ont pu créer le climat affectueux et propice à la poursuite de mes études.

Je remercie aussi les professeurs de mathématiques et à tout ce qui m'ait enseigné au long de ma vie scolaire.

A toute ma famille à tous mes amis et mes collègues de leurs soutiens et leurs encouragements.

Résumé

Dans ce travail, nous étudierons le théorème de point fixe lié au principe de contraction de Banach sur une classe d'espaces métriques généralisés, c'est -à-dire des espaces métriques où l'inégalité triangulaire est remplacée par inégalité rectangulaire. Nous avons démontré des généralisations de Banach et soutenu ces résultats avec des exemples. Nous avons donné également quelques notions essentielles et quelques théorèmes de point fixe dans un espace métrique, aussi appliquer le principe de contraction de Banach aux quelques types d'équations intégrales et au problème de Cauchy Lipschitz.

Mots clés :
Espace métrique, contraction de Banach, espace métrique généralisé, θ-contraction.

Abstract

In this work, we will study the fixed point theorem related to Banach contraction principle on a class of generalized metric spaces, that is, metric spaces where the triangular inequality is replaced by a rectangular inequality. We have demonstrated generalizations of Banach and supported these results with examples.
We have also given some essential notions and some theorems of fixed point in a metric space, also apply the principle of contraction of Banach to some types of integral equations and to the problem of Cauchy Lipschitz.

Keywords : Metric spaces, Banach contraction, generalized metric space, θ-contraction.

Notations

Les notations, symboles et abréviations les plus fréquemment utilisés sont répertoriés ci-dessous.

$\mathbb{N}$	L'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	L'ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{Z}^+$	L'ensemble de tout les entiers non negatifs.
(X,d)	Désigne un espace métrique où d est la distance associée.
$d(x,y)$	La distance entre x et y.
(E,τ)	Désigne un espace topologique.
$\mathbb{R}^n$	L'espace Euclidien de dimension n.
$\mathbb{R}^2$	L'espace Euclidien de dimension 2.
$C([0,1],\mathbb{R})$	L'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
$\|.\|$	La norme sur l'espace de Banach.
$\varnothing$	l'ensemble vide.

Introduction générale

Au cours des dernières années, la théorie du point fixe est devenue l'un des outils les plus importants pour résoudre certains problèmes dans divers domaines comme dans l'analyse non linéaire, la physique, la biologie, la chimie, l'ingénierie, l'économe et la théorie des jeux. Banach a énoncé par le mathématicien polonais Stefan Banach en 1922 [2], a fourni le premier théorème du point fixe dans les espaces métriques et établi L'existence et l'unicité du point fixe du contraction dans un espace métrique dans lui- même, ce théorème est connu sous le nom principe de l'application contractante[2], ce principe stipule que, si (X,d) est un espace métrique complet et $T : X \longrightarrow X$ est une application de contraction (c'est-à-dire que $d(T(x),T(y)) \leq \lambda d(x,y)$ pour tout $x,y \in X$ où $\lambda \in (0,1)$) alors T a un point fixe unique. Banach est résolution des équations intégrales, les équations différentielles, et convergence de certaines méthodes numériques comme celle de Newton pour la résolution d'équation non linéaire.
En 2000, Branciari [5], a introduit le concept d'espaces métriques généralisés, où l'inégalité triangulaire est remplacée par l'inégalité $d(x,y) \leq d(x,u)+d(u,v)+d(v,y)$ pour tous $x,y,u,v \in X$. Divers résultats de point fixe on été établis sur de tels espaces voir [3, 12, 22, 23, 31, 32, 34].
Plusieurs auteurs ont généralisé le principe de contraction de Banach [2] en introduisant les différentes contractions sur les espaces métriques. L'une de ces généralisations a été donnée par Jleli et Samet[18].
Après les travaux de Banach, il y a eu de nombreux essais pour améliorer et généraliser le problème d'existence et d'unicité comme :
Edelstein dans l'année 1962 [15] a prouvé la version du principe de contraction de Banach.
De plus en 1968 Kannan [11, 21, 27] à garantie L'existence et l'unicité du point fixe pour les applications non-continue, ce théorème est le plus simple et le plus connu, en 1971 Chatterjea [7] obtenu la variante du théorème de Kannan.
Aussi, on trouve d'autres travaux importants comme Reich[28], Ćirić[10], Matkowski.
En 1976, Caristi [6] a obtenu, à l'aide de l'induction transfinie, un théorème de point fixe qui, contrairement au théorème de Banach.
l'objectif de ce travail est l'étude des quelques généralisations du théorème de point fixe de Banach et leurs applications dans les espaces métriques généralisés .

Dans ce cadre nous avons conçu notre travail qui regroupe en plus d'une introduction, conclusion et trois chapitres.

chapitre 1 Sera consacré à quelques définitions et quelques notions qui sont indispensable pour le reste de notre travail.

chapitre 2 Contient des Théorèmes de point fixe dans un espace métrique comme principe de contraction de Banach, Picard à paramètres, Kannan, Chatterjea, Reich, Ćirić, Matkowski et Caristi, et quelques applications (Cauchy-Lipschitz et les équations intégrales).

chapitre 3 l'essentiel de notre étude se situe dans cet chapitre . Nous allons définir l'espace métrique généralisé et prouver quelques nouveau théorèmes de point fixe sur ces espaces et donner des exemples.

L'importance de ce chapitre, pour montrer l'amélioration de notre résultat par rapport au résultat classique, est l'application de point fixe pour résoudre quelques problèmes dans plusieurs domaine comme les équations intégrales non linéaires.

Ce mémoire est clôtorée par une bibliographie.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on introduit des définitions, notations, lemmes et quelques théorèmes qui sont utilisés le long de ce mémoire voir [2, 4, 9, 16, 26, 33].

1.1 Espace métrique

Définition 1 (Distance) *[2] Soit X un ensemble non vide. On appelle une distance (ou métrique) sur X, toute application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout x, y et $z \in X$ on ait :*

1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$ *(symétrie)*
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(inégalité triangulaire)*

On appelle le couple (X,d) un espace métrique.

Exemple 1 *: Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, l'application définie par*

$$d(x,y) = |x-y|$$

est une métrique et elle s'appelle la métrique usuelle. L'espace $(\mathbb{R},d)$ est un espace métrique.

Exemple 2 *: Soit la distance définie par :* $d(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{cases}$

Elle s'appelle la distance discrète sur X. L'espace (X,d) est un espace métrique.

Exemple 3 *: L'ensemble des nombre réels $\mathbb{R}$ muni de la distance*

$$d(u,v) = \frac{|u-v|}{1+|u-v|}, \forall u, v \in \mathbb{R}$$

est un espace métrique.

En effet

1) $d(u,v)=0 \Longleftrightarrow \dfrac{|u-v|}{1+|u-v|}=0 \Longleftrightarrow |u-v|=0$ *et* $1+|u-v|\neq 0 \Longleftrightarrow$ $u=v$, $\forall u,v\in\mathbb{R}$.

2) $d(u,v)=\dfrac{|u-v|}{1+|u-v|}=\dfrac{|-(v-u)|}{1+|-(v-u)|}=\dfrac{|v-u|}{1+|v-u|}=d(v,u)$, $\forall u,v\in\mathbb{R}$.

3) $d(u,v)=\dfrac{|u-v|}{1+|u-v|}=\dfrac{|u-w+w-v|}{1+|u-w+w-v|}\leq \dfrac{|u-w|}{1+|u-w|}+\dfrac{|w-v|}{1+|w-v|}$, $\forall u,w,v\in\mathbb{R}$.

Distances équivalentes

Pour comparer les structures topologiques définies par deux métriques différentes, on introduit la notation d'équivalence entre deux distances.

Définition 2 (Métriques équivalente) *Deux distances d_1 et d_2 sur X sont équivalentes s'il existe deux constantes $K_1, K_2 > 0$ telles que pour tout $(x,y)\in X\times X$ on a*

$$K_1 d_1(x,y)\leq d_2(x,y)\leq K_2 d_1(x,y).$$

Exemple 4

(1) *Sur $\mathbb{R}^n$, les distances d_2, d_∞ et d_1 sont deux à deux équivalentes.*

(2) *Sur $C^0([0,1];\mathbb{R})$, les distances d_2, d_∞ et d_1 ne sont pas équivalentes.*

Définition 3 (Boule et sphère) *Soit $b\in X$ et $r>0$. L'ensemble*

$$B(b,r)=\{x\in X\setminus d(x,b)<r\}$$

s'appelle la boule ouverte de centre b et de rayon r.

$$\tilde{B}(b,r)=\{x\in X\setminus d(x,b)\leq r\}$$

s'appelle la boule fermée de centre b et de rayon $r\geq 0$.

$$S(b,r)=\{x\in X\setminus d(x,b)=r\}$$

s'appelle la sphère de centre b et de rayon r.

Exemple 5 *Soit* $\mathbb{R}$ *l'ensemble des réels muni de la distance* $d(x,y)=|x-y|, (x,y)\in\mathbb{R}$ *donc*

1. $B(x_0,r)=]x_0-r,x_0+r[$.
2. $\tilde{B}(x_0,r)=[x_0-r,x_0+r]$.
3. $S(x_0,r)=\{x_0-r,x_0+r\}$.

Définition 4 (Espace topologique) *On appelle topologie sur un ensemble* X *une famille* τ *de partie de* $X(\subset\mathscr{P}(X))$ *vérifiant les propriétés suivantes*

1) $\phi,\ X\in\tau$,

2) $\forall(U_i)_{i\in I}\subset\tau\ ,\bigcup_{i\in I}U_i\in\tau$,

3) $\forall(U_i)_{1\leq i\leq n}\subset\tau,\bigcap_{i=1}^{n}U_i\in\tau$.

Les éléments de τ *sont appelle ouverts de la topologie .*
Le couple (X,τ) *est appelé espace topologique.*

Définition 5 (Partie Ouverte) *Un ensemble* U *de* X *est dit ouvert si*
$\forall x\in U,\ \exists\varepsilon>0$ *tel que* $B(x,\varepsilon)\subset U$.
On appelle topologie associée à la distance d*, l'ensemble* τ_d *constitué des ouverts de* (X,d).

Proposition 1 *Toute boule ouverte est un ouvert.*

Preuve.

Soit $B(x,r)$ est une boule ouverte dans X. Soit $y\in B(x,r)$, on pose

$$r'=\frac{r-d(x,y)}{2}$$

Alors $B(y,r')$ est inclus dans $B(x,r)$, en effet pour $z\in B(y,r')$

$$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)\leq d(x,y)+\frac{r-d(x,y)}{2}\leq\frac{r+d(x,y)}{2}<r.$$

Corollaire 1 *Un ensemble ouvert* A *dans* X *est une union quelconque des boules ouvertes.*

Preuve.
A ouvert dans X donc $\forall x\in A,\exists r>0,\ B(x,r)\subset A$ (par définition). Le réel strictement positif $r_x=\sup\{r>0,B(x,r_x)\subset A\}$ est bien défini pour tout $x\in A$ et on a

$$A=\bigcup_{x\in A}B(x,r_x)$$

Définition 6 (Partie fermée) *Un ensemble A de X est dit fermé si son complémentaire $A^c = \{x \in X \setminus x \notin A\}$ est un ouvert de X.*

Proposition 2

F_1) *Toute intersection des fermés est un fermé.*

F_2) *Une réunion finie des fermés est un fermé.*

Remarque

Les parties $\varnothing$ et X sont des ouverts et des fermés de (X,d).

Définition 7 (Diamètre) *Soit (X,d) un espace métrique. On appelle diamètre d'une partie non vide A de X la quantité suivante :*

$$diam(A) = \sup\{d(x,y) :\ x,y \in A\}.$$

Définition 8 (Intérieur) *Soit (X,d) un espace métrique et $A \subset X$. Un point $x \in A$ est dite intérieur à A s'il*

$$\exists r > 0,\ B(x,r) \subset A.$$

L'ensemble de tout points intérieurs à A s'appelle l'intérieur de A et se note

$$x \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A.$$

Proposition 3

1) $\forall A \subset X$, *A ouvert* $\Leftrightarrow \mathring{A} = A$.

2) *$\mathring{A}$ est un ouvert et c'est le plus grand ouvert contenu dans A.*

Définition 9 (Adhérence) *On appelle adhérence de A et on note $\bar{A}$ le sous ensemble de X défini par*

$$\bar{A} = \{x \in X,\ d(x,A) = 0\}$$

Par définition, il est clair que $A \subset \bar{A}$

Proposition 4 *On a*

1) $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \phi$.

2) *A fermé* $\Longleftrightarrow A = \bar{A}$.

3) *$\bar{A}$ est un fermé et c'est le plus petit fermé qui contient A.*

Définition 10 (Voisinages) *Soit (X,d) un espace métrique et $x \in X$. On appelle voisinage de x dans X, toute partie de X contenant un ouvert contenant x. On note $V(x)$ l'ensemble de voisinage de x,*

$$V(x) = \{V \in \mathscr{P}(X),\ \exists U \in \tau,\ x \in U \subset V\}$$

Dans cette définition nous réduirons une caractérisation simple et utile des ouverts d'un espace métrique (X,d).

Une partie $A \subset X$ est un ouvert si seulement si elle est voisinage de chacun de ses points c.à.d

$$\forall x \in A,\ \exists B(x,r) \subset A.$$

1.2 Convergence d'une suite

Définition 11 *Soit (X,d) un espace métrique, $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de X et $x \in X$. On dit que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x si :*

$$\forall \varepsilon > 0;\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N : d(x_n, x) < \varepsilon$$

c'est à dire :

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$$

Et on écrit

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x$$

Proposition 5 *(l'unicité de la limite dans un espace métrique). La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge dans un espace métrique (X,d) alors la limite est unique.*

Preuve.
Si on a x_1, x_2 dans E tel que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ n \geq N_\varepsilon,\ d(x_n, x_1) < \frac{\varepsilon}{2},$$

et

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N},\ n \geq N'_\varepsilon,\ d(x_n, x_2) < \frac{\varepsilon}{2},$$

Alors, pour $n \geq \sup\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$, on a

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_n, x_1) + d(x_n, x_2) \leq \varepsilon$$

et donc

$$d(x_1, x_2) \leq \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0$$

D'où $d(x_1, x_2) = 0$ ce qui donne $x_1 = x_2$.

Définition 12 (Suite extraire) *On appelle suite extraite (ou sous suite) de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de la forme $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.*

Lemme 1 *Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(n) \geq n$.*

Preuve On montre ce résultat par récurrence :

(i) Pour $n = 0$, $\varphi(0) \geq 0$ est vraie car $\varphi(0) \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

(ii) Supposons que pour certain $n \geq 0$, on a "$\varphi(n) \geq n$ ". Comme φ est strictement croissante, alors on a $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$. Or $\varphi(n+1) \in \mathbb{N}$, d'ou $\varphi(n+1) \geq n+1$. Donc par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(n) \geq n$.

1.3 Espaces métriques complets

Les espaces métriques complets sont une classe intéressante d'espaces métriques car ils rendent puissants. On peut faire dans ces espaces beaucoup de choses qu'on ne sait pas faire dans un espace quelconque. Par exemple, on sait trouver le point fixe d'un application contractante, projeter sur une partie convexe, prolonger une application uniformément continue, et bien d'autres. Les applications principales sont des théorèmes d'existence.

Définition 13 (Suite de Cauchy) *Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X est une suite de Cauchy si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \in N$ on a*

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

c'est à dire :

$$\lim_{n,m\to+\infty} d(x_n, x_m) = 0$$

Proposition 6 *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace métrique (X, d) est de Cauchy si et seulement si*

$$\lim_{p\to\infty} diam(S_p) = 0 \ ou' \ S_p = \{x_n \backslash n \geq p\}$$

Exemple 6 *Dans $\mathbb{R}$, la suite de terme général $x_n = (-1)^n$ n'est pas de Cauchy. En effet, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $S_p = \{-1, 1\}$ d'ou $diam(S_p) = 2$.*

Définition 14 *Soit (X,d) un espace métrique.*

1. *Une partie A de X est bornée s'il existe $a \in X$ et $r > 0$ tels que*

$$d(a,x) \leq r,\ \forall x \in A.$$

2. *Une suite $(x_n)_{n\in N} \subset X$ est bornée s'il existe $a \in X$ et $r > 0$ tels que*

$$d(a,x_n) \leq r,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proposition 7 *Dans un espace métrique (X,d) on a*

1) *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

2) *Toute suite de Cauchy est bornée.*

3) *Toute suite de Cauchy admettant une sous suite convergente est converge.*

Preuve.

1) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers x. Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon,\ d(x_n,x) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

on a

$$\forall n,m \geq N_\varepsilon,\ d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x) + d(x,x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ce qui montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.

2) Choisissons $\varepsilon = 1$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n,m \geq n_0,\ d(x_n,x_m) \leq 1.$$

En particulier

$$\forall n \geq n_0,\ d(x_n,x_{n_0}) \leq 1.$$

Ce qui montre que la suite est bornée.

3) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy et soit $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite extraire qui converge vers x.

Soit $\varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_\varepsilon,\ d(x_{\varphi(n)},x) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy il existe un rang N'_ε tel que

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N},\ (n \geq N'_\varepsilon)\ et\ (m \geq N'_\varepsilon),\ d(x_n,x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

en particulier, si $n \geq \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon)$, on déduit que

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, x) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ce qui prouve la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x.

Remarque

On remarque qu'il y a des suites de Cauchy qui ne convergent pas. Dans l'espace $]-1,1[$, la suite $\{1-\frac{1}{n}\}$ est une suite de Cauchy, puisque la même suite converge dans $\mathbb{R}$ vers 1, mais $1 \notin]-1,1[$.

Définition 15 (Espace métrique complet) *L'espace métrique (X,d) est dit complet si tout suite de Cauchy converge.*

Exemple 7

1) $(\mathbb{R}, |.|)$ *est complet.*

2) $(\mathbb{Q}, |.|)$ *n'est pas complet.*

Proposition 8 *On a*

1) *Dans un espace métrique (X,d), toute partie complète est fermée.*

2) *Dans un espace métrique (X,d), les parties fermées sont des parties complètes.*

Preuve.

1) Soit F une partie complète d'un espace métrique (X,d), et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élément de F converge dans E. Donc elle est de Cauchy dans (X,d) et donc de Cauchy dans (F,d_F). Comme F est complète donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F. Donc F est fermée.

2) $\Rightarrow$)Supposons que F est fermée. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de (F,d_F) alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de (X,d). Comme F est complet alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite dans X. Comme F est fermée cette limite appartient à F.
$\Leftarrow$)Dans un espace métrique (X,d) toute partie complète est fermée.

1.4 Espace métrique compact

Définition 16 *(Recouvrement) Soit (X,d) un espace métrique. Une famille d'ensemble $(U_i)_{i\in I}$ est une recouvrement de X si*

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Définition 17 *On dit qu'un espace métrique (X,d) est compact si de toute recouvrement ouverts on peut extraire un recouvrement fini*

$$\left(X=\bigcup_{i\in I}U_i\right)\Longrightarrow(\exists J\subset I, J\ fini,\ X=\bigcup_{i\in J}U_i).$$

Proposition 9 *Pour une partie C d'un espace métrique (X,d), les deux assertions suivantes sont équivalentes*

1) *C compacte.*

2) *Toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de C, on peut extraire une sous suite convergente dans C*

Théorème 1 *Soit (X,d) un espace métrique et $A\in X$*

1) *Si (A,d) un compact alors A fermé dans X.*

2) *Si (X,d) un compact et A fermé alors (A,d) est un compact.*

1.5 Espace vectoriel normé

Définition 18 (Espace vectoriel normé) *Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une norme sur X est une application $N:X\longrightarrow\mathbb{R}^+$ telle que, pour tout $x,y\in X$ et $\lambda\in\mathbb{K}$ on ait :*

1. $N(x)=0\Leftrightarrow x=0$
2. $N(\lambda x)=|\lambda|N(x)$
3. $N(x+y)\leq N(x)+N(y)$.

$N(x)$ est noté $\|x\|$.
L'espace $(X,\|.\|_X)$ s'appelle espace vectoriel normé (e.v.n) dans X sur $\mathbb{K}$.

Exemple 8

1) *$(\mathbb{R},|.|)$; $(\mathbb{R}^n,\|.\|)$, avec $\|.\|$ la norme euclidienne.*

2) *Les applications $\|.\|_1$, $\|.\|_2$, ..., $\|.\|_\infty$ sont des normes sur $X=\mathbb{R}^n$.*

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|,\ \|x\|_2=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2)^{\frac{1}{2}},\ \|x\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}\{|x_i|\}$$

.

3) *L'espace vectoriel $C([0,1],\mathbb{R})$ peut être muni des normes :*

$$\|f\|_1=\int_0^1|f(t)|dt,\ \|f\|_2=\sqrt{\int_0^1 f(t))^2dt},\ \|f\|_\infty=\max_{t\in[0,1]}|f(t)|$$

.

Définition 19 *Deux normes N_1 et N_2 de X sont dites équivalentes s'il existe C_1, $C_2 > 0$ tels que, pour tout $x \in X$:*

$$C_1 N_1(x) \leq N_2(x) \leq C_2 N_1(x)$$

Proposition 10 *[24]*

1) *Tout espace normé est un espace métrique.*

2) *Tout espace vectoriel normé de dimension fini est complet.*

Définition 20 *On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet.*

Exemple 9 $(\mathbb{R}, |.|)$ *est un espace de Banach.*

Définition 21 (Application Continue) *Soient $(X, \delta), (Y, d)$ deux espaces métriques. Une application $f : X \to Y$ est continue au point $a \in X$ si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

C'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in X,\ \delta(x, a) \leq \alpha \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq \varepsilon$$

On dit que f est continue sur (Y, d) si elle est continue en tout point de Y.
et on dit que f est uniformément continue sur Y si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in X, \forall y \in X,\ \delta(x, y) \leq \alpha \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$$

Théorème 2 *Toute fonction f continue sur un compact est uniformément continue.*

Chapitre 2

Théorèmes du point fixe dans un espace métrique et applications

Le but de ce chapitre est l'étude de quelques théorèmes du point fixe dans un espace métrique et leurs applications. D'abord on commence par la plus connu d'entre eux : le théorème du point fixe de Banach pour les applications contractantes. On verra ensuite le théorème du point fixe de Picard à paramètres, Kannan, Chatterjea, Reich, Ćirić , Matkaowski et Caristi. Enfin, des applications : problème de Chauchy-lipschitz et Équation intégrale de (Fredholm et Voltera).
Nous basons sur les références suivants[1, 2, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 17, 21, 27, 28, 30, 36]

2.1 Théorème du point fixe de Banach

Ce théorème est dit principe de l'application contractante, il est la base de la théorie du point fixe. Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même. Ce théorème prouvé en 1922 par Stefan Banach et basé essentiellement sur les notions d'application contractante. voir[1, 2, 17, 30, 36]

Définition 22 (Point fixe) *Soit (X,d) un espace métrique, une application f est définie par $f : X \longrightarrow X$, on dit que $x \in X$ est un point fixe de f si $f(x) = x$.*

Définition 23 (Application lipschitzienne) *[17]*

(1) *On dit que $f : (X,d) \longrightarrow (X^{'}, d^{'})$ est lipschitzienne et de rapport $K > 0$ si pour tout x et $y \in X$, on a*

$$d^{'}(f(x), f(y)) \leq K\, d(x,y)$$

(2) *On dit que $f : (X,d) \longrightarrow (X,d)$ est une contraction si f est lipschitzienne et de rapport $K < 1$ (on dit aussi que f est contractante).*

Remarque 1

1. *Si f est lipschitzienne, alors f est uniformément continue sur X.*
2. *Contractive si et seulement si pour tout $x, y \in X$, et $x \neq y$ on a :*

$$d'(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$$

Exemple 10

1.) *Si f est la fonction identité, alors tout point a un point fixe.*

2.) *si f est l'application définie par $f(x) = x + 1$, alors f aucun point fixe.*

Exemple 11 *Soit $X = \mathbb{R}$ et l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :*

$$f(x) = \frac{1}{3}x + 2$$

(X, d) est un espace métrique complet, tel que $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = |x - y|$ on a, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\left|f(x) - f(y)\right| = \left|\frac{1}{3}x + 2 - \frac{1}{3}y - 2\right| = \left|\frac{1}{3}\right|\left|x - y\right| \leq \frac{1}{3}\left|x - y\right|$$

Alors f est contractante et admet un unique point fixe $x = 3$.

Théorème 3 (Théorème de point fixe de Picard-Banach) *Toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même admet un unique point fixe x. De plus, x est la limite des itérations de f à partir de n'importe quel point x_0. Enfin, la vitesse de convergence est géométrique de rapport K : $d(x, x_n) \leq \dfrac{K^n}{1 - K} d(x_0, x_1)$.*

Démonstration

•Existence. Considérons la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1), \ldots,\ x_{n+1} = f(x_n), \ldots$
et $x_0 \in X$
La suite (x_n) est une suite de Cauchy. En effet, nous avons

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq K\, d(x_n, x_{n-1}) \\
d(x_n, x_{n-1}) &\leq K\, d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\
&\vdots \\
d(x_2, x_1) &\leq K\, d(x_1, x_0)
\end{aligned}$$

On multiplie membre à membre, on a

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq K^n d(x_1, x_0)$$

Soit $p \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq \left[K^{n+p-1} + K^{n+p-2} + \cdots + K^n\right] d(x_1, x_0) \\ &\leq K^n [K^{p-1} + K^{p-2} \cdots + 1] d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Entre crochets, on a une progression géométrique de raison K, dont on connait la somme, ce qui donne

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{K^n(1-k^p)}{1-K} d(x_1, x_0) \leq \frac{K^n}{1-K} d(x_1, x_0)$$

Comme $K < 1$, la série est convergente et $d(x_{n+p}, x_n) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$, donc la suite est de Cauchy.
La suite (x_n) est de Cauchy dans X complet, (x_n) converge vers a et avec $x_n = f(x_{n-1})$, quand $x \longrightarrow a$, on obtient $a = f(a)$ (car f est continue), c'est-à-dire que a est un point fixe pour f.

•Unicité. Soit a' un point fixe quelconque de f, alors $f(a) = a$ et $f(a') = a'$. On a

$$d(a, a') = d(f(a), f(a')) \leq K d(a, a')$$

(car f est contractante), et donc $(1-K)d(a, a') \leq 0$. Comme $K < 1$, alors $1 - K > 0$ et donc $d(a, a') \leq 0$ qui n'est possible que si $a = a'$.

Remarque 2

1) *Si $K = 1$ le théorème est faux; il n'y a ni existence, ni unicité. A titre d'exemples :*
•*Considérer dans $X = \mathbb{R}$ et la fonction $f(x) = x + 1$. Alors*

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |x - y| = d(x, y)$$

et il n'existe pas de point fixe.
•*Si on considère $X = \mathbb{R}$ et la fonction $f(x) = x$, alors tous les points sont fixes.*

2) ***(Théorème de Edelstein 1962)*** *Si pour tout x et $y \in X$, $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, alors il y a unicité mais il n'y a pas existence. A titre de contre-exemple, considérer $f(x) = \log(1 + \exp(x))$. Alors il n'existe pas de point fixe; si-non on aurait $\log(1 + \exp(x)) = x$ ce qui donne $1 + \exp(x) = \exp(x)$ c'est-à-dire $1 = 0$.*

3) *Le théorème est faux si* (X,d) *est non complet. A titre de contre-exemple, considérer* $X=]0,1[$ *et* $f(x)=\frac{x}{2}$

Exemple 12

1. *On considère* $X=\mathbb{R}^2$*, et on s'intéresse à la fonction* $f(x,y)=(\sin(x+y)/2+5,\cos(x-y)/2-10)$*. Elle est contractante et donc elle admet un unique point fixe.*
2. $x=\mathbb{R}$*,* $f(x)=\sqrt{x^2+1}$*. Faux se n'est pas contractante.*

Il existe d'autres énoncés du théorème du point fixe (sorte de généralisation), donnés ci-dessous.

2.2 Théorème de Picard à paramètres

Théorème 4 *[17] Soit* X *un espace métrique complet,* A *un espace métrique et* $F: X\times A \longrightarrow X$ *une application continue que l'on suppose uniformément contractante en* x*. Alors pour tout* λ *il existe un unique* $x(\lambda)$ *point fixe et l'application* $\lambda \longmapsto x(\lambda)$ *est continue.*

Exemple 13 *On considère* $X=\mathbb{R}^3$*, et on s'intéresse à la fonction* $f(x,y,t)=(\sin(x+y)/2+t/-1,\cos(x-y)/2-t+1/2)$*. Elle est continue strictement uniformément contractante en* (x,y) *donc elle définit une courbe continue* $(x(t),y(t))$*.*
Faux si pas continue en le paramètre.

2.3 Théorème du point fixe de Kannan

Il fût le premier résultat en littérature qui garantit l'existence et l'unicité de point fixe pour les applications non continues.

Théorème 5 (R.Kannan 1968) *[11, 21, 27] Soit* (X,d) *un espace métrique complet et* $T: X \longrightarrow X$ *une application. Supposons qu'il existe* $\alpha \in [0,\frac{1}{2}[$ *tel que pour tous* $x,y \in X$*, on a :*

$$d(T(x),T(y)) \leq \alpha[d(x,T(x))+d(y,T(y))] \tag{2.1}$$

Alors

(1) T *admet un point fixe unique* $x^* \in X$*.*

(2) $\lim_{n\to\infty} T^n(x)=x^*$*.*

(3) *Pour tout* $x \in X$*,*

$$d(T^n(x),x^*) \leq \frac{\beta^n}{1-\beta} d(x,T(x)),\ \beta \in [0,1[.$$

Preuve.

Existence : Soit $x_0 \in X$ arbitraire, on définit la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ par
$x_n = T(x_{n-1})$, $n = 1,2,\ldots$, en utilisant la condition (2.1), on obtient :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \\ &\leq \alpha[d(x_{n-1}, T(x_n)) + d(x_n, T(x_{n+1}))] \\ &= \alpha[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n d(x_0, x_1).$$

On pose $m = \frac{\alpha}{1-\alpha}$. Si n, p sont deux entiers naturels, alors :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq (m^n + m^{n+1} + \cdots + m^{n+p-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{m^n}{1-m} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Comme $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$, on a $m \in [0,1[$ et donc $d(x_n, x_{n+p}) \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors de Cauchy. Comme X est complet, il existe $x \in X$.
x est un point fixe de X car

$$\begin{aligned} d(x, T(x)) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, T(x)) \\ &\leq d(x, x_n) + \alpha[d(x_{n-1}, x_n) + d(x, T(x))], \end{aligned}$$

et donc

$$0 \leq d(x, T(x)) \leq \frac{1}{1-\alpha} d(x, x_n) + \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{n-1}, x_n).$$

Comme $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x et $d(x_{n-1}, x_n) \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$ alors

$$0 \leq d(x, T(x)) \leq 0$$

On déduit que $T(x) = x$.

Unicité : Supposons que z est un autre point fixe de T, alors :

$$\begin{aligned} d(x,z) &= d(T(x),T(z)) \\ &\leq \alpha[d(x,T(x))+d(z,T(z))] \end{aligned} \tag{2.2}$$

Á partir l'inégalité (2.2), on obtient :

$$d(x,z)\leq 0.$$

Donc $x=z$.

Exemple 14 *Soit $X=\mathbb{R}$ et $T:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une application définie par :*

$$T(x)=\begin{cases} 0 & si\ x\leq 2 \\ -\dfrac{1}{2} & si\ x>2 \end{cases}$$

Alors

1. *T n'est pas continue,*
2. *T satisfait la condition (2.1) avec $\alpha=\frac{1}{5}$ et par conséquent, d'après le théorème de Kannan, T admet un point fixe unique $x=0$ dans X.*

2.4 Théorème de point fixe Chatterjea

En 1971 Chatterjea a obtenu la variante du Théorème de point fixe de Kannan suivant :

Théorème 6 *[7] Soit (X,d) un espace métrique complet et $T:X\longrightarrow X$ une application. Supposons qu'il existe $\alpha\in[0,\frac{1}{2}[$ tel que pour tous $x,y\in X$, on a*

$$d(T(x),T(y))\leq\alpha[d(x,T(y))+d(y,T(x))] \tag{2.3}$$

Alors T admet un point fixe unique dans X.

preuve.

Existence : Soit $x_0\in X$ arbitraire, on définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_o),\ n = 1,2,\ldots$, en utilisant la condition (2.3), on obtient :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \\ &\leq \alpha[d(x_{n-1}, T(x_n)) + d(x_n, T(x_{n-1}))] \\ &= \alpha[d(x_{n-1}, x_{n+1})) + d(x_n, x_n)] \\ &\leq \alpha[d(x_{n-1}, x_n)) + d(x_n, x_{n+1})] \end{aligned}$$

ce que implique :

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n d(x_0, x_1).$$

On pose $m = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$. Si n, p sont deux entiers naturels, alors :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq (m^n + m^{n+1} + \cdots + m^{n+p-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{m^n}{1-m} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Comme $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$, on a $m \in [0,1[$ et donc $d(x_n, x_{n+1}) \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$. La suite$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors de Cauchy. Comme X est complet, il existe $x \in X$. x est un point fixe de X car

$$\begin{aligned} d(x, T(x)) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, T(x)) \\ &\leq d(x, x_n) + \alpha[d(x_{n-1}, x_n) + d(x, T(x))], \end{aligned}$$

et donc

$$0 \leq d(x, T(x)) \leq \frac{1}{1-\alpha} d(x, x_n) + \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{n-1}, x_n).$$

Soit $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, et $d(x_n, x_{n+1}) \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.

On déduit que $T(x) = x$.

Unicité : Supposons que y est un autre point fixe de T. En suite, nous avoir $T(y) = y$ et

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d(T(x), T(y)) \\ &\leq \alpha[d(x, T(y) + d(y, T(x)))]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Ápartir l'inégalité (2.4), on obtient :

$$d(x, y) \leq 2\alpha d(x, y)$$

Donc $x = y$.

Remarque 3 *Dans un espace métrique (X,d), la contraction de type Banach, et le type de Kannan et le type Chatterjea sont indépendantes et différentes les unes des autres. Par exemple, soit $X=[-1,1]$ avec la métrique $d(x,y)=|x-y|$ pour $x,y\in X$, et définissez une application $T:X\longrightarrow X$ par*

$$T(x)=-\frac{1}{2}x,\ \ pour\ tout\ x\in X.$$

Alors, T n'est pas seulement une contraction de type Banach, mais également une contraction de type Kannan . Cependant, T n'est pas un contraction de type Chatterjea. On trouve a plus d'exemples de la différence entre les trois contraction voir [36].

2.5 Théorème de point fixe de Reich

Théorème 7 *[28] Soient (X,d) un espace métrique complet et $K:X\longrightarrow X$ une application telle qu'il existe des nombres positifs $a,b,c\in[0,1[$ vérifiant $a+b+c<1$ et :*

$$d(K(x),K(y))\leq a\,d(x,y)+b\,d(x,K(x))+c\,d(y,K(y))\ pour\ tout\ x,y\in X.$$

Alors, K a un point fixe unique dans X.

2.6 Théorème de point fixe de Ćirić

Théorème 8 *[10] Soit (X,d) un espace métrique complet et $K:X\longrightarrow X$ une application telle qu'il existe des nombres positifs $a,b,c\ et\ e\in[0,1[$ vérifiant $a+b+c+2e<1$ et pour tout $x,y\in X$:*

$$d(K(x),K(y))\leq a\,d(x,y)+b\,d(x,K(x))+c\,d(y,K(y))+e[d(x,K(y))+d(y,K(x))]. \quad (2.5)$$

Alors, K admet un point fixe unique.

Théorème 9 *Soit (X,d) un espace métrique complet et $K:X\longrightarrow X$ une application tel qu'il existe un nombre $h\in]0,1[$ et $x,y\in X$*

$$d(K(x),K(y))\leq h.\max\{d(x,y),d(x,K(x)),d(y,K(y)),d(x,K(y)),d(y,K(x))\}. \quad (2.6)$$

Alors, K admet un point fixe unique.

Remarque 4

1. *Une application satisfaisant (2.5) est appelée contraction généralisée.*
2. *Une application satisfaisant (2.6) est appelée quasi contraction.*
3. *Il est clair que (2.5) implique (2.6), mais la réciproque n'est pas vraie.*

2.7 Théorème de point fixe de Matkowski

Définition 24 (Contraction de Matkowski) *[25]*
Une application $T : X \longrightarrow X$ d'un espace métrique (X,d) est dite contraction de ***Matkowski*** *$(o\grave{u}\ \varphi - contraction)$ si et seulement s'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ strictement croissante vérifiant :*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^n(x) = 0,\ pour\ tous\ x \in \mathbb{R}^+,$$

et

$$d(T(x), T(y)) \leq \varphi(d(x,y))$$

Théorème 10 *Tout $\varphi - contraction$ T d'un espace métrique complet (X,d) dans lui-même admet un point fixe unique x^*. De plus, pour tout $x_0 \in X$, on a $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = x^*$.*

2.8 Théorème de point fixe de Caristi

En 1976, Caristi a obtenu un théorème de point fixe.

Théorème 11 (Contraction de Caristi) *[6] Soient (X,d) un espace métrique complet et $T : X \longrightarrow X$ une application satisfaisant la condition suivante : il existe une fonction $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ semi-continue inférieurement telle que :*

$$d(x, T(x)) \leq \phi(x) - \phi(T(x))$$

pour tout $x \in X$. Alors T admet un point fixe.

2.9 Applications

2.9.1 Problème de Cauchy-Lipschitz

Définition 25 *[30] Soit I un intervalle et Ω un ouvert de $I \times \mathbb{R}^n$. Soit f une fonction de $I \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ continue. On considère le problème de Cauchy $x'(t) = f(t, x(t))$ avec $x(t_0) = x_0$. $((t_0, x_o) \in \Omega)$.*
On appelle solution maximale de ce problème de Cauchy toute fonction de classe C^1 vérifiant les équations et ne pouvant être prolongée sur un intervalle plus grand.

Lemme 2 *x est solution du problème de Cauchy si x est continue et vérifie*
$x(t) = x_0 + \int_0^t f(t, x(t))dt$.
En appliquant le théorème du point fixe à la fonction $x \longmapsto x(0) + \int_0^t f(t, x(t))dt$ avec $t < T$ bien choisi.

Définition 26 (Fonction localement lipschitzienne) *[30] Soient I un intervalle, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$. Soient $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$. Soit $V \subseteq \Omega$ un voisinage du point y_0. On dit que f est lipschitzienne par rapport à la variable y dans le voisinage V s'il existe une constante $L > 0$ et il existe un voisinage $U \subseteq I$ du point t_0 tels que :*

$$\| f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)) \| \leq L \| y_1(t) - y_2(t) \|$$

pour $y_1(t), y_2(t) \in V, t \in U$.

Théorème 12 ***(Cauchy-Lipschitz)****[30] Soient I un intervalle et Ω un ouvert de $I \times \mathbb{R}^n$. Soit f une fonction de $I \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne. On considère le problème de Cauchy $x'(t) = f(t, x(t))$ avec $x(t_0) = x_0$. $((t_0, x_0) \in \Omega)$. Alors ce problème admet une unique solution maximale.*

2.9.2 Équation intégrale de Fredholm

Soit $S : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue pour laquelle il existe $p \in \mathbb{R}$ vérifiant $0 < p < 1$, tel que $|S(x,t)| \leq p$, $\forall x, t \in [0,1]$, et soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.
On aimeraient trouver une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue satisfaisant l'équation intégrale de Fredholm suivante

$$g(x) = \varphi(x) + \int_0^1 S(x,t) g(t) dt$$

Cela se ramène facilement à la recherche d'un point fixe on définissant l'application K par

$$K : C([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow C([0,1], \mathbb{R})$$

$$j \longmapsto (Kj)(x) = \varphi(x) + \int_0^1 S(x,t) j(t) dt$$

On vérifiant que :

1. En effet, φ est continue et l'intégrale du produit de deux fonctions continues est continue .
2. K est contractante, de constante de contraction p, si on munit $C([0,1], \mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_\infty$. En effet, soit $g, j \in C([0,1], \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} |(Kg)(x) - (Kj)(x)| &= \left| \int_0^1 k(x,t)(g(t) - j(t)) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |k(x,t)||(g(t) - j(t))| dt \\ &\leq p \int_0^1 (g(t) - j(t))| dt \\ &\leq p \|g - j\|_\infty \end{aligned}$$

donc

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|(Kg)(x)-(Kj)(x)\right| \leq p\|g-j\|_\infty$$

c'est à dire

$$\|Kg-Kj\|_\infty \leq p\|g-j\|_\infty$$

donc K est contractante.

Car $C([0,1])$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ est complet, on peut appliquer le théorème de Banach ce qui implique que l'équation intégrale ci-dessus possède une unique solution et nous fournit une méthode pour approcher cette solution.

2.9.3 Équation intégrale de Voltera

Soit $S:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ et $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ continues. On cherche une fonction $g:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ qui vérifie

$$g(x)=\varphi(x)+\int_0^x S(x,t)g(t)dt \tag{2.7}$$

C'est à dire on cherche une point fixe de l'opérateur intégrale définie par

$$K:C([0,1],\mathbb{R})\longrightarrow C([0,1],\mathbb{R})$$

$$j\longmapsto(Kj)(x)=\varphi(x)+\int_0^x S(x,t)j(t)dt$$

On montre par récurrence sur n que, $\forall x\in[0,1]$:

$$\left|K^n(j_1)(x)-K^n(j_2)(x)\right| \leq \frac{x^n}{n!}N^n\|j_1-j_2\|_\infty$$

avec $N = \sup\{S(x,t); x,t \in [0,1]\}$. Pour $n = 1$, on a

$$\begin{aligned}
\left|K(j_1)(x) - K(j_2)(x)\right| &= \left|\int_0^x S(x,t)(j_1(t) - j_2(t))dt\right| \\
&\leq \int_0^x |S(x,t)| \left|(j_1(t) - j_2(t))\right| dt \\
&\leq \sup_{x,t\in[0,1]} |S(x,t)| \int_0^x \left|(j_1(t) - j_2(t))\right| dt \\
&\leq N \int_0^x \left|(j_1(t) - j_2(t))\right| dt \\
&\leq N\|j_1 - j_2\|_\infty \int_0^x dt \\
&\leq xN\|j_1 - j_2\|_\infty
\end{aligned}$$

On suppose que elle est vraie pour n et montre quelle vraie pour $n+1$

$$\begin{aligned}
\left|K^{n+1}(j_1)(x)-K^{n+1}(j_2)(x)\right| &= \left|K(K^n(j_1))(x)-K(K^n(j_2))(x)\right| \\
&= \Big|\int_0^x S(x,t)(K^n(j_1))(t)dt \\
&\quad -\int_0^x S(x,t)(K^n(j_2))(t)dt\Big| \\
&\leq \int_0^x |S(x,t)|\left|(K^n(j_1))-(K^n(j_2))\right| \\
&\leq \int_0^x \sup_{x,t\in[0,1]} |S(x,t)|\left|(K^n(j_1))-(K^n(j_2))\right| dt \\
&\leq N.N^n \left\|j_1-j_2\right\|_\infty \int_0^x \frac{t^n}{n!}\,dt \\
&= N\tfrac{1}{n!}N^n \left\|j_1-j_2\right\|_\infty \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}N^{n+1}\left\|j_1-j_2\right\|_\infty
\end{aligned}$$

On déduit que

$$\left\|K^n(j_1)(x)-K^n(j_2)(x)\right\|_\infty \leq \frac{x^n}{n!}N^n\left\|j_1-j_2\right\|_\infty.$$

Et comme $\lim_{n\to\infty}\frac{N^n}{n!}=0$ c'est à dire $\forall\varepsilon>0$, $\exists N'\in\mathbb{N}$ telle que $\forall n\geq N'$, $\frac{N^n}{n!}<\varepsilon$, si on choisit $\varepsilon=q$ avec $0<q<1$ donc, $\exists N'$ si $\frac{N^{N'}}{N'!}<q$ alors $K^{N'}$ est contractante, de constante de contraction q. On peut donc affirmer que l'équation intégrale (2.7) admet une unique solution.

Chapitre 3

Théorème du point fixe de Banach sur une classe d'espaces métriques généralisés

Le but de ce chapitre est l'étude de quelques généralisations du théorème de point fixe de Banach. On commence par la définition de l'espace métrique généralisé. Ensuite quelques théorèmes du point fixe sur les espaces métriques généralisés. voir [2, 3, 5, 8, 12, 20, 22, 23, 25, 29, 31, 34, 35]

3.1 Espace métrique généralisé

Définition 27 *[2] Soit X un ensemble et $d : X^2 \to \mathbb{R}^+$ une application telle que pour tous $x, y \in X$ et $\xi, \eta \in X$, $\xi \neq \eta$ chacun différent de x et y, on a*

i) $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$

iii) $d(x,y) \leq d(x,\xi) + d(\xi,\eta) + d(\eta,y)$.

*Alors, le couple (X,d) est dit un espace métrique généralisé (en bref un **e.m.g**).*

Comme dans le cadre métrique, ces espaces X sont devenus des espaces topologiques avec une base de voisinage donnée par

$$\mathbb{B} = \{B(x,r) |\ x \in X, r \in]0, +\infty[\}$$

où $B(x,r) = \{y \in X, d(x,y) < r\}$ est la boule ouverte de centre x et de rayon r.

Définition 28 *[2] (X,d) un e.m.g, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X et $x \in X$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est converge vers x si et seulement si $d(x_n,x) \to 0$ si $n \to \infty$, on dit que $x_n \to x$.*

Définition 29 *[2] Soit (X,d) un e.m.g, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X est dite une suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ telle que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, on a*

$d(x_n, x_{n+m}) < \varepsilon$.
De plus un e.m.g (X,d) *est dit complet si toute suite de Cauchy dans* X *est convergente dans* X .

On observe maintenant que la fonction d *est continue en chaque ses coordonnées, en effet si* x_n, a, b *sont des points distincts de* X $(n \in \mathbb{N})$ *et si* $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, *alors on a*

$$d(x_n, b) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, a) + d(a, b)$$

$$d(a, b) \leq d(a, x_m) + d(x_m, x_n) + d(x_n, b)$$

Ces deux ensemble donnent

$$|d(x_n, b) - d(a, b)| \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, a) \longrightarrow^{n,m\to+\infty} 0$$

Ce qui prouve la continuité de d *par rapport à la première coordonnée, et donc, par symétrie dans les deux.*

Exemple 15 *[20] Soit* $X = A \cup B$, *ou* $A = \{0,2\}$ *et* $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. *Définir* $d : X \times X \longrightarrow [0,\infty)$ *comme*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 \ \ si \ \ x = y \\ 1 \ \ si \ \ x \neq y \ \ et \{x,y\} \subset A \ \ ou \{x,y\} \subset B \\ y \ \ si \ \ x \in A \ et \ \ y \in B \\ x \ \ si \ \ x \in B \ et \ \ y \in A \end{cases} \tag{3.1}$$

Alors (X,d) *est un espace métrique généralisé complet.*

(i) *Il n'existe pas* $r > 0$ *tel que* $B(0,r) \cap B(2,r) \neq \phi$, *et donc la topologie respective n'est pas de Hausdorff.*

(ii) $B(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = \{0, 2, (\frac{1}{3})\}$ *; cependant,il n'existe pas* $r > 0$ *tel que* $B(0,r) \subseteq B(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ *et donc une boule ouverte n'a pas besoin d'être un ensemble ouvert.*

(iii) *La suite* $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers les deux* 0 *et* 2, *et ce n'est pas une suite de Cauchy.*

Lemme 3 *[19] Soit (X,d) un e.m.g, (x_n) une suite de Cauchy dans (X,d) et $x,y \in X$. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que*

(a) $x_n \neq x_m$, *pour tous* $n,m > N$;

(b) x_n *et* x *sont différents dans* X, *pour tout* $n > N$;

(c) x_n *et* y *sont différents dans* X, *pour tout* $n > N$;

(d) $\lim_{n\to+\infty} d(x_n,x) = \lim_{n\to+\infty} d(x_n,y)$.

Alors $x = y$.

3.1.1 Quelques théorèmes du point fixe sur les espaces métriques généralisés

Théorème 13 *[31] Soit (X,d) un e.m.g. $c \in [0,1[$ et $f : X \longrightarrow X$ une application telle que pour chaque $x, y \in X$ on a*

$$d(f(x), f(y)) \leq c\ d(x,y)$$

alors

(i) *il existe un point $a \in X$ tel que pour chaque $x \in X$ on a*

$$\lim_{n\to+\infty} f^n(x) = a;$$

(ii) *$f(a) = a$ et pour chaque $e \in X$ tel que $f(e) = e$ on a $e = a$;*

(iii) *pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$d(f^n(x), a) \leq \frac{c^n}{1-c} \max\{d(x, f(x)), d(x, f^2(x))\}$$

Preuve
Commençons d'un point quelconque $x \in X$ et considérons la suite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, on peut supposer que x n'est pas un point périodique, en effet si $f^\nu(x) = x$ pour un $\nu \in \mathbb{N}$ alors

$$d(x, f(x)) = d(f^\nu(x), f^{\nu+1}(x)) \leq c^\nu d(x, f(x))$$

et comme $c < 1$ on a $x = f(x)$ qui est un point fixe. Dans la suite de la preuve on peut supposer que $f^n(x) \neq f^m(x)$ pour tous $n, m \in \mathbb{N},\ n \neq m$.
Montrons maintenant que pour tout $y \in X$ on a

$$(a)\quad d(y, f^{2K}(y)) \leq \sum_{i=0}^{2K-3} c^i d(y, f(y)) + c^{2K-2} d(y, f^2(y)) \quad \text{pour } k = 2,3,4,\ldots \tag{3.2}$$

$$(b)\quad d(y, f^{2K+1}(y)) \leq \sum_{i=0}^{2K} c^i d(y, f(y)) \quad \text{pour } K = 0,1,2,\ldots$$

On prouve d'abord la partie (a) de (3.2) par récurrence.
Pour $K = 2$ on a

$$\begin{aligned} d(y, f^4(y)) &\leq d(y, f(y)) + d(f(y), f^2(y)) + d(f^2(y), f^4(y)) \\ &\leq d(y, f(y)) + c\ d(y, f(y)) + c^2 d(y, f^2(y)) \end{aligned}$$

Maintenant, on suppose que pour un certain $K_0 \in \mathbb{N}$, (a) de (3.2) soit vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leq K \leq K_0$ alors

$$\begin{aligned} d(y, f^{2K_0+2}(y)) &\leq d(y, f(y)) + d(f(y), f^2(y)) + d(f^2(y), f^{2k_0+2}(y)) \\ &\leq d(y, f(y)) + c\,d(y, f(y)) + c^2 d(y, f^{2K_0}(y)) \\ &\leq d(y, f(y)) + c\,d(y, f(y)) \\ &\quad + c^2 \left[\sum_{i=0}^{2K_0-3} c^i d(y, f(y)) + c^{2K_0-2} d(y, f^2(y)) \right] \\ &= \sum_{i=0}^{2K_0-1} c^i d(y, f(y)) + c^{2K_0} d(y, f^2(y)) \end{aligned}$$

On prouve par récurrence la partie (b) de (3.2) aussi, pour $K = 0$ on a $d(y, f(y)) = d(y, f(y))$, on suppose maintenant que la partie (b) est vrai pour tout $K \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq K \leq K_0$ pour un certain $K_0 \in \mathbb{N}$, alors pour $K_0 + 1$ on a

$$\begin{aligned} d(y, f^{2K_0+3}(y)) &\leq d(y, f(y)) + d(f(y), f^2(y)) + d(f^2(y), f^{2K_0+3}(y)) \\ &\leq d(y, f(y)) + c\,d(y, f(y)) + c^2 d(y, f^{2K_0+1}(y)) \\ &\leq d(y, f(y)) + c\,d(y, f(y)) + c^2 \sum_{i=0}^{2K_0} c^i d(y, f(y)) \\ &= \sum_{i=0}^{2K_0+2} c^i d(y, f(y)) \end{aligned}$$

Enfin par (3.2), pour tout n, $K \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} d(f^n(x), f^{n+2K}(x)) &\leq c^n d(x, f^{2K}(x)) \\ &\leq c^n \sum_{i=0}^{2K-2} c^i \max\{d(x, f(x)), d(x, f^2(x))\} \\ &\leq \frac{c^n}{1-c} \max\{d(x, f(x)), d(x, f^2(x))\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(f^n(x), f^{n+2K+1}(x)) &\leq c^n d(x, f^{2K+1}(x)) \\ &\leq c^n \sum_{i=0}^{2K} c^i \max\{d(x, f(x)), d(x, f^2(x))\} \\ &\leq \frac{c^n}{1-c} \max\{d(x, f(x)), d(x, f^2(x))\} \end{aligned}$$

Alors, pour tout n, $m \in \mathbb{N}$ on a

$$d(f^n(x), f^{n+m}(x)) \leq \frac{c^n}{1-c} \max\{d(x, f(x)), d(x, f^2(x))\} \tag{3.3}$$

Donc $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (X,d) qui est un e.m.g complet de sorte qu'il existe un point $a\in X$ tel que $a=\lim_{n\to+\infty} f^n(x)$. Aussi a est un point fixe de f, en effet

$$d(f^{n+1}(x),f(a))\leq c\,d(f^n(x),a)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

Ainsi

$$a=\lim_{n\to+\infty} f^n(x)=f(a)$$

(C'est une conséquence du lemme 3) ; si de plus, on a $f(e)=e$, alors

$$d(a,e)=d(f(a),f(e))\leq c\,d(a,e)$$

Ce qui implique que $a=e$ et donc (i) et (ii) sont satisfaites
Pour voir (iii) il suffit de laisser $m\longrightarrow\infty$ dans (3.3) de sort que

$$d(f^n(x),a))\leq\frac{c^n}{1-c}\max\{d(x,f(x)),d(x,f^2(x))\}$$

Ce qui termine la preuve.

Exemple 16 *Soit $X=\{a,b,c,e\}$ et $d:X^2\longrightarrow\mathbb{R}^+$ on a $d(a,b)=3$, $d(a,c)=d(b,c)=1$, $d(a,e)=d(b,e)=d(c,e)=2$ et $d(x,x)=0$*
pour tout $x\in X$ et $g:X\longrightarrow X$ donné :

$$g(x)=\begin{cases} c & si\ x\in\{a,b,c\}\\ a & si\ x=e\end{cases}$$

Alors (X,d) est un espace métrique généralise (selon la définition 28) et que g est une contraction, en fait pour tout $x,y\in X$ on a

$$d(g(x),g(y))\leq\frac{1}{2}d(x,y)$$

mais (X,d) n'est pas une espace métrique, car par la propriété triangulaire si on prend $a,b\ et\ c$ on a

$$d(a,b)=3>1+1=d(a,c)+d(c,b)$$

Enfin, comme le théorème 12. g admet un point fixe unique à savoir c.

Soit Θ l'ensemble de toutes les fonctions $\theta:]0,+\infty[\longrightarrow]1,+\infty[$ satisfaisant les conditions suivantes :

(Θ_1) θ est croissante,

(Θ_2) pour chaque suite $t_n \subset]0,+\infty[$, $\lim_{n\to+\infty} \theta(t_n)=1$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} t_n=0$,

(Θ_3) il existe $r\in]0,1[$ et $l\in]0,+\infty[$ tels que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\theta(t)-1}{t^r}=l$.

Exemple 17

1. $\theta_1(t)=e^t$.
2. $\theta_2(t)=e^{te^t}$.
3. $\theta_3(t)=e^{\sqrt{t}}$.
4. $\theta_4(t)=e^{\sqrt{t}e^t}$.

Théorème 14 *[18] Soit (X,d) un e.m.g. complet, et $T: X\to X$ une application. Supposons qu'il existe $\theta\in\Theta$ et $k\in(0,1)$ tel que*

$$x,y\in X,\ d(T(x),T(y))\neq 0 \Rightarrow \theta(d(T(x),T(y)))\leq[\theta(d(x,y))]^K. \tag{3.4}$$

Alors T admet un point fixe unique.

Preuve

Soit $x\in X$ un point arbitraire de X. Si pour un $p\in\mathbb{N}$, on a $T^p(x)=T^{p+1}(x)$, alors $T^p(x)$ un point fixe de T. Donc, sans restriction de généralité, on supposer que $d(T^n(x),T^{n+1}(x))>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}\theta\left(d(T^n(x),T^{n+1}(x))\right) &\leq \left[\theta(d(T^{n-1}(x),T^n(x)))\right]^K \leq \left[\theta(d(T^{n-2}(x),T^{n-1}(x)))\right]^{K^2}\\ &\leq \cdots \leq [\theta(d(x,T(x)))]^{K^n}.\end{aligned}$$

et on a

$$1\leq\theta(d(T^n(x),T^{n+1}(x)))\leq[\theta(d(x,T(x)))]^{K^n}, pour\ tout\ n\in\mathbb{N}. \tag{3.5}$$

comme $n\longrightarrow\infty$ dans (3.5) on obtient

$$\theta(d(T^n(x),T^{n+1}(x)))\to 1\ \ si\ \ n\to\infty,$$

Ce qui implique de (Θ_2) que

$$\lim_{n\to\infty} d(T^n(x),T^{n+1}(x))=0. \tag{3.6}$$

de la condition (Θ_3) il existe $r\in(0,1)$ et $l\in(0,\infty]$ tel que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\theta(d(T^n(x),T^{n+1}(x)))-1}{[(d(T^n(x),T^{n+1}(x)))]^r}=l.$$

Supposons que $l < \infty$. Dans ce cas, soit $B = l/2 > 0$. D'après la définition de la limite il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left| \frac{\theta(d(T^n(x), T^{n+1}(x)))-1}{[(d(T^n(x), T^{n+1}(x)))]^r} - l \right| \leq B, \quad pour\ tout \quad n \geq n_0.$$

Ceci implique que

$$\frac{\theta(d(T^n(x), T^{n+1}(x)))-1}{[(d(T^n(x), T^{n+1}(x)))]^r} \geq l - B = B, \quad pour\ tout \quad n \geq n_0.$$

alors

$$n\left[d(T^n(x), T^{n+1}(x))\right]^r \leq An\left[\theta(d(T^n(x), T^{n+1}(x)))-1\right], \quad pour\ tout \quad n \geq n_0,$$

ou $A = 1/B$.
Supposons maintenant que $l = \infty$. Soit $B > 0$ un nombre positif arbitraire. D'après la définition de la limite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{\theta(d(T^n(x), T^{n+1}(x)))-1}{[(d(T^n(x), T^{n+1}(x)))]^r} \geq B \ \ pour\ tout \quad n \geq n_0.$$

Ceci implique que

$$n\left[d(T^n(x), T^{n+1}(x))\right]^r \leq An\left[\theta(d(T^n(x), T^{n+1}(x)))-1\right], \quad pour\ tout \quad n \geq n_0.$$

ou $A = 1/B$.
Ainsi, dans tout les cas, il existe $A > 0$ et $n_0 \in N$ tel que

$$n\left[d(T^n(x), T^{n+1}(x))\right]^r \leq An\left[\theta(d(T^n(x), T^{n+1}(x)))-1\right], \quad pour\ tout \quad n \geq n_0,$$

En utilisant (3.5)

$$n\left[d(T^n(x), T^{n+1}(x))\right]^r \leq An([\theta(d(x, T(x)))]^{K^n} - 1), \quad pour\ tout \quad n \geq n_0.$$

Soit $n \to \infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} n\left[d(T^n(x), T^{n+1}(x))\right]^r = 0.$$

Ainsi, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$d(T^n(x), T^{n+1}(x)) \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{r}}} \quad pour\ tout \quad n \geq n_1. \tag{3.7}$$

Maintenant, nous allons montrer que T a un point périodique. Supposons que ce n'est pas le cas, alors $T^n(x) \neq T^m(x)$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $n \neq m$. En utilisant(3.4), on ob-

tient

$$\begin{aligned}\theta(d(T^n(x),T^{n+2}(x)) &\leq [\theta(d(T^{n-1}(x),T^{n+1}(x))]^K \leq [\theta(d(T^{n-2}(x),T^n(x))]^{K^2} \\ &\leq \cdots \leq \left[\theta(d((x),T^2(x))\right]^{K^n}.\end{aligned}$$

Soit $n \to \infty$ dans l'inégalité ci-dessus et en utilisant (Θ_2) on obtient

$$\lim_{n\to\infty} d(T^n(x),T^{n+2}(x)) = 0. \tag{3.8}$$

De la même manière d'après la condition (Θ_3), il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$d(T^n(x),T^{n+2}(x)) \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{r}}} \quad pour\ tout \quad n \geq n_2. \tag{3.9}$$

Soit $N = \max\{n_o, n_1\}$. On considère deux cas :

Cas 1, si $m > 2$ est impair, alors on écrit $m = 2L+1$, $L \geq 1$ en utilisant (3.7), pour tout $n \geq N$, on obtient :

$$\begin{aligned}d(T^n(x),T^{n+m}(x)) &\leq d(T^n(x),T^{n+1}(x)) + d(T^{n+1}(x),T^{n+2}(x)) \\ &\quad + d(T^{n+2L}(x),T^{n+2L+1}(x)) \\ &\leq \frac{1}{n^{\frac{1}{r}}} + \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{r}}} + \cdots + \frac{1}{(n+2L)^{\frac{1}{r}}} \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{r}}}\end{aligned}$$

Cas 2, si $m > 2$ est pair, alors on écrit $m = 2L$, $L \geq 2$ en utilisant(3.7) et(3.9) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$\begin{aligned}d(T^n(x),T^{n+m}(x)) &\leq d(T^n(x),T^{n+2}(x)) + d(T^{n+2}(x),T^{n+3}(x)) \\ &\quad + d(T^{n+2L-1}(x),T^{n+2L}(x)) \\ &\leq \frac{1}{n^{\frac{1}{r}}} + \frac{1}{(n+2)^{\frac{1}{r}}} + \cdots + \frac{1}{(n+2L-1)^{\frac{1}{r}}} \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{r}}}\end{aligned}$$

Ainsi, en combinant tous les cas nous avons

$$d(T^n(x),T^{n+m}(x)) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{r}}} \quad pour \quad tout \quad n \geq N, m \in \mathbb{N}$$

De la convergence de la série $\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{r}}}$ (puisque $\frac{1}{r} > 1$) on déduit que $(T^n(x))$ est une suite de Cauchy. (X,d) est complet, il existe $z \in X$ tel que $T^n(x) \to z$, par contre, notons que T est continue, en effet $T(x) \neq T(y)$ alors on a de (3.4)

$$\ln[\theta(d(T(x),T(y)))] \leq K \ln[\theta(d(x,y))] \leq \ln[\theta(d(x,y))],$$

qui implique de (Θ_1) que

$$d(T(x),T(y)) \leq d(x,y) \ \ pour \ \ tous \ \ x,y \in X.$$

De cette observation, pour tout $n \in N$, on a

$$d(T^{n+1}(x),T(z)) \leq d(T^n(x),z).$$

En laissant $n \to \infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient $T^{n+1}(x) \to T(z)$ du lemme (3)
On obtient $z = T(z)$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse, T n'est pas de point périodique. Ainsi T a un point périodique, disons z, de période q. Supposons que l'ensemble des points fixes de T est vide. Alors on a
$q > 1$ et $d(z,T(z)) > 0$.
En utilisant(3.4), et on obtient

$$\theta(d(z,T(z)) = \theta(d(T^n(z),T^{n+1}(z))) \leq [\theta(d(z,T(z))]^{K^n} < \theta(d(z,T(z)),$$

qui est une contradiction. Ainsi, l'ensemble des points fixes de T est non vide. C'est-à- dire que T a un moins un point fixe. Supposons maintenant que $z,u \in X$ soient deux points fixes de T tel que $d(z,u) = d(T(z),T(u)) > 0$ en utilisant (3.4) on obtient

$$\theta(d(z,u)) = \theta(d(T(z),T(u))) \leq [\theta(d(z,u))]^K < \theta(d(z,u)),$$

qui est une contradiction, alors on a un seul point fixe.
Puis qu'un espace métrique est un e.m.g. du théorème(14) on déduit immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 2 *Soit (X,d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application supposons qu'il existe $\theta \in \Theta$ et $K \in (0,1)$ tel que*

$$x,y \in X, \ \ d(T(x),T(y)) \neq 0 \Rightarrow \theta(d(T(x),T(y))) \leq [\theta(d(x,y))]^K.$$

Alors T admet un point fixe unique.

Remarquons que le principe de contraction de Banach découle immédiatement du Corollaire 2. En effet, si T est une contraction de Banach, il existe $\lambda \in (0,1)$ tel que

$$d(T(x),T(y)) \leq \lambda d(x,y) \ \ pour \ \ tout \ \ x,y \in X$$

Alors on a

$$e^{d(T(x),T(y))} \leq [e^{d(x,y)}]^{\lambda} \ \ pour \ \ tout \ \ x,y \in X$$

Clairement la fonction $\theta : (0,\infty) \to (1,\infty)$ définie par $\theta(t) = e^{\sqrt{t}}$ appartient à Θ Ainsi, l'existence et l'unicité du point fixe découle du Corollaire 2.

Dans l'exemple suivant nous montrons que le corollaire 2 est une véritable généralisation du principe de contraction de Banach.

Exemple 18 *[18] Soit X l'ensemble défini par*

$$X = \{\tau_n : n \in \mathbb{N}\},$$

où

$$\tau_n := \frac{n(n+1)}{2}, \ \ pour \ \ tout \ \ n \in \mathbb{N}.$$

On a $d(x,y) = |x-y|$ est une métrique, pour tout $x, y \in X$. Il est facile de montrer que (X,d) est un espace métrique complet .Soit $T : X \to X$ l'application définie par

$$T(\tau_1) = \tau_1, \ \ T(\tau_n) = \tau_{n-1}, \ \ pour \ \ tout \ \ n \geq 2.$$

La contraction de Banach n'est pas satisfaite. En fait on peut vérifier que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(T(\tau_n),T(\tau_1))}{d(\tau_n,\tau_1)} = 1$$

Considérons la fonction $\theta : (0,\infty) \to (1,\infty)$ définie par

$$\theta(t) = e^{\sqrt{te^t}}.$$

il n'est pas difficile de montrer que $\theta \in \Theta$, on doit prouver que T satisfait la condition (3.4) c'est -à-dire que

$$d(T(\tau_n),T(\tau_m)) \neq 0 \Rightarrow e^{\sqrt{d(T(\tau_n),T(\tau_m))e^{d(T(\tau_n),T(\tau_m))}}} \leq e^{K\sqrt{d(\tau_n,\tau_m)e^{d(\tau_n,\tau_m)}}},$$

Pour tout $K \in (0,1)$. La condition ci-dessus est équivalente à

$$d(T(\tau_n),T(\tau_m)) \neq 0 \Rightarrow d(T(\tau_n),T(\tau_m))e^{d(T(\tau_n),T(\tau_m))} \leq K^2 d(\tau_n,\tau_m)e^{d(\tau_n,\tau_m)}.$$

Donc, il faut vérifier que

$$d(T(\tau_n),T(\tau_m))\neq 0 \Rightarrow \frac{d(T(\tau_n),T(\tau_m))e^{d(T(\tau_n),T(\tau_m))-d(\tau_n,\tau_m)}}{d(\tau_n,\tau_m)} \leq K^2, \tag{3.10}$$

Pour $K\in(0,1)$. Nous considérons deux cas :
***Cas 1**, $n=1$ et $m>2$. Dans ce cas, on a*

$$\begin{aligned}&\frac{d(T(\tau_1),T(\tau_m))e^{d(T(\tau_1),T(\tau_m))-d(\tau_1,\tau_m)}}{d(\tau_1,\tau_m)}\\ &=\frac{m^2-m-2}{m^2+m-2}e^{-m}\\ &\leq e^{-1}.\end{aligned}$$

***Cas 2**, $m>n>1$. Dans ce cas, on a*

$$\begin{aligned}&\frac{d(T(\tau_m),T(\tau))e^{d(T(\tau_m),T(\tau_n))-d(\tau_m,\tau_n)}}{d(\tau_m,\tau_n)}\\ &=\frac{m+n-2}{m+n-2}e^{n-m}\\ &\leq e^{-1}.\end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité (3.10) est satisfait avec $K=e^{\frac{-1}{2}}$. Théorème(14)(où Corollaire 2) implique que T admet un point fixe unique. Dans cet exemple τ_1 est l'unique point fixe de T.

Notons que Θ contient une grande classe de fonctions. Par exemple

$$\theta(t):=2-\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{t^\alpha}\right),\ 0<\alpha<1,\ \ t>0.$$

Corollaire 3 *Soit (X,d) un e.m.g. complet, et $T:X\to X$ une application donnée. Supposons qu'il existe α, $K\in(0,1)$ tel que*

$$2-\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{[d(T(x),T(y))]^\alpha}\right)\leq\left[2-\frac{2}{\pi}\arctan(\frac{1}{[d(x,y)]^\alpha})\right]^K,$$

$pour\ \ tous\ \ x,y\in X,\ \ T(x)\neq T(y).$

Alors T admet un point fixe unique.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons donné une étude simple pour quelques théorèmes de point fixe de Banach (pour les applications contractantes) sur les espaces métriques généralisés comme (θ-contractions) dans lequel notre étude améliore et généralise certains résultats. Un exemple a été donné pour illustrer nos résultats et en conséquence. Afin d'appliquer le théorème du point fixe pour résoudre les problèmes et montrant l'existence et l'unicité des solutions pour les équations intégrales ou différentielles.

Bibliographie

[1] Q. H. **A**nsari, Matric Spaces Including Fixed Point Theory and Set valued Maps. Norosa publisling House, New Delhi(2010).

[2] S. **B**anach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application au équations intégrales, Fund. Math, 3(1922), 133-181.

[3] CD. **B**ari, P. Vetro, Common fixed points in generalized metric spaces. Appl. Math. Comput. 218(13), 7322-7325 (2012).

[4] C.**B**erger, Topologie pour la licence (cours et exercices) Université de Vice Sophia Anti polis 2004.

[5] A. **B**ranciari, A fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces. publ. Math.(Debr)57, 31-37 (2000).

[6] J. **C**aristi, Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, Trans. Amer. Math. Soc, 215 (1976), 241-251.

[7] S. K.**C**hatterjea, Fixed point theorems, C. R. Acad. Bulgare Sci., 25(1972),727-730.

[8] M. **C**herichi, B. Samet, Fixed point theorems on ordered gauge spaces With applications to nonlinear integral equations. Fixed Point Theory Appl. 2012, 13 (2012).

[9] G. **C**hoquet, Cours d'analyse. Tome II, Masson, Paris, 1964.

[10] B. L. **Ć**irić, Generalized contractions and fixed-point théorèmes, Publ. Inst. Math. (Belgr) 12(26)(1971), 19-26.

[11] J. **C**órnicKi, Fixed point theorem for Kannan type mappings, Fixed point Theory App. 19, 2145-2152(2017).

[12] P. **D**as, A fixed point theorem on a class of generalized metric spaces. Korean J.Math. Sci. 9, 29-33 (2002).

[13] J. **D**enailly, Analyse numérique et équations différentielle. Presses Universitaire de Grenoble, 1996.

[14] H. E. **D**jabri, S. Haddadi, Sur la théorie du point fixe dans les espaces métriques et applications, mémoire master 2015, Université Abderrahmane Méro-Béjaia.

[15] M. **E**delstein, On fixed and periodic points under contrative mappings, J. London Math. soc, 37(1962) 74-79.

[16] N. **E**l Hage Hassan, Topologie générale et espaces normés, Z.I des hautes, no.dition 54692, Rue fond des Fourches 21,juillet 2011.

[17] A. **E**l Jai, Espaces metriques et Topologie de Elements. Professeur à l'Université de Perpignan, Mars 2007, 164-166.

[18] M. **J**leli, B. Samet, A new generalization of the Banach contraction principle, J. Inequal. Appl, 2014(1),1-8.

[19] M. **J**leli, B. Samet, The Kannan's fixed point theorem in a cone rectangular metric space. J. Nonlinear Sci. Appl. 2(3),161-167(2009).

[20] Z. **K**adelburg, S. Radenovic, Pata-type common fixed point results in b-metric and b-rectangulaire metric space ; Intern. J. Anal. appl., 8(2015),944-954.

[21] R. **K**annan, Somme sesults on fixed points Bull. Calcutta. Math. Soc., 60(1968), 71-76.

[22] WA. **K**irK, N. Shahzad, Generalized metrics and Caristi's theorem. Fixed point Theory Appl. 2013, 129(2013).

[23] H. **L**akzian, B. Samet, Fixed points for (ψ,φ)-Weakly contractive mappings in generalized metric spaces. Appl. Math. Lett. 25(5), 902-906 (2012).

[24] J. J. **L**ouis, Espace métrique, 25030 Besançon, 16 Rue de Gray, octobre 2009.

[25] J. **M**ESZAROS, A comparison of various definitions of contractive type mappings, Bull. Cal. Math. Soc. 84 (1992), 167-194.

[26] F. **N**eir, D. Iftinie, Introduction à la topologie. Université de Renne 1.

[27] N. **R**edjel, Quelques résultats de points fixes et applications, mémoire doctorat, Université Mentouri Constantine 1, 2016.

[28] S.**R**eich, Some remarks concerning contraction mapping, Canad. Math. Bull. 14 (1971), 121-124.

[29] B. E. **R**HOADES, A comparison of various definitions of contractive mappings, Trans. Amer. Math. Soc. 226 (1977), 257-290.

[30] P. **R**ouviere, Théorèmes du point fixe : Exemples et applications, Lissy May 29, 2010.

[31] B. **S**amet, Discussion on fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces by A. Branciari. publ. Math. (Debr) 76(4), 493-494(2010).

[32] IR. **S**arama, JM. Rao, SS. Rao, contractions over generalized metric spaces. J. Nonlinear Sci. Appl. 2(3), 180-182 (2009).

[33] Y. **S**onntag, Topologie et analyse fonctionnelle, Ellipses, Paris 1998.

[34] M. **T**urinici, Functional contractions in local Branciari metric spaces (2012). arXiv : 1208.4610v1[math.GN].

[35] D. **W**ardowski, Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces. Fixed Point Theory appl. 2012, 94(2012).

[36] S.**W**illard, General topology, Adison wesley(1970).