Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr.Yahia Farès de Médéa

Département de Mathématique et Informatique



Projet de fin d'étude

présenté en vue de l'obtention

du

Diplôme de Master en

Recherche Opérationnelle

Thème

Etude de l'indice de criticité du nombre de la 2-indépendance dans certains graphes

Par

CHARFI Fatiha

Composition du Jury:

A. BENKACI	Maître Assistant-A	UYF Médéa	Président
A. BOUCHOU	Maître de Conférences-B	UYF Médéa	Examinateur
M. ZEMIR	Maître Assistant-B	UYF Médéa	Encadreur

Date de soutenance: juin 2017

Résumé

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n et de taille m où $V(G)$ est l'ensemble des sommets et $E(G)$ l'ensemble des arêtes. Un sous ensemble de sommets S de V est dit ensemble 2-indépendant de G si le degré maximum du sous graphe induit par S est au plus 1, et on désigne par $\beta_2(G)$ la taille d'un 2-indépendant maximum de G.

Pour un graphe G, nous définisons l'indice de criticité d'une arête $e \in E(G)$ comme $ci^-_{\beta_2}(e) = \beta_2(G) - \beta_2(G - e)$.

La suppression d'une arête, dans ce cas l'indice de criticité dans un graphe G est défine comme $ci^-_{\beta_2}(G) = \left(\sum_{i=1}^{m} ci^-_{\beta_2}(e)\right) \diagup m(G)$.

Nous définisons l'indice de criticité d'une arête $e \in E(\overline{G})$ comme $ci^+_{\beta_2}(e) = \beta_2(G) - \beta_2(G + e)$.

L'ajout d'une arête, dans ce cas l'indice de criticité dans un graphe G est define comme $ci^+_{\beta_2}(G) = \left(\sum_{i=1}^{\overline{m}} ci^+_{\beta_2}(e)\right) \diagup m(\overline{G})$ et $\overline{G}$ le complémentaire du graphe G.

Dans ce mémoire, nous déterminons l'indice de criticité de la suppresion et l'ajout d'une arête de la 2-indépendance dans les chaînes et les cycles.

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a simple graph of order n, and of sise m with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$, A subset S of V is 2-independent set if $\Delta(S) < 2$, and the 2-independent number $\beta_2(G)$ is the maximum cardinality of a 2-independent set.

For a graphe G, we define the criticality index of an edge $e \in E(G)$ as $ci^-_{\beta_2}(e) = \beta_2(G) - \beta_2(G-e)$, and the removal criticality index of a graph G as $ci^-_{\beta_2}(G) = \left(\sum_{i=1}^{m} ci^-_{\beta_2}(e)\right) \diagup m(G)$.Similariy we define

the criticality index of an edge $e \in E(\overline{G})$ as $ci^+_{\beta_2}(e) = \beta_2(G) - \beta_2(G+e)$, and the adding criticality index of a graph G as $ci^+_{\beta_2}(G) = ci^+_{\beta_2}(G) = \left(\sum_{i=1}^{\overline{m}} ci^+_{\beta_2}(e)\right) \diagup m(\overline{G})$.

In this memory, now we determine the removal and the adding criticality indices of 2-indépendance of cycles and paths.

Remerciements

Je tiens à remercie en premier lieu, Allah le tout puissant de nous avoir donné le courage et la patience pour terminer ce travail.

Je voudrai sincèrement exprimer mes plus vifs remerciements à mon directeur de memoire Monsieur ZEMIR Mohamed, Maître Assistant à l'Université Dr. Yahia Farès de Médéa, pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Sa disponibilité et ses conseils ont été des éléments décisifs dans l'aboutissement de ce mémoire. On lui doit toute notre reconnaissance.

Je remercie Monsieur BENKACI Azzedine, Maître Assistant à l'Université Dr. Yahia Farès de Médéa, pour l'honneur qu'il me fait en président le jury de mon mémoire.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur BOUCHOU Ahmed, Maître de Conférences à l'Université Dr. Yahia Farès de Médéa, pour son aide, sa disponibilité, et ses bons conseils, et pour l'honneur qu'il me fait d'avoir accépté de faire partie du jury.

Mes remerciements vont également à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation ainsi qu'à tout le personnel du département Mathématiques et Informathique . Nos profonds remerciements vont à nos chers parents, pour leur soutien et leur confiance en nous.

Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous les membres de la famille surtouts mes sœurs et frères, sans oublier mes amis et tous ceux qui ont servis, de près ou de loin à notre formation.

Table des matières

Résumé **ii**

Abstract **iii**

Remerciements **iv**

Introduction **2**

1 Notions de base **4**

1.1 Définitions et notations 4

1.1.1 Graphes, sous-graphes et graphes partiels 4

1.1.2 Voisinage et degré 6

1.1.3 Concept de minimalité et maximalité, minumum et maximum 7

1.2 Quelques graphes spécifiques 8

1.2.1 Chaîne 8

1.2.2 cycle 9

1.2.3 Graphe connexe 9

1.2.4 Graphe complet et graphe discret 10

1.2.5 Graphe complémentaire 11

1.2.6 Graphe k-régulier 11

1.2.7 Graphe biparti et graphe biparti-complet 12

1.2.8 Arbre et forêt 13

1.3 Invariants de graphes 13

1.3.1 Stable 13

1.3.2 Isomorphes 14
1.3.3 Clique 14
1.4 Quelques opérations de graphes 14
1.5 Notions de criticité et de stabilité 15

2 Le nombre de k-indépendance dans certains graphes 16
2.1 L'indépendance 16
2.2 Généralisation sur la k-indépendance 17
2.2.1 Proprietée general de k-indépendant 18
2.3 Bornes sur β_k 18
2.4 Le nombre de k-indépendance des certains graphes particuliers 20
2.5 La criticité du nombre de k-indépendance dans un graphe 22
2.5.1 Graphes β_k^+-arête-critiques 23
2.5.2 Graphes β_k^--arête-critiques 23

3 L'indice de criticité du nombre de 2-indépendance dans certains graphes 24
3.1 Définitions et notations 24
3.1.1 2-indépendance 24
3.1.2 L'indice de criticité 25
3.2 L'indice de criticité de la suppression d′une arête de la 2-indépendance . . . 25
3.2.1 L'indice de criticité de la suppression d′une arête de la 2-indépendance dans un cycle C_n 26
3.2.2 L'indice de criticité de la suppression d′une arête de la 2-indépendance dans une chaîne P_n 26
3.3 L'indice de criticité de l'ajout d′une arête de la 2-indépendance 28
3.3.1 L'indice de criticité de l'ajout d′une arête de la 2-indépendance dans un cycle C_n 28
3.3.2 L'indice de criticité de l'ajout d′une arête de la 2-indépendance dans une chaîne P_n 32

Conclusion **36**

Bibliographie **38**

Liste des Figures

1.1.1 Un graphe G. 7
1.1.2 Exemple d'un sous graphe et d'un graphe partiel 8
1.3.1 Une chaîne P_5 et un cycle C_6 11
1.3.2 Un graphe connexe et graphe non connexe 12
1.3.3 Exemple d'un graphe K_6 et un graphe discret S_6 12
1.3.5 Graphe 3-régulier(Graphe de peterson) 14
1.3.6 Graphe bipartie et graphe bipartie complet 14
1.3.7 Arbre. 15
1.4.1 Exemple de deux graphe isomorphe 16
2.1.1 $\beta(K_{2,3}) = 3$ et$i(K_{2,3}) = 2$ 20
2.4.1 Illustration de $\beta(P_5) = 3$ et $\beta(C_7) = 3$ 25
2.4.2 Illustration de $\beta_2(P_4) = 3$ et $\beta_2(C_8) = 5$. 26
3.3.1 Un graphe $G = C_n + xy$ 33

Introduction

La Théorie des graphes est une branche des mathématique discrètes, en forte croissance grâce à son rôle essentiel dans les sciences appliquées, incluant l'ingénierie et en particulier l'informatique, mais aussi la biologie, la génétique ou encore les sciences sociales. Généralement un graphe est un dessin géométrique défini par la donnée d'un ensemble de points (appelés sommets ou noeuds), reliés entre eux par un ensemble de lignes ou de flèches (appelées arêtes ou arcs). Chaque arête a pour extrémités deux points, éventuellement confondus. Le graphe est dit orienté si, pour chaque arête, on distingue une extrémité initiale et une extrémité terminale.

La notion de graphe a été introduite par l'anglais J.J.Sylvester en 1822, et ce n'est qu'en 1936 que parait le premier livre sur la théorie des graphes, ecrit par D. König. La théorie des graphes est apparue d'abord comme une curiosité mathématique avec le problème des ponts de Königsberg, quand Euler (en 1736) démontra qu'il était impossible de traverser chacun des sept ponts de la ville russe de Königsberg, une fois exactement et de revenir au point de départ. Elle est devenue une branche mathématique au début du XX^{eme} siècle, grâce aux travaux de König, de Kuratowski de Caylay et plus récemment, de Berge, d'Erdös et de Harary.

Un des domaines les plus florissants de la théorie des graphes est la domination qui a été étudiée intensivement ces trois derniéres décennies. Elle a commencé semble-t-il au 16^{eme}siécle en Inde [12] comme un probléme de jeux d'échec. Le principe consiste à couvrir (dominer) l'ensemble des cases d'un échiquier par un nombre minimum de reines, c'est à dire que chaque place est occupée soit par une reine, soit en un seul mouvement de celle-ci

Parmi les problèmes les plus importants et très étudié en théorie des graphes sont les problèmes de l'indépendance dans les graphes. Le problème original de l'indépendance

consiste à trouver un ensemble de taille maximum d'un graphe. Étant donné un graphe $G = (V, E)$, un sous-ensemble $S \subseteq V$ est appelé ensemble indépendant de G si pour chaque sommet $v \in V - S$, $S \cup \{v\}$ n'est pas indépendant. Ce problème est $\mathcal{NP}$-dure pour les graphes en général.

Plus d'un siècle plus tard, en 1984, Fink et Jacobson [16],[17] a été le premier à publier sur l'indépendance dans les graphes(ont introduit la généralisation de l'indépendance) .

En 1988, Odile Favaron [13] ont introduit d'autre resultat sur l'indépendance.

Dans ce présent travail, nous nous intéressons principalement à l'étude l'indice de criticité de la suppresion et l'ajout d'une arête de la 2-indépendence dans les chaînes et dans les cycles criticité de la

Aprés une introduction générale, ce mémoire comporte trois chapitres développés dans l'ordre suivant:

Dans le premier chapitre, nous rappelons d'abord les définitions de la théorie des graphes nécéssaires à la compréhension de ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons la définition de k-indépendance et certains résultats sur le nombre de k-indépendance β_k(quelques propriétés, quelques bornes sur β_k, et des valeurs exactes de β_k pour certaines classes de graphe).

Dans le troisieme chapitre on etude l'indice de criticité du nombre de 2-indépendance dans certains graphe.

On finit par une conclusion générale.

Chapitre 1

Notions de base

Nous introduisons dans ce chapitre les définitions de base ainsi que les notations usuelles dans le domaine de la théorie des graphes. Un certain nombre de résultats théoriques liés à ces définitions sont également introduite.

Pour plus de détails sur la terminologie utilisée dans ce mémoire, nous invitons le lecteur à se référer à l'ouvrage de Berge [1] et de Chartrand et Lesniak [8].

1.1 Définitions et notations

1.1.1 Graphes, sous-graphes et graphes partiels

Un graphe

Un **graphe** G est un couple (V, E), ou V est un l'ensemble des **sommets** et E est un ensemble de paires d'élements de V appelées **arêtes** pour un graphe G, on notera $V(G)$ l'ensemble de ses sommets et $E(G)$ l'ensemble de ses arêtes, le nombre de sommets de G appelée **ordre** de G, noté par $n = |V|$ et le nombre de ses arêtes est appelé taille de G, noté par $m = |E|$. Un graphe est dit **fini** ou **infini** suivant son ordre.

Soit G un graphe et u, v deux sommets de G. Si $uv \in E$ alors u et v sont dit **adjacent** ou **voisin**. Réciproquement, si $uv \notin E$, alors u et v sont dits **non-adjacents** ou **non-voisins**. Si $e = uv$ est un arête du graphe G, on dit que u et v sont les extremités de e, deux arétes distinctes sont dites adjacentes si elles ont au moins une extrémite commune. Une arête

$e = (u, v)$ d'un graphe G est une **boucle** si les extrémites u et v sont confondues ou bien l'extrémite initiale est égale à son extrémite finiale. Une arête est **incident** à un sommet si ce sommet est une extrémité de cet arête.

Un graphe G est dit **simple** si tout couple de ses sommets est relié par au plus une arête et que toute arête de $E(G)$ a ses extrémités distinctes. En d'autres termes, G est simple s'il est sans boucles et sans arêtes multiples. Un graphe contenant un sommet unique s'appelle un graphe **trivial**. Deux graphes G_1 et G_2 sont dits des sommets disjoints si $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$.

Les graphes considérés dans ce mémoire sont simples, non orientés et finis.

En effet la représentation graphique G d'ordre 6 et de taille 7 donnée par la Figure1.1.1 représentent un graphe simple dont l'ensemble des sommets est $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ et l'ensemble d'arêtes est $E(G) = \{ab,\ bc,\ be,\ ce,\ cd,\ ed,\ df\}$. Les sommets a et b sont adjacents dans G, c et f no sont pas adjacents.

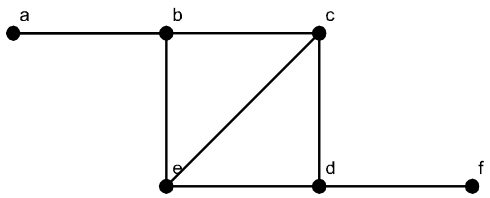


Figure 1.1.1 : Un graphe G

Sous-graphe

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On appelle **sous-graphe** de G, un graphe $G' = (V', E')$ tel que $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$. Pour un sous-ensemble $A \subseteq V$, le sous-graphe **induit** par A, noté $G[A]$ ou simplement $\langle A \rangle$, est le graphe ayant A pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans A. Etant donné un graphe G', on dit que G est sans G'si G'n'est pas un des sous graphes induits de G.

graphe partiel

Un graphe **partiel** de G est un graphe H ayant le même ensemble de sommets ($V(H) = V(G)$), et ayant comme ensemble d'arêtes, un sous-ensemble de $E(G) : E(H) \subset E(G)$.

Pour le graphe G illustré dans la figure 1.1.1, le sous graphe indut par $A = \{b, c, d, e\}$, et le graphe partiel de G définie par $U = \{ab, bc, cd, de\}$ sont illustrés dans la figure 1.1.2.

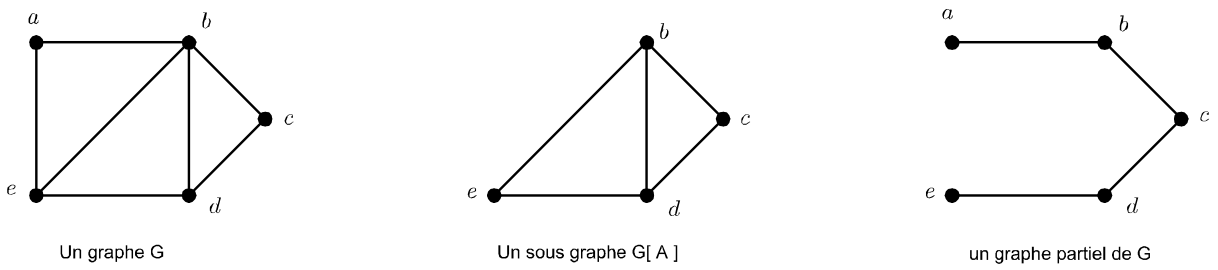


Figure 1.1.2 : Exemple d'un sous graphe et d'un graphe partiel

1.1.2 Voisinage et degré

Voisinage

- Soit $G = (V, E)$ un graphe. **Le voisinage ouvert** d'un sommet v de G est l'ensemble de tous les sommets adjacents à v. Cet ensemble est noté $N_G(v)$. **Le voisinage fermé** de v est l'ensemble $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. S'il n'y a pas risque de confusion, les voisinages ouvert et fermé d'un sommet v seront notés simplement par $N(v)$ et $N[v]$ respectivement.

- Soit S un sous-ensemble de V. L'ensemble $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v)$ est appelé voisinage ouvert de S, et l'ensemble $N_G[S] = N_G(S) \cup S$ est son voisinage fermé. De même, nous utiliserons les notations $N(S)$ et $N[S]$ au lieu de $N_G(S)$ et $N_G[S]$ respectivement.

- **Le voisinage privé** d'un sommet v par rapport à un ensemble S est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont pas d'autres voisins dans S. Cet ensemble est noté $pn\ [v,\ S]$ et donné par $pn\,[v, S] = \{u : N\,[v] \cap S = \{v\}\}$.

Degré

- Le **degré** d'un sommet $v \in V\,(G)$, noté $d_G\ (v)$, est égal au cardinal de son voisinage ouvert, est noté par
$$d_G(v) = |N_G(v)|\,.$$

- Un sommet de **degré nul** est dit un sommet isolé et un sommet de degré égal à un est dit **sommet pendant** ou **feuille**, l'ensemble des sommets pendants de G noté par $L\,(G)$.

- Un sommet adjacent à au moins un sommet pendant est appelé sommet support. L'ensenmble des **sommets supports** de G est noté par $S\,(G)$.

- Le **degré maximum** d'un graphe G, noté $\triangle\,(G)$, est le maximum des degrés de ses sommets, note par
$$\triangle\,(G) = max_{v \in V} d_G\,(v)\,.$$

- Le **degré minimum** de G, noté $\delta\,(G)$ est le minimum des degrés des sommets de G, note par
$$\delta\,(G) = min_{v \in V} d_G\,(v)\,.$$

S'il n'y a aucun risque de confusion, on peut écrire $d\,(v)$, $\triangle$ et δ pour désigner respectivement $d_G\,(v)$, $\triangle\,(G)$ et $\delta\,(G)$.

1.1.3 Concept de minimalité et maximalité, minumum et maximum

Soient $G = (V, E)$ un graphe et $\mathcal{P}$ une propriété. Un sous-ensemble A de V est dit **minimal** par rapport à la propriété $\mathcal{P}$ si aucun sous-ensemble strict de A ne vérifie cette

propriété. Aussi, A est dit **maximal** par rapport à la propriété $\mathcal{P}$, si aucun sous ensemble de V contenant A et différent de A ne vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

Nous dirons qu'un sous-ensemble B de V est **minimum** ou de taille minimale par rapport à la propriété $\mathcal{P}$ si aucun ensemble plus petit (pas nécessairement un sous-ensemble de B) ne vérifie cette propriété. D'une maniére similaire, nuos disons que B est **maximum** ou de taille maximale par rapport à $\mathcal{P}$, si aucun ensemble plus grand que B (sans nécessairement le contenir) ne vérifie la propriété.

1.2 Quelques graphes spécifiques

Nous rappelons les définitions de certains graphes particuliers.

1.2.1 Chaîne

Une **chaîne** P d'un graphe $G = (V, E)$ est une suite alternée de sommets et d'arêtes de la forme $(v_1, e_1, v_2, ..., e_k, v_k)$ où k est un entier positif ou nul, les v_i sont des sommets de G et les e_i sont des arêtes de G tels que pour chaque $i \in \{1, ..., k-1\}$, v_i et v_{i+1} sont extrémités de l'arête e_i et la langeur d'un chaîne est le nombre de ses arêtes ($k-1$ pour le cas de la chaîne P_n qui vient d'etre définie). Une chaîne peut être de longueur nulle, elle se réduit alors à une suite ne comprenant que le sommet v_1. Les sommets v_1, v_k sont appelés respectivement extrémité intiale et extrémité finale de la chaîne P. Lorsque le graphe est simple, une chaîne peut être définie simplement par la suite $(v_0, v_1, ..., v_k)$ de ses sommets.

Une chaîne est dit **simple** qui n'utilise pas deux fois la même arête (tout ses arêtes sont distinctes). Une chaîne **élémentaire** est un chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet (tous ses sommets sont distincts).

Notons que toute chaîne élementaire est simple.

Une **corde** est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne **minimale** induite par n sommets noteé par P_n, est une chaîne **elémentaire sans cordes**.

1.2.2 cycle

Un **cycle** C d'un graphe G est une chaîne tell que les extremités sont confondues. Un cycle **simple** est une chaîne simple que se referme. Un cycle **élémentaire** est une chaîne élémentaire tell que ses deux extrémités sont confondues(un cycle élémentaire C_n induit par n sommets est un cycle dont les sommets sont distincts). La longueur d'un cycle est le nombre de ses arêtes, un cycle est dit **pair** ou **inpair** suivant que sa longeur est pair ou inpair, ainsi la longueur du cycle $C = (v_1, v_2, ..., v_K)$ est k. Le graphe C_n designe un cycle sans corde à n sommets et le cycle C_n est le seul graphe 2-régulier (le degre de tous les sommet est egale à deux). La **maille** d'un graphe G, notée $g(G)$, est la longueur d'un plus petit cycle de G.



Figure 1.3.1 : Une chaîne P_5 et un cycle C_6

1.2.3 Graphe connexe

Le graphe $G = (V,\ E)$ est dit **connexe** si pour toute paire de ses sommets x, y de V il exist une chaîne reliant x à y. Une **composante connexe** d'un graphe est un sous-graphe maximal connexe.

Une arête $e \in E$ est dit **isthme** (arête d'articulation du graphe G) si le graphe $G' = (V, E - \{e\})$ possède plus de composantes connexes que G i.e.si G est connexe alors $G - e$ n'est pas connexe.

Un sommet $v \in V$ est dit sommet **d'articulation** si le graphe $G' = (V - \{v\}, E)$ a plus de composantes connexes que G i.e.si G est connexe alors $G - v$ n'est pas connexe.

Un graphe ne possédant qu'une seule composante connexe est simplement un graphe connexe. Un sommet isolé (de degré: $d(x) = 0$) constitue toujours une composante connexe à lui seule.

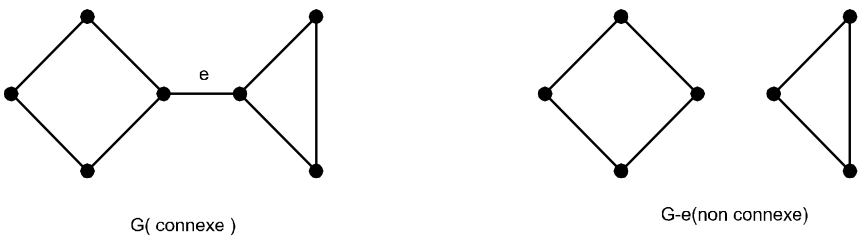


Figure 1.3.2 : Un graphe connexe et graphe non connexe

1.2.4 Graphe complet et graphe discret

- Le graphe **complet** d'ordre n, noté K_n, est un graphe simple dont tout les sommets sont adjacents et le graphe dans lequel tous les sommets sont de degré $n-1$. Un graphe complet à n sommets contient $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes. Ainsi, deux sommets quelconques d'un graphe complet K_n sont adjacents.

- Un graphe $G = (V, \emptyset)$ est un graphe **discret** d'ordre n si tous les sommets sont non adjacents. Un graphe discret est un graphe sans arêtes et noté S_n ou $\overline{K}_n$ et le graphe discret est un graphe 0-régulier.



Figure 1.3.3 : Exemple d'un graphe K_6 et un graphe discret S_6

1.2.5 Graphe complémentaire

Etant donné un graphe G d'ordre n, **le complémentaire** de G, noté $\overline{G}$, est le graphe dont l'ensemble de sommets est celui de G et telque deux sommets distincts de soient adjacents si et seulement s'ils ne sont pas adjacents dans G et ou bien $V(G) = V(\overline{G})$ et $E(\overline{G}) = \{uv : u, v \in V(G) \text{ et } uv \notin E(G)\}$.

La somme d'un graphe et son complementaire est le graphe complet (K_n).

Remarque 1.2.1 *Le complémentaire du graphe $\overline{G}$ est le graphe G.*

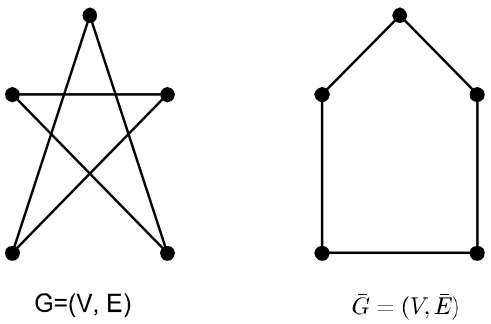


Figure 1.3.4 : Graphe et son complementaire

1.2.6 Graphe k-régulier

Un graphe G est dit **régulier** si tous ses sommets ont le même dégré. De plus, G est dit k-régulier si $d_G(v) = k$ pour tout sommet v de G. Ainsi, un graphe complet K_n est un graphe $(n-1)$-régulier. Les graphes 0-réguliers sont appelés des stables, et sont des graphes sans arête. Les cycles sans cordes C_n sont des graphes 2-réguliers. Les graphes 3-réguliers sont dits cubiques.

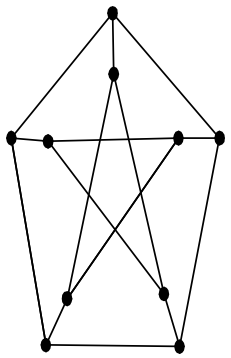


Figure 1.3.5 : Graphe de petersen

1.2.7 Graphe biparti et graphe biparti-complet

- Un graphe est dit **biparti** si l'on peut partitionner l'ensemble de ses sommets en deux sous-ensembles V_1 et V_2 tels que les sous-graphes $G[V_1]$ et $G[V_2]$ ne contiennent aucune arête donc chaque arête ait une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2. Un graphe biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycle impair.

- Un graphe biparti complet est un graphe biparti tel que pour toute paire de sommets $v \in V_1$ et $u \in V_2$, $uv \in E$. Si $|V_1| = r$ et $|V_2| = s$, alors le graphe biparti complet est noté $K_{r,s}$. Plus généralement, un graphe $G = (V, E)$ est dit k-parti ($k \geq 2$), si V peut être partitionné en k stables $V_1, V_2, ..., V_k$, il est dit multiparti-complet si, pour tout, $i \neq j$, tout sommet de V_i est adjacent à tout sommet de V_j.

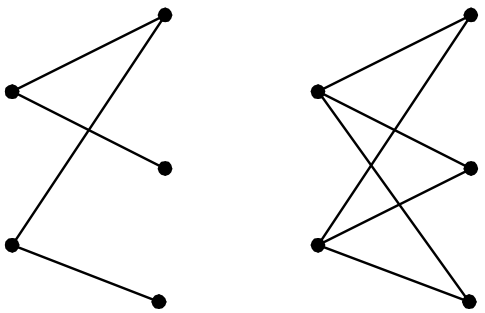


Figure 1.3.6 : Graphe bipartie et graphe bipartie complet

1.2.8 Arbre et forêt

- Un **arbre** est un graphe connexe et sans cycle, et on note par T. Un arbre possède exactement $n-1$ arêtes. Les sommets d'un arbre sont appelés **nœuds** de l'arbre. Les sommets pendants d'un arbre sont appelés **feuilles** (un sommet de degre 1).
- Une **forêt** est un graphe non-connexe où chaque composante connexe est un arbre.

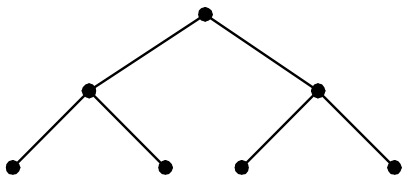


Figure 1.3.7 : Arbre

1.3 Invariants de graphes

Nous définissons ci-après quelques invariants de graphes.

1.3.1 Stable

Un **stable** S (appellé aussi ensemble indépendant) dans un graphe G est un sous ensemble de sommets de V deux-à-deux non-adjacents. Un stable de G est maximum s'il est de taille maximale dans G. Un stable S est dit maximal si pour tout sommet v de G, $S - \{v\}$ n'est pas un stable.

Le cardinal minimun (resp. Maximun) d'un ensemble stable maximal est le nombre de **stabilité inférieur** noté $i(G)$. (resp. Le nombre de **stabilité supérieur** noté $\beta(G)$).

1.3.2 Isomorphes

On dit que deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont **isomorphes** (isos=même ;morphe = forme, structure), s'il existe une bijection $f : V_1 \rightarrow V_2$ telle que pour tous u, $v \in V(G_1)$, on a $uv \in E(G_1)$ si et seulement si $f(u)f(v) \rightarrow E(G_2)$. S'il existe un isomorphisme entre G_1 et G_2, alors G_1 et G_2 sont dits isomorphes.

En termes plus simples, un isomorphisme est un changement de nom des sommets.

Un graphe est dit auto-complémentaire s'il est isomorphe à son complémentaire.

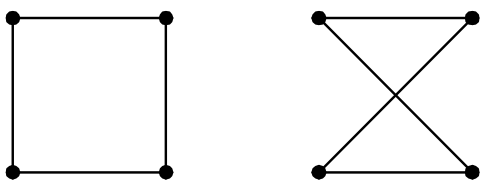


Figure 1.4.1 : Exemple de deux graphe isomorphe

1.3.3 Clique

Une **clique** de G noté K, est un ensemble de sommets adjacents deux-à-deux. La taille d'une clique est égale au nombre de ses sommets. Une clique de G est maximum si elle est de taille maximale dans G. La cardinalité d'une clique maximum est appelée nombre de clique, et notée $\omega(G)$.

Une clique est un sous graphe complet quelconques d'un graphe G. Une clique de p sommets est notée K_p.

1.4 Quelques opérations de graphes

Les definition sont données ci-aprés dans un graphe $G = (V, E)$.

L'ajout d'une arête

Soit $xy \in E\left(\overline{G}\right)$. **L'ajout de l'arête** xy au graphe G produit le graphe noté $G + xy$ résultant de l'ajout d'une arête entre x et y dans le graphe G.

La suppression d'une arête

Soit $e \in E(G)$. **La suppression de l'arête** e du graphe G produit le graphe noté $G-e$, obtenu suite à l'effacement de e (ses extrémités restent).

La suppression d'un sommet

Soit $v \in V(G)$. **La supperession de sommet** v du graphe G produit le graphe noté $G-v$, obtenu suite à l'effacement de v et de toutes les arêtes de G incidentes à v.

1.5 Notions de criticité et de stabilité

Définitions d'un graphe critique et stable par rapport à un paramètre μ quelconque .

- Un graphe G est dit critique si μ change pour toute arête ajoutée.
- Un graphe G est dit stable si μ reste inchangé pour toute arête ajoutée.
- Un graphe G est dit critique si μ change pour toute arête supprimée.
- Un graphe G est dit stable si μ reste inchangé pour toute arête supprimée.

Chapitre 2

Le nombre de k-indépendance dans certains graphes

Ce chapitre présente quelques résultats existant sur le nombre de k-indépendance β_k (quelques propriétés, quelques bornes sur β_k, et des valeurs exactes de β_k pour certaines classes de graphes).

2.1 L'indépendance

Un sous ensemble de sommets $S \subseteq V$ d'un graphe G est appelé **indépendant** (ou **stable**) si ses sommets sont deux à deux non adjacents, ou encore si $\Delta(G[S]) = 0$.

Un **ensemble indépendan**t S d'un graphe G est maximale si pour tout sommet v dans $V - S$, l'ensemble $S \cup \{v\}$ n'est pas indépendant.

On donne ci-dessous les condition dans les quelles un ensemble indépendant d'un graphe G est maximal.

Soit S un ensemble indépendant d'un graphe G. Alors S est maximal si et seulement si pour tout sommet $v \in V - S$, v est adjacent à au moins un sommet de S.

La cardinalité maximum (resp. Minimum) des ensembles indépendants maximaux S est appelée nombre d'indépendance supérieur (resp. Nombre d'indépendance inférieur) de G noté par $\beta(G)$ (resp. $i(G)$).

Pour un graphe bibarti $K_{2,3}$, représente dans la Figure 2.1.1. L'ensemble indépendant $\{c, d, e\}$ est l'ensemble indépendant maximal le plus large, il s'ensuit que $\beta(K_{2,3}) = 3$ et $\{a, b\}$ est l'ensemble indépendant maximal le plus petit, donc $i(K_{2,3}) = 2$.

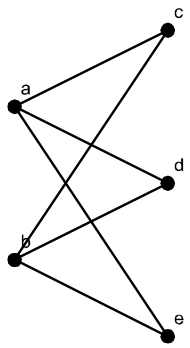


Figure 2.1.1 : $\beta(K_{2,3}) = 3$ et $i(K_{2,3}) = 2$.

2.2 Généralisation sur la k-indépendance

En 1984, lors d'une conférence à Kalamazoo, Fink et Jacobson ont introduit la généralisation de l'indépendance. Le papier [16],[17] présente quelques résultats sur $\beta_k(G)$.

Pour un graphe $G = (V, E)$, on donne les définitions suivantes.

Définition 2.2.1 *Soit un graphe G et k un entier positive ($k \geq 1$). Un sous ensemble S de $V(G)$ est un k-indépendant si le sous-graphe induit par les sommets de S à degré maximum au plus $k-1$, ou encore $\Delta(G[S]) \leq k-1$.*

Un ensemble k-indépendant S de G est maximal si pour tout sommet v dans $V - S$, $S \cup \{v\}$ n'est pas k-indépendants.

Définition 2.2.2 *La cardinalité maximum (resp. Munumum) d'un ensemble k-indépendant de G est appelée le nombre de k-indépendant est noté par $\beta_k(G)$ (resp. $i_k(G)$). Un ensemble 2-indépendant de G de cardinal maximum est noté $\beta_2(G)$-ensemble.*

Théorème 2.2.1 *[10] Soit S un ensemble k-indépendant d'un graphe G. Alors S est maximal si et seulement si pour chaque sommet $v \in V - S$ satisfait une condition suivante:*

- v est adjacent à au moins k sommets en S. Ou
- v est adjacent à un sommet u $\in S$ qui à exactement $k-1$ voisin en S.

2.2.1 Proprietée general de k-indépendant

1- Tout sous-ensemble d'un k-indépendant est k-indépendant.

2- Tout ensemble de k sommets est k-indépendant d'ou $i_k(G) \geq k$ pour tout graphe G.

3- Tout ensemble k-indépendant est $(k+1)$-indépendant et donc $\beta_k(G) \leq \beta_{k+1}(G)$ pour tout graphe G et tout entier $k \geq 1$. De plus V est le seul $(\Delta+1)$-indépendant maximal mais n'est pas un Δ-indépendant. On en déduit que pour tout graphe G, $i_{\Delta+1}(G) = n$ et

$$\beta(G) = \beta_1(G) \leq \beta_2(G) \leq ... \leq \beta_\Delta(G) < \beta_{\Delta+1}(G) = n.$$

Pour $k = 1$ on retrouve les définitions de l'indépendance usuelles. Donc pour tout graphe G, $i_1(G) = i(G)$, $\beta_1(G) = \beta(G)$. Par définition $i_k(G) \leq \beta_k(G)$ pour tout graphe G.

2.3 Bornes sur β_k

En général, la détermination de la valeur exacte de nombre de k-indépendence est un problème $\mathcal{NP}$-dure pour un graphe quelconque. Pour cela, les chercheurs ont essayé d'encadré ce paramètre par des bornes .

Le premier minorant obtenu par Favaron [13] est donné par le Théorème suivant:

Théorème 2.3.1 *[13] Si G est un graphe d'ordre n sans sommet isolé, alors pour tout entier $k \geq 1$ on a:*

$$\beta_k(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{k}{1 + kd(v)}.$$

Dans [14], O. Favaron ont présenté une borne supérieure de $\beta_k(G)$.

Théorème 2.3.2 *[14] Pour tout graphe G et tout entier $k \leq \delta$, on a:*

$$\beta_k(G) \leq \frac{n\Delta}{\Delta + \delta - k + 1}.$$

Dans [18], G. Hopkins et W. Staton ont présenté une borne inferieures pour $\beta_k(G)$.

Corollaire 2.3.1 *[18] Pour tout graphe G d'ordre n, et Δ degre maximum et $k \geq 1$ un entier, donc*

$$\beta_k(G) \geq \frac{n}{1 + \lfloor \frac{\Delta}{k} \rfloor}.$$

Les auteures de [6] ont donné les résultat suivant:

Corollaire 2.3.2 *[6] Pour tout graphe G d'ordre n et Δ degre maximum, $\Delta(G) \geq 1$*

$$\beta_{\Delta}(G) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil.$$

Théorème 2.3.3 *[6] Pour tout graphe G d'ordre n et Δ degre maximum, $\Delta(G) \geq 1$*

$$\beta_{\Delta}(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil.$$

Si et seulement si $G \in \{P_2, P_3, C_3, C_4, C_5, C_7\}$.

Théorème 2.3.4 *[4] Soit G un graphe d'ordre n et $k \leq min\{\Delta(G), \Delta(\overline{G})\}$, donc*

$$\beta_k(G) + \beta_k(\overline{G}) \leq n + 2k - 1.$$

et

$$\beta_k(G)\beta_k(\overline{G}) \leq (n + 2k - 1)^2/4.$$

Danc [3] , on donné d'autre résultat sur le nombre de k-indépendance $\beta_k(G)$.

Théorème 2.3.5 *[3] Pour tout graphe G et touts entiers j, k avec $1 \leq \ j \leq k$, on a:*

$$\beta_{k+1}(G) \leq \beta_j(G) + \beta_{k-j+1}(G).$$

Corollaire 2.3.3 *[3] Pour tout graphe G et touts entiers $k \geq 1$ on a:*

(a) $\beta_{k+1}(G) \leq \beta_k(G) + \beta(G)$.

(b) $\beta_{k+1}(G) \leq 2\beta_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}(G)$.

(c) $\beta_{k+1}(G) \leq (k+1)\beta(G)$.

.

Théorème 2.3.6 *[3] Pour tout graphe G et tout entier $k \geq 1$,*

$$\beta_k(G) \leq k\beta(G).$$

Maintenant, nous accorrdons une condition nécessaire à l'egalité

$$\beta_k(G) = \lceil \frac{k}{j} \rceil \beta_j(G).$$

Si $j = k - 1$.

D'autre résultat dans [6] est donnée par Bouchou et Blidia .

Théorème 2.3.7 *[6] Soit un graphe G d'ordre n et Δ degre maximum et j, k un entier* $1 \leq j \leq k \leq \Delta(G) + 1$, *donc*

$$\beta_k(G) \leq \lceil \frac{k}{j} \rceil \beta_j(G).$$

Théorème 2.3.8 *[6] Pour tout graphe G d'ordre n et un entier $k \geq 2$, donc*

$$\beta_k(G) \leq 2\beta_{k-1}(G).$$

2.4 Le nombre de k-indépendance des certains graphes particuliers

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats exactes de β_k pour certains graphe particuliers.

Les résultats suivants etablissent la conjecteure de Fink et Jacobson [16],[17];

Observation 2.5.1 Soit une chaîne P_n . Alors

$$\beta(P_n) < \beta_2(P_n) < \beta_3(P_n) = n.$$

Observation 2.5.2 Soit un cycle C_n diférent de C_4. Alors

$$\beta(C_n) < \beta_2(C_n) < \beta_3(C_n) = n.$$

Observation 2.5.3 Soit K_n une clique d'ordre n. Alors $\beta_k(G) = k$ pour $1 \leq k \leq n$.

Et par consequent

$\beta(K_n) < \beta_2(K_n) < \beta_3(K_n) < ... < \beta_n(K_n) = n.$

Observation 2.5.4 Pour les chaînes P_n et les cycles C_n,

$$\beta(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil \quad \text{et} \quad \beta(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

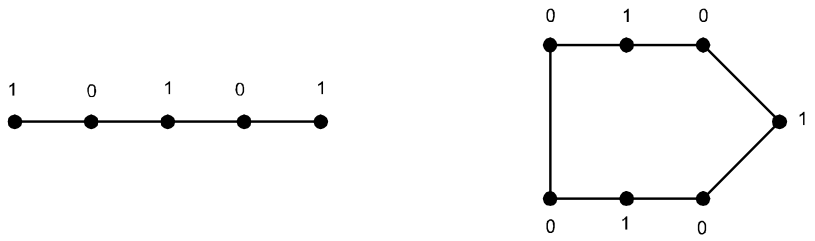


Figure 2.4.1 : $\beta(P_5) = 3$ et $\beta(C_7) = 3$.

Lemme 2.4.1 *[9] Soit $n \equiv r$ (mod 3), ou $r \in \{0, 1, 2\}$. Alors*

1) $\beta_2(P_n) = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + r$.

2) $\beta_2(C_n) = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$ si $r = 2$ et $\beta_2(C_n) = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ si $r \neq 2$.

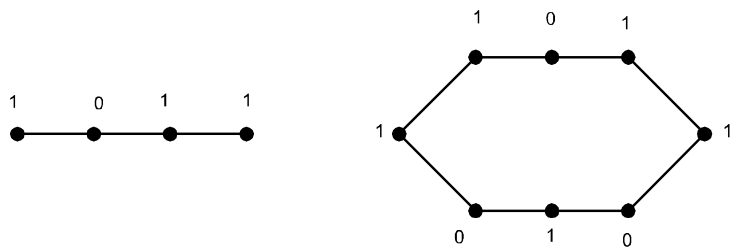


Figure 2.4.2 : $\beta_2(P_4) = 3$ et $\beta_2(C_8) = 5$.

2.5 La criticité du nombre de k-indépendance dans un graphe

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats importants qui seront utiles pour le dernier chapitre.

M.Chellali et al.[9] ont donné des bornes supérieures et inferieures pour la criticité du nombre de k-indépendance dans un graphe

Observation 2.6.1 [9] Soit G un graphe et k un entier positive. Alors

a) Pour tout sommet $v \in V(G)$, $\beta_k(G) \geq \beta_k(G-v)$.

b) Pour tout arêt $e \in E(G)$, $\beta_k(G-e) \geq \beta_k(G)$.

Observation 2.6.2 [9] Soit G un graphe, si $uv \in E(G)$ et $\beta_k(G-uv) > \beta_k(G)$ alors u et $v \in \beta_k(G-uv)$-ensemble.

Notre prochain résultat montre que β_k est change suite à la modification d'un graphe et le nombre de k-indépendance est change d'au plus 1.

Proposition 2.5.1 *[9] Soit G un graphe et $k \geq 1$ un entier. Alors*

a) Pour tout $v \in V(G)$, $\beta_k(G) - 1 \leq \beta_k(G-v) \leq \beta_k(G)$.

b) Pour tout $e \in E(G)$, $\beta_k(G) \leq \beta_k(G-e) \leq \beta_k(G) - 1$.

c) Pour tout $e \in E(\overline{G})$, $\beta_k(G) - 1 \leq \beta_k(G+e) \leq \beta_k(G)$.

Soit $k \geq 1$ un nombre entier, d'aprés l'observation 2.6.1 nous definissons un graphe G comme étant:

- Un β_k-sommet-critique si pour tout $v \in V(G)$, $\beta_k(G-v) < \beta_k(G)$. Dans la proposition 2.6.1-a, un graphe G est dit β_k-sommet-critique, $\beta_k(G-v) = \beta_k(G) - 1$ pour chaque sommet $v \in V(G)$.

- Un β_k^--arête-enlevé-critique si pour tout $e \in E(G)$, $\beta_k(G) < \beta_k(G-e)$. Dans la proposition 2.6.1-*b*, un graphe G est dit β_k^--arête-enlevé-critique, $\beta_k(G-e) = \beta_k(G)+1$ pour chaque aréte $e \in E(G)$. Aussi si G est un β_k^--arête-enlevé-critique de l'ordre n puis clairement $\beta_k(G) < n$.

- Un β_k^+-arête-critique si pour tout $e \in E(\overline{G})$, $\beta_k(G+e) < \beta_k(G)$. Dans la proposition 2.6.1-*c*, un graphe G est dit β_k^+-arête-critique, $\beta_k(G+e) = \beta_k(G)-1$ pour chaque arête $e \in E(\overline{G})$.

2.5.1 Graphes β_k^+-arête-critiques

Dans cette section, on cité quelque résultats sur β_k^+-arête-critique

Théorème 2.5.1 *[9] Un graphe G est β_k^+-aréte-critique si et seulement si pour pair de sommets non-adjacent u et v sont dans chaque $\beta_k(G)-$ensemble S et au moins l'un des u et v est un sommet complet dans S.*

Le corollaire suivant est une conséquence de la théorème 2.6.1.

Corollaire 2.5.1 *[9] Si un graphe G est un β_k^+-arête-critique, alors pour chaque $\beta_k(G)-$ensemble S, le sous-graphe induit par $V-S$ est complet et pour chaque sommet de $V-S$ est adjacent à tous les sommets de S.*

2.5.2 Graphes β_k^--arête-critiques

Dans cette section, on cité quelque résultats sur β_k^--arête-critique

Théorème 2.5.2 *[9] Un graphe G est dit $\beta_k^-(G)$-arête-critique si et seulement si pour chaque arête $uv \in E(G)$ au moins l'une des conditions suivantes est vraie:*

1) Il existe un $\beta_k(G)$-ensemble S, où $u \in S$ et $v \notin S$ et v a exactement k voisins dans S et aucun sommet dans $N(v) \cap (S - \{u\})$, est complet

2) Il existe un $\beta_k(G)$-ensemble S, où u, $v \in S$, u est un sommet complet, $d(u) \geq k$ et il existe un sommet $x \in N(u) \cap (V-S)$ tel que x n'est pas k-dominé par S et u est le sommet complet unique de S adjacent à x.

Chapitre 3

L'indice de criticité du nombre de 2-indépendance dans certains graphes

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'indice de criticité du nombre de 2-indépendance dans certains graphes. Dans la premiere partire de ce chapitre on a determiné les valeur exactes de l'indice de criticité de la suppresion d'une arête de la 2-indépendance pour les chaîne et les cycles. Dans la deuxiéme partier on aussi déterminé l'indice de criticité de l'ajout d'une arête de la 2-indépendance pour les chaînes et les cycles.

3.1 Définitions et notations

3.1.1 2-indépendance

Définition 3.1.1 *Soit un graphe G et k un entier positive $(k = 2)$. Un sous ensemble S de $V(G)$ est un 2-indépendant si le sous-graphe induit par les sommets de S à degré maximum au plus 1, ou encore $\Delta(G[S]) \leq 1$. La cardinalité maximum d'un ensemble 2-indépendant de G est appelée le nombre de 2-indépendant est noté par $\beta_2(G)$. Un ensemble 2-indépendant de G de cardinal maximum est noté $\beta_2(G)$-ensemble.*

Remarque 3.1.1 *Un ensemble 2-independant S d'un graphe G contient tout les sommets isolés et les chaînes d'ordre 2.*

3.1.2 L'indice de criticité

Définition 3.1.2 *Pour un graphe G, nous définissons l'indice de criticité d'une arête $e \in E(\overline{G})$ comme $ci^+_{\beta_2}(e) = \beta_2(G) - \beta_2(G+e)$, et l'indice de criticité dans un graphe G est définie par*

$$ci^+_{\beta_2}(G) = \left(\sum_{i=1}^{\overline{m}} ci^+_{\beta_2}(e)\right) \diagup m(\overline{G}) \text{ et } \overline{G} \text{ le complémentaire du graphe } G.$$

Définition 3.1.3 *Pour un graphe G, nous définissons l'indice de criticité d'une arête $e \in E(G)$ comme $ci^-_{\beta_2}(e) = \beta_2(G) - \beta_2(G-e)$, et l'indice de criticité dans un graphe G est définie par*

$$ci^-_{\beta_2}(G) = \left(\sum_{i=1}^{m} ci^-_{\beta_2}(e))\right) \diagup m(G).$$

Remarque 3.1.2 *Nous rappelons quelques résultats*

1) Pour les cycles C_n.On a

$$\beta_2(C_n) = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{2n}{3} & \text{Si } n \equiv 0 \pmod 3 \\ \frac{2n-2}{3} & \text{Si } n \equiv 1 \pmod 3 \\ \frac{2n-1}{3} & \text{Si } n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

2) Pour les chaînes P_n.On a

$$\beta_2(P_n) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil = \begin{cases} \frac{2n}{3} & \text{Si } n \equiv 0 \pmod 3 \\ \frac{2n+1}{3} & \text{Si } n \equiv 1 \pmod 3 \\ \frac{2n+2}{3} & \text{Si } n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

3.2 L'indice de criticité de la suppression d'une arête de la 2-indépendance

Dans cette section, nous étudions l'indice de criticité de la suppression d'une arête de la 2-indépendance pour les cycles et les chaînes.

3.2.1 L'indice de criticité de la suppression d'une arête de la 2-indépendance dans un cycle C_n

.Observation 3.2.1

Si C_n est un cycle d'ordre n. Alors pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, $\beta_2(C_n - v_iv_{i+1}) = \beta_2(P_n)$.

A partir de cette observation, on déduire cette résultat.

Corollaire 3.2.1 *Pour tout cycle C_n et $n \geq 3$. Alors*

$$\beta_2(C_n - v_iv_{i+1}) = \begin{cases} \lceil \frac{2n}{3} \rceil \text{ si } n = 0(mod\ 3) \\ \lceil \frac{2n+1}{3} \rceil \text{ si } n = 1(mod\ 3) \\ \lceil \frac{2n+2}{3} \rceil \text{ si } n = 2(mod\ 3). \end{cases}$$

Théorème 3.2.1 *Pour tout cycle C_n.*

$$ci^-_{\beta_2}(C_n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0(mod\ 3) \\ -1 \qquad \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. D'apre le corollaire 3.2.1. On distingue les trois cas suivants:

1) Si $n \equiv 0(mod\ 3)$, on a

$ci^-_{\beta_2}(v_iv_{i+1}) = \beta_2(C_n) - \beta_2(C_n - v_iv_{i+1}) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil - \lceil \frac{2n}{3} \rceil = 0.$

2) Si $n \equiv 1(mod\ 3)$, on a

$ci^-_{\beta_2}(v_iv_{i+1}) = \beta_2(C_n) - \beta_2(C_n - v_iv_{i+1}) = \frac{2n-2}{3} - \frac{2n+1}{3} = -1.$

3) Si $n \equiv 2(mod\ 3)$, on a

$ci^-_{\beta_2}(v_iv_{i+1}) = \beta_2(P_n) - \beta_2(P_n - v_iv_{i+1}) = \frac{2n-1}{3} - \frac{2n+2}{3} = -1.$

Alors $ci^-_{\beta_2}(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0(mod\ 3) \\ -1 \qquad \text{sinon.} \end{cases}$ ■

3.2.2 L'indice de criticité de la suppression d'une arête de la 2-indépendance dans une chaîne P_n

On determine la valeur de l'indice de criticité dans une chaîne P_n. Soit P_n une chaîne de sommets $v_1, v_2, ..., v_n$. La suppression de l'arête v_iv_{i+1} du chaîne P_n produit les deux chaîne P_i et P_{n-i}

Observation 3.2.2

Si P_n est une chaîne d'ordre n. Alors pour tout i tel que $1 \leq i \leq n-1$,

$\beta_2(P_n - v_iv_{i+1}) = \beta_2(P_i) + \beta_2(P_{n-i}) = \lceil 2i/3 \rceil + \lceil 2(n-i)/3 \rceil$.

A partir de cette observation, on déduire cette résultat.

Corollaire 3.2.2 *Pour chaque chaîne P_n non triviale et $1 \leq i \leq n-1$. On a*

$$\beta_2(P_n - v_iv_{i+1}) = \begin{cases} \lceil \frac{2n}{3} \rceil & \text{Si } i = 0(mod\ 3) \\ \lceil \frac{2n+1}{3} \rceil & \text{Si } i = 1(mod\ 3) \\ \lceil \frac{2n+2}{3} \rceil & \text{Si } i = 2(mod\ 3). \end{cases}$$

Théorème 3.2.2 *Pour tout chaîne P_n non trivial,*

$$ci^-_{\beta_2}(P_n) = \begin{cases} \frac{-2n}{3(n-1)} & \text{Si } n = 0(mod\ 3) \\ \frac{-\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}{(n-1)} & \text{Si } n = 1(mod\ 3) \\ 0 & \text{Si } n = 2(mod\ 3). \end{cases}$$

Preuve. D'apre le corollaire 3.2.2. On distingue les trois cas suivants:

1) Si $i \equiv 0(mod\ 3)$, on à

$$\begin{aligned} ci^-_{\beta_2}(v_iv_{i+1}) &= \beta_2(P_n) - \beta_2(P_n - v_iv_{i+1}) \\ &= \lceil \tfrac{2n}{3} \rceil - \lceil \tfrac{2n}{3} \rceil \\ &= 0. \end{aligned}$$

2) Si $i \equiv 1(mod\ 3)$, on à

$$\begin{aligned} ci^-_{\beta_2}(v_iv_{i+1}) &= \beta_2(P_n) - \beta_2(P_n - v_iv_{i+1}) \\ &= \lceil \tfrac{2n}{3} \rceil - \lceil \tfrac{2n+1}{3} \rceil \\ &= \begin{cases} -1 \text{ Si } n = 0(\text{mod } 3) \\ 0 \text{ Si } n = 1(\text{mod } 3) \\ 0 \text{ Si } n = 2(\text{mod } 3). \end{cases} \end{aligned}$$

3) Si $i \equiv 2(mod\ 3)$, on à

$$\begin{aligned} ci^-_{\beta_2}(v_iv_{i+1}) &= \beta_2(P_n) - \beta_2(P_n - v_iv_{i+1}) \\ &= \lceil \tfrac{2n}{3} \rceil - \lceil \tfrac{2n+2}{3} \rceil \\ &= \begin{cases} -1 \text{ Si } n = 0(\text{mod } 3) \\ -1 \text{ Si } n = 1(\text{mod } 3) \\ 0 \text{ Si } n = 2(\text{mod } 3). \end{cases} \end{aligned}$$

Maintenant, on établie les partition pour $ci^-_{\beta_2}(v_iv_{i+1}); 1 \leq i \leq n-1$.

$$ci^-_{\beta_2}(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} -1, & -1, & 0, & ..., & -1, & -1, & & & \text{pour } n \equiv 0 \pmod 3 \\ 0, & -1, & 0, & ..., & 0, & -1, & 0, & & \text{pour } n = 1 \pmod 3 \\ 0, & 0, & 0, & ..., & 0, & 0, & 0, & 0, & \text{pour } n = 2 \pmod 3 \end{cases}$$

Cela implique que si $n \equiv 0 \pmod 3$, alors $ci^-_{\beta_2}(P_n) = -2n/3(n-1)$. Si $n \equiv 1 \pmod 3$, alors $ci^-_{\beta_2}(P_n) = -\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor /(n-1)$. Si $n \equiv 2 \pmod 3$, alors $ci^-_{\beta_2}(P_n) = 0$. ■

3.3 L'indice de criticité de l'ajout d'une arête de la 2-indépendance

Dans cette section, nous déterminons l'indice de criticité de l'ajout d'une arête de la 2-indépendance pour les cycles et les chaînes.

3.3.1 L'indice de criticité de l'ajout d'une arête de la 2-indépendance dans un cycle C_n

Nous donnons une valeur exacte de l'indice de criticité de la β_2 de $G = C_n + xy$ (G est obtenu par l'ajout d'une arête à un cycle C_n). Alors G est formé par deux chaîne P_p et P_q (avec $n = p + q + 2$). Donc $V(C_n) = (V(P_p) \cup V(P_q) \cup \{x, y\})$ et $V(P_p) = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ et $V(P_q) = \{u_1, u_2, .., u_q\}$.

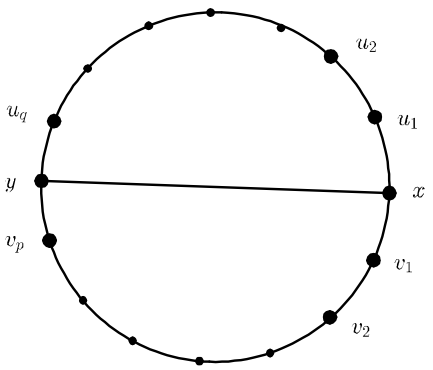


Figure 3.3.1: Un graphe $G = C_n + xy$

Observation 3.3.1

Soit la chaîne P_t définie par la suite de ses sommets $x_1, x_2, ..., x_t$, et soit S un β_2-ensemble de P_t, alors on peut verifier facilement que:

Si $t \equiv 0(mod\ 3)$, alors $S = \{x_1, x_2, x_4, x_5, ..., x_{3i+1}, x_{3i+2}, ..., x_{t-1}\}$ j'ai on prendre $x_t \notin S$.

Si $t \equiv 1(mod\ 3)$, alors $S = \{x_1, x_2, ..., x_{3i+1}, x_{3i+2}, ..., x_{t-2}, x_t\}$.

Si $t \equiv 2(mod\ 3)$, alors $S = \{x_1, x_2, ..., x_{3i+1}, x_{3i+2}, ..., x_{t-1}, x_t\}$.

Théorème 3.3.1 *Pour tout graphe C_n avec $n \geq 4$.*

$ci^+_{\beta_2}(C_n) = 0$

Preuve. Soit $G = C_n + xy$ avec $n = p + q + 2 \geq 4$. $\beta_2(G) \leq \beta_2(C_n)$ et pour montre que $\beta_2(G) = \beta_2(C_n)$ il suffit de montrer que $\beta_2(G) \geq \beta_2(C_n)$.

On distingue les cas suivants:

cas 1. Si $p, q \equiv 0(mod\ 3)$.

Soit S_1un β_2-ensemble de $P_p = v_1, v_2, ..., v_p$, S_2 un β_2-ensemble de $P_q = u_1, u_2, ..., u_q$, et S un β_2-ensemble de G

D'aprés l'observation 3.3.1 on a:

$v_p \notin S_1$ et $u_q \notin S_2$ alors $S = S_1 \cup S_2 \cup \{y\}$ donc $|S| \geq |S_1| + |S_2| + 1$

$$\begin{aligned}
\beta_2(G) &\geq \beta_2(P_q) + \beta_2(P_p) + 1 \\
&\geq \lceil \frac{2q}{3} \rceil + \lceil \frac{2p}{3} \rceil + 1 \\
&= \frac{2q}{3} + \frac{2p}{3} + 1 \\
&= \frac{2(q\ +p) + 3}{3} \\
&= \frac{2(n-2)\ + 3}{3} \\
&= .\frac{2n-1}{3} = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor
\end{aligned}$$

Alors $\beta_2(C_n + e) = \beta_2(C_n)$

On fait le meme raisonnement pour les cas suivants

cas 2. Si $p, q \equiv 1(mod\ 3)$. Alors

$v_p \in S_1$ et $u_q \in S_2$

$$\begin{aligned}
\beta_2(G) &\geq \beta_2(P_q) + \beta_2(P_p) \\
&= \lceil \frac{2q}{3} \rceil + \lceil \frac{2p}{3} \rceil \\
&= \frac{2q+1}{3} + \frac{2p+1}{3} \\
&= \frac{2(q\ +p)+2}{3} \\
&= \frac{2(n-2)\ +2}{3} \\
&= .\frac{2n-2}{3} = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor
\end{aligned}$$

Alors $\beta_2(C_n + e) = \beta_2(C_n)$

cas 3. Si $p, q \equiv 2(mod\ 3)$. Alors

$$\begin{aligned}
\beta_2(G) &\geq \beta_2(P_q) + \beta_2(P_p) \\
&= \lceil \frac{2q}{3} \rceil + \lceil \frac{2p}{3} \rceil \\
&= \frac{2q+2}{3} + \frac{2p+2}{3} \\
&= \frac{2(q+p)+4}{3} \\
&= \frac{2(n-2)+4}{3} \\
&= \frac{2n}{3} = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor .
\end{aligned}$$

Alors $\beta_2(C_n + e) = \beta_2(C_n)$

cas 4. Si $p \equiv 0(mod\ 3)$ et $q \equiv 1(mod\ 3)$. Alors

$$\begin{aligned}
\beta_2(G) &\geq \beta_2(P_q) + \beta_2(P_p) \\
&= \lceil \frac{2q}{3} \rceil + \lceil \frac{2p}{3} \rceil + 1 \\
&= \frac{2q+1}{3} + \frac{2p}{3} + 1 \\
&= \frac{2(q+p)+4}{3} \\
&= \frac{2(n-2)+4}{3} \\
&= \frac{2n}{3} = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor
\end{aligned}$$

Alors $\beta_2(C_n + e) = \beta_2(C_n)$

De la même maniére on trouve $\beta_2(G)$ pour $p \equiv 1(mod\ 3)$ et $q \equiv 0(mod\ 3)$.

cas 5. Si $p \equiv 0(mod\ 3)$ et $q \equiv 2(mod\ 3)$. Alors

$$\begin{aligned}
\beta_2(G) &\geq \beta_2(P_q) + \beta_2(P_p) \\
&= \lceil \frac{2q}{3} \rceil + \lceil \frac{2p}{3} \rceil \\
&= \frac{2q+2}{3} + \frac{2p}{3} \\
&= \frac{2(q+p)+2}{3} \\
&= \frac{2(n-2)+2}{3} \\
&= \frac{2n-2}{3} = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor .
\end{aligned}$$

Alors $\beta_2(C_n + e) = \beta_2(C_n)$

De la même maniére on trouve $\beta_2(G)$ pour $p \equiv 2(mod\ 3)$ et $q \equiv 0(mod\ 3)$

cas 6. Si $p \equiv 1(mod\ 3)$ et $q \equiv 2(mod\ 3)$. Alors

$$\begin{aligned}
\beta_2(G) &\geq \beta_2(P_q) + \beta_2(P_p) \\
&= \lceil \frac{2q}{3} \rceil + \lceil \frac{2p}{3} \rceil \\
&= \frac{2q+2}{3} + \frac{2p+1}{3} \\
&= \frac{2(q+p)+3}{3} \\
&= \frac{2(n-2)+3}{3} \\
&= \frac{2n-1}{3} = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor
\end{aligned}$$

Alors $\beta_2(C_n + e) = \beta_2(C_n)$

De la même maniére on trouve $\beta_2(G)$ pour $p \equiv 2(mod\ 3)$ et $q \equiv 1(mod\ 3)$.

Dans tous les cas on a trouvé $\beta_2(C_n + e) = \beta_2(C_n)$, cela implique que $ci^+_{\beta_2} = 0$. ■

3.3.2 L'indice de criticité de l'ajout d'une arête de la 2-indépendance dans une chaîne $\mathbf{P}_n$

Dans cette section, on donné des valeurs exacte de l'indice de criticité d'une chaîne P_n. Le chaîne $P_n + e$ est formé par deux chaîne P_p et P_q et un cycle C_t (avec $n = p + q + t$).

Afin de déterminer l'indice de criticité d'une chaîne, nous décrivons d'abord deux procédures:

Procédure A

Soit une chaîne $P_n = (w_1, ..., w_n), n \geq 3$. Soit L_1 un cycle obtenu à partire d'une chaîne P_n en reliant par une deux sommet w_i et w_j non adjacent, ou $i < j$. On suppose que L_1 est un cycle de longeure ≥ 6. Au plus L_1 a une chaîne P des sommtes $v_1, u_1, u_2, u_3, v_2 = w_j$, la suppression de sommtes u_1, u_2 et u_3 du graphe L_1 produit un graphe noté L_2 et en joignant le sommet v_1 à v_2. Nous répétons ce procédure jusqu'à l'obtention d'un graphe L_k ayant un cycle d'ordre 3, 4 ou 5.

Observation 3.3.1

$\beta_2(L_i) = \beta_2(L_{i+1}) + 2$

Preuve. 1) Supposons que $S^{'}$ un β_2-ensemble de L_{i+1}. On distingue les cas suivants:

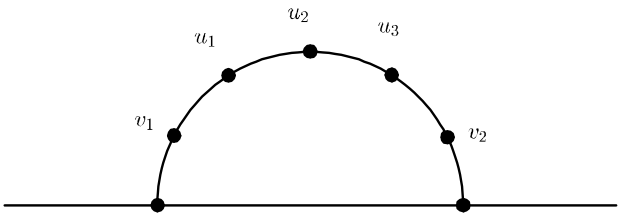
Cas 1: $v_1 \notin S^{'}$ ou $v_2 \notin S^{'}$, alors $\exists\ x, y \in \{u_1, u_2, u_3\}$ tels que $x, y \in S^{'}$. Alors

$S = S^{'} \cup \{x, y\}$ est un 2-indépendant de L_i donc

$\beta_2(L_i) \geq |S| = \left|S^{'}\right| + 2 = \beta_2(L_{i+1}) + 2.$

Cas 2: $v_1 \in S^{'}$, $v_2 \in S'$, jai on prendre $S = S^{'} \cup \{u_1, u_3\}$

$\beta_2(L_i) \geq |S| = \left|S^{'}\right| + 2 = \beta_2(L_{i+1}) + 2.$



On va montrer le sens inverse

2) Supposons que S un β_2-ensemble de L_i. On distingue les cas suivants:

Cas 1: $v_1 \notin S$ ou $v_2 \notin S$, alors $\exists\ x, y \in \{u_1, u_2, u_3\}$ tels que $x, y \in S$. Alors

$S' = S - \{x, y\}$ est un 2-indépendant de L_{i+1} donc

$\beta_2(L_{i+1}) \geq \left|S'\right| = |S| - 2 = \beta_2(L_i) - 2.$

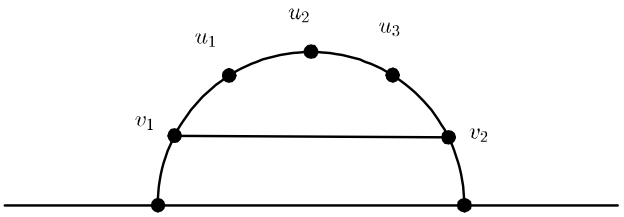
Cas 2: v_1, $v_2 \in S$. On distingue deux sous-cas

Cas 2.1: On suppose qu'il existe un sommet $z \notin \{u_1, u_2, u_3\}$ tel que $z \in S$ et z un voisin de l'un des deux sommets v_1 ou v_2. Alors $\exists\ x \in \{u_1, u_2, u_3\}$ tels que $x \in S$ et aprés la suppression de la chaîne u_1, u_2, u_3 et l'ajout d'une arête entre v_1 et v_2, alors pour garder la proprité de 2-indépendant, donc forcement $S^{'} = S - \{x\} - \{t\}$, tels que t $\in \{v_1, v_2\}$ est un 2-indépendant

$\beta_2(L_{i+1}) \geq \left|S'\right| = |S| - 2 = \beta_2(L_i) - 2.$

Cas 2.2: On suppose que les voisins de v_1 et v_2 qui $\notin \{u_1, u_2, u_3\}$ et à l'ensemble S. Alors $S' = S - \{u_1, u_3\}$ est un 2-indépendant donc

$\beta_2(L_{i+1}) \geq \left|S'\right| = |S| - 2 = \beta_2(L_i) - 2.$



■

Procédure B

Soit P_n $(n \geq 4)$ une chaîne de sommet v, u_1, u_2, u_3 tel que $d_G(v) \geq 2$, $d_G(u_1) = d_G(u_2) = 2$, $d_G(u_3) = 1$. R_i est un graphe considere une chaîne v, u_1, u_2, u_3. La suppression de les sommets u_1, u_2 et u_3 du graphe R_i produit le graphe noté R_{i+1}. Nous répétons ce procédure jusqu'à l'obtention d'un graphe R_i ayant une chaîne d'ordre 0,1 ou 2.

Observation 3.3.2

$\beta_2(R_i) = \beta_2(R_{i+1}) + 2$

Preuve. Soit la chaîne $P_n = x_1, x_2, ..., x_n$

1) Supposons S un β_2-ensemble de R_i et d'apres le procédure B. Donc $S' = S - \{x_1, x_2\}$ est un 2-indépendant danc $\beta_2(R_{i+1}) \geq \left|S'\right| = |S| - 2 = \beta_2(R_i) - 2.$

2) Supposons S' est un β_2-ensemble de R_{i+1} et d'apres le procédure B. Donc $S = S' - \{x_1, x_2\}$ est un 2-indépendant danc $\beta_2(R_i) \geq |S| = \left|S'\right| + 2 = \beta_2(R_{i+1}) + 2.$ ■

Théorème 3.3.2 *Pour une chaîne P_n avec $n \geq 3$,*

$$ci^+_{\beta_2}(P_n) = \begin{cases} 0 \text{ pour } n \equiv 0(mod\ 3)\ , \\ (n+2)/9(n-2) \text{ pour } n \equiv 1(mod\ 3), \\ 4(n+1)/9(n-1) \text{ pour } n \equiv 2(mod\ 3). \end{cases}$$

Preuve. Soit $M(n_1, c, n_2)$, ou $n_1, n_2 \in \{0, 1, 2\}$ et $c \in \{3, 4, 5\}$. Le graphe obtenu à partir d'un cycle C de longeur c en relient un sommet d'extrémité d'une chaîne P_{n1} à un certain sommet x de C et en relier un sommet d'extrémité du chaîne P_{n2} à un sommet y de C adjacent à x. Le graphe $M(n_1, c, n_2)$ s'appellera un graphe de base.

On applique les procédures A et B sur un P_n+e, où $e \in E(\overline{P_n})$, à la fin le résultat possible dans un graphe, nous obtenons un graphe de base $M(n_1, c, n_2)$ de l'ordre n_1+c+n_2. Soient k_1, k_2 et k le nombre de groupes de trois sommets supprimés de $P_n + e$ pour obtenir les chaînes P_{n1}, P_{n2} et les cycles C, respectivement, les graphes de base $M = M(n_1, c, n_2)$. Ainsi,

$$3(k_1 + k + k_2) = n - n(M)$$

et donc

$$k_1 + k + k_2 = (n - n(M))/3 \qquad (1)$$

Le nombre de graphe $P_n + e$ correspondant au graphe de base M équivant au nombre de solutions de l'équation (1),

$\mathbb{C}^2_{(n-n(M))/3+2} = (n - n(M) + 3)(n - n(M) + 6)/18$.

Par l'observation 3.3.1 et 3.3.2, nous avons que $ci^+_{\beta_2}(e) = \beta_2(P_n) - \beta_2(P_n + e) = \beta_2(P_{n1+c+n2}) - \beta_2(M)$ pour $e \in E(\overline{P_n})$.

Soit $\mathcal{M}_i$, pour $i = 0, 1$, soit l'ensemble de tous les graphes des base $M = M(n_1, c, n_2)$ pour lequel $ci^+_{\beta_2}(e) = i$ et $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \cup \mathcal{M}_1$. Alors

$ci^+_{\beta_2}(e) = (\sum_{e \in E(\overline{G})} ci^+_{\beta_2}(e))/m(\overline{P_n})$.

$= (\sum_{M \in \mathcal{M}}(\|\text{Nombre des graphes } P_n + e \text{ correspondant à } M))/m(\overline{P_n})$.

$= \left(\sum_{M \in \mathcal{M}}(n - n(M) + 3)(n - n(M) + 6)/18)\right)/m(\overline{P_n})$.

Notez que $m(P_n) = (n-1)(n-2)/2$, alors

$$ci^+_{\beta_2}(e) = (\sum_{M \in \mathcal{M}}(n - n(M) + 3)(n - n(M) + 6)/18))/(n-1)(n-2). \qquad (2)$$

Ensuite, en appliquant les Procédures A et B. Alors on distingue les trois cas suivants:

cas 1. $n \equiv 0(mod\ 3)$. Donc $n(M) \equiv 0(mod 3)$. Notez que $n(M) = n_1 + c + n_2 = 3$, 6 ou 9 pour chaque $M \in \mathcal{M}$. Alors

$$\mathcal{M}=\left\{ \begin{array}{c} M(0,3,0), M(0,4,2), M(0,5,1), M(1,3,2), M(1,4,1), \\ M(2,5,2), M(2,4,0), M(1,5,0), M(2,3,1) \end{array} \right\}.$$

On vérifie que pour tout $M \in \mathcal{M}$, $M \in \mathcal{M}_0$. Donc, par l'équation (2), nous avons $ci^+_{\beta_2}(P_n) = 0$.

cas 2. $n \equiv 1(mod\ 3)$. Donc $n(M) \equiv 1(mod 3)$. Notez que $n(M) = n_1 + c + n_2 = 4$ ou 7 pour chaque $M \in \mathcal{M}$. Alors

$$\mathcal{M}=\left\{ \begin{array}{c} M(0,4,0), M(1,3,0), M(1,5,1), M(2,5,0), M(2,4,1), \\ M(2,3,2), M(1,4,2), M(0,5,2), M(0,3,1) \end{array} \right\}.$$

On peut facilement vérifier que $\mathcal{M}_1 = \{M(0,4,0)\}$ et

$$\mathcal{M}_0=\left\{ \begin{array}{c} M(1,3,0), M(1,5,1), M(2,5,0), M(2,4,1), M(2,3,2), \\ M(1,4,2), M(0,5,2), M(0,3,1) \end{array} \right\}.$$

Donc, par l'équation (2), nous avons $ci^+_{\beta_2}(P_n) = 1(n-4+3)(n-4+6)/9(n-1)(n-2) = (n+2)/9(n-2)$.

cas 3. $n \equiv 2(mod\ 3)$. Donc $n(M) \equiv 2(mod 3)$. Notez que $n(M) = n_1 + c + n_2 = 5$ ou 8 pour chaque $M \in \mathcal{M}$. Alors

$$\mathcal{M}=\left\{ \begin{array}{c} M(0,5,0), M(1,4,0), M(1,3,1), M(2,3,0), M(2,5,1), \\ M(2,4,2), M(0,4,1), M(0,3,2), M(1,5,2) \end{array} \right\}.$$

Encore une fois, il est facile de voir que

$$\mathcal{M}_1 = \{M(0,5,0), M(1,4,0), M(1,3,1), M(0,4,1)\}\ et$$

$$\mathcal{M}_0 = \{M(2,3,0), M(2,5,1), M(2,4,2), M(0,3,2), M(1,5,2)\}.$$

Donc, par l'équation (2), nous avons

$ci^+_{\beta_2}(P_n) = 4(n-5+3)(n-5+6)/9(n-1)(n-2) = 4(n+1)/9(n-1)$ ■

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à étudier l'indice de criticité du nombre de 2-indépendance dans certains graphes.

Nous avons déterminés les valeur exactes de l'indice de criticité de la suppresion et de l'ajout d'une arête de la 2-independance pour les cycles et les chaînes.

En conclusion, il serait intérésent de traiter les questios suivantes qui peuvent etre considérées comme une suite de notre travail:

- Etude de l'indice de criticité du nombre de 2-indépendance pour d'autre classes de graphes.
- Caractérisation des arbres T pour les queles: $\begin{cases} \beta_2(T-e) = \beta_2(T) \\ \beta_2(T+e) = \beta_2(T) \end{cases}$
- Détermination des valeurs exactes, ou des bornes relatives au pramétre β_2 pour les arbres,et les graphes à structure simple.

Bibliographie

[1] C. Berge,"Graphes et hypergraphes", Dunod, deuxiéme édition, 1970.

[2] M. Blidia,M. Chellali and L. Volkmann. Some bounds on the p-domination number intrees. Discrete Mathematics 306(2006)2031 − 2037.

[3] M. Blidia, M. Chellali, O. Favaron and N. Meddah. Maximal k-indépendant sets in graphs. Discussiones Mathematicae Graph theory 28(1)(2008)151 − 163.

[4] M. Blidia, A. Bouchou, L. Volkmann, Bounds on the k-independence and k-chromatic numbers of graphs. Ars Combin (in press).

[5] A. Bouchou and M. Blidia, Criticality indices of Roman domination of paths and cycles, Australasian Journal of Combinatorics 56(2013), 103 − 112.

[6] A. Bouchou, M. Blidia. On the k-independence number in graphs, Australasian Journal of Combinatorics 59(2)(2014),311 − 322.

[7] A. Bouchou, M. Blidia, criticality indices of 2-rainbow domination of paths and cycles,Opuscula Math. 36, no. 5(2016), 563 − 574.

[8] G. Chartrand, L. Lesinak ,"Graphe & Digraphs", Third Edition, Chapman & Hall, London, 1996.

[9] M. Chellali, Nader Jafari Rad. On k-independence critical graphs, Australasian Journal of Combinatorics 53(2012), 289 − 298.

[10] M. Chellali, O. Favaron, A. Hansberg and L. Volkmann, k-Domination and k-Independence in Graphs: A Survey, Graphs Combin. $28(1)(2012), 1-55$.

[11] E. J. Cockayne, P. M. Dreyer Jr., S. M. Hedetniemi and S.T. Hedetniemi, On Roman domination in graphs, Discrete Math. $278(2004), 11-22$.

[12] C.F. de Jaenisch, Applications de l'analyse mathématique au jeu des echecs, Petrograde (1862).

[13] O. Favaron. k-domination and k-independance in graphs. Ars Combin. $25(1988)C159-167$.

[14] O. Favaron. La k-domination et la k-indépendance dans les graphes. Séminaire à l'université de Blida, Avril 2005.

[15] O. Favaron. On a conjecture of Fink and Jackobson concerning k-domination and k-dépendance. J. Combin . Theory Series $B39n°1(1985)101-102$.

[16] J.F. Fink and M.S. Jacobson, n-domination, n-dependance and forbidden subgraphs in:Graph Theory with applications to Algorithms and Computer (kalamazoo, Mich.1984)eds .Alavi, Chartrand, Lesniak, Lick and wall, Wiley, New-York $(1985)283-300$.

[17] J.F. Fink and M.S. Jacobson, n-domination, n-dependance and forbidden subgraphs in: Graph Theory with applications to Algorithms and Computer (kalamazoo, Mich.1984)eds .Alavi, Chartrand, Lesniak, Lick and wall, Wiley, New-York $(1985)301-311$.

[18] G. Hopkins and W. Staton, Vertex partitions and k-small subsets of graphs, Ars Combin. $22(1986), 19-24$.