République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : ANALYSE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

par

Amal HAMIDI

Intitulé : Quelques propriétés des suites et polynômes de Bernoulli

---

Travail évalué par les membres de jury composé de :

Encadreur	**Mme. Ghania GUETTAI**	*MAA*	*U.Y.F.M*
Examinateur	**Mr. Mourad RAHMANI**	*MCA*	*USTHB*
Examinateur	**Mr. Diffalah LAISSAOUI**	*MCA*	*U.Y.F.M*

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2019-2020

Table des matières

Remerciments iii

Dédicace iv

Résumé v

Abstract vi

Introduction 1

1 Quelques notions de base 3

1.1 Le coefficient binomial . . . 3

1.1.1 La formule du binôme de Newton . . . 3

1.1.2 La relation de récurrence de Pascal . . . 3

1.1.3 Le triangle de Pascal . . . 4

1.2 Les factorielles descendantes et montantes . . . 4

1.2.1 Les factorielles descendantes . . . 4

1.2.2 Les factorielles montantes . . . 5

1.3 La fonction génératrice et quelques opérations sur les séries entières . . . 5

1.3.1 La fonction génératrice . . . 5

1.3.2 Quelques opérations sur les séries entières . . . 6

1.4 Permutation, cycle, partition . . . 6

1.4.1 Permutation . . . 6

1.4.2 Cycle . . . 7

1.4.3 Partition . . . 7

1.5 Les nombres de Stirling . . . 7

1.5.1 Nombres de Stirling de première espèce . . . 7

1.5.2 Nombres de Stirling de deuxième espèce . . . 9

1.6 Les nombres r-Stirling de deuxième espèce 10
1.7 Les nombres d'Euler 12
1.8 Les nombres eulériens 13
1.9 La fonction beta 14
1.10 La fonction zêta de Riemann 15
1.11 La fonction multiple zêta d'Eleur-Zagier 15
1.12 La fonction hypergéométrique 15

2 Les nombres et les polynômes de Bernoulli **17**
2.1 Les nombres de Bernoulli 17
2.1.1 Les nombres de Bernoulli de première espèce 17
2.2 Les polynômes de Bernoulli de première espèce 21
2.3 Les nombres de Bernoulli de deuxième espèce 25
2.4 Les polynômes de Bernoulli de deuxième espèce 26

3 Les nombres et les polynômes p-Bernoulli **28**
3.1 Les nombres p-Bernoulli 28
3.2 Les polynômes p-Bernoulli 31

4 Applications **37**
4.1 Applications des nombres de Bernoulli 37
4.1.1 Applications en analyse 37
4.1.2 Applications arithmétiques 38
4.2 Application des nombres p-Bernoulli 39
4.2.1 Application en analyse 39

Conclusion **40**

Bibliographie **42**

Remerciements

Avant tout je tiens à remercier **Allah** le tout puissant, qui m'a donné le courage et la patience pour terminer ce modeste travail. En premier lieu, je tiens à remercier mon encadreur **Madame G. GUETTAI**, pour sa patience et son soutien moral tout au long de mon travail, mes vifs remerciements vont également aux membres du jury Messieurs **M. RAHMANI**, Maître de Conférence à l'USTHB et **D. LAISSAOUI**, Maître de Conférence à l'université Yahia Farès de Médéa pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de faire partie de ce jury.

Je tiens également à exprimer ma gratitude à tous les professeurs qui m'ont enseigné et soutenu dans mon cursus d'études.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à : celui qui m'a indiqué la bonne voie et qui a toujours été là pour moi, dans ma vie et mes études ; **Mon père**, celle qui a attendu avec patience les fruits de sa bonne éducation, **Ma mère**, Mes frères, ma sœur Houdda, ainsi que mes amis et toute la famille **"HAMIDI"**, sans exception. Je les remercie tous pour leurs soutiens. A tous les enseignants qui m'ont guidé tout au long de mon parcours éducatif. Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué, de prés ou de loin, à la réalisation de ce travail. A tous mes amis de la promotion 2020 .

♡

Résumé

Dans notre travail, on s'intéresse à étudier et calculer les nombres et les polynômes de Bernoulli des deux espèces. Une généralisation de ces polynômes nommée les polynômes p-Bernoulli a été aussi présentée.

Connaitre la fonction génératrice, la forme explicite, la relation de récurrence ainsi que les diverses applications mathématiques de ces nombres et polynômes sont les points essentiels cités dans ce mémoire.

Mots-Clés : Fonction génératrice, forme explicite, relation de récurrence, fonction hypergéométrique, fonction zêta de Riemann, les nombres de Bernoulli, les polynômes de Bernoulli, les nombres p-Bernoulli et les polynômes p-Bernoulli.

Abstract

In our work, we are interested in studying and calculating the Bernoulli numbers and polynomials of both kinds. A generalization of these polynomials called the p-Bernoulli polynomials has also been presented.

Knowing the generating function, the explicit formula, the recurrence relation as well as the various mathematical applications of these numbers and polynomials are the essential points cited in this thesis.

Keywords : Generating function, explicit formula, recurrence relation, hypergeometric function, zeta Riemann function, the Bernoulli numbers, the Bernoulli polynomials, the p-Bernoulli numbers and the p-Bernoulli polynomials.

الملخص:

في عملنا هذا ارتكز اهتمامنا بدراسة وحساب أرقام وكثيرات الحدود برنولي لكلا النوعين. كما تم عرض تعميم لكثيرات الحدود برنولي وسميت كثيرات الحدود ب- برنولي.

إن معرفة الدالة المولدة، الشكل المبسط، العلاقة التراجعية، بالإضافة إلى التطبيقات الرياضية المختلفة لهذه الأرقام وكثيرات الحدود هي النقاط الأساسية المذكورة في هذه الأطروحة.

الكلمات المفتاحية:

الدالة المولدة، الشكل المبسط، العلاقة التراجعية، الدالة الفوق هندسية، دالة زيتا ريمان، أرقام برنولي، كثيرات حدود برنولي، أرقام ب-برنولي و كثيرات حدود ب-برنولي.

Introduction

En 1713, Jacob Bernoulli (1654-1705) a introduit une **suite** infinie de **nombres rationnels** de manière élémentaire. Les résultats de Bernoulli sont apparus pour la première fois dans son ouvrage "Ars conjectandi", connus sous le nom de nombres de Bernoulli, ce dernier a étudié les sommes des puissances

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k = \sum_{i=1}^{n} i^k.$$

Il a donné le résultat jusqu'au $10^{ème}$ rang ($k = 10$), mais sans preuve sous la forme

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}n^{k+1} + \frac{1}{2}n^k + \frac{k}{2}An^{k-1} + \frac{k.k-1.k-2}{2.3.4}Bn^{k-3} + \frac{k.k-1.k-2.k-3.k-4}{2.3.4.5.6}Cn^{k-5} + \cdots,$$

où les coefficients $A, B, C \ldots$ sont **une suite de nombres rationnels** avec

$$A = \frac{1}{6},\ B = -\frac{1}{30},\ C = \frac{1}{42}, \cdots$$

En utilisant la notation moderne, sa formule s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B_j \frac{n^{k+1-j}}{k+1-j} = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j}, \tag{0.1}$$

où $\binom{k}{j}$ est le coefficient binomial, tel que

$$\binom{k}{j} = \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-j+1)}{j!},$$

et B_j, le nombre définit par la formule de récurrence

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j = k+1,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

C'est ce B_j qui est par la suite appelé nombre de Bernoulli, il a été nommé par Abraham de Moivre.

Sachant qu'en 1712 le remarquable mathématicien japonais Takakazu Seki a déjà traité la somme des puissances $S_k(n)$ en se basant sur la définition des nombres de Bernoulli dans son ouvrage intitulé Katsuyo Sanpo ("essentials of the art of calculation"), où il a abouti aux mêmes

résultats que son homologue (Bernoulli), avant cette découverte, Fauhaber lui aussi a étudié cette formule en arrivant à la même conclusion que Jacobi.

Après cette période, précisément 1748, Euler a pu trouver une relation entre les sommes infinies et les coefficients rationnels

$$s(2n) = \frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots = \alpha_n \pi^{2n},$$

où α_n, contiennent la même suite de nombres $A, B, C, \ldots$ Euler lui aussi a obtenu des résultats intéressants, montrant que ces nombres apparaissent a l'ensemble des coefficients de série de fonctions $x \mapsto \cos, x \mapsto \tan x, x \mapsto 1/\sin x$. Euler a gardé la même appellation de Bernoulli dans ce sujet sous le nom des nombres rationnels comme étant nombres de Bernoulli, en montrant que ces nombres ont de nombreuses applications, d'où ils deviennent le sujet d'étude de nombreux mathématiciens (Jacobi, Carlitz, Delange, Dilcher, etc).

Ce projet d'étude contient quatre chapitres avec introduction terminé par une conclusion où :

Dans le premier chapitre, on présente quelques notions de base qui servent d'outils par la suite de ce mémoire à savoir : le coefficient binomial, les factorielles montantes, les factorielles descendantes et les fonctions génératrices. Les nombres remarquables ont aussi eu leur part dans ce chapitre (de Stirling, r-Stirling, Euler et nombres Eulériens).

Le deuxième chapitre étudie "Les nombres et les polynômes de Bernoulli" on donne les importants résultats présentés dans la fonction génératrice, relation de récurrence et la forme explicite.

La généralisation du deuxième chapitre a fait l'objet du troisième chapitre, alors que pour illustrer ce travail on a pris des exemples pratiques.

En conclusion de ce mémoire on en déduit que ce travail comporte divers domaines sur tous les plans, analytique, algébrique et topologique.

Chapitre 1

Quelques notions de base

Dans ce chapitre, nous présentons quelques éléments de base qui seront utiles pour la suite, en rappelant les factorielles montantes et descendantes, les séries génératrices, la fonction zêta de Riemann, les suites remarquables (nombres de Stirling, r-Stirling, Euler, euleriens) et leurs propriétés combinatoires. Pour des notions plus précises et détaillées, le lecture pourra consulter [3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 16].

1.1 Le coefficient binomial

Définition 1.1.1. *Soient n et k deux entiers, tels que $n \geq k \geq 0$. Le coefficient binomial ou le coefficient du binôme, ou encore tout simplement " binomial" noté $\binom{n}{k}$, est défini par*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Définition 1.1.2. *(au sens combinatoire) Le coefficient $\binom{n}{k}$, est le nombre de façons de choisir un sous-ensemble à k éléments dans un ensemble à n éléments.*

1.1.1 La formule du binôme de Newton

Les coefficients binomiaux tirent leur nom de la formule du binôme, qui permet de calculer les puissances du binôme $a+b$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

1.1.2 La relation de récurrence de Pascal

Les coefficients binomiaux satisfont la relation de récurrence de Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \quad \textit{pour tout } n \geq 1, \textit{ avec } \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1. \tag{1.1}$$

1.1.3 Le triangle de Pascal

A partir de la Relation de récurrence (1.1), nous pouvons construire le triangle de Pascal suivant ; tel que $n, k \geq 0$.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1								⋮
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
⋮	...								

Table 1.1 – Triangle de Pascal

1.2 Les factorielles descendantes et montantes

1.2.1 Les factorielles descendantes

Définition 1.2.1. *Soit a un nombre réel ou complexe et $n \in \mathbb{N}$. On définit la factorielle descendante d'ordre n, notée $(a)_n$, par :*

$$(a)_n = \begin{cases} 1, & si\ n = 0 \\ a(a-1)\cdots(a-n+1), & si\ n \geq 1. \end{cases}$$

Et on a

$$(n)_n = n!.$$

On peut prolonger la définition de $(a)_n$, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ par :

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+1)},$$

où $\Gamma(x)$, est la fonction gamma d'Euler donnée par la formule

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

1.2.2 Les factorielles montantes

Définition 1.2.2. *Soit a un nombre réel ou complexe et n un entier positif. On définit la factorielle montante d'ordre n, notée $(a)^n$, par :*

$$(a)^n = \begin{cases} 1, & si\ n = 0 \\ a(a+1)\cdots(a+n-1), & si\ n \geq 1. \end{cases} \tag{1.2}$$

On peut prolonger la définition de $(a)^n$, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ par :

$$(a)^n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

et on a les propriétés suivantes :

$$(1)^n = n!.$$
$$(a)^{i+j} = (a)^i(a+i)^j.$$
$$(a)^n = (-1)^n(1-n-a)^n.$$
$$(a)^n = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}.$$

Les relations entre les factorielles descendantes et les factorielles montantes sont données par :

$$(a)^n = (a+n-1)_n.$$
$$(a)_n = (a-n+1)^n.$$
$$(-a)^n = (-1)^n(a)_n.$$

1.3 La fonction génératrice et quelques opérations sur les séries entières

1.3.1 La fonction génératrice

Définition 1.3.1. *Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif, ayant un élément unité. Les séries formelles à coefficients a_n dans $\mathcal{A}$, et en l'indéterminée t, sont les expressions suivants :*

$$G(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n \quad et \quad H(t) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}.$$

La série formelle $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ de la suite (a_n), s'appelle fonction génératrice ordinaire.
La série formelle $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}$ de la suite (a_n), s'appelle fonction génératrice exponentielle.

On note $\mathcal{A}[[t]]$ l'ensemble des séries formelles à valeurs dans $\mathcal{A}$.

1.3.2 Quelques opérations sur les séries entières

Le produit

Le produit de deux séries ordinaires $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n t^n$, est donné par :

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n t^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n t^n\right) = \sum_{n\geq 0} c_n t^n, \ \ tel\ que\ \ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Le produit de deux séries exponentielles $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}$ et $\sum_{n\geq 0} b_n \frac{t^n}{n!}$, est donné par :

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n \frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{n\geq 0} c_n \frac{t^n}{n!}, \ \ tel\ que\ \ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\binom{n}{k}.$$

La somme

La somme de deux séries ordinaires $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n t^n$, est définie par :

$$\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)t^n = \sum_{n\geq 0} a_n t^n + \sum_{n\geq 0} b_n t^n.$$

La somme de deux séries exponentielles $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}$ et $\sum_{n\geq 0} b_n \frac{t^n}{n!}$, est définie par :

$$\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!} + \sum_{n\geq 0} b_n \frac{t^n}{n!}.$$

Muni de ces deux lois, l'ensemble des séries formelles $\mathcal{A}[[x]]$, est un anneau.

1.4 Permutation, cycle, partition

1.4.1 Permutation

Définition 1.4.1. *Soit $[n] = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, on appelle permutation σ d'un ensemble fini $[n]$, toute bijection de $[n]$ dans $[n]$. En fait, puisque l'ensemble $[n]$ est fini, le mot bijection peut être remplacé par injection ou surjection. Une permutation σ_n peut être représentée par une forme matricielle*

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Le nombre de permutations de l'ensemble $[n]$ est $n!$.

On appelle point fixe si l'image d'un élément x de $[n]$ par la permutation σ est lui même i.e. $\sigma(x) = x$.

Exemple 1. *Soit la permutation σ_8*

$$\sigma_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.4.2 Cycle

Définition 1.4.2. *Un cycle de longueur $k \geq 2$ est une permutation dont les éléments mobiles (c'est à dire un élément non fixe), ou support sont de la forme*

$$\left\{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \ldots, \sigma^{k-1}(x), \sigma^k(x) = x\right\}.$$

On appelle habituellement orbite de x, notée $\mathcal{O}_x$ est l'ensemble des images de x obtenues en appliquant successivement la permutation σ sur les éléments x, $\mathcal{O}_x = \left(\sigma^j(x)\right)_{j\in\mathbb{N}}$.

Exemple 2. *La permutation σ de $[n] = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ est un trois cycles de support $\{1,3,4\}$ et $\{2,8,5,6\}$ et $\{7\}$, tels que*

$$\sigma(1) = 3,\ \sigma^2(1) = 4,\ \sigma^3(1) = 1,$$

donc l'orbite de l'élément 1 dans l'Exemple 1 est $\mathcal{O}_1 = \{1, \sigma(1) = 3, \sigma^2(1) = 4\}$. Remarquez que $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_3 = \mathcal{O}_4$. Ces éléments, $\{1,3,4\}$ pris dans cet ordre, forment un cycle noté $(1,3,4)$, on a aussi

$$\sigma(2) = 8,\ \sigma^2(2) = 5,\ \sigma^3(2) = 6,\ \sigma^4(2) = 2,$$

donc l'orbite de l'élément 2 dans l'Exemple 1 est $\mathcal{O}_2 = \{2, \sigma(2) = 8, \sigma^2(2) = 5, \sigma^3(2) = 6, \}$. Remarquez que $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_8 = \mathcal{O}_5 = \mathcal{O}_6$. Ces éléments, $\{2,8,5,6\}$ pris dans cet ordre, forment un cycle noté $(2,8,5,6)$ et le point $\{7\}$ est un point fixe.

1.4.3 Partition

Définition 1.4.3. *Une part P de $[n] = \{1,2,\ldots,n\}$ est un sous-ensemble non vide de $[n]$. Une partition P de $[n]$ est une famille de parts $\mathsf{P_1}, \ldots, \mathsf{P_k}$ deux à deux disjoints, telles que $\cup_{i=1}^{k} \mathsf{P_i} = [n]$.*

Exemple 3. *Soit l'ensemble $[3] = \{1,2,3\}$, les partition de $[3]$ sont*

$$\{\{1\}\{2\}\{3\}\},\quad \{\{1,2\}\{3\}\},\quad \{\{1,3\}\{2\}\},\quad \{\{2,3\}\{1\}\},\quad \{\{1,2,3\}\}.$$

Dans la partie suivante, nous donnons quelques propriétés de certaines suites classiques, en commençant par les suites des nombres de Stirling des deux espèces, suite r-Stirling de seconde espèce ; en suite on définit les nombres d'Euler et on termine par les nombres Eulériens.

1.5 Les nombres de Stirling

1.5.1 Nombres de Stirling de première espèce

Définition 1.5.1. *Algébriquement, les nombres de Stirling de première espèce signés $s(n,k)$, sont les coefficients des polynômes factorielles descendantes, s'écrit*

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k. \tag{1.3}$$

Définition 1.5.2. *Les nombres de Stirling de première espèce non signés $|s(n,k)|$, sont les coefficients des polynômes factorielles montantes $(x)^n$, c'est à dire que :*

$$(x)^n = \sum_{k=0}^{n} |s(n,k)| x^k.$$

Définition 1.5.3. *(au sens combinatoire) Le nombre $(-1)^{n-k}s(n,k) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ est égal au nombre de permutations de l'ensemble $[n] = \{1, 2, \cdots, n\}$, ayant exactement k cycles, est appelé les nombres de Stirling de première espèce non signés.*

Exemple 4. *On a $(-1)^{4-2}s(4,2) = 11$, donc, les permutations de quatre éléments composé de deux cycles disjoints sont*

$$(1)(2\ 3\ 4), \quad (1)(2\ 4\ 3), \quad (2)(1\ 3\ 4), \quad (2)(1\ 4\ 3),$$
$$(3)(1\ 2\ 4), \quad (3)(1\ 4\ 2), \quad (4)(1\ 2\ 3), \quad (4)(1\ 3\ 2)$$
$$(1\ 2)(3\ 4), \quad (1\ 3)(2\ 4), \quad (1\ 4)(2\ 3).$$

Donc, $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 11$.

Les fonctions génératrices

La fonction génératrice exponentielle de la suite de Stirling de première espèce non signés est donnée par :

$$\sum_{n \geq k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{x^n}{n!} = \frac{(-1)^k (\ln(1-x))^k}{k!}.$$

La fonction génératrice exponentielle des nombres de Stirling de première espèce signés est donnée par :

$$\sum_{n \geq k} s(n,k) \frac{x_n}{n!} = \frac{1}{k!} (\ln(1+x))^k.$$

Les formes explicites

On donne deux formes explicites pour les nombres de Stirling de première espèce non signés

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n!}{k!} \sum_{i_1 + \ldots + i_k = n} \frac{1}{i_1 \ldots i_k}$$

et

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{0 \leq j \leq h \leq n-k} (-1)^{j+h} \binom{h}{j} \binom{n-1+h}{n-k+h} \binom{2n-k}{n-k-h} \frac{(h-j)^{n-k+h}}{h!}.$$

La relation de récurrence

Les nombres $s(n,k)$, sont définis par la formule de récurrence suivante :

$$\begin{cases} s(n,0) = s(0,k), \ sauf \quad s(0,0) = 1, \\ s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k), \quad n,k \geq 1. \end{cases} \tag{1.4}$$

Table des nombres de Stirling de première espèce

Soit $(s(n,k))_{0\leq k\leq n}$ un triangle, alors d'après la Relation de récurrence (1.4), on a le triangle de Stirling de première espèce signés Table (1.2), tel que n représente les lignes et k les colonnes.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	⋯
0	1								⋮
1	0	1							
2	0	-1	1						
3	0	2	-3	1					
4	0	-6	11	-6	1				
5	0	24	-50	35	-10	1			
6	0	-120	274	-225	85	-15	1		
7	0	720	-1764	1624	-735	175	-21	1	
⋮	⋯								

Table 1.2 – Triangle de Stirling de première espèce signés

1.5.2 Nombres de Stirling de deuxième espèce

Définition 1.5.4. *La décomposition de x^n sur la base $((x)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} (x)_k.$$

Les coefficients $(\{n \atop k\})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$, s'appellent famille des nombres de Stirling de deuxième espèce.

Définition 1.5.5. *Le nombre de Stirling de deuxième espèce est le nombre de partition de l'ensemble $[n]$ en k sous-ensembles non vides, disjoints deux a deux, et de réunion $[n]$.*

Exemple 5. *Il y a sept partitions de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ en deux sous-ensemble non vides*

$$\{\{1\}\{2,3,4\}\},\ \{\{2\}\{1,3,4\}\},\{\{3\}\{1,2,4\}\},\ \{\{4\}\{1,2,3\}\},$$
$$\{\{1,2\}\{3,4\}\},\ \{\{1,3\}\{2,4\}\},\ \{\{1,4\}\{2,3\}\}.$$

Par conséquent, $\{4 \atop 2\} = 7$.

Les fonctions génératrices

La fonction génératrice ordinaire de la suite des nombres de Stirling de deuxième espèce est donnée par :

$$\sum_{n\geq k} \left\{ n \atop k \right\} x^{n-k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{(1-jx)},$$

aussi, la fonction génératrice exponentielle est définie par :

$$\sum_{n\geq k} \left\{ n \atop k \right\} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e^x - 1)^k. \tag{1.5}$$

La forme explicite

Nous pouvons écrire explicitement les nombres de Stirling de deuxième espèce comme

$$\left\{ n \atop k \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

La relation de récurrence

La relation de récurrence des nombres de Stirling de deuxième espèce est définie par :

$$\begin{cases} \left\{ n \atop 0 \right\} = \left\{ 0 \atop k \right\} = 1, \quad sauf \ \left\{ 0 \atop 0 \right\} = 1 \\ \left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k \left\{ n-1 \atop k \right\}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Table des nombres de Stirling de deuxième espèce

Les premières valeurs des nombres de Stirling de deuxième espèce sont données dans la Table 1.3 suivante :

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	⋯
0	1								⋮
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	1	3	1					
4	0	1	7	6	1				
5	0	1	15	25	10	1			
6	0	1	31	90	65	15	1		
7	0	1	63	301	350	140	21	1	
⋮	⋯								

Table 1.3 – Triangle de Stirling de deuxième espèce

1.6 Les nombres r-Stirling de deuxième espèce

Broder dans [6] a donné des interprétations combinatoires et quelques propriétés algébriques des nombres r-Stirling de deuxième espèce et plusieurs identités, des relations de récurrences ainsi

que les fonctions génératrices associées a ces nombres.

Définition 1.6.1. *En combinatoire, les nombres r-Stirling de deuxième espèce* $\left\{ {n \atop k} \right\}_r$, *comptent le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k blocs, tels que les nombres* $1, 2, \ldots, r$ *se trouvent dans des blocs différents.*

Exemple 6. *Le nombre de façons de constituer k équipes depuis n joueurs tels que r joueurs spécifiés* $(r \leq n)$ *sont dans des équipes différentes.*

Exemple 7. $\left\{ {4 \atop 3} \right\}_2$ *est le nombre de partition de l'ensemble* $\{1, 2, 3, 4\}$ *en trois blocs, tels que les premiers éléments 1 et 2 sont dans des blocs différents. Les partitions qui vérifient les conditions sont*

$$\{1\}\{2,3\}\{4\}, \quad \{1\}\{3,4\}\{2\}, \quad \{1\}\{2,4\}\{3\},$$
$$\{2\}\{1,3\}\{4\}, \quad \{2\}\{1,4\}\{3\}.$$

Par conséquent, $\left\{ {4 \atop 3} \right\}_2 = 5$.

Les fonctions génératrices

La fonction génératrice ordinaire des nombres r-Stirling de deuxième espèce, est donnée par :

$$\sum_{n \geq k} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r t^n = \frac{t^k}{(1-rt)(1-(r+1)t)\ldots(1-(k+r)t)}.$$

La fonction génératrice exponentielle des nombres r-Stirling de deuxième espèce est donnée par :

$$\sum_{n \geq k} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e^t - 1)^k e^{rt}. \tag{1.6}$$

La relation de récurrence

La relation de récurrence des nombres r-Stirling de deuxième espèce est définie par :

$$\begin{cases} \left\{ {n \atop r} \right\}_r = 0, & n < r \\ \left\{ {n \atop k} \right\}_r = \delta_{k,r}, & n = r \\ \left\{ {n \atop k} \right\}_r = k\left\{ {n-1 \atop k} \right\}_r + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}_r, & n > r \\ \left\{ {n \atop r} \right\}_r = r^{n-r}, & n \geq r, \end{cases}$$

où $\delta_{k,r}$ est le symbole de Kronecker défini par :

$$\delta_{k,r} = \begin{cases} 1 & si\ k = r \\ 0 & si\ k \neq r. \end{cases}$$

On a aussi la relation de récurrence suivante :

$$\left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r = \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_{r-1} - (r-1)\left\{ {n+r-1 \atop k+r} \right\}_{r-1}, \ n \geq r \geq 1.$$

La forme explicite

La forme explicite des nombres r- Stirling est définie par :

$$\left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (r+j)^n.$$

Table des nombres 2-Stirling de deuxième espèce

Les premières valeurs de ces nombres pour $r = 2$, sont données dans la table suivante :

n \ k	2	3	4	5	6	7	8	9	⋯
2	1								⋮
3	2	1							
4	4	5	1						
5	8	19	9	1					
6	16	65	55	14	1				
7	32	211	285	125	20	1			
8	64	655	1351	910	245	27	1		
9	128	2059	6069	5901	2380	434	35	1	
⋮	⋯								

Table 1.4 – Triangle 2-Stirling de deuxième espèce

1.7 Les nombres d'Euler

Définition 1.7.1. *Les nombres d'Euler, notés E_n, sont définis par la fonction génératrice*

$$\frac{2}{e^t + e^{-t}} = \sum_{n \geq 0} E_n \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi,$$

ou bien par la relation de récurrence suivante :

$$E_n = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^{n-k-1} E_k.$$

Les premiers termes de ces nombres, sont donnés dans la Table 1.5.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
E_n	1	0	-1	0	5	0	-61	0	1385	0	-50521	0

Table 1.5 – Les premières valeurs des nombres d'Euler

1.8 Les nombres eulériens

Définition 1.8.1. *Pour $1 \leq k \leq n$, on désigne par $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$, le nombre de permutations de [n] qui possèdent k montées, c'est-à-dire k endroits où $\sigma(i) < \sigma(i+1)$. Ce nombre est appelé nombre eulérien d'ordre (n,k).*

Exemple 8. *On a la permutation σ, donnée par*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10 \\ 4\,3\,7\,2\,5\,6\,10\,9\,1\,8 \end{pmatrix}.$$

D'après la définition d'une montée, on a les cinq montées de cette permutation

$$\sigma(2) < \sigma(3),\ \ \sigma(4) < \sigma(5),\ \sigma(5) < \sigma(6),\ \ \sigma(6) < \sigma(7),\ \ \sigma(9) < \sigma(10).$$

Exemple 9. *L'ensemble $[n] = \{1,2,3,4\}$ possède 11 permutations qui ont 2 montées*

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,3\,2\,4 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,4\,2\,3 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,3\,1\,4 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,4\,1\,3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,4\,1\,2 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,4\,3 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,3\,4\,1 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,3\,4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,1\,2\,4 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,1\,2\,3 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,3\,4\,2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\left\langle {4 \atop 2} \right\rangle = 11$.

La fonction génératrice

La fonction génératrice double de la suite des nombres eulériens est donnée par :

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0}\left\langle {n \atop k} \right\rangle \frac{t^n}{n!}z^k = \frac{1-z}{1-z\mathrm{e}^{(\mathrm{t}(1-\mathrm{z}))}}.$$

La forme explicite

On peut calculer les nombres eulériens $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$, par la forme explicite

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j \binom{n+1}{j}(k-j)^n.$$

La relation de récurrence

Les nombres eulériens vérifient la relation de récurrence

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \begin{cases} 1 & si \;\; n = k = 0, \\ (k+1)\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle + (n-k)\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle & si \; 1 \leq k \leq n \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Table des nombres eulériens

D'après la relation de récurrence des nombres eulériens on a la table suivante :

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1								⋮
1	1	0							
2	1	1	0						
3	1	4	1	0					
4	1	11	11	1	0				
5	1	26	66	26	1	0			
6	1	57	302	302	57	1	0		
7	1	120	1191	2416	1191	120	1	0	
⋮	...								

Table 1.6 – Table des nombres eulériens

1.9 La fonction beta

Définition 1.9.1. *La fonction beta notée $\mathcal{B}(x, y)$, est un type d'intégrale d'Euler définie pour tous nombres réels x et y strictement positifs par :*

$$\mathcal{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \;\; , \;\; x > 0 \; et \; y > 0.$$

La fonction beta $\mathcal{B}(x, y)$ est liée à la fonction gamma par la relation suivante :

$$\mathcal{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

1.10 La fonction zêta de Riemann

Définition 1.10.1. *La fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$, est définie pour tout nombre complexe s satisfaisant $Re(s) > 1$, (c'est à dire la partie réelle de s supérieure strictement à 1), par :*

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

Maintenant, on présente une généralisation de la fonction zêta de Riemann, définie par Euler et Zagier.

1.11 La fonction multiple zêta d'Eleur-Zagier

Définition 1.11.1. *Les multiples valeurs zêta d'Euler-Zagier de la profondeur p ($p \geq 1$), sont définies par*

$$\zeta_p(s_1, s_2, \cdots, s_p) = \sum_{0<n_1<n_2<\cdots<n_p} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_p^{s_p}},$$

où $s_1, s_2, \cdots, s_p$ sont des entiers positifs ≥ 1 avec $s_p > 1$.

Akiyama et al. [1, 2] ont défini les valeurs, régulières de la fonction multiple zêta à des entiers non positifs par :

$$\zeta_p(-r_1, -r_2, \cdots, -r_p) = \lim_{s_1\to -r_1} \cdots \lim_{s_p\to -r_p} \zeta_p\ (s_2, s_2, \cdots, s_p)\ \ (r_1, r_2, \cdots, r_p \geq 0).$$

1.12 La fonction hypergéométrique

L'origine des fonctions hypergéométriques se trouve au début du $19^{ième}$ siècle, lorsque Gauss étudie l'équation différentielle suivante [4, 15] :

$$t(1-t)y'' + (c - (a+b+1)t)y' - aby = 0, \tag{1.7}$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$. Cette équation connue sous le nom *d'équation différentielle de Gauss*. La fonction hypergéométrique généralisée a une représentation en série :

$$\sum_{n\geq 0} C_n$$

avec $\frac{C_{n+1}}{C_n}$ une fonction rationnelle de n, définie par la relation suivante :

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{(n+a_1)...(n+a_p)t}{(n+b_1)...(n+b_q)(n+1)}.$$

Si $C_0 = 1$, on a

$$C_n = \frac{(a_1)^n (a_2)^n \cdots (a_p)^n}{(b_1)^n (b_2)^n \cdots (b_q)^n} \frac{t^n}{n!}.$$

et la fonction hypergéomètrique est alors

$${}_pF_q \left(\begin{array}{ccc} a_1, & \cdots & , a_p \\ b_1, & \cdots & , b_q \end{array} ; t \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)^n (a_2)^n \cdots (a_p)^n}{(b_1)^n (b_2)^n \cdots (b_q)^n} \frac{t^n}{n!}.$$

Nous connaissons beaucoup de fonctions importantes qui sont en fait des fonctions hypergéomètriques particulières. Le cas particulier le plus simple est celui où $p = q = 0$; il y a aucun paramètre, et on obtient la série bien connue

$${}_0F_0 \left(\begin{array}{c} \\ \end{array} ; t \right) = e^t.$$

Si $p = 1$ et $q = 1$, on obtient la fonction hypergéométrique confluente de Kummer ${}_1F_1 \left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array} ; t \right)$, est définie par

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(a)^n}{(b)^n} \frac{t^n}{n!}. \tag{1.8}$$

Si $p = 2$ et $q = 1$, on obtient la fonction hypergéométrique de Gauss ${}_2F_1 \left(\begin{array}{c} a, b \\ c \end{array} ; t \right)$ où $|t| < 1$, la solution de l'équation différentielle (1.7).

On prend quelques fonctions importantes qui peuvent être exprimer en fonction des séries de Gauss

$$\log(1+t) = t {}_2F_1 \left(\begin{array}{c} 1, 1 \\ 2 \end{array} ; -t \right),$$

$$\exp(t) = \lim_{|a| \longrightarrow \infty} {}_2F_1 \left(\begin{array}{c} a, b \\ b \end{array} ; t/a \right),$$

où $|t| < 1$. Et on a

$$\lim_{|b| \longrightarrow \infty} {}_2F_1 \left(\begin{array}{c} a, b \\ c \end{array} ; t/b \right) = {}_1F_1 \left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array} ; t \right). \tag{1.9}$$

Le théorème suivant contient une importante représentation de la fonction ${}_2F_1$.

Théorème 1.12.1. *La transformation d'Euler est donnée par :*

$${}_2F_1 \left(\begin{array}{c} a, b \\ c, \end{array} ; t \right) = (1-t)^{c-a-b} {}_2F_1 \left(\begin{array}{c} c-a, c-b \\ c, \end{array} ; t \right). \tag{1.10}$$

La relation (1.10) est utile pour déduire les propriétés de la fonction hypergéométrique de Gauss ${}_2F_1$.

Chapitre 2

Les nombres et les polynômes de Bernoulli

En mathématiques, les nombres de Bernoulli, notés B_n, constituent une suite de nombres rationnels. Ces nombres ont d'abord été étudiés par Jacques Bernoulli (ce qui a conduit Abraham de Moivre à leur donner le nom que nous connaissons aujourd'hui) en cherchant des formules pour exprimer les sommes du type

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k = \sum_{i=1}^{n} i^k.$$

Dans ce chapitre, nous présentons les importants résultats concernant ces nombres, en citant deux types ; nombres de Bernoulli classiques (de première espèce) avec $B_1 = -1/2$ et nombres de Bernoulli de deuxième espèce avec $B_1 = 1/2$. Pour plus de détailles consulter les ouvrages [3, 9, 12].

2.1 Les nombres de Bernoulli

2.1.1 Les nombres de Bernoulli de première espèce

La fonction génératrice

Définition 2.1.1. *Les nombres de Bernoulli de première espèce, est la suite des nombres rationnels* B_0, B_1,$B_2, \cdots$ *donnée par la série infinie :*

$$\frac{t}{\mathrm{e}^{\mathrm{t}} - 1} = \sum_{n \geq 0} B_n \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 2\pi. \tag{2.1}$$

On peut définir aussi, les nombres de Bernoulli de première espèce par la relation de récurrence suivante :

La relation de récurrence

Les nombres de Bernoulli de première espèce satisfont la relation de récurrence suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0, \ \textit{avec } B_0 = 1. \tag{2.2}$$

En utilisant la Relation (2.2), on obtient

- Pour $n = 1$, $\binom{2}{0}B_0 + \binom{2}{1}B_1 = 0$, d'ou $B_1 = -\frac{1}{2}$.
- Pour $n = 2$, $\binom{3}{0}B_0 + \binom{3}{1}B_1 + \binom{3}{2} = 0$, d'ou $B_2 = \frac{1}{6}$.
- Pour $n = 3$, $\binom{4}{0}B_0 + \binom{4}{1}B_1 + \binom{4}{2}B_2 + \binom{4}{3}B_3 = 0$, d'ou $B_3 = 0$.

Table des nombres de Bernoulli de première espèce

Les premières valeurs de ces nombres sont illustrées par la Table 2.1 suivante :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0

Table 2.1 – Les premières valeurs des nombres de Bernoulli de première espèce

Remarque 1. *On remarque ici que les signes des B_n alternent pour n pair et que les nombres de Bernoulli d'indice impair sont nuls ; sauf $B_1 = -\frac{1}{2}$.*

Une autre relation de récurrence pour calculer les nombres de Bernoulli de première espèce, est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 2.1.1. *La relation de récurrence des nombres de Bernoulli de première espèce, est donnée aussi par :*

$$B_0 = 1, \ \ et \ B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k, \ \ \forall n \geq 2.$$

Démonstration. Posons

$$B(t) = \frac{t}{e^t - 1}.$$

Alors

$$e^t B(t) = t + B(t).$$

Comme

$$e^t = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!},$$

et

$$t + B(t) = 1 + \frac{t}{2} + \sum_{n\geq 2} B_n \frac{t^n}{n!}.$$

Alors, le produit de deux séries donne

$$\left(\sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0} B_n \frac{t^n}{n!}\right) = 1 + \frac{t}{2} + \sum_{n\geq 2} B_n \frac{t^n}{n!}.$$

D'ou

$$\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!(n-k)!}t^n\right)=1+\frac{t}{2}+\sum_{n\geq 2}B_n\frac{t^n}{n!}.$$

$$1+\left(1-\frac{1}{2}\right)t+\sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!(n-k)!}t^n\right)=1+\frac{t}{2}+\sum_{n\geq 2}B_n\frac{t^n}{n!},$$

qui est équivalent à

$$\sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!(n-k)}\right)t^n=\sum_{n\geq 2}\frac{B_n}{n!}t^n.$$

Par identification, on obtient pour $n\geq 2$

$$\frac{B_n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!(n-k)}.$$

Finalement

$$B_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!B_k}{k!(n-k)!}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k.$$

□

Avant d'énoncer le résultat principal de cette section, on a besoin le Lemme 2.1.2 suivant :

Lemme 2.1.2. *Soit* $f(t)=\sum_{n\geq 0}a_nt^n$. *Alors*

$$f \text{ paire} \Rightarrow a_{2n+1}=0, \quad \text{pour } n\geq 0.$$

Démonstration. f est paire alors

$$f(t)=f(-t).$$

D'ou

$$\sum_{n\geq 0}a_nt^n=\sum_{n\geq 0}a_n(-t)^n,$$

qui donne

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}a_nt^n-\sum_{n\geq 0}a_n(-t)^n&=\sum_{n\geq 0}a_n(t^n-(-t)^n)\\&=\sum_{n\geq 0}a_n(1-(-1)^n)t^n=0.\end{aligned}$$

Or que

$$(1-(-1)^n)=\begin{cases}0 & si \text{ n } est\ pair,\\ 2 & si \text{ n } est\ impair.\end{cases}$$

Donc, on résulte

$$\sum_{n\geq 0}(1-(-1)^{2n+1})a_{2n+1}t^{2n+1}=2\sum_{n\geq 0}a_{2n+1}t^{2n+1}=0.$$

C'est-a-dire

$$a_{2n+1}=0.$$

□

Théorème 2.1.3. *Les nombres de Bernoulli B_n d'indices impairs sont nuls, c'est-à-dire*

$$\forall n \geq 1, \quad B_{2n+1} = 0.$$

Démonstration. On utilise le Lemme 2.1.2 précédant, sachant que $\dfrac{t}{e^t - 1} + \dfrac{t}{2}$ est une fonction paire et

$$\frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2} = B_0 + \left(B_1 + \frac{1}{2}\right) t + \sum_{n \geq 2} B_n \frac{t^n}{n!}.$$

Alors :

$$B_1 + \frac{1}{2} = 0 \ \ et \ \ B_{2n+1} = 0, \ \ \forall n \geq 1.$$

D'ou la démonstration du théorème. □

La forme explicite

Théorème 2.1.4. *La forme explicite des nombres de Bernoulli de première espèce est donnée par la formule suivante :*

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{k!}{k+1} \left\{ n \atop k \right\}. \tag{2.3}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} t &= \ln(1 + (e^t - 1)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(e^t - 1)^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

Et par la fonction génératrice (2.1), on en déduit

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} &= \frac{t}{e^t - 1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(e^t - 1)^k}{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{k+1} \frac{(e^t - 1)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{k+1} \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ n \atop k \right\} \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{k!}{k+1} \left\{ n \atop k \right\} \right) \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

Maintenant, l'identification de deux séries donne directement le résultat. □

Dans la partie suivante, on définit les polynômes de Bernoulli de première espèce et on donne les principaux résultats.

2.2 Les polynômes de Bernoulli de première espèce

La fonction génératrice

Définition 2.2.1. *La fonction génératrice de la suite des polynômes de Bernoulli de première espèce notée* $(B_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$*, est donnée par* $B(x,t) = \dfrac{te^{tx}}{e^t-1}$ *et on a*

$$\frac{te^{tx}}{e^t-1} = \sum_{n\geq 0} B_n(x)\frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 2\pi. \tag{2.4}$$

En particulier, pour $x = 0$ on trouve les nombres de Bernoulli classiques (2.1).

La relation de récurrence

Les polynômes de Bernoulli $B_n(x)$ sont reliés aux nombres de Bernoulli par la formule récurrente suivante :

Théorème 2.2.1. *La relation de récurrence des polynômes de Bernoulli de première espèce est définie par :*

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}. \tag{2.5}$$

Démonstration. Par les fonctions génératrices (2.4), (2.1) et le produit de deux séries exponentielles , on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} B_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{te^{tx}}{e^t-1} &= \frac{t}{\mathrm{e^t}-1}\mathrm{e^{tx}} \\ &= \left(\sum_{n\geq 0} B_n\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0} x^n\frac{t^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} B_k x^{n-k}\binom{n}{k}\right).\end{aligned}$$

D'ou le résultat

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}.$$

□

Table de polynômes de Bernoulli de première espèce

D'après la Relation de récurrence (2.5), on a la Table 2.2 suivante :

n	$B_n(x)$
0	1
1	$x-\frac{1}{2}$
2	$x^2-x+\frac{1}{6}$
3	$x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$
4	$x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30}$
5	$x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{6}x$
6	$x^6-3x^5+\frac{5}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{42}$

Table 2.2 – Table des polynômes de Bernoulli de première espèce

Une autre formule de récurrence pour calculer les polynômes de Bernoulli de première espèce est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.2.2. *Les polynômes de Bernoulli classiques vérifient la relation récurrente*

$$B_n(x+1)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k(x),\ \textit{avec}\ B_0(x)=1.$$

Démonstration. D'après (2.4) et le produit de deux séries, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}B_n(x+1)\frac{t^n}{n!}&=\frac{te^{t(x+1)}}{e^t-1}\\&=\frac{te^{tx}}{e^t-1}e^t=\left(\sum_{n\geq 0}B_n(x)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{n!}\right)\\&=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k(x)\right)\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

Maintenant, en identifiant les coefficients de $\frac{t^n}{n!}$, on obtient

$$B_n(x+1)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k(x).$$

D'où la démonstration. □

Théorème 2.2.3. *Les polynômes de Bernoulli $B_n(x)$ vérifient les identités suivantes :*

1. $\forall n\geq 1,\ B_n'(x)=nB_{n-1}(x).$
2. $\forall n\geq 1,\ \int_0^1 B_n(x)\mathrm{d}x=0.$

Démonstration. On dérive la partie gauche de (2.4) par rapport à x, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{te^{tx}}{e^t-1}\right) &= \frac{t}{e^t-1}\frac{de^{tx}}{dx} = t\frac{te^{tx}}{e^x-1}\\ &= t\sum_{n\geq 0}\frac{B_n(x)}{n!}t^n = \sum_{n\geq 0}\frac{B_n(x)}{n!}t^{n+1}\\ &= \sum_{n\geq 1}B_{n-1}(x)\frac{t^n}{(n-1)!}\\ &= \sum_{n\geq 1}B_{n-1}(x)\frac{t^n}{(n-1)!}.\end{aligned}$$

D'autre part, il résulte de (2.4) que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{te^{tx}}{e^t-1}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{n\geq 0}B_n(x)\frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{dB_n(x)}{dx}\right)\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{n\geq 0}B_n'(x)\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

L'égalité de deux séries donne

$$B_0'(x)+\sum_{n\geq 1}B_n'(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geq 1}B_{n-1}(x)\frac{t^n}{(n-1)!}.$$

Et puisque $B_0'(x)=0$ (car $B_0(x)=1$), alors pour $n\geq 1$, on a

$$\sum_{n\geq 1}B_n'(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geq 1}nB_{n-1}(x)\frac{t^n}{n!},$$

d'ou le résultat 1. Maintenant, on intègre la partie gauche de (2.4) par rapport à x, on obtient

$$\int_0^1\frac{te^{tx}}{e^t-1}dx = \frac{t}{e^t-1}\int_0^1 e^{tx}dx = \frac{t}{e^t-1}\left[\frac{e^{tx}}{t}\right]_0^1 = 1.$$

D'autre part, on intègre la partie droite de (2.4) par rapport à x, on trouve

$$\int_0^1\sum_{n\geq 0}B_n(x)\frac{t^n}{n!}dx = \sum_{n\geq 0}\left(\int_0^1 B_n(x)dx\right)\frac{t^n}{n!},$$

Donc, on résulte l'identité

$$\sum_{n\geq 0}\left(\int_0^1 B_n(x)dx\right)\frac{t^n}{n!} = 1,$$

qui est équivalente à

$$\int_0^1 B_0(x)dx+\sum_{n\geq 1}\left(\int_0^1 B_n(x)dx\right)\frac{t^n}{n!} = 1.$$

Ainsi que

$$1+\sum_{n\geq 1}\left(\int_0^1 B_n(x)dx\right)\frac{t^n}{n!} = 1.$$

Ce qui achève la démonstration de 2. □

Une autre propriétés pour les polynômes de Bernoulli classiques est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 2.2.4. *On a*

1. $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$.
2. $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$, *pour* $n \geq 1$.

Démonstration. On utilise la fonction génératrice (2.4), on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} B_n(1-x)\frac{t^n}{n!} &= \frac{te^{t-xt}}{e^t-1} = \frac{e^t te^{-xt}}{e^t-1} \\ &= \frac{te^{-tx}}{1-e^{-t}} = \frac{-te^{-tx}}{e^{-t}-1} \\ &= \sum_{n\geq 0} B_n(x)\frac{(-t)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n B_n(x)\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

En comparant les coefficients des deux cotés, on obtient le résultat suivant

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x).$$

La preuve de 2. se fait par récurrence sur n. Pour $n = 1$, l'identité 2. est vraie car

$$B_1(x+1) - B_1(x) = x + \frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

On suppose que $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$ est vraie et on montre que

$$B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1)x^n.$$

L'intégration de l'hypothèse par rapport à t, donne

$$\int_0^x \left(B_n(t+1) - B_n(t)\right) dt = \int_0^x B_n(t+1)dt - \int_0^x B_n(t)dt = \int_0^x nt^{n-1}dt.$$

Or que $\displaystyle\int_0^x B_n(t+1)dt = \int_1^{x+1} B_n(t)dt$. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^x \left(B_n(t+1) - B_n(t)dt\right) &= \int_1^{x+1} B_n(t)dt - \int_0^x B_n(t)dt \\ &= \int_1^x B_n(t)dt + \int_x^{x+1} B_n(t)dt - \int_0^x B_n(t)dt \\ &= \int_x^{x+1} B_n(t)dt - \int_0^1 B_n(t)dt.\end{aligned}$$

Or que d'après le Théorème 2.2.3, on a $\int_0^1 B_n(t)dt = 0$ et $B'_{n+1}(t) = (n+1)B_n(t)$, alors

$$\int_x^{x+1} B_n(t)dt = \int_x^{x+1} \frac{B'_{n+1}}{n+1}dt = x^n.$$

Ainsi

$$\int_x^{x+1} B'_{n+1}(t)dt = (n+1)x^n.$$

Finalement, 2. est vraie pour $n+1$ et on a le résultat

$$B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1)x^n.$$

□

2.3 Les nombres de Bernoulli de deuxième espèce

On utilise la notation β_n pour distinguer les nombres de Bernoulli de deuxième espèce avec $B_1 = 1/2$ des nombres de Bernoulli classiques (de première espèce) avec $B_1 = -1/2$. Pour des notions plus précises voir [3].

La fonction génératrice

Définition 2.3.1. *Soient β_n $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ les nombres de Bernoulli de deuxième espèce, on définit les β_n par la fonction génératrice suivante :*

$$\frac{te^t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{t^n}{n!}. \tag{2.6}$$

La relation de récurrence

Définition 2.3.2. *La relation de récurrence des nombres de Bernoulli de deuxième espèce, est définie par la formule suivante :*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \beta_k = n + 1, \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots). \tag{2.7}$$

D'après cette définition, on trouve les β_n pour tout n. Par exemple pour $n = 0$, on obtient

$$\beta_0 = 1,$$

et pour $n = 1$ on a

$$\beta_1 = \frac{1}{2}(2 - \beta_0) = \frac{1}{2}.$$

Maintenant, on remplace n par 2, on obtient

$$\beta_2 = \frac{1}{3}(3 - \beta_0 - 3\beta_1) = \frac{1}{6}.$$

et si on remplace n par 3 dans la formule de récurrence de Bernoulli (2.7), on obtient

$$\beta_3 = \frac{1}{4}(4 - \beta_0 - 4\beta_1 - 6\beta_2) = 0.$$

Table des nombres de Bernoulli de deuxième espèce

D'après la relation de récurrence (2.7), on obtient la Table 2.3 suivante ; telle que le n représente des nombres naturelles $(n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots)$ et β_n les nombres de Bernoulli de deuxième espèce .

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
B_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0

Table 2.3 – Les premières valeurs des nombres de Bernoulli de deuxième espèce

Remarque 2. *On remarque, que les nombres de Bernoulli de deuxième espèce sont exactement les nombres de Bernoulli classiques sauf* $B_1 = -\frac{1}{2}$ *au lieu de* $B_1 = \frac{1}{2}$, *et satisfont les mêmes propriétés.*

La forme explicite

Théorème 2.3.1. *La forme explicite des nombres de Bernoulli de deuxième espèce, est donnée par la formule suivante :*

$$\beta_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{k!}{k+1} \left\{ n \atop k \right\}, \qquad (n \geq 0). \tag{2.8}$$

Démonstration. On peut réécrire la fonction génératrice de β_n (2.6) comme suit

$$\frac{te^t}{e^t - 1} = \frac{t}{1 - e^{-t}} = \frac{-\ln(1 - (1 - e^{-t}))}{1 - e^{-t}},$$

et comme $-\ln(1-t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}$, alors la fonction génératrice de β_n devient

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{t^n}{n!} &= \frac{-\ln(1 - (1 - e^{-t}))}{1 - e^{-t}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-t})^{k-1}}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (e^{-t} - 1)^k}{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{k+1} \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ n \atop k \right\} \frac{(-t)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(-1)^k k!}{k+1} \left\{ n \atop k \right\} \right) \frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de $\frac{t^n}{n!}$ dans les deux cotés, on obtient le résultat (2.8). □

2.4 Les polynômes de Bernoulli de deuxième espèce

La fonction génératrice

Définition 2.4.1. *La suite des polynômes de Bernoulli notée* $(\beta_n(x))_{n \in N}$, *est définie par la fonction* $\beta(x,t) = \frac{te^{tx}}{e^t - 1}$ *et on a :*

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n \geq 0} \beta_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 2\pi. \tag{2.9}$$

En particulier, pour $x = 1$ on trouve les nombres de Bernoulli de deuxième espèce (2.6).

La relation de récurrence

Théorème 2.4.1. *Les polynômes de Bernoulli $\beta_n(x)$, sont liés aux nombres de Bernoulli de deuxième espèce par la formule de récurrence suivante :*

$$\beta_n(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \beta_j x^{n-j}. \tag{2.10}$$

Démonstration. D'après la fonction génératrice des polynômes de Bernoulli (2.9), on peut écrire

$$\frac{t}{e^t - 1} = \frac{(-t)e^{-t}}{e^{-t} - 1} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \beta_n \frac{t^n}{n!},$$

et on a

$$\begin{aligned} \frac{t}{e^t - 1} e^{tx} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta_n \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt)^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \beta_j x^{n-j} \right) \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

D'ou la démonstration du théorème. □

Table des polynômes de Bernoulli de deuxième espèce

Soit $(\beta_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Bernoulli et d'après la forme explicite des polynômes de Bernoulli (2.10), on obtient la Table 2.4 suivante :

n	$\beta_n(x)$
0	1
1	x - $\frac{1}{2}$
2	x^2 - x + $\frac{1}{6}$
3	x^3 - $\frac{3}{2}x^2$ + $\frac{1}{2}x$
4	$x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$
5	$x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$
6	$x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}$

Table 2.4 – Table des polynômes de Bernoulli de deuxième espèce

Remarque 3. *Les polynômes de Bernoulli de deuxième espèce ont les même propriétés que les polynômes de Bernoulli classiques.*

Chapitre 3

Les nombres et les polynômes p-Bernoulli

Récemment, Rahmani dans [12] a introduit une nouvelle classe des nombres de Bernoulli appelée les nombres p-Bernoulli, basée sur la fonction hypergéométrique Gaussienne, et a donné quelques propriétés et plusieurs identités. Les relations récurrentes pour les nombres et les polynômes p-Bernoulli sont également discutées, ainsi que ces applications.

3.1 Les nombres p-Bernoulli

La fonction génératrice

Définition 3.1.1. *Pour tout entier $p \geq -1$, nous définissons une suite de nombres rationnels $B_{n,p}(n \geq 0)$, qui généralise les nombres de Bernoulli de première espèce par :*

$$\sum_{n\geq 0} B_{n,p}\frac{t^n}{n!} = {}_2F_1\left(\begin{matrix}1,1\\ p+2\end{matrix};1-e^t\right),$$

où ${}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix};t\right)$ *désigne la fonction hypergéométrique de Gauss définie par :*

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(a)^n(b)^n}{(c)^n}\frac{t^n}{n!}.$$

En particulier $B_{n,0} = B_n$, désigne les nombres de Bernoulli de première espèce (2.1).

Les premières fonctions génératrices exponentielles pour $B_{n,p}\,(p = 1, 2)$ sont :

$$\sum_{n\geq 0} B_{n,1}\frac{t^n}{n!} = \frac{2((t-1)e^t+1)}{(e^t-1)^2}.$$

$$\sum_{n\geq 0} B_{n,2}\frac{t^n}{n!} = \frac{3((2t-3)e^{2t}+4e^t-1)}{2(e^t-1)^3}.$$

Remarque 4. *Pour $p = -1$, on a*

$$\sum_{n\geq 0} B_{n,-1}\frac{t^n}{n!} = e^{-t},$$

on en déduit que

$$B_{n,-1} = (-1)^n.$$

Les formes explicites

La forme explicite de $B_{n,p}$ en fonction des nombres de Stirling de deuxième espèce, est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.1.1. *Pour $p \geq -1$, on a*

$$B_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{k+p+1}{k}^{-1} k! \left\{ {n \atop k} \right\}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{k+p+1}{k}^{-1} k! \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{t^n}{n!} &= \sum_{k\geq 0} (-1)^k k! \binom{k+p+1}{k}^{-1} \sum_{n\geq k} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{k\geq 0} \binom{k+p+1}{k}^{-1} (1-e^t)^k \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{(p+1)!k!k!}{(k+p+1)!} \frac{(1-e^t)^k}{k!} \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{(1)^k(1)^k}{(p+2)^k} \frac{(1-e^t)^k}{k!} \\
&= {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1,1 \\ p+2 \end{matrix} ; 1-e^t \right). \\
&= \sum_{n\geq 0} B_{n,p} \frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de $\frac{t^n}{n!}$ dans chacun des deux nombres, on obtient la relation cherchée.

□

Une autre formule explicite pour $B_{n,p}$ en termes de nombres eulériens est donnée par :

Théorème 3.1.2. *Pour $p \geq 0$, la forme explicite suivante est vraie*

$$B_{n,p} = \frac{1}{(n+p+1)(p+1)} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{p+n}{p+k}^{-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle,$$

où $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ sont les nombres eulériens donnés par la Définition 1.8.1.

Démonstration. Il découle de la fonction beta

$$\binom{p+n}{p+k}^{-1} = (n+p+1) \int_0^1 x^{k+p} (1-x)^{n-k} dx$$

et l'identité

$$\sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle t^k = \sum_{k=0}^{n} k! \left\{ {n \atop k} \right\} (t-1)^{n-k},$$

que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{p+n}{p+k}^{-1}\left\langle {n \atop k}\right\rangle &= \sum_{k=0}^{n}\left\langle {n \atop k}\right\rangle(-1)^{n+k}(n+p+1)\int_0^1 x^{k+p}(1-x)^{n-k}dx \\
&= (-1)^n(n+p+1)\int_0^1 x^p(1-x)^n\sum_{k=0}^{n}\left\langle {n \atop k}\right\rangle\left(\frac{x}{x-1}\right)^k dx \\
&= (n+p+1)\int_0^1 x^p(x-1)^n\sum_{k=0}^{n}k!\left\{ {n \atop k}\right\}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{n-k} dx \\
&= (n+p+1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!\left\{ {n \atop k}\right\}\int_0^1 x^p(1-x)^k dx \\
&= (n+p+1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!\left\{ {n \atop k}\right\}\frac{p!k!}{(1+k+p)!} \\
&= (n+p+1)(p+1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!\left\{ {n \atop k}\right\}\binom{1+k+p}{p+1}^{-1} \\
&= (n+p+1)(p+1)B_{n,p}.
\end{aligned}$$

D'où

$$B_{n,p} = \frac{1}{(n+p+1)(p+1)}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{p+n}{p+k}^{-1}\left\langle {n \atop k}\right\rangle.$$

□

Pour aboutir a la relation de récurrence, on exprime les nombres p-Bernoulli en fonction de nombres p-Stirling de deuxième espèce $\left\{ {n \atop k}\right\}_p$ déjà mentionnés on chapitre 1, par (1.6).

Théorème 3.1.3. *Pour $p \geq 0$,*

$$B_{n,p} = \frac{(p+1)}{p!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(k+p)!}{k+p+1}\left\{ {n+p \atop k+p}\right\}_p. \tag{3.1}$$

Démonstration. Selon la transformation d'Euler (1.10), on peut écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}B_{n,p}\frac{t^n}{n!} &= e^{pt}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}p+1, p+1\\ p+2\end{matrix}; 1-e^t\right) \\
&= e^{pt}\sum_{k\geq 0}\frac{(p+1)^k(p+1)^k}{(p+2)^k}\frac{(1-e^t)^k}{k!} \\
&= \frac{(p+1)}{p!}e^{pt}\sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{(k+p)!}{k+p+1}\frac{(e^t-1)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

En utilisant (1.6), on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}B_{n,p}\frac{t^n}{n!} &= \frac{(p+1)}{p!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(k+p)!}{k+p+1}\sum_{n\geq k}\left\{ {n+p \atop k+p}\right\}_p\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 0}\left(\frac{(p+1)}{p!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(k+p)!}{k+p+1}\left\{ {n+p \atop k+p}\right\}_p\right)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

En comparant les coefficients de $\frac{t^n}{n!}$ des deux cotés, on arrive au résultat (3.1).

□

Posons $p = 0$ dans (3.1), on obtient la forme explicite (2.3) pour les nombres de Bernoulli. Maintenant, on utilise la transformation de Stirling généralisée [13], on obtient le résultat suivant :

Théorème 3.1.4. *Pour $p \geq 0$, on a*

$$\sum_{k=0}^{p} s(p,k)B_{n+k} = (-1)^p \frac{p!}{(p+1)} B_{n,p}. \tag{3.2}$$

La relation de récurrence

Dans ce qui suit, on donne la relation de récurrence à trois termes pour les nombres p-Bernoulli.

Corollaire 3.1.5. *Pour $p \geq 0$, on a*

$$B_{0,p} = 1, B_{n+1,p} = pB_{n,p} - \frac{(p+1)^2}{p+2} B_{n,p+1}. \tag{3.3}$$

Démonstration. De la relation de récurrence

$$s(p+1,k) = s(p,k-1) - ps(p,k),$$

on a

$$\begin{aligned} B_{n,p+1} &= (-1)^{p+1} \frac{p+2}{(p+1)!} \sum_{k=1}^{p+1} \left(s(p,k-1) - ps(p,k)\right) B_{n+k} \\ &= (-1)^{p+1} \frac{p+2}{(p+1)!} \sum_{k=1}^{p+1} s(p,k-1) - p(-1)^{p+1} \frac{p+2}{(p+1)!} \sum_{k=1}^{p+1} s(p,k) B_{n+k}. \end{aligned}$$

Par le changement de variable $k-1 = k$, on obtient

$$\begin{aligned} B_{n,p+1} &= -\frac{p+2}{(p+1)^2} (-1)^p \frac{p+1}{p!} \sum_{k=0}^{p} s(p,k) B_{n+k+1} + \frac{(p+2)p}{(p+1)^2} (-1)^p \frac{p+1}{p!} \sum_{k=1}^{p} s(p,k) B_{n+k} \\ &= -\frac{p+2}{(p+1)^2} B_{n+1,p} + \frac{(p+2)p}{(p+1)^2} B_{n,p}. \end{aligned}$$

□

3.2 Les polynômes p-Bernoulli

Dans cette section, nous définissons les polynômes p-Bernoulli, notés $B_{n,p}(x)$, comme l'extension des polynômes de Bernoulli classiques avec $B_1 = -\frac{1}{2}$, et nous citons quelques propriétés élémentaires.

Définition 3.2.1. *Les polynômes p-Bernoulli sont définis par la convolution suivante :*

$$B_{n,p}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{k,p} x^{n-k}, \tag{3.4}$$

Les premiers polynômes p-Bernoulli sont :

$$
\begin{aligned}
B_{0,p}(x) &= 1,\\
B_{1,p}(x) &= x - \frac{1}{p+2},\\
B_{2,p}(x) &= x^2 - \frac{2x}{p+2} - \frac{p-1}{(p+2)(p+3)},\\
B_{3,p}(x) &= x^3 - \frac{3x^2}{p+2} - \frac{3(p-1)x}{(p+2)(p+3)} - \frac{p(p-5)}{(p+2)(p+3)(p+4)},\\
B_{4,p}(x) &= x^4 - \frac{4x^3}{p+2} - \frac{6(p-1)x^2}{(p+2)(p+3)} - \frac{6p(p-5)x}{(p+2)(p+3)(p+4)} - \frac{(p-1)(p^2-15p-4)}{(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)}.
\end{aligned}
$$

La fonction génératrice

Théorème 3.2.1. *La fonction génératrice exponentielle des polynômes p-Bernoulli est définie par :*

$$\sum_{n\geq 0} B_{n,p}(x)\frac{t^n}{n!} = {}_2F_1\left(\begin{matrix}1,1\\ p+2\end{matrix};1-e^t\right)e^{xt}. \tag{3.5}$$

Puisque la fonction génératrice s'écrit sous forme $\sum_{n\geq 0} B_{n,p}(x)\frac{t^n}{n!} = A(t)e^{xt}$ alors, les polynômes p-Bernoulli appartiennent à la classe des polynômes d'Appelle. Les résultats suivants sont justes.

Théorème 3.2.2. *Pour $n \geq 0$ et $p \geq 0$, on a*

1. $\dfrac{d}{dx}B_{n,p}(x) = nB_{n-1,p}(x).$
2. $\displaystyle\int_0^x B_{n,p}(t)dt = \frac{B_{n+1,p}(x) - B_{n+1,p}}{n+1}.$
3. $\displaystyle\int_0^1 B_{n,p}(t)dt = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_{k,p}.$
4. $\displaystyle B_{n,p}(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{k,p}(x)y^{n-k}.$
5. $\displaystyle B_{n,p}(x+1) - B_{n,p}(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_{k,p}(x).$
6. $\displaystyle B_{n,p}(mx) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{k,p}(x)(m-1)^{n-k}x^{n-k}.$

Démonstration.

1. On dérive la partie droite de (3.5) par rapport à x, on trouve

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left({}_2F_1\left(\begin{matrix}1,1\\ p+2\end{matrix};1-e^t\right)e^{xt}\right) &= t\sum_{n\geq 0} B_{n,p}(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} B_{n,p}(x)\frac{t^{n+1}}{n!}\\
&= \sum_{n\geq 1} B_{n-1,p}(x)\frac{t^n}{(n-1)!}.
\end{aligned}
$$

De même, on dérive la partie gauche de (3.5)

$$\frac{d}{dx}\left({}_2F_1\left(\begin{matrix}1,1\\ p+2\end{matrix};1-e^t\right)e^{xt}\right)=\frac{d}{dx}\left(\sum_{n\geq 0}B_{n,p}(x)\frac{t^n}{n!}\right)$$
$$=\sum_{n\geq 0}\frac{d}{dx}B_{n,p}(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Alors l'égalité de deux séries, nous donne

$$\frac{d}{dx}B_{0,p}(x)+\sum_{n\geq 1}\frac{d}{dx}B_{n,p}(x)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n\geq 1}\frac{d}{dx}B_{n-1,p}(x)\frac{t^n}{(n-1)!}.$$

et comme $\frac{d}{dx}B_{0,p}(x)=0$, alors

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{d}{dx}B_{n,p}(x)\frac{t^n}{(n-1)!}=\sum_{n\geq 1}B_{n-1,p}(x)\frac{t^n}{(n-1)!}.$$

En comparant les coefficients de $\frac{t^n}{(n-1)!}$, on obtient

$$\text{pour tout } n\geq 1,\quad \frac{d}{dx}B_{n,p}(x)=nB_{n-1,p}(x).$$

2. D'après 1. on a $B_{n,p}(t)=\dfrac{1}{(n+1)}\dfrac{d}{dt}B_{n+1,p}(t)$.

   Maintenant, on intègre cette identité par rapport à t entre 0 et x, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^x B_{n,p}(t)dt&=\frac{1}{n+1}\int_0^x\frac{d}{dt}B_{n+1,p}(t)dt\\&=\left[\frac{B_{n+1,p}(t)}{n+1}\right]_0^x\\&=\frac{B_{n+1,p}(x)-B_{n+1,p}(0)}{n+1}\\&=\frac{B_{n+1,p}(x)-B_{n+1,p}}{n+1}.\end{aligned}$$

   D'ou le résultat.

3. D'après 2. pour $x=1$ et en utilisant (3.4), on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^1 B_{n,p}(t)dt&=\frac{B_{n+1,p}(1)-B_{n+1,p}(0)}{n+1}\\&=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}B_{k,p}-B_{n+1,p}\right)\\&=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_{k,p}.\end{aligned}$$

4. On utilise (3.5), on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\left(B_{n,p}(x+1)-B_{n,p}(x)\right)\frac{t^n}{n!} &= {}_2F_1\left(\begin{matrix}1,1\\ p+2\end{matrix};1-e^t\right)\left(e^{t(x+1)}-e^{xt}\right)\\ &= {}_2F_1\left(\begin{matrix}1,1\\ p+2\end{matrix};1-e^t\right)e^{xt}\left(e^t-1\right)\\ &= \left(\sum_{n\geq 0}B_{n,p}\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{n!}-1\right)=\sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{k,p}(x)\frac{t^n}{n!}-\sum_{n\geq 0}B_{n,p}(x)\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{k,p}(x)-B_{n,p}(x)\right)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_{k,p}(x)\right)\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

En comparant les coefficients de deux cotés, on obtient le résultat cherché.

$$B_{n,p}(x+1)-B_{n,p}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_{k,p}(x).$$

5. De même, en appliquant (3.5) on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}B_{n,p}(x+y)\frac{t^n}{n!} &= {}_2F_1\left(\begin{matrix}1,1\\ p+2\end{matrix};1-e^t\right)e^{t(x+y)}\\ &= {}_2F_1\left(\begin{matrix}1,1\\ p+2\end{matrix};1-e^t\right)e^{tx}.e^{ty}\\ &= \left(\sum_{n\geq 0}B_{n,p}(x)\frac{t^n}{n!}\right)e^{ty}\\ &= \left(\sum_{n\geq 0}B_{n,p}(x)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0}\frac{(yt)^n}{n!}\right)\\ &= \left(\sum_{n\geq 0}B_{n,p}(x)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0}y^n\frac{t^n}{n!}\right)\\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{k,p}(x)y^{n-k}\right)\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

L'égalité des coefficients de $\frac{t^n}{n!}$, dans les deux cotés, donne

$$B_{n,k}(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{k,p}(x)y^{n-k}.$$

6. On a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} B_{n,p}(mx)\frac{t^n}{n!} &= {}_2F_1\left(\begin{matrix}1,1\\ p+2\end{matrix};1-e^t\right)e^{(mx)t} = {}_2F_1\left(\begin{matrix}1,1\\ p+2\end{matrix};1-e^t\right)\left(e^{xt}\right)^m\\ &= {}_2F_1\left(\begin{matrix}1,1\\ p+2\end{matrix};1-e^t\right)\left(e^{xt}\right)^{m+1-1} = {}_2F_1\left(\begin{matrix}1,1\\ p+2\end{matrix};1-e^t\right)e^{xt}\left(e^{xt}\right)^{m-1}\\ &= \left(\sum_{n\geq 0} B_{n,p}(x)\frac{t^n}{n!}\right)e^{(m-1)xt} = \left(\sum_{n\geq 0} B_{n,p}(x)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0}(m-1)^n x^n\frac{t^n}{n!}\right)\\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{k,p}(x)(m-1)^{n-k}x^{n-k}\right)\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

D'ou le résultat

$$B_{n,p}(mx) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{k,p}(x)(m-1)^{n-k}x^{n-k}.$$

□

Remarque 5. *Notons que pour $p = 0$, le Théorème 2.2.3 est réduit aux résultats des Théorèmes 2.2.3 et 2.2.4.*

La relation de récurrence

La relation de récurrence à trois termes pour calculer les polynômes p-Bernoulli est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 3.2.3. *Pour $p \geq 0$, on a*

$$B_{0,p}(x) = 1; B_{n+1,p}(x) = (x+p)B_{n,p}(x) - \frac{(p+1)^2}{p+2}B_{n,p+1}(x). \tag{3.6}$$

Démonstration. On a

$$\frac{d}{dx}B_{n,p}(x) = x^{-1}\sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k}B_{k,p}x^{n-k}.$$

Or que $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$, alors

$$\begin{aligned}x\frac{d}{dx}B_{n,p}(x) &= nB_{n,p}(x) - \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}B_{k,p}x^{n-k}\\ &= nB_{n,p}(x) - n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}B_{k+1,p}x^{n-k-1}.\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant 1. du Théorème 3.2.2 et (3.3), et d'après (3.4), on obtient

$$\begin{aligned}xnB_{n-1,p}(x) &= nB_{n,p}(x) - n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(pB_{k,p} - \frac{(p+1)^2}{p+2}B_{k,p+1}\right)x^{n-k-1}\\ &= nB_{n,p}(x) - npB_{n-1,p}(x) + n\frac{(p+1)^2}{p+2}B_{n-1,p+1}(x).\end{aligned}$$

D'ou le résultat. □

Dans le cas spécial de (3.6) quant $x = 0$, on obtient (3.3). Le résultat suivant donne la généralisation de Théorème (3.1).

Théorème 3.2.4. *On a*

$$B_{n,p}(x) = \frac{(p+1)}{p!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(k+p)!}{k+p+1}S_k^n(x+p), \tag{3.7}$$

où $S_k^n(x)$ sont les nombres de Wheighted, définis par :

$$S_k^n(x) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(x+j)^n.$$

Démonstration. La démonstration de (3.7) se fait par récurrence sur n en utilisant (3.6). A partir de l'hypothèse d'induction et $S_0^n(x) = x^n$, on a

$$\begin{aligned}
&(x+p)B_{n,p}(x) - \frac{(p+1)^2}{p+2}B_{n,p+1}(x)\\
&= (x+p)\frac{(p+1)}{p!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(k+p)!}{k+p+1}S_k^n(x+p) + \frac{(p+1)}{p!}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\frac{(k+p)!}{k+p+1}S_{k-1}^n(x+p+1)\\
&= (x+p)^{n+1} + (x+p)\frac{(p+1)}{p!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(k+p)!}{k+p+1}S_k^n(x+p) + \frac{p+1}{p!}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\frac{(k+p)!}{k+p+1}S_{k-1}^n(x+p+1).
\end{aligned}$$

Puisque $S_n^n(x) = 1$ et $(x+p)S_k^n(x+p) + S_{k-1}^n(x+p+1) = S_k^{n+1}(x+p)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&(x+p)B_{n,p}(x) - \frac{(p+1)^2}{p+2}B_{n,p+1}(x)\\
&= \frac{(p+1)}{p!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(k+p)!}{k+p+1}[(x+p)S_k^n(x+p) + S_{k-1}^n(x+p+1)]\\
&\quad + (x+p)^{n+1}\frac{(p+1)}{p!}(-1)^{n-1}\frac{(n+p+1)!}{n+1+p+1}\\
&= (x+p)^{n+1} + \frac{(p+1)}{p!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(k+p)!}{k+p+1}S_k^{n+1}(x+p)\\
&\quad + \frac{p+1}{p!}(-1)^{n+1}\frac{(n+p+1)!}{n+1+p+1}\\
&= \frac{(p+1)}{p!}\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\frac{(k+p)!}{k+p+1}S_k^n(x+p+1) = B_{n+1,p}(x).
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration.

□

Chapitre 4

Applications

Pour illustrer l'importance des nombres de Bernoulli et p-Bernoulli, nous proposons quelques exemples qui montrent leur présence dans des domaines très divers des mathématiques. Pour des notions plus détaillées, le lecteur pourra consulter [3, 9, 12].

4.1 Applications des nombres de Bernoulli

4.1.1 Applications en analyse

Les nombres de Bernoulli apparaissent dans le développement en série de Taylor des fonctions tangentes (circulaire et hyperbolique), dans la formule d'Euler-Maclaurin ainsi que dans des expressions de certaines valeurs de la fonction zêta de Riemann, etc.

1. **Sommes de puissances d'entiers**

   Les nombres de Bernoulli sont apparus pour la première fois dans les sommes des puissances $S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k$, et précisément dans la formule de Faulhaber comme suit :

   Pour tous $k \geq 0$ et $n \geq 1$, on a

$$S_k(n) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B_j \frac{n^{k+1-j}}{k+1-j}.$$

2. **Développements en séries de Taylor**

   Les développements en séries de Taylor des fonctions $\tan x$ et $\cos x$ au voisinage de 0, sont donnés par :

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2^{2n} - 1) 2^{2n} B_{2n} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}.$$
$$\cos x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} 2^{2n} B_{2n} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}.$$

3. **La formule d'Euler Maclaurin**

Les nombres de Bernoulli apparaissent dans la formule d'Euler-Maclaurin comme suit :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \approx \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}(f(n)-f(0)) + \frac{1}{6}\frac{f'(n)-f'(0)}{2!} - \frac{1}{30}\frac{f^{(3)}(n)-f^{(3)}(0)}{4!} + \frac{1}{42}\frac{f^{(5)}(n)-f^{(5)}(0)}{6!} + \cdots$$

4. **Relation avec la fonction zêta ζ de Riemann**

   En 1735, Leonhard Euler à déterminer la valeur exacte de $\varsigma(2)$, par la formule

   $$\varsigma(2) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

   Il prouva aussi, que la fonction ς de Riemann pour les valeurs paires positives ont une relation avec les nombres de Bernoulli.

   $$\varsigma(2n) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^{2n}} = (2\pi)^{2n} \frac{(-1)^{n+1} B_{2n}}{2\,(2n)!}.$$

5. **Relation avec la fonction multiple zêta d'Eleur-Zagier**

   Akiyama et al. [2] ont défini une formule explicite pour $\zeta_p(0,\cdots,0,-n)$, liée aux nombres de Bernoulli.

   $$\zeta_k(0,\cdots,0,-n) = -\frac{1}{(k-1)!(n+1)} \sum_{j=1}^{k} s(k,j) B_{n+j} + (-1)^k \delta_n, \tag{4.1}$$

   où δ_n est une fonction définie par :

   $$\delta_n = \begin{cases} 1 & si\ n = 0, \\ 0 & si\ n \neq 0. \end{cases}$$

6. **Relation avec les polynômes d'Euler**

   On peut calculer les polynômes d'Euler $E_n(x)$ a partir des polynômes de Bernoulli par la relation suivante :

   $$E_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (2B_k(x) - E_k(x)).$$

4.1.2 Applications arithmétiques

Applications aux nombres premiers

Ce résultat à été obtenu en 1840 par Karl Georg Christian Von Staudt et Thomas Clausen.

Théorème 4.1.1 (Théorème de Von Staudt-Clausen)**.** *Notons $P \subset \mathbb{N}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour $n = 1$ et pour tout entier n pair avec $n \geq 2$, B_n s'écrit comme*

$$B_n = -\sum_{p\in P,\ p-1|n} \frac{1}{p} + C_n \quad (C_n\ \textit{entier}),$$

où $p-1 \mid n$ signifie que $p-1$ divise n.

Ce théorème énonce ceci :

Si l'on ajoute à B_n les inverses $\frac{1}{p}$ pour chaque nombre premier p tel que $p-1$ divise n, on obtient, si $n=1$ ou n est pair non nul, un nombre entier.

Exemple 10.

$$B_1+\tfrac{1}{2}=0,\ \ B_2+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}=1,\ \ B_4+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}=1,\ \ B_6+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{7}=1,$$
$$B_{10}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{11}=1,\ \ B_{12}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{13}=1,\ \ B_{14}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}=2,$$
$$B_{16}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{17}=-6.$$

La propriété se traduit par : $pB_{2m}\equiv p$ si $p-1$ divise $2m$. (La notation $a\equiv b \mod p$ signifie que p divise le numérateur de $a-b$ mais pas son dénominateur.)

Aussi, ce théorème permet immédiatement de caractériser les dénominateurs des nombres de Bernoulli dans le résultat suivant :

Théorème 4.1.2. *Pour n pair, le dénominateur de B_n est le produit des nombres premiers p, tels que $p-1 \mid n$.*

4.2 Application des nombres p-Bernoulli

En 2015, Rahmani [12] a etablit et a donné un important résultat (4.2), qui généralise celle de Akiyama et al. (4.1).

4.2.1 Application en analyse

Relation avec la fonction multiple zêta d'Euler-Zagier

La suite des nombres p-Bernoulli apparait dans la fonction multiple zêta d'Euler-Zagier pour des multiples valeurs entiers négatives comme suit :

$$\zeta_p(0,\cdots,0,-n)=\frac{(-1)^{p+1}p}{(p+1)(n+1)}B_{n,p}+(-1)^p\delta_{n,0}, \tag{4.2}$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker défini par (1.6). En particulier, on a

$$\zeta_p(0,\cdots,0)=\frac{(-1)^p}{p+1}.$$

Conclusion

Les nombres de Bernoulli constituent une suite de nombres rationnels très riche en propriétés. Par conséquent, on obtient de cette étude de nombreux résultats, dans les domaines des mathématiques et physiques. Parmi ces applications, on cite formule d'Euler-Maclaurin, développements en série de Taylor des fonctions circulaires et hyperboliques, des expressions de certaines valeurs de la fonction zêta de Riemann, et les nombres premiers.

Bibliographie

[1] S. Akiyama, S. Egami, Y. Tanigawa, Analytic continuation of multiple zeta- function and their values at non-positive integers,*Acta Arith*, **98**, p.107-116, (2001).

[2] S. Akiyama, Y. Tanigawa, Multiple zeta values at non-positive integers, *Ramanujan J*, **5**, p. 327-351, (2001).

[3] T. Arakawa, T. Ibukiyama, M. Kaneko, *Bernoulli Numbers and Zeta Functions*, springer Monographs in mathematics, 2014.

[4] G. E. Andrews, R. Askey, and R. Roy. *Special functions, Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Comridge, University Press, 1999.

[5] I.E. Bousbaa, *Combinatoire des suites de Stirling généralisées*, Thèse de Doctorat troisième cycle d'état en Mathématiques, USTHB, 2016.

[6] A.Z. Broder, The r-Stirling numbers, *Discrete Math*, **49**, p. 241-259, (1984).

[7] V. Cohen-Aptel, *Fonctions double Gamma liées aux systèmes de racines*, Thèse de Doctorat d'état en Mathématiques fondamentales, École doctorale de Mathématique informatique Télécommunications de Toulouse, 2012.

[8] L. Comtet, *Advanced combinatoirics*, D. Reidel Publishing Co, Dordrecht, enlarged, The art of finite and infinite expansions, 1974.

[9] G. B. Djordjević, G.V. Milovanović, *Spicial classes of polynomials*, University of Niš, Faculty of Technology Leskovac, 2014.

[10] R.L.Graham, D.EKnuth, O.Patshnik, *MATHÉMATIQUES CONCRÈTES*, Addison-Wesley publishing company, Reading, MA, second edition, A foundation for computer science, 1994.

[11] M. Rahmani, *Étude Combinatoire et Analytique des Suites et des Polynômes*, Thèse de Doctorat en Mathématiques, USTHB, 2013.

[12] M. Rahmani, On p-Bernoulli numbers and polynomials, *journal of Number Theory*, **157**, p. 350-366, (2015).

[13] M. Rahmani, Generalized Stirling transforme, *Miskolc. Notes*, **2**, p.677-690, (2014).

[14] Sebaoui Madjid, *Sur Quelques Propriétés Analytiques des Polynômes Classiques,* Thèse de Doctorat en Mathématiques, Université de Médéa, 2019.

[15] H. M. Srivastava and J. Choi. *Zeta and q-Zeta function and associated series and integrals.* Elsevier, Inc., Amsterdam, 2012.

[16] Tigane Meriem, *Combinatoire des Nombres de Stirling et de Bell généralisés*, diplôme de MAGISTER d'état en Mathématiques, USTHB, 2011.