République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE YAHIA FARES DE MEDEA
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique

MEMOIRE DE MASTER

En : Mathématiques

Option : Analyse Mathématiques et Applications

Thème

Equations Différentielles Fractionnaires De Type Lane-Emden

Présenté par

BITAM Imen

Soutenue publiquement devant le Jury composé de :

Mr. D.LAISSAOUI	Professeur	UYFM	Président Médéa
Mme. K.SERIER ABDALLAH	M.A.A	UYFM	Examinatrice
Mr. K.TABLENNEHAS	M.C.B	UYFM	Encadreur

Année Universitaire : 2023/2024

Remerciements

Louage à Allah le tout puissant qui m'a donnée la force et la volonté pour achever ce travail

Je tient à exprimer mon profond respect et de reconnaissance à mon encadreur M.Kamel TABLENNEHAS, pour ces conseils et son encouragement durant la période de la préparation et la rédaction de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à tous les membres du Jury, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'être dans le Jury de ce mémoire, en l'occurrence :

Président : Diffalah LAISSAOUI , Professeur à l'Université de Médéa.

Examinatrice : Khedidja SERIER ABDALLAH , M.A.A à l'Université de Médéa.

Il est important pour moi de remercier ma famille qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragement .

Je remercier tous me enseignants de département de mathématiques et informatique.

Je remercier mes collegues pour le soutien qui m'ont données.

Merci à tout ceux qui ont contribué de prés ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail.

-A Mes parents.

-A Mes frères

-A Mes soeurs.

-A Toute la famille.

-A Tous les amies.

Je tiens remercier l'ensemble de tous les étudiants et les étudiantes de ma promotion

Enfin je dédie cette mémoire à mes collègues et tous ceux me sont chers

ملخص

في هذه الاطروحة, نقدم دراسة تحليلية لمسآلة تفاضلية غير خطية جديدة من نوع لين-امدن. دعونا نستخدم كلا من تكامل ريمان-ليوفيل ومشتقة كابيتو. نبدأ بإثبات النتيجة الأولى للوجود والوحدانية بتطبيق مبدأ الإنكماش لباناخ ثم النتيجة الثانية للوجود بتطبيق نظرية شافر.ونناقش الأمثلة التوضيحية بالتفصيل لإظهار إمكانية تطبيق النتائج التي تم الحصول عليها.

Résumé

Dans ce mémoire, nous présentons une étude analytique d'un nouveau problème différentiel non linéaire de type Lane et Emden en utilisant à la fois l'intégrale au sens de Riemann-Liouville et la dérivée au sens de Caputo. On commence par prouver un premier résultat d'existence et d'unicité en appliquant le principe de contraction de Banach, puis un deuxième résultat d'existence en appliquant le théorème de Schaefer. Des exemples illustratifs sont également discutés pour valider l'applicabilité des résultats obtenus.

ABSTRACT

In this memoir, we present an analytical study of a new nonlinear differential problem of the Lane and Emden type. Using both the integral in the sense of Riemann-Liouville and the derivative in the sense of Caputo. We begin by proving a first result of existence and uniqueness by applying Banach's contraction principle, then a second result of existence by applying Schaefer's theorem. Illustrative examples are discussed in detail to show the applicability of the results obtained.

Notations

$\mathbb{R}$:	L'ensemble des nombres réelles.
$\mathbb{C}$:	L'ensemble des nombres complexes.
$\Gamma(.)$:	Fonction Gamma d'Euler.
$B(.,.)$:	Fonction Bêta d'Euler.
I :	$[0,1]$
${}^{RL}D^{\alpha}$:	La dérivé fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α.
${}^{C}D^{\alpha}$:	La dérivé fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α.
$I^{\alpha}(f(.))$:	L'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α.
$[\alpha]$:	La partie entière du α.

.

Table des Matières

Remerciements **5**

Résumé **7**

Notations **9**

Introduction **10**

CHAPITRE 1. **Préliminaires** **12**

1.1. Fonctions Spéciales 12

1.1.1. Fonction Gamma d'Euler. 12

1.1.2. Fonction Bêta d 'Euler 12

1.2. Intégration fractionnaire 13

1.2.1. Intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville 13

1.3. Dérivation fractionnaire 15

1.3.1. Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville 15

1.3.2. Dérivées fractionnaires au sens de Caputo 17

1.4. Sur les points fixes 19

CHAPITRE 2. Problème différentiel fractionnaire de type Lane-Emden **21**

2.1. Introduction 21

2.2. Etude numérique des équations différentielles fractionnaires de Type Lane-Emden par méthode de colocalisation. 22

2.3. Stabilité de l'équation différentielle fractionnaire de Lane-Emden 23

2.4. Solutions et stabilités d'un système fractionnaire non homogène de type Lane-Emden 24

2.5. Un problème séquentiel généralisé de type Lane-Emden 27

2.6. Un problème différentiel fractionnaire singulier anti-périodique de type Lane-Emden 31

CHAPITRE 3. Nouveau problème différentiel fractionnaire de type Lane-Emden **36**

3.1. Existence et unicité de solutions 37

3.1.1. Unicité de solutions 42

3.1.2. Existence de solutions 51

3.2. Validatation théorique des résultats 60

Conclusion et perspectives **64**

Introduction

Le calcul fractionnaire est une extension du calcul différentiel et intégral traditionnel qui permet de généraliser les concepts de dérivation et d'intégration a des ordres non-entières. Cette théorie permet également de représenter de manière plus précise les phénomènes physiques ou biologiques qui ne suivent pas une évolution linaire ou continue.

Les équations différentielles fractionnaires sont des équations qui impliquent des dérivées d'ordre non entier. Elles peuvent être utilisées pour modéliser des phénomènes physiques tels que la diffusion et la conduction thermique, ainsi que pour d'autres applications en sciences et en biologie. Les méthodes de résolution pour les équations différentielles fractionnaires sont similaires 'a celles utilisées pourles équations différentielles ordinaires, mais avec des techniques supplémentaires pour traiter les dérivées fractionnaires.

Ce mémoire consiste à étudier l'existence et l'unicité des solutions pour le nouveau problème différentielle fractionnaire de type Lane-Emden suivant:

$$\begin{cases} D^{\alpha}D^{\beta}z(t)+\frac{k}{t^{\lambda}}D^{\alpha}z(t)+a_1F\big(t,z(t),D^{\gamma}z(t),J^{p}z(t)\big)+a_2G\big(t,z(t),D^{\gamma}z(t)\big)+a_3H\big(t,z(t)\big)=L(t), \\ z(0)+z(1)=0, \qquad z'(0)+z'(1)=0, \\ k>0, 0\leq\beta\leq 1, \quad 0\leq\gamma\leq\alpha\leq 1, \alpha+\beta<2 \quad 0<\lambda<1, p>0, t\in I. \end{cases} \tag{1}$$

D^{α} et D^{β} représentent les dérivées fractionnaires au sens de Caputo d'ordre α et β respectivement, l'intégrale J^{p} est du Riemann et Liouville, $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ et $F : I\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $G : I\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $H : I\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $L : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données.

Notre approche est basé sur la théorie du point fixe (théorème de Banach, Scheafer).

Ce mémoire est composé de trois chapitres. Il est organisé comme suit :

- Le premier chapitre est consacré à des notions préliminaires concernant notations et définitions, les espaces de Banach, les fonctions spéciales, quelques propriétés de l'intégrale et dérivées fractionnaires aux sens de Caputo, lemmes Auxiliaires et quelques théorèmes du point fixe.

-Dans le chapitre 2, on cite quelques travaux de recherche traitant le problème différentielle fractionnaire de type Lane-Emden.

-Le dernier chapitre, Concerne l'étude de l'existence et l'unicité de solution en utilisant les théorèmes classiques du point fixe du problème 1

On termine ce mémoire par une bibliographie.

CHAPITRE 1

Préliminaires

Ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire qui sont utilisés [16],[20],[21],[22].

1.1 Fonctions Spéciales

1.1.1 Fonction Gamma d'Euler.

Définition 1.1. *Pour $Re(\alpha) > 0$, la fonction Gamma Γ est définie par*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, t > 0.$$

où $t^{\alpha} = e^{\alpha \ln(t)}$, cette intégrale est convergente pour tout complexe α et $Re(\alpha) > 0$.

Proposition 1.2. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et , $n \in \mathbb{N}^*$ on a:*

1. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$,

2. $\Gamma(n + 1) = n!$,

3 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-s} ds = \sqrt{\pi}$ *et* $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$

1.1.2 Fonction Bêta d'Euler

Définition 1.3. *La foncion Bêta est définie par:*

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \ \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \mathrm{Re}(\beta) > 0.$$

1.2 Intégration fractionnaire

L'intégration d'ordre fractionnaire est une généralisation de la notion de l'intégration d'ordre entier.

1.2.1 Intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ selon l'approche de Riemann-Liouville, généralise la formule d'intégrales répétées n-fois

$$\begin{aligned} I_a^n\left(f(t)\right) &= \int_a^t ds_1 \int_a^{s_1} ds_2 \int_a^{s_2} ds_3 ..... \int_a^{s_{n-1}} f\left(s_n\right) ds_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t \left(t-s\right)^{n-1} f\left(s\right) ds, n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Définition 1.4. *L'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \geq 0$, au sens de Riemann-Liouville est donnée par*

$$I_a^\alpha\left(f(t)\right) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \ , \ t > a, \\ f(t), \qquad\qquad\qquad\qquad \alpha = 0. \end{cases}$$

Exemple 1.5. (1) .*Soient $\alpha > 0$ et $f(t) = k$*

$$\begin{aligned} I_a^\alpha\left(k\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} k ds, \\ &= \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ds, \\ &= \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{(t-s)^\alpha}{-\alpha}\right]_{s=a}^{s=t}, \\ &= \frac{k(t-a)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}. \end{aligned}$$

Pour $a = 0$ on obtient

$$\begin{aligned} I_0^{\alpha}(k) &= \frac{k.t^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}, \\ \alpha &= 1 \Rightarrow I_0^1(k) = k.t \\ \alpha &= 2 \Rightarrow I_0^2(k) = \frac{k.t^2}{2} \end{aligned}$$

(2) .Soient $\alpha > 0$ et $f(t) = t^m$

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha}(f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}t^m dt, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x(1-\frac{t}{x})^{\alpha-1}t^m dt, \\ &= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (1-\frac{t}{x})^{\alpha-1}t^m dt, \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable

$$\frac{t}{x} = s \Rightarrow dt = xds$$

alors

$$t = a \Rightarrow s = \frac{a}{x} \text{ et } t = x \Rightarrow s = 1$$

par conséquent

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha}(x^m) &= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (1-s)^{\alpha-1}(xs)^m xds, \\ &= \frac{x^{\alpha+m}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (1-s)^{\alpha-1}s^m ds, \\ &= \frac{x^{\alpha+m}}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha, m+1), \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)}x^{\alpha+m}, \\ I_a^{\alpha}(x^m) &= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)}x^{\alpha+m} \end{aligned}$$

L'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a les propriétés suivantes.

Proposition 1.6. *Soit $f \in C^n[a,b]$. Pour $\alpha, \beta > 0, a, b \in I$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ on a :*

(a). $I_a^\alpha \left(\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t)\right) = \lambda_1 I_a^\alpha f(t) + \lambda_2 I_a^\alpha g(t)$,

(b). $I_a^\alpha \left(I_a^\beta f(t)\right) = I_a^\beta \left(I_a^\alpha f(t)\right) = I_a^{\alpha+\beta} f \ (t)$.

1.3 Dérivation fractionnaire

La notion de dérivée d'ordre fractionnaire est une généralisation du concept de la différentiation d'ordre entier. Nous présentons dans cette section les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et au sens de Caputo.

1.3.1 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Dans cette subsection on donne la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville ainsi que quelques propriétés essentielles.

Définition 1.7. *La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction f définie sur l'intervalle $[a,b]$ est donnée par*

$$ {}^{RL}D_a^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} I_a^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds, n = [\alpha] + 1, t > a $$

En particulier, si $\alpha = 0$, alors

$$ {}^{RL}D^0 f(t) = f(t) $$

et si $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, alors,

$$ {}^{RL}D^n f(t) = f^{(n)}(t) $$

De plus, si $0 < \alpha < 1$, alors $n = 1$, et

$$ {}^{RL}D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds \quad , t > a $$

Remarque 1.8. *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre* $\alpha \in]n-1, n]$ *s'obtient par une application de l'opérateur de dérivation classique d'ordre* n *suivie d'une intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre* $(n-\alpha)$.

Exemple 1.9. (1) .*Soit* $0 \leq n-1 < \alpha \leq n$, $m > -1$ *et* $f(t) = (t-a)^m$ *alors on a :*

$$^{RL}D^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-\alpha+1)}(t-a)^{m-\alpha}$$

(2) −*La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une constante* $\mathbf{K}$

$$\begin{aligned}
^{RL}D^{\alpha}(\mathbf{K}) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_a^t (t-s)^{-\alpha}\mathbf{K}ds, \\
&= \frac{\mathbf{K}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_a^t (t-s)^{-\alpha}ds, \\
&= \frac{d}{dt}I_a^{1-\alpha}(\mathbf{K}), \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{K}(t-a)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\right), \\
&= \frac{(1-\alpha)\mathbf{K}(t-a)^{-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}, \\
^{RL}D^{\alpha}(\mathbf{K}) &= \frac{\mathbf{K}(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}
\end{aligned}$$

Remarque 1.10. *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle.*

On donne quelques propriétés de l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville par la proposition suivante:

Proposition 1.11. *Soient* f *et* g *deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville existent,* $\alpha, \beta > 0$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*, alors on a:*

(a) .$^{RL}D^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda\, ^{RL}D^{\alpha} f(t) + \mu\, ^{RL}D^{\alpha} g(t)$.

(b) .*En général la dérivation fractionnaire sens de Riemann-Liouville ne commutent pas*

$$^{RL}D^{\alpha}(^{RL}D^{\beta} f(t)) \neq^{RL} D^{\beta}(^{RL}D^{\alpha} f(t))$$

(c) .

$$^{RL}D^{\alpha}(^{RL}D^{\beta}f\,(t)) \neq^{RL} D^{\alpha+\beta}f\,(t)$$

Proposition 1.12. *Soient $m \in N^{*}$et $m-1 \leq \alpha < m$, $a, b \in I$ $f \in C^{n}([a,b])$.*
Si $^{RL}D^{\alpha}\left(f(t)\right) = 0$, alors

$$f\,(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma\,(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)}(x-a)^{j+\alpha-m}, c_j \in \mathbb{R}$$

1.3.2 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Dans cette subsection on donne la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo ainsi que quelques propriétés essentielles.

Définition 1.13. *Pour une fonction f de classe $C^{n}\left([a,b]\right)$, $n \in \mathbb{N}^{*}$, la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Caputo de f est définie par:*

$$^{C}D_{a}^{\alpha}f(t) = I_{a}^{n-\alpha}[f^{(n)}(t)] = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}(t-s)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)ds, & n-1<\alpha<n \quad , t>a, \\ \\ f^{(n)}(t), & \alpha = n. \end{cases}$$

Remarque 1.14. *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α s'obtient par une application de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $(n-\alpha)$ suivie d'une dérivation classique d'ordre n.*

Exemple 1.15. (1) . *Soit $0 \leq n-1 < \alpha \leq n$, $m > -1$ et $f(x) = (x-a)^{m}$ alors on a :*

$$\begin{aligned} ^{C}D_{a}^{\alpha}(x-a)^{m} &= I_{a}^{n-\alpha}[(\frac{d^{n}}{dx^{n}})(x-a)^{m}], \\ &= I_{a}^{n-\alpha}\left(\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-n)}(x-a)^{m-n}\right), \\ &= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-n)}I_{a}^{n-\alpha}(x-a)^{m-n}, \\ &= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-n)}\frac{\Gamma(m+1-n)}{\Gamma(m+1-\alpha)}(x-a)^{m-\alpha}, \end{aligned}$$

Par conséquent

$$^{C}D_{a}^{\alpha}(x-a)^{m} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)}(x-a)^{m-\alpha},$$

(2) .*La dérivée d'une fonction constante* $\mathbf{K}$ *au sens de Caputo*

$$\begin{aligned} {}^{C}D_a^{\alpha}(K) &= I_a^{n-\alpha}[(\frac{d^n}{dx^n})(\mathbf{K})], \\ &= I_a^{n-\alpha}(0) = 0 \end{aligned}$$

Remarque 1.16. *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une constante est nulle.*

Par les propositions suivantes on donne quelques propriétés de l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Caputo.

Proposition 1.17. *Soient* f *et* g *deux fonctions dont les dérivées fractionnaires au sens de Caputo existent, pour* $\alpha > 0$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
(a) .${}^{C}D^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}^{C}D^{\alpha} f(t) + \mu {}^{C}D^{\alpha} g(t)$.
(b) .${}^{C}D_a^{\alpha}[I_a^{\alpha} f(t)] = f(t)$.

Proposition 1.18. *Soit* $\beta > \alpha > 0, f$ *de classe* $C^n([a,b])$. *Alors*

$${}^{C}D_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta} f(t)\right] = I_a^{\beta-\alpha} f(t), t \in [a,b].$$

Les résultats suivants peuvent être considérés comme des lemmes cruciaux.

Lemme 1.19. *Soit* f *une fonction définie sur* $[a,b]$ *vérifiant*

$${}^{C}D_a^{\alpha} z(t) = 0, t \in I.$$

Alors

$$z(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1} t^{n-1},$$

$c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \cdots, n-1$.

Lemme 1.20. *Considérons un* $\alpha > 0$. *Alors*

$$I^{\alpha}[{}^{C}D^{\alpha} z(t)] = z(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1}, t \in I.$$

où $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \cdots, n-1$.

1.4 Sur les points fixes

Les théorèmes de point fixe s'avèrent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution d'équations différentielles, ils permettent d'assurer l'existence de solutions d'un problème donné en fournissant des conditions suffisantes pour lesquelles, une application donnée admet des points fixes.

Définition 1.21. *Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $k > 0$. Une application ϕ de X dans X ,est dite Lipschitzienne si*

$$\forall x, y \in X : \|\phi(x) - \phi(y)\| \leq k \|x - y\|$$

Définition 1.22. *Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Une application ϕ de X dans X, est dite Contractante si*

$$\exists k \in [0, 1[\,, \forall x, y \in X : \|\phi(x) - \phi(y)\| \leq k \|x - y\|$$

Définition 1.23. *Soient X un espace vectoriel normé, de norme $\|.\|$ et ϕ une application d'un ensemble X dans lui même. On appelle point fixe de ϕ tout point $x \in X$ tel que: $\phi(x) = x$*

Théorème 1.24. *[12](**Théorème du point fixe de Banach**)Soient X un espace de Banach et si $\phi : X \to X$ est un opérateur contractant. Alors ϕ admet un point fixe unique.*

Théorème 1.25. *[12] (**Théorème du point fixe de Schaefer**) Soient X un espace de Banach et $\phi : X \to X$ un opérateur complètement continu. Si l'ensemble*

$$\Omega = \{x \in X : x = \mu\phi x, 0 < \mu < 1\}$$

est borné, alors ϕ possède au moins un point fixe.

Théorème 1.26. *[12] (**Théorème d'Arzela-Ascoli**) Soient X un espace de Banach et $\Omega \subset X$. Alors Ω est relativement compact dans X si et seulement si Ω est uniformément borné et Ω est équicontinu.*

CHAPITRE 2

Problème différentielle fractionnaire de type Lane-Emden

2.1 Introduction

La théorie des problèmes fractionnaires singuliers est devenue un domaine de recherche au cours des trois dernières décennies (voir [1], [2], [5], [8], [9], [16]). L'une des équations décrivant ce type de problèmes est l'équation de Lane-Emden, qui a été publiée par Lane en 1870 et détaillée par Emden [18]. Les équations différentielles de Lane-Emden sont des problèmes de valeurs initiales singulières du second ordre, elles décrivent une variété de phénomènes en physique mathématique et en astrophysique tels que des aspects de la structure stellaire. Pour plus d'informations sur certaines applications, consulter [3]. L'équation de Lane-Emden décrit la structure d'un objet dont l'équation d'état est celle d'un polytrope.

L'équation classique de Lane-Emden a la forme suivante [7]:

$$z^{''}(t) + \tfrac{a}{t} z^{'}(t) + f(t, z(t)) = g(t), \ t \in I,$$

et

$$z(0) = q, \ z^{'}(0) = r,$$

tels que q, r sont des réels donnés et f, g sont des fonctions continues données.
Le problème ci-dessus a suscité l'intérêt de plusieurs travaux de recherches scientifiques: nous commençons par citer

2.2 Etude numérique des équations différentielles fractionnaires de Type Lane-Emden par méthode de colocalisation.

Les auteurs de [19], ont utilisé la méthode dite de collocation pour étudier:

$$\begin{cases} D^{\alpha}y(t)+\dfrac{k}{t^{\alpha-\beta}}D^{\beta}y(t)+f(t,y(t))=g(t),\ t\in I, \\ \\ y(0)=A>0,\ \mathrm{y}'(0)=B>0 \\ \\ k\geq 0,\ 1<\alpha\leq 2,\ 0<\beta\leq 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

- En considérant une série entière représentant la solution de l'équation différentielle fractionnaire de Lane-Enden:

$$y(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n t^n$$

Théorème 2.1. *La solution analytique de la* (2.1) *satisfait l'équation suivante:*

$$\frac{a_1}{\Gamma(2-\beta)}t^{1-\alpha}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\left(\begin{array}{c}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)}+\\ \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\beta)}\end{array}\right)t^{n-\alpha}+f\left(t,\sum_{n=0}^{+\infty}a_n t^n\right)=g(t)$$

- **Les équations différentielles linèaires de Lane-Emden.**

Considèrant que $f(t,y(t))=\frac{1}{t^{\alpha-2}}y(t)$, l'equation devient:

$$D^{\alpha}y(t)+\frac{k}{t^{\alpha-\beta}}D^{\beta}y(t)+\frac{1}{t^{\alpha-2}}y(t)=g(t),\ t\in I,$$

avec les conditions suivantes:

$$y(0)=A,\ \mathrm{y}'(0)=B$$

L'équation précident est transformer en l'équation suivante:

$$a_0t^{2-\alpha}+a_1\left(\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\beta)}+t^{3-\alpha}\right)+\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\left(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)}+k\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\beta)}\right)t^{n-\alpha}+\sum_{n=2}^{+\infty}a_{n-2}t^{n-\alpha}=g(t)$$

Dans le cas $g(t)=0$, on obtient:

$$\begin{aligned} a_0 &= a_1=0, \\ &\text{et} \\ a_n &= \frac{\Gamma(n+1-\alpha)\Gamma(n+1-\beta)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1-\alpha)+k\Gamma(n+1-\beta)}a_{n-2}, n=2,3,4,..... \end{aligned}$$

2.3 Stabilité de l'équation différentielle fractionnaire de Lane-Emden

Citons aussi le travail ([14]), où l'on trouve qu'Ibrahim Rabha a pris:

$$\begin{cases} D^{\beta}\left(D^{\alpha}+\frac{a}{t}\right)z(t)+f(t,z(t))=g(t), \\ \\ z(0)=\mu,\ z(1)=\nu, \\ \\ 0<\alpha,\beta\leq 1,\ 0\leq t\leq 1,\ a\geq 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

Elle a considéré que D^{γ} est une dérivée de Caputo, f , g sont deux fonctions continues.

Lemme 2.2. *Une solution unique du problème linéaire des valeurs limites à deux paramètres pour l'équation de Lane-Emden* (2.2) *est donnée par:*

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}g(u)\,du-\frac{a}{s}u(s)\right)ds \\ &\quad -t^{\alpha}\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}g(u)\,du-\frac{a}{s}u(s)\right)ds \\ &\quad +(v-\mu)\,t^{\alpha}+\mu. \end{aligned}$$

avec $g \in C^{n}[0,1]$

Théorème 2.3. *Soit* $f: I\times X\longrightarrow X$ *une fonction continue satisfaisant la condition:*

$$|f(t,u)-f(t,v)| \leq L|u-v|, \forall t\in I, u,v\in X$$

De plus, supposons que: $\sup_{t\in[0,1]} \mid g(t) \mid=\gamma$, *Alors le problème des valeurs limites* (2.2) *a une solution unique si*

$$l := \frac{2L}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{2a\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}<1, a\geq 0$$

2.4 Solutions et stabilités d'un système fractionnaire non homogène de type Lane-Emden

Il faut également citer l'article de Zakaria Bekkouche et Zoubir Dahmani [6]; ils ont traité:

$$\begin{cases} D^{\beta_1}\left(D^{\alpha_1}+b_1g_1\left(t\right)\right)z_1\left(t\right)+f_1\left(t,z_1\left(t\right),z_2\left(t\right)\right)=\omega_1S_1\left(t,z_1\left(t\right),z_2\left(t\right)\right), \\ \\ D^{\beta_2}\left(D^{\alpha_2}+b_2g_2\left(t\right)\right)z_2\left(t\right)+f_2\left(t,z_1\left(t\right),z_2\left(t\right)\right)=\omega_2S_2\left(t,z_1\left(t\right),z_2\left(t\right)\right), \\ 0<t<1, \\ z_k(0)=0,\ D^{\alpha}z_k(1)+b_kg_k(1)z_k(1)=0, \end{cases} \tag{2.3}$$

notez que nos auteurs ont pris: $0<\beta_k<1$, $0<\alpha_k<1$, $b_k\geq 0$, $0<\omega_k<\infty$, $k=1,2$ et D^{β_k} , D^{α_k} sont des dérivées de Caputo et $f_k: I\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $S_k: I\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sont des fonctions continues, $g_k: I\to[0,+\infty[$ sont singulier à l'origine.

Lemme 2.4. *Soit $H_1, H_2\in C^n([0,1],\mathbb{R})$.Alors, le problème*

$$\begin{cases} D^{\beta_1}\left(D^{\alpha_1}+b_1g_1\left(t\right)\right)z_1\left(t\right)=H_1,\ 0<t<1, \\ \\ D^{\beta_2}\left(D^{\alpha_2}+b_2g_2\left(t\right)\right)z_2\left(t\right)=H_2,\ 0<t<1, \end{cases}$$

liés aux conditions

$$z_k(0)=0,\ D^{\alpha}z_k(1)+b_kg_k(1)z_k(1)=0, k=1,2$$

a une solution unique (x_1,x_2) donnée par:

$$x_k(t)=I^{\alpha_k+\beta_k}H_k\left(t\right)-b_kI^{\alpha_k}g_k\left(t\right)x_k\left(t\right)-I^{\beta_k}H_k\left(1\right)\frac{t^{\alpha_k}}{\Gamma\left(\alpha_k+1\right)}.$$

En introduisant l'espace de Banach $\left(X\times X,\parallel\left(u,v\right)\parallel_{X\times X}\right)$, muni de la norme suivante: $\parallel\left(u,v\right)\parallel_{X\times X}=\max\{\parallel u\parallel_{X\times X},\parallel v\parallel_{X\times X}\}$ telles que

$$X:=C^n(I,\mathbb{R}),||.||_X=||.||_\infty$$

Théorème 2.5. *Soit* $g_1, g_2 : I \longrightarrow [0, +\infty[$ *deux fonctions continues,*

$$\lim g_1(t) = \lim g_2(t) = \infty \text{ lorsque } t \longrightarrow 0$$

$\lim g_1(t) = \lim g_2(t) = \infty$ *lorsque* $t \longrightarrow 0$.*Supposons qu'il existe* $0 < \lambda_1,\ \lambda_2 < 1$,$t \mapsto \left(t^{\lambda_1} g_1(t), t^{\lambda_2} g_2(t)\right)$ *sont continus dans* I. *Si*

$$\bullet\ |f_1(t, x_1, x_2) - f_1(t, y_1, y_2)| \leq \sum_{j=1}^{2} L_i |x_j - y_j|,$$

$$\bullet\ |f_2(t, x_1, x_2) - f_2(t, y_1, y_2)| \leq \sum_{j=1}^{2} L'_i |x_j - y_j|,$$

$$\bullet\ |S_1(t, x_1, x_2) - S_1(t, y_1, y_2)| \leq \sum_{j=1}^{2} R_i |x_j - y_j|,$$

$$\bullet\ |S_2(t, x_1, x_2) - S_2(t, y_1, y_2)| \leq \sum_{j=1}^{2} R'_i |x_j - y_j|,$$

$$\text{pour tout} \quad t \in I, (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

et si

$$\bullet D_1 + D_2 + 2L(K_1 + K_2) + 2R(\omega_1 K_1 + \omega_2 K_2) < 1$$

, alors le problème (2.3) a une solution unique sur I. Avec

$$\bullet D_1 = b_1 M_1 \frac{\beta(\alpha_1, 1-\lambda_1)}{\Gamma(\alpha_1)},$$

$$\bullet D_2 = b_2 M_2 \frac{\beta(\alpha_2, 1-\lambda_2)}{\Gamma(\alpha_2)},$$

$$\bullet K_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+1)\Gamma(\beta_1+1)},$$

$$\bullet K_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha_2+\beta_2+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_2+1)\Gamma(\beta_2+1)}.$$

et

$$\bullet L = \max\{L_1, L_2, L_1', L_2'\}, R = \max\{R_1, R_2, R_1', R_2'\},$$

$$\bullet M_k = \max_{t\in[0,1]} \left|t^{\lambda_k} g_k(t)\right|, k = 1, 2.$$

Théorème 2.6. *Pour $k = 1, 2$, supposons que $g_k : I \to [0, +\infty[$ soient continues, $lim_{t\to 0} g_k(t) = \infty$, et il existe $\lambda_k : 0 < \lambda_k \leq \alpha_k < 1$, $t- \to t^{\lambda_k} g_k(t)$ sont continus sur I. Supposons que $f_k : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $S_k : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont bornés respectivement par $I_k$et Q_k. Alors le problème (2.3) a au moins une solution sur I.*

2.5 Un problème séquentiel généralisé de type Lane-Emden

Dans ([11]), les auteurs ont aussi travaillés sur le problème non local suivant:

$$\begin{cases} D^{\alpha_1}\left(D^{\alpha_2}\left(....(D^{\beta}+\frac{k}{t^{\lambda}})\right)...\right)u(t)=G(t), \\ t\in]0,1[, \\ u(0)=0, \qquad u(1)=\theta, \\ D^{\alpha_n}\left(D^{\beta}u\left(0\right)\right)=0, \\ D^{\alpha_{n-1}}\left(D^{\alpha_n}\left(D^{\beta}u\left(0\right)\right)\right)=0, \\ . \\ . \\ D^{\alpha_3}D^{\alpha_4}.....D^{\alpha_{n-1}}\left(D^{\alpha_n}\left(D^{\beta}u\left(0\right)\right)\right)=0, \\ D^{\alpha_2}D^{\alpha_3}D^{\alpha_4}.....D^{\alpha_{n-1}}\left(D^{\alpha_n}\left(D^{\beta}u\left(1\right)+\varphi_{k,\lambda}\left(1\right)u(1)\right)\right)=0 \\ k>0. \end{cases} \tag{2.4}$$

$0\leq\beta\leq 1, 0\leq\alpha_i<1; i=1,2,...,n$ *et* $\delta<min(\beta,\alpha_i), \varphi_{k,\lambda}(t)=\frac{k}{t^{\lambda}}$, les dérivées séquentielles sont au sens de Caputo, I^p désigne l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre p, et $f,g: I\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sont deux fonctions données, aussi $h: I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction donnée et l est une fonction définie sur I

Lemme 2.7. *Soit* $G\in C^n([0,1])$. *On peut alors affirmer que*

$$\begin{cases} D^{\alpha_1}\left(D^{\alpha_2}\left(....(D^{\beta}+\frac{k}{t^{\lambda}})\right)...\right)u(t)+f(t,u(t),D^{\delta}u(t))+g(t,u(t),I^{\rho}u(t))+h(t,u(t))=l(t), \\ t\in]0,1[, \\ u(0)=0, \qquad u(1)=\theta, \\ D^{\alpha_n}\left(D^{\beta}u\left(0\right)\right)=0, \\ D^{\alpha_{n-1}}\left(D^{\alpha_n}\left(D^{\beta}u\left(0\right)\right)\right)=0, \\ . \\ . \\ D^{\alpha_3}D^{\alpha_4}.....D^{\alpha_{n-1}}\left(D^{\alpha_n}\left(D^{\beta}u\left(0\right)\right)\right)=0, \\ D^{\alpha_2}D^{\alpha_3}D^{\alpha_4}.....D^{\alpha_{n-1}}\left(D^{\alpha_n}\left(D^{\beta}u\left(1\right)+\varphi_{k,\lambda}\left(1\right)u(1)\right)\right)=0 \\ k>0. \end{cases}$$

admet comme solution intégrale l'expression suivante:

$$u(t)=\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)}\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-1}}{\Gamma(\beta)}G(\tau)\,d\tau-\frac{a}{s^{\lambda}}u(s)\right)ds$$

$$-\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_1-1}G(s)ds}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)+\beta+1\right)}t^{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+\beta}-\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_1-1}G(s)ds}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)+\beta+1\right)}t^{\beta}$$

$$-\left[\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)}\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-1}}{\Gamma(\beta)}G(\tau)\,d\tau-\frac{a}{s^{\lambda}}u(s)\right)ds+\theta\right]t^{\beta}.$$

Le problème ci-dessus est transformé en un problème de point fixe.

En considérant les notions suivantes liées aux espaces de Banach

$X:=\{x\in C^n(I,\mathbb{R}), D^{\delta}x\in C^n(I,\mathbb{R})\}$;

muni de la norme suivante:$\| y \|_X=\max\{\| x \|_\infty, \| D^{\delta}x \|_\infty\}$ telles que

$$\| x \|_\infty=\sup_{t\in J}\mid x(t)\mid,\qquad \| D^{\delta}x \|_\infty=\sup_{t\in J}\mid D^{\delta}x(t)\mid$$

Soit l'opérateur non linéaire $H : X \to X$ qui prend la forme :

$$Hu(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \left(\frac{1}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)} \int_0^s \frac{(s-\tau)^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - 1}}{\Gamma(\beta)} \begin{bmatrix} l(\tau) - f(\tau, u(\tau), D^{\delta}u(\tau)) \\ -g(\tau, u(\tau), I^{\rho}u(\tau)) \\ -h(\tau, u(\tau)) \end{bmatrix} d\tau - \frac{a}{s^{\lambda}} u(s) \right) ds$$

$$- \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_1 - 1}\left[l(s) - f(s,u(s),D^{\delta}u(s)) - g(s,u(s),I^{\rho}u(s)) - h(s,u(s))\right] ds}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) + \beta + 1\right)} t^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \beta}$$

$$- \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_1 - 1} G(s) ds}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) + \beta + 1\right)} t^{\beta}$$

$$- \left[\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \left(\frac{1}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)} \int_0^s \frac{(s-\tau)^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - 1}}{\Gamma(\beta)} \begin{bmatrix} l(\tau) - f(\tau, u(\tau), D^{\delta}u(\tau)) \\ -g(\tau, u(\tau), I^{\rho}u(\tau)) \\ -h(\tau, u(\tau)) \end{bmatrix} d\tau - \frac{a}{s^{\lambda}} u(s) \right) ds + \theta \right] t^{\beta}.$$

Soient les hypothèses suivantes:

(A1)- Les fonctions f et g sont définies et continues sur $I \times \mathrm{R}^{\,2}$ et h est définie et continue sur$I \times \mathrm{R}$.

(A2)- Il existe quatre constantes non négatives $L_f 1, L_f 2, L_g 1, L_g 2$; pour tout $t \in I$,$x_i, x_i^* \in \mathbb{R}$,

$$\bullet \, |f_1(t, x_1, x_2) - f_1(t, x_1^*, x_2^*)| \leq \sum_{i=1}^{2} L_f i \, |x_i - x_i^*| \,,$$

$$\bullet \, |g_1(t, x_1, x_2) - g_1(t, x_1^*, x_2^*)| \leq \sum_{j=1}^{2} L_g i \, |x_j - y_j| \,,$$

et il y a un nombre positif r_0 ; pour tout $t \in I, x, y \in \mathbb{R}$,

$$\bullet\, |h(t,x) - h(t,y)| \quad \leq \quad r_0 \, |x - y| \,,$$

Soient $L'_f = \max\{L_f 1, L_f 2\}$ et $L'_g = \max\{L_g 1, L_g 2\}$.

(A3)- Il existe trois constantes positives M_f, M_g, M_h ; pour tout$t \in I, x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\bullet |f(t,x)| \quad \leq \quad M_f, |g(t,x)| \leq M_g, |h(t,y)| \leq M_h.$$

(A4)- : $\|l\|_\infty = M_l$

Et soient les nouvelles expressions :

$$D1 \quad = \quad 2\left[\begin{array}{c} \left(r_0 + 2L'_f + L'_g + \frac{L'_g}{\Gamma(\rho+1)}\right) + \left(\frac{1}{\Gamma\left(\sum_{i=2}^{n}\alpha_i+\beta+1\right)} + \frac{1}{\Gamma\left(\sum_{i=2}^{n}\alpha_i+\beta+1\right)\Gamma(\alpha_1+1)}\right) \\ \\ + \frac{K\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\beta-\lambda+1)} \end{array}\right]$$

$$D2 = \left(r_0 + 2L'_f + L'_g + \frac{L'_g}{\Gamma(\rho+1)}\right) + \left(\begin{array}{c} \frac{1}{\Gamma\left(\sum_{i=2}^{n}\alpha_i+\beta-\delta+1\right)} + \frac{1}{\Gamma\left(\sum_{i=2}^{n}\alpha_i+\beta-\delta+1\right)\Gamma(\alpha_1+1)} \\ \\ + \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\sum_{i=2}^{n}\alpha_i+\beta+1\right)\Gamma(\beta-\delta+1)\Gamma(\alpha_1+1)} + \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\sum_{i=2}^{n}\alpha_i+\beta+1\right)\Gamma(\beta-\delta+1)} \end{array}\right)$$

$$+K\Gamma\,(1-\lambda)\left(\frac{1}{\Gamma(\beta-\delta-\lambda+1)} + \frac{1}{\Gamma(\beta-\lambda+1)}\right)$$

- Le premier résultat principal concerne l'existence d'une seule solution pour (2.4). Il est basé sur l'application du théorème du point fixe de Banach.

Théorème 2.8. *Si les conditions* $(Ai)i = 2, 3, 4$ *sont satisfiets et* $D < 1, D := max\{D1, D2\}$. *alors, le probleme (2.4) a une solution unique on* I.

- Le résultat principal suivant porte sur l'existence d'au moins une solution du problème étudié.

Théorème 2.9. *Sous les hypothèses* $(A1), (A3)et\ (A4)$, *le problème (2.4) a au moins une solution* $u(t), t \in I$.

2.6 Un problème différentiel fractionnaire singulier anti-périodique de type Lane-Emden

Dans ([24]), les auteurs ont aborder la question de l'existence et de l'unicité en utilisant les théorèmes classiques du point fixe du problème différentiel fractionnaire de type Lane Emden suivant:

$$\begin{cases} D^{\alpha}D^{\beta}z(t) + \frac{k}{t^{\lambda}}D^{\alpha}z(t) + a_1F\big(t, z(t), D^{\gamma}z(t), J^{p}z(t)\big) + a_2G\big(t, z(t), D^{\gamma}z(t)\big) \\ \qquad\qquad +a_3H\big(t, z(t)\big) = L(t). \\ z(0) + z(1) = 0, \qquad z'(0) + z'(1) = 0, \qquad D^{\gamma}(0) + D^{\gamma}(1) = 0, \\ k > 0, 1 \leq \beta \leq 2, \quad 0 \leq \gamma \leq \alpha \leq 1, \quad 0 < \lambda < 1, p > 0, t \in I. \end{cases} \tag{2.5}$$

Les dérivées sont de Caputo, l'intégrale J^p est du Riemann et Liouville et $F : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $G : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $H : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $L : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions.

Lemme 2.10. *Soit* $L_1 \in C^n(I)$, $t \in I$, $0 \leq \gamma \leq \alpha \leq 1, 1 < \beta < 2$. *Alors la solution du problème*

$$D^{\alpha}(D^{\beta})y(t) + (\frac{k}{t^{\lambda}})D^{\alpha}y(t) = L_1(t) \tag{2.6}$$

$$y(0) + y(1) = 0, \qquad y'(0) + y'(1) = 0, \qquad D^{\gamma}(0) + D^{\gamma}(1) = 0 \tag{2.7}$$

est donnée par l'equation intégrale suivante :

$$\left[\begin{array}{c} y(t)=\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[L_1(u)-\frac{k}{u^\lambda}D^\alpha y(u)\right]duds \\ +\left[K_1t^\beta+K_2t+K_3\right]\left[\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[L_1(u)-\frac{k}{u^\lambda}D^\alpha y(u)\right]duds\right] \\ +\left[K_4t^\beta+K_5t-K_6\right]\left[\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\beta-\gamma)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[L_1(u)-\frac{k}{u^\lambda}D^\alpha y(u)\right]duds\right] \\ [K_7]\left[\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[L_1(u)-\frac{k}{u^\lambda}D^\alpha y(u)\right]duds\right] \end{array}\right] \tag{2.8}$$

telles que

$$\left[K_1=\frac{\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\beta\left[\Gamma(\beta-\gamma+1)-2\Gamma(\beta)\Gamma(2-\gamma)\right]},K_2=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(2-\gamma)}{2\Gamma(\beta)\Gamma(2-\gamma)-\Gamma(\beta-\gamma+1)}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc} K_4=\frac{2\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\beta[\Gamma(\beta-\gamma+1)-2\Gamma(\beta)\Gamma(2-\gamma)]}, & K_3=\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)-\Gamma(\beta-\gamma+1)}{2\beta\Gamma(\beta-\gamma+1)-4\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)} \\ K_5=\frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\gamma+1)}{2\Gamma(\beta)\Gamma(2-\gamma)-\Gamma(\beta-\gamma+1)}, & K_6=\frac{2\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\gamma+1)-\beta\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\gamma+1)}{2\beta\Gamma(\beta-\gamma+1)-4\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)} \\ \multicolumn{2}{c}{K_7=\frac{\Gamma(\beta-\gamma+1)-2\Gamma(\beta)\Gamma(2-\gamma)}{2\Gamma(\beta-\gamma+1)-4\Gamma(\beta)\Gamma(2-\gamma)}} \end{array}\right]$$

En introduisant l'éspace de Banach suivant:

$$X:=\{y\in C^n(I,\mathbb{R}),D^\alpha y\in C^n(I,\mathbb{R}),D^\gamma y\in C(I,\mathbb{R})\}$$

muni de la norme suivante:$\| y \|_X=\max\{\| y \|_\infty,\| D^\alpha y \|_\infty,\| D^\gamma y \|_\infty\}$ telles que

$$\| x \|_\infty=\sup_{t\in I}\mid x(t)\mid,\qquad \| D^\alpha x \|_\infty=\sup_{t\in I}\mid D^\alpha x(t)\mid,\qquad \| D^\gamma x \|_\infty=\sup_{t\in I}\mid D^\gamma x(t)\mid .$$

Et, en définissant l'opérateur non linéaire: $\Phi : X \to X$

$$
\begin{aligned}
\Phi y(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \qquad (2.9)\\
&\times \begin{bmatrix} L(u) - a_1 F(u, y(u), D^\gamma y(u), J^p y(u)) - a_2 G(u, y(u), D^\gamma y(u)) \\ -a_3 H(u, y(u)) - \frac{k}{u^\lambda} D^\alpha y(u) \end{bmatrix} duds\\
&+ \left[K_1 t^\beta + K_2 t + K_3\right] \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\\
&\times \begin{bmatrix} L(u) - a_1 F(u, y(u), D^\gamma y(u), J^p y(u)) - a_2 G(u, y(u), D^\gamma y(u)) \\ -a_3 H(u, y(u)) - \frac{k}{u^\lambda} D^\alpha y(u) \end{bmatrix} duds\\
&+ \left[K_4 t^\beta + K_5 t - K_6\right] \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\beta-\gamma)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\\
&\times \begin{bmatrix} L(u) - a_1 F(u, y(u), D^\gamma y(u), J^p y(u)) - a_2 G(u, y(u), D^\gamma y(u)) \\ -a_3 H(u, y(u)) - \frac{k}{u^\lambda} D^\alpha y(u) \end{bmatrix} duds\\
&- \left[K_7\right] \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\\
&\times \begin{bmatrix} L(u) - a_1 F(u, y(u), D^\gamma y(u), J^p y(u)) - a_2 G(u, y(u), D^\gamma y(u)) \\ -a_3 H(u, y(u)) - \frac{k}{u^\lambda} D^\alpha y(u) \end{bmatrix} duds.
\end{aligned}
$$

Pour établir l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.5), ont considèrer les hypothèses suivantes:

(HL$_1$): Il existe des constantes positives $W_i, i = 1...6$, telle que pour chaque $t \in I$ et $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ on a

$$
\begin{aligned}
|F(t, x_1, x_2, x_3) - F(t, y_1, y_2, y_3))| &\leq \begin{pmatrix} W_1|x_1 - y_1| + W_2|x_2 - y_2| \\ +W_3|x_3 - y_3| \end{pmatrix}.\\
|G(t, x_1, x_2) - G(t, y_1, y_2))| &\leq W_4|x_1 - y_1| + W_5|x_2 - y_2|.\\
|H(t, x_1) - H(t, y_1)| &\leq W_6|x_1 - y_1|.
\end{aligned}
$$

(HL$_2$): Les fonctions $F : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $G : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $H : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $L : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

(HL$_3$): Il existe des constantes positives E_1, E_2 et E_3, telle que pour chaque $t \in I$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, on a: $|F(t, x_1, x_2, x_3)| \leq E_1, \quad |G(t, x_1, x_2)| \leq E_2, \quad |H(t, x_1)| \leq E_3$.

(HL$_4$): La fonction L donnée est supposée satisfaire $\|L\|_\infty = E_L$.

Afin de faciliter la preuve des principaux résultats, ont noter:

$$N_1 = \left[\begin{array}{c} (a_1 W_{1,2} + a_2 W_{4,5} + a_3 W_6) \left(\begin{array}{c} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \\ \frac{|K_1|+|K_2|+|K_3|}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \\ \frac{|K_4|+|K_5|+|K_6|}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)} \end{array} \right) \\ \\ + a_1 W_3 \left(\begin{array}{c} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\alpha+\beta+p+1)} + \\ \frac{|K_1|+|K_2|+|K_3|}{\Gamma(\alpha+\beta+p)} + \\ \frac{|K_4|+|K_5|+|K_6|}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+p+1)} \end{array} \right) + |k|\Gamma(1-\lambda) \left(\begin{array}{c} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\alpha+\beta-\lambda+1)} + \\ \frac{|K_1|+|K_2|+|K_3|}{\Gamma(\alpha+\beta-\lambda)} + \\ \frac{|K_4|+|K_5|+|K_6|}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma-\lambda+1)} \end{array} \right) \end{array} \right]$$

$$N_2 = \left[\begin{array}{c} (a_1 W_{1,2} + a_2 W_{4,5} + a_3 W_6) \left(\begin{array}{c} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\beta+1)} + \\ \frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\alpha)+|K_2|\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)} + \\ \frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\alpha)+|K_5|\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)} \end{array} \right) \\ \\ + a_1 W_3 \left(\begin{array}{c} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\beta+p+1)} + \\ \frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\alpha)+|K_2|\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+p)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)} + \\ \frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\alpha)+|K_5|\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\gamma+p+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)} \end{array} \right) \\ \\ + |k|\Gamma(1-\lambda) \left(\begin{array}{c} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\beta-\lambda+1)} + \\ \frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\alpha)+|K_2|\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\lambda)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)} + \\ \frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\alpha)+|K_5|\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\gamma-\lambda+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)} \end{array} \right) \end{array} \right]$$

$$N_3 = \left[\begin{array}{c} (a_1W_{1,2} + a_2W_{4,5} + a_3W_6) \left(\begin{array}{c} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)} + \\ \frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)+|K_2|\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)} + \\ \frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)+|K_5|\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-2\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)} \end{array} \right) \\ +a_1W_3 \left(\begin{array}{c} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+p+1)} + \\ \frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)+|K_2|\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+p)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)} + \\ \frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)+|K_5|\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-2\gamma+p+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)} \end{array} \right) \\ +|k|\Gamma(1-\lambda) \left(\begin{array}{c} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma-\lambda+1)} + \\ \frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)+|K_2|\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma-\lambda)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)} + \\ \frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)+|K_5|\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-2\gamma-\lambda+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)} \end{array} \right) \end{array} \right]$$

telles que, $W_{1,2} := \max(W_1, W_2), \qquad W_{4,5} := \max(W_4, W_5).$

- Le premier résultat obtenu est basé sur l'application du théorème de point fixe de Banach.

Théorème 2.11. *Supposons que l"hypothèse* (HL_1) *et l'inégalité*

$$0 < N < 1; N = max(N_1, N_2, N_3) \tag{2.10}$$

sont satisfaites. Alors, le problème(2.5) admet une solution unique sur I.

- Le deuxième résultat est basé sur le théorème de point fixe de Schaefer

Théorème 2.12. *Supposons que les hypothèses* $(HL_2), (HL_3)$ *et* (HL_4) *sont satisfaites. Alors le problème(2.5) admet au moins une solution sur* I.

CHAPITRE 3

Nouveau problème différentiel fractionnaire de type Lane-Emden

Dans ce chapitre, nous aborderons la question de l'existence et de l'unicité en utilisant les théorèmes classiques du point fixe du problème différentiel fractionnaire de type Lane Emden suivant:

$$\begin{cases} D^{\alpha}D^{\beta}z(t)+\frac{k}{t^{\lambda}}D^{\alpha}z(t)+a_1F\big(t,z(t),D^{\gamma}z(t),J^{p}z(t)\big)+a_2G\big(t,z(t),D^{\gamma}z(t)\big)+a_3H\big(t,z(t)\big)=L(t). \\ z(0)+z(1)=0, \qquad z'(0)+z'(1)=0, \\ k>0, 0<\beta\leq 1, \quad 0<\gamma\leq\alpha\leq 1, \quad 0<\lambda<1, p>0, t\in I. \end{cases} \tag{3.1}$$

Les dérivées sont de Caputo, l'intégrale J^p est du Riemann et Liouville et $F : I\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $G : I\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $H : I\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $L : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions.

Il est à remarquer que dans ce problème ::

1-On a pris les dérivées des deux côtés du problème. L'intégrale au sens de Riemann et de Liouville est aussi prise dans l'équation.

2-On remarquera aussi que l'on a pris plus d'un paramètre de différenciation; cela nous permet de prendre un problème nouveau et compliqué qui ne satisfait pas la commutativité ni la propriété de semi-groupe.

3- Une autre particularité est d'introduire des phénomènes de singularité au voisinage de $t = 0$.

4- Le "modèle" présenté dans [19] peut être vu comme un cas particulier du problème(3.1) sous des valeurs particulières des paramètres considérés.

3.1 Existence et unicité de solutions

Définition 3.1. *Une fonction $y \in C^n(I,\mathbb{R})$ est dite une solution du problème de type Lane-Emden (3.1) si y satisfait l'´equation suivante:*

$$D^{\alpha}D^{\beta}y(t)+\frac{k}{t^{\lambda}}D^{\alpha}y(t)+a_1F\big(t,y(t),D^{\gamma}y(t),J^{p}y(t)\big)+a_2G\big(t,y(t),D^{\gamma}y(t)\big)+a_3H\big(t,y(t)\big)=L(t)$$

sous les conditions:

$$\begin{cases} y(0)+y(1)=0, \quad y'(0)+y'(1)=0, \\ k>0, 0<\beta<1, \quad 0<\gamma\leq\alpha<1, 1<\alpha+\beta\leq 2, \quad 0<\lambda<1, p>0, t\in[0,1]. \end{cases}.$$

On démontre le lemme suivant qui est important pour établir la solution intégrale du problème de type Lane-Emden (3.1).

Lemme 3.2. *Soit $L_1 \in C^n(I)$, $t \in I$, $0<\gamma\leq\alpha<1, 0<\beta<1$. Alors la solution de l'équation:*

$$D^{\alpha}(D^{\beta})y(t)+(\frac{k}{t^{\lambda}})D^{\alpha}y(t)=L_1(t). \tag{3.2}$$

Avec

$$L_1(t)=L(t)-a_1F\big(t,y(t),D^{\gamma}y(t),J^{p}y(t)\big)-a_2G\big(t,y(t),D^{\gamma}y(t)\big)-a_3H\big(t,y(t)\big)$$

sous les conditions:

$$y(0)+y(1)=0, \qquad y'(0)+y'(1)=0. \tag{3.3}$$

est donnée par l'equation intégrale suivante:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[L_1(u)-(\frac{k}{u^{\lambda}})D^{\alpha}y(u)\right] duds \\ &+\left(\frac{1-t^{\beta}}{\beta}\right) \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[L_1(u)-(\frac{k}{u^{\lambda}})D^{\alpha}y(u)\right] duds \\ &-\int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[L_1(u)-(\frac{k}{u^{\lambda}})D^{\alpha}y(u)\right] duds \end{aligned}$$

Preuve. On suppose que y satisfait l'équation (3.2), en appliquant le lemme (1.19) et (1.20) comme suit:

$$\begin{aligned} D^{\alpha}(D^{\beta})y(t)+(\tfrac{k}{t^{\lambda}})D^{\alpha}y(t)=L_1(t) &\Rightarrow D^{\alpha}(D^{\beta})y(t)=L_1(t)-(\tfrac{k}{t^{\lambda}})D^{\alpha}y(t) \\ &\Rightarrow I^{\alpha}D^{\alpha}(D^{\beta})y(t)=I^{\alpha}\left(L_1(t)-(\tfrac{k}{t^{\lambda}})D^{\alpha}y(t)\right),0<\alpha<1 \\ &\Rightarrow D^{\beta}y(t)+C_0=I^{\alpha}\left(L_1(t)-(\tfrac{k}{t^{\lambda}})D^{\alpha}y(t)\right) \\ &\Rightarrow D^{\beta}y(t)=I^{\alpha}\left(L_1(t)-(\tfrac{k}{t^{\lambda}})D^{\alpha}y(t)\right)-C_0.....(*) \end{aligned},$$

En appliquant l'opérateur d'integration d'ordre β a l'équation $(*)$ comme suit:

$$\begin{aligned} (*) &\Longleftrightarrow I^{\beta}D^{\beta}y(t)=I^{\beta}I^{\alpha}\left(L_1(t)-(\tfrac{k}{t^{\lambda}})D^{\alpha}y(t)\right)-I^{\beta}\left(C_0\right),0<\beta<1 \\ &\Longleftrightarrow y\left(t\right)+C_1=I^{\beta}I^{\alpha}\left(L_1(t)-(\tfrac{k}{t^{\lambda}})D^{\alpha}y(t)\right)-I^{\beta}\left(C_0\right) \\ &\Longleftrightarrow y\left(t\right)=I^{\beta}I^{\alpha}\left(L_1(t)-(\tfrac{k}{t^{\lambda}})D^{\alpha}y(t)\right)-\tfrac{C_0t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}-C_1 \end{aligned}$$

Par conséquent la solution générale de (3.2) est donnée par:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[L_1(u)-\frac{k}{u^{\lambda}}D^{\alpha}y(u)\right]duds \\ &\quad -\frac{C_0t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}-C_1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

En utilisant les conditions conditions initiales (3.3),

1- Pour la condition $y(0)+y(1)=0$:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(1) &= \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma\left(\beta\right)}\int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[L_1(u)-(\frac{k}{u^{\lambda}})D^{\alpha}y(u)\right]duds-\frac{c_0}{\Gamma(\beta+1)}-c_1 \end{aligned}$$

Alors

$$y(0)+y(1)=0 \iff \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma\left(\beta\right)}\int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[L_1(u)-(\frac{k}{u^{\lambda}})D^{\alpha}y(u)\right]duds-\frac{c_0}{\Gamma(\beta+1)}-c_1...(1)$$

Et si on pose :

$$K_1=\int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma\left(\beta\right)}\int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[L_1(u)-(\frac{k}{u^{\lambda}})D^{\alpha}y(u)\right]duds$$

Alors :

$$(1)\Longleftrightarrow K1-\frac{c_0}{\Gamma(\beta+1)}-c_1=0$$

2- Pour la condition $y'(0)+y'(1)=0$:

$$\text{Comme} \quad y(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[L_1(u) - \frac{k}{u^\lambda} D^\alpha y(u) \right] duds - \frac{c_0 t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} - c_1.$$

$$\Longrightarrow (y(t))' = \begin{pmatrix} \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[L_1(u) - (\frac{k}{u^\lambda}) D^\alpha y(u) \right] duds \\ -\frac{c_0 t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} - c_1 \end{pmatrix}'$$

$$\Longrightarrow (y(t))' = \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} \int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[L_1(u) - (\frac{k}{u^\lambda}) D^\alpha y(u) \right] duds - \frac{\beta C_0 t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta+1)}$$

$$\text{Alors} \quad y'(0) = 0 \quad \text{et}$$

$$y'(1) = \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} \int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[L_1(u) - (\frac{k}{u^\lambda}) D^\alpha y(u) \right] duds - \frac{\beta C_0}{\Gamma(\beta+1)}$$

Par conséquent :

$$y'(0)+y'(1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} \int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[L_1(u) - (\frac{k}{u^\lambda}) D^\alpha y(u) \right] duds - \frac{\beta C_0}{\Gamma(\beta+1)} = 0 ... (2)$$

Si on pose :

$$K_2 = \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} \int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[L_1(u) - (\frac{k}{u^\lambda}) D^\alpha y(u) \right] duds$$

Alors:

$$(2) \Longleftrightarrow K_2 - \frac{\beta C_0}{\Gamma(\beta+1)} = 0$$

Et si on pose aussi

$$A_1 = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}, A_2 = \frac{\beta}{\Gamma(\beta+1)}, .$$

Alors de (1) et (2) on trouve: $\begin{cases} C_0 = \frac{K_2}{A_2} \\ C_1 = K_1 - \frac{K_2}{\beta} \end{cases}$

En remplaçant c_0 et c_1 dans (3.4) on obtient l'équation (2.8).

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[L_1(u) - (\frac{k}{u^\lambda}) D^\alpha y(u) \right] duds \\ &+ \left(\frac{1-t^\beta}{\beta} \right) \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} \int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[L_1(u) - (\frac{k}{u^\lambda}) D^\alpha y(u) \right] duds \\ &- \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[L_1(u) - (\frac{k}{u^\lambda}) D^\alpha y(u) \right] \end{aligned}$$

□

On introduit l'éspace de Banach suivant:

$$X := \{ y \in C^n(I, \mathbb{R}), D^\alpha y \in C^n(I, \mathbb{R}), D^\gamma y \in C^n(I, \mathbb{R}) \}$$

muni de la norme suivante:$\| y \|_X = \max\{ \| y \|_\infty, \| D^\alpha y \|_\infty, \| D^\gamma y \|_\infty \}$ telles que:

$$\| x \|_\infty = \sup_{t \in I} | x(t) |, \qquad \| D^\alpha x \|_\infty = \sup_{t \in I} | D^\alpha x(t) |, \qquad \| D^\gamma x \|_\infty = \sup_{t \in I} | D^\gamma x(t) | .$$

Et, on définie l'opérateur non linéaire $\Phi : X \to X$ par:

$$\begin{aligned} \Phi y(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ &\times \left[\begin{array}{c} L(u) - a_1 F(u, y(u), D^\gamma y(u), J^p y(u)) - a_2 G(u, y(u), D^\gamma y(u)) \\ -a_3 H(u, y(u)) - \frac{k}{u^\lambda} D^\alpha y(u) \end{array} \right] duds \\ &- \left(\frac{1-t^\beta}{\beta} \right) \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} \int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ &\times \left[\begin{array}{c} L(u) - a_1 F(u, y(u), D^\gamma y(u), J^p y(u)) - a_2 G(u, y(u), D^\gamma y(u)) \\ -a_3 H(u, y(u)) - \frac{k}{u^\lambda} D^\alpha y(u) \end{array} \right] duds \\ &- \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ &\times \left[\begin{array}{c} L(u) - a_1 F(u, y(u), D^\gamma y(u), J^p y(u)) - a_2 G(u, y(u), D^\gamma y(u)) \\ -a_3 H(u, y(u)) - \frac{k}{u^\lambda} D^\alpha y(u) \end{array} \right] duds \end{aligned}$$

Pour établir l'existence et l'unicité de la solution du problème(3.1), on considère les hypothèses suivantes:

(H$_1$): Il existe des constantes positives $W_i, i = 1...6$, telle que pour chaque $t \in I$ et $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ on a:

$$\begin{aligned} |F(t,x_1,x_2,x_3) - F(t,y_1,y_2,y_3))| &\leq \begin{pmatrix} W_1|x_1-y_1| + W_2|x_2-y_2| \\ +W_3|x_3-y_3| \end{pmatrix}. \\ |G(t,x_1,x_2) - G(t,y_1,y_2))| &\leq W_4|x_1-y_1| + W_5|x_2-y_2|. \\ |H(t,x_1) - H(t,y_1)| &\leq W_6|x_1-y_1|. \end{aligned}$$

(H$_2$): Les fonctions $F : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $G : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $H : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $L : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

(H$_3$): Il existe des constantes positives E_1, E_2 et E_3, telle que pour chaque $t \in I, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, on a:

$$|F(t,x_1,x_2,x_3)| \leq E_1, \quad |G(t,x_1,x_2)| \leq E_2, \quad |H(t,x_1)| \leq E_3.$$

(H$_4$): La fonction L donnée est supposée satisfaire $\|L\|_\infty = E_L$.

Afin de faciliter la preuve des principaux résultats, on note:

$$M_1 = \begin{bmatrix} (a_1W_1 + a_2W_4)\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ +(a_1W_2 + a_2W_5)\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)} \\ (a_1W_3 + a_3W_6)\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+p+1)} \\ +|k|\frac{\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\beta-\lambda+1)} \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} (a_1W_1 + a_2W_4)\frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \\ +(a_1W_2 + a_2W_5)\frac{1}{\Gamma(\beta-\gamma+1)} \\ (a_1W_3 + a_3W_6)\frac{1}{\Gamma(\beta+p+1)} \\ +|k|\frac{\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\alpha+\beta-\lambda+1)} \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} (a_1W_1 + a_2W_4)\frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \\ +(a_1W_2 + a_2W_5)\frac{1}{\Gamma(\beta-\gamma+1)} \\ (a_1W_3 + a_3W_6)\frac{1}{\Gamma(\beta+p+1)} \\ +|k|\frac{\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\alpha+\beta-\lambda+1)} \end{bmatrix}$$

3.1.1 Unicité de solutions

Notre premier résultat est basé sur l'application du théorème de point fixe de Banach.

Théorème 3.3. *Supposons que l"hypothèse* (HL_1) *et l'inégalité*

$$0 < M < 1; M = max(M_1, M_2, M_3) \tag{3.5}$$

sont satisfaites. Alors, le problème de type Lane-Emden (3.1) admet une solution unique sur I*.*

Preuve. En appliquant le principe de contraction de Banach, on va montrer que Φ est une application contractante.

A: Soit $x, y \in X$. Alors on a:

$$\begin{aligned}
|\Phi y(t) - \Phi x(t)| \leq\ & a_1 \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left| \begin{array}{c} F(u, y(u), D^\gamma y(u), J^p y(u)) \\ -F(u, x(u), D^\gamma x(u), J^p x(u)) \end{array} \right| duds \\
& + a_2 \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |G(u, y(u), D^\gamma y(u)) - G(u, x(u), D^\gamma x(u))| \, duds \\
& + a_3 \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |H(u, y(u)) - H(u, x(u))| \, duds \\
& + |k| \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{u^\lambda} |D^\alpha y(u) - D^\alpha x(u)| \, duds \\
& + a_1 \left(\frac{1-t^\beta}{\beta} \right) \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} \int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left| \begin{array}{c} F(u, y(u), D^\gamma y(u), J^p y(u)) \\ -F(u, x(u), D^\gamma x(u), J^p x(u)) \end{array} \right| duds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_2 \left(\frac{1-t^\beta}{\beta} \right) \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} \int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |G(u, y(u), D^\gamma y(u)) - G(u, x(u), D^\gamma x(u))| \\
& + a_3 \left(\frac{1-t^\beta}{\beta} \right) \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} \int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |H(u, y(u)) - H(u, x(u))| \, duds \\
& + \left(\frac{1-t^\beta}{\beta} \right) \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} \int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |D^\alpha y(u) - D^\alpha x(u)| \, duds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
+ \quad & |k|\left(\frac{1-t^{\beta}}{\beta}\right)\int_0^1 \frac{(t-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)}\int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{u^{\lambda}}\left|D^{\alpha}y(u)-D^{\alpha}x(u)\right| duds \\
& -a_1\int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|F(u,y(u),D^{\gamma}y(u),J^{p}y(u))-F(u,x(u),D^{\gamma}x(u),J^{p}x(u))\right| duds \\
& -a_2\int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|G(u,y(u),D^{\gamma}y(u))-G(u,x(u),D^{\gamma}x(u))\right| duds \\
& -a_3\int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|H(u,y(u))-H(u,x(u))\right| duds \\
& +\int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|D^{\alpha}y(u)-D^{\alpha}x(u)\right| duds \\
& +|k|\int_0^1 \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{u^{\lambda}}\left|D^{\alpha}y(u)-D^{\alpha}x(u)\right| duds
\end{aligned}
$$

D'aprés l'hypothèse (H_1) on a pour chaque $t \in I$ l'inégalité suivante:

$$
\begin{aligned}
|\Phi y(t)-\Phi x(t)| \quad \leq \quad & a_1\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\begin{pmatrix} W_1|y(u)-x(u)| \\ +W_2|D^{\gamma}y(u)-D^{\gamma}x(u)| \\ +W_3|J^{p}y(u)-J^{p}x(u)| \end{pmatrix} duds \\
& +a_2\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\times \\
& \left(W_4|y(u)-x(u)|+W_5|D^{\gamma}y(u)-D^{\gamma}x(u)|\right) duds \\
& +a_3\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(W_6|y(u)-x(u)|\right) duds \\
& +|k|\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{u^{\lambda}}\left|D^{\alpha}y(u)-D^{\alpha}x(u)\right| duds
\end{aligned}
$$

$$+a_1\left(\frac{1-t^\beta}{\beta}\right)\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)}\int_1^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\times$$
$$(W_1|y(u)-x(u)|+W_2|D^\gamma y(u)-D^\gamma x(u)|+W_3|J^p y(u)-J^p x(u)|)\,duds$$
$$a_2\left(\frac{1-t^\beta}{\beta}\right)\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)}\int_1^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\times$$
$$(W_4|y(u)-x(u)|+W_5|D^\gamma y(u)-D^\gamma x(u)|)\,duds$$
$$a_3\left(\frac{1-t^\beta}{\beta}\right)\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)}\int_1^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(W_6|y(u)-x(u)|)\,duds$$
$$+|k|\left(\frac{1-t^\beta}{\beta}\right)\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)}\int_1^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{u^\lambda}|D^\alpha y(u)-D^\alpha x(u)|\,duds$$
$$-a_1\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_1^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\times$$
$$(W_1|y(u)-x(u)|+W_2|D^\gamma y(u)-D^\gamma x(u)|+W_3|J^p y(u)-J^p x(u)|)\,duds$$
$$-a_2\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_1^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\times$$
$$(W_4|y(u)-x(u)|+W_5|D^\gamma y(u)-D^\gamma x(u)|)\,duds$$
$$-a_3\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_1^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(W_6|y(u)-x(u)|)\,duds$$
$$-|k|\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_1^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{u^\lambda}|D^\alpha y(u)-D^\alpha x(u)|\,duds$$

$$\begin{aligned}|\Phi y(t)-\Phi x(t)| \;\leq\; & a_1W_1\int_0^t\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|y(u)-x(u)|duds\\ & +a_1W_2\int_0^t\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|D^\gamma y(u)-D^\gamma x(u)|duds\\ & a_1W_3\int_0^t\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|J^p y(u)-J^p x(u)|duds\\ & +a_2W_4\int_0^t\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|y(u)-x(u)|duds\end{aligned}$$

$$a_2W_5\int_0^t\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|D^{\gamma}y(u)-D^{\gamma}x(u)|duds$$

$$+a_3W_6\int_0^t\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|y\left(u\right)-x\left(u\right)|duds$$

$$+\left|k\right|\int_0^t\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{u^{\lambda}}\left|D^{\alpha}y(u)-D^{\alpha}x(u)\right|duds$$

$$a_1W_1\left(\frac{1-t^{\beta}}{\beta}\right)\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma\left(\beta\right)}\int_1^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(|y\left(u\right)-x\left(u\right)|\right)$$

$$a_1W_2\left(\frac{1-t^{\beta}}{\beta}\right)\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma\left(\beta\right)}\int_1^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(|D^{\gamma}y(u)-D^{\gamma}x(u)|\right)$$

$$a_1W_3\left(\frac{1-t^{\beta}}{\beta}\right)\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma\left(\beta\right)}\int_1^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(|J^{p}y(u)-J^{p}x(u)|\right)$$

$$a_2W_4\left(\frac{1-t^{\beta}}{\beta}\right)\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma\left(\beta\right)}\int_1^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(|y\left(u\right)-x\left(u\right)|\right)$$

$$+a_2W_5\left(\frac{1-t^{\beta}}{\beta}\right)\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma\left(\beta\right)}\int_1^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(|D^{\gamma}y(u)-D^{\gamma}x(u)|\right)$$

$$+a_3W_6\left(\frac{1-t^{\beta}}{\beta}\right)\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma\left(\beta\right)}\int_1^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(|J^{p}y(u)-J^{p}x(u)|\right)duds$$

$$+\left|k\right|\left(\frac{1-t^{\beta}}{\beta}\right)\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma\left(\beta\right)}\int_1^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{u^{\lambda}}\left|D^{\alpha}y(u)-D^{\alpha}x(u)\right|duds$$

$$+a_1W_1\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_1^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(|y(u)-x(u)|\right)duds$$

$$+a_1W_2\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_1^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(|D^{\gamma}y(u)-D^{\gamma}x(u)|\right)duds$$

$$+a_1W_3\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_1^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(J^{p}y(u)-J^{p}x(u)|\right)duds$$

$$+a_2W_4\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_1^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(|y(u)-x(u)|\right)duds$$

$$-a_2W_5\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_1^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|D^{\gamma}y(u)-D^{\gamma}x(u)|duds$$

$$-a_3W_6\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_1^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(|y(u)-x(u)|\right)duds$$

$$+|k|\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_1^s\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{u^{\lambda}}\left|D^{\alpha}y(u)-D^{\alpha}x(u)\right|duds$$

par conséquent:

$$\begin{aligned}|\Phi y(t)-\Phi x(t)| \;\leq\; & \begin{pmatrix} a_1W_1\frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ +a_1W_2\frac{t^{\alpha+\beta-\gamma}}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)} \\ +a_1W_3\frac{t^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\alpha+\beta+p+1)}\end{pmatrix}|y(u)-x(u)| \\ & +\begin{pmatrix} a_2W_4\frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ +a_2W_5\frac{t^{\alpha+\beta-\gamma}}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)} \\ +a_3W_6\frac{t^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\alpha+\beta+p+1)} \\ +|k|\frac{\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\beta-\lambda+1)}t^{\beta-\lambda}\end{pmatrix}|y(u)-x(u)|\end{aligned}$$

et

$$|\Phi y(t)-\Phi x(t)| \leq \begin{pmatrix} a_1W_1\sup_{t\in I}\frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ +a_1W_2\sup_{t\in I}\frac{t^{\alpha+\beta-\gamma}}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)} \\ +a_1W_3\sup_{t\in I}\frac{t^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\alpha+\beta+p+1)} \end{pmatrix}|y(u)-x(u)| + \begin{pmatrix} a_2W_4\sup_{t\in I}\frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ +a_2W_5\sup_{t\in I}\frac{t^{\alpha+\beta-\gamma}}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)} \\ +a_3W_6\sup_{t\in I}\frac{t^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\alpha+\beta+p+1)} \\ +|k|\sup_{t\in I}\frac{\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\beta-\lambda+1)}t^{\beta-\lambda} \end{pmatrix}|y(u)-x(u)|$$

Donc on a:

$$\begin{aligned}|\Phi y(t)-\Phi x(t)| \leq\ & a_1\begin{pmatrix} W_1\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+W_2\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)} \\ \\ +W_3\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+p+1)} \end{pmatrix}|y(u)-x(u)| \\ & +a_2\left(W_4\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+W_5\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}\right)|y(u)-x(u)| \\ & +\left(a_3W_6\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+p+1)}+|k|\frac{\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\beta-\lambda+1)}\right)|y(u)-x(u)|\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow |\Phi y(t)-\Phi x(t)| \leq \begin{pmatrix} (a_1W_1+a_2W_4)\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ +(a_1W_2+a_2W_5)\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)} \\ (a_1W_3+a_3W_6)\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+p+1)} \\ +|k|\frac{\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\beta-\lambda+1)} \end{pmatrix}|y(u)-x(u)|$$

Par Conséquent, l'inégalité vaut :

$$\| \Phi x-\Phi y \|_\infty \leq \begin{bmatrix} (a_1W_1+a_2W_4)\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ +(a_1W_2+a_2W_5)\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)} \\ (a_1W_3+a_3W_6)\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+p+1)} \\ +|k|\frac{\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\beta-\lambda+1)} \end{bmatrix} \| y-x \|_X$$

Ce qu'implique que:

$$\| \Phi y-\Phi x \|_\infty \leq M_1 \| y-x \|_X .$$

B: D'autre par On a :

$$D^{\alpha}\Phi y(t)=\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\left[\begin{array}{c} L(u)-a_1F(u,y(u),D^{\gamma}y(u),J^{p}y(u))- \\ a_2G(u,y(u),D^{\gamma}y(u))-a_3H(u,y(u))-\frac{k}{u^{\lambda}}D^{\alpha}y(u) \end{array}\right]ds$$

$$+$$

$$\left[\left(\frac{1-t^{\beta}}{\beta}\right)\right]\times\int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)}\left[\begin{array}{c} L(u)-a_1F(u,y(u),D^{\gamma}y(u),J^{p}y(u))- \\ a_2G(u,y(u),D^{\gamma}y(u))-a_3H(u,y(u))-\frac{k}{u^{\lambda}}D^{\alpha}y(u) \end{array}\right]ds$$

$$+$$

$$-\int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\left[\begin{array}{c} L(u)-a_1F(u,y(u),D^{\gamma}y(u),J^{p}y(u))- \\ a_2G(u,y(u),D^{\gamma}y(u))-a_3H(u,y(u))-\frac{k}{u^{\lambda}}D^{\alpha}y(u) \end{array}\right]ds$$

Par conséquent:

$$\begin{aligned}
|D^{\alpha}\Phi y(t)-D^{\alpha}\Phi x(t)| \;\leq\; & a_1W_1\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}|y(u)-x(u)|ds \\
& +a_1W_2\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}|D^{\gamma}y(u)-D^{\gamma}x(u)|ds \\
& +a_1W_3\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}|J^{p}y(u)-J^{p}x(u)|ds \\
& +a_2W_4\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}|y(u)-x(u)|ds \\
& a_2W_5\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}|D^{\gamma}y(u)-D^{\gamma}x(u)|ds \\
& +a_3W_6\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}|y(u)-x(u)|ds \\
& +|k|\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{u^{\lambda}}|D^{\alpha}y(u)-D^{\alpha}x(u)|ds \\
& a_1W_1\left(\frac{1-t^{\beta}}{\beta}\right)\int_0^1 \frac{(t-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)}(|y(u)-x(u)|)ds
\end{aligned}$$

$$a_1 W_2 \left(\frac{1-t^\beta}{\beta}\right) \int_0^1 \frac{(t-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} \left(|D^\gamma y(u) - D^\gamma x(u)|\right) ds$$

$$a_1 W_3 \left(\frac{1-t^\beta}{\beta}\right) \int_0^1 \frac{(t-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} \left(|J^p y(u) - J^p x(u)|\right) ds$$

$$a_2 W_4 \left(\frac{1-t^\beta}{\beta}\right) \int_0^1 \frac{(t-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} \left(|y\left(u\right) - x\left(u\right)|\right) ds$$

$$+a_2 W_5 \left(\frac{1-t^\beta}{\beta}\right) \int_0^1 \frac{(t-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} \left(|D^\gamma y(u) - D^\gamma x(u)|\right) ds$$

$$+a_3 W_6 \left(\frac{1-t^\beta}{\beta}\right) \int_0^1 \frac{(t-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} \left(|J^p y(u) - J^p x(u)|\right) ds$$

$$+|k| \left(\frac{1-t^\beta}{\beta}\right) \int_0^1 \frac{(t-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{u^\lambda} \left|D^\alpha y(u) - D^\alpha x(u)\right| ds$$

$$+a_1 W_1 \int_0^1 \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \left(|y\left(u\right) - x\left(u\right)|\right) ds$$

$$+a_1 W_2 \int_0^1 \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \left(|D^\gamma y(u) - D^\gamma x(u)|\right) ds$$

$$+a_1 W_3 \int_0^1 \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \left(J^p y(u) - J^p x(u)|\right) ds$$

$$+a_2 W_4 \int_0^1 \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \left(|y\left(u\right) - x\left(u\right)|\right) ds$$

$$-a_2 W_5 \int_0^1 \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} |D^\gamma y(u) - D^\gamma x(u)| ds$$

$$-a_3 W_6 \int_0^1 \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \left(|y\left(u\right) - x\left(u\right)|\right) ds$$

$$+|k| \int_0^1 \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{u^\lambda} \left|D^\alpha y(u) - D^\alpha x(u)\right| ds$$

Ce qui donne:

$$\| \quad D^{\alpha}\Phi y - D^{\alpha}\Phi x \|_{\infty} \leq \begin{bmatrix} a_1 \begin{pmatrix} W_1 \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} + W_2 \frac{1}{\Gamma(\beta-\gamma+1)} \\ \\ +W_3 \frac{1}{\Gamma(\beta+p+1)} \end{pmatrix} |y(u) - x(u)| \\ \\ +a_2 \left(W_4 \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} + W_5 \frac{1}{\Gamma(\beta-\gamma+1)} \right) |y(u) - x(u)| \\ \\ + \left(a_3 W_6 \frac{1}{\Gamma(\beta+p+1)} + |k| \frac{\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\beta-\lambda+1)} \right) |y(u) - x(u)| \end{bmatrix}$$

Par Conséquent, l'inégalité vaut :

$$\| D^{\alpha}\Phi y - D^{\alpha}\Phi x \|_{\infty} \leq \begin{bmatrix} (a_1 W_1 + a_2 W_4) \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \\ + (a_1 W_2 + a_2 W_5) \frac{1}{\Gamma(\beta-\gamma+1)} \\ (a_1 W_3 + a_3 W_6) \frac{1}{\Gamma(\beta+p+1)} \\ + |k| \frac{\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\alpha+\beta-\lambda+1)} \end{bmatrix} \| y - x \|_X$$

Ce qui implique que:

$$\| D^{\alpha}\Phi y - D^{\alpha}\Phi x \|_{\infty} \leq M_2 \| y - x \|_X .$$

C: Enfin, Comme:

$$D^{\gamma}\Phi y(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha+\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)} \times \begin{bmatrix} L(u) - a_1 F(u, y(u), D^{\gamma}y(u), J^{p}y(u)) \\ -a_2 G(u, y(u), D^{\gamma}y(u)) \\ -a_3 H(u, y(u)) - \frac{k}{u^{\lambda}} D^{\alpha}y(u) \end{bmatrix} ds$$

$$- \left[\left(\frac{1-t^{\beta}}{\beta} \right) \right] \times \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha+\beta-\gamma-2}}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma-1)} \times \begin{bmatrix} L(u) - a_1 F(u, y(u), D^{\gamma}y(u), J^{p}y(u)) \\ -a_2 G(u, y(u), D^{\gamma}y(u)) \\ -a_3 H(u, y(u)) - \frac{k}{u^{\lambda}} D^{\alpha}y(u) \end{bmatrix} ds$$

$$+ \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha+\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)} \times \begin{bmatrix} L(u) - a_1 F(u, y(u), D^{\gamma}y(u), J^{p}y(u)) \\ -a_2 G(u, y(u), D^{\gamma}y(u)) \\ -a_3 H(u, y(u)) - \frac{k}{u^{\lambda}} D^{\alpha}y(u) \end{bmatrix} ds$$

On peut voir que:

$$\| \quad D^{\gamma}\Phi y - D^{\gamma}\Phi x \|_{\infty} \leq \left[\begin{array}{c} a_1 \left(\begin{array}{c} W_1 \frac{1}{\Gamma(\beta+\gamma+1)} + W_2 \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \\ \\ +W_3 \frac{1}{\Gamma(\beta+p+\gamma+1)} \end{array} \right) |y(u) - x(u)| \\ \\ +a_2 \left(W_4 \frac{1}{\Gamma(\beta+\gamma+1)} + W_5 \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \right) |y(u) - x(u)| \\ \\ + \left(a_3 W_6 \frac{1}{\Gamma(\beta+p+\gamma+1)} + |k| \frac{\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\beta-\lambda+\gamma+1)} \right) |y(u) - x(u)| \end{array} \right]$$

Par conséquent:

$$\| D^{\gamma}\Phi y - D^{\gamma}\Phi x \|_{\infty} \leq \left(\begin{array}{c} (a_1 W_1 + a_2 W_4) \frac{1}{\Gamma(\beta+\gamma+1)} \\ + (a_1 W_2 + a_2 W_5) \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \\ (a_1 W_3 + a_3 W_6) \frac{1}{\Gamma(\beta+p+\gamma+1)} \\ + |k| \frac{\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\beta-\lambda+\gamma+1)} \end{array} \right) |y(u) - x(u)|$$

On obtient l'inégalité suivante:

$$\| D^{\gamma}\Phi y - D^{\gamma}\Phi x \|_{\infty} \leq \left[\begin{array}{c} (a_1 W_1 + a_2 W_4) \frac{1}{\Gamma(\beta+\gamma+1)} \\ + (a_1 W_2 + a_2 W_5) \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \\ (a_1 W_3 + a_3 W_6) \frac{1}{\Gamma(\beta+p+\gamma+1)} \\ + |k| \frac{\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\beta+\gamma-\lambda+1)} \end{array} \right] \| y - x \|_X$$

Alors:

$$\| D^{\gamma}\Phi y - D^{\gamma}\Phi x \|_{\infty} \leq M_3 \| y - x \|_X .$$

Grâce aux étapes A, B et C ci-dessus, on peut conclure que Φ est contractante et suite au principe de contraction de Banach, on déduit que Φ admet un point fixe unique qui est l'unique solution du problème de type Lane-Emden (3.1) □

3.1.2 Existence de solutions

Le deuxième résultat est basé sur le théorème de point fixe de Schaefer.

Théorème 3.4. *Supposons que les hypothèses* $(H_2), (H_3)$ *et* (H_4) *sont satisfaites. Alors le problème (3.1) admet au moins une solution sur* I*.*

Preuve. Soit l'opérateur $\Phi y(t)$ définie par:

$$\begin{aligned}
\Phi y(t) \;=\; & \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\
& \times \left[\begin{array}{c} L(u) - a_1 F(u, y(u), D^{\gamma} y(u), J^{p} y(u)) - a_2 G(u, y(u), D^{\gamma} y(u)) \\ -a_3 H(u, y(u)) - \frac{k}{u^{\lambda}} D^{\alpha} y(u) \end{array} \right] duds \\
& - \left(\frac{1-t^{\beta}}{\beta} \right) \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} \int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\
& \times \left[\begin{array}{c} L(u) - a_1 F(u, y(u), D^{\gamma} y(u), J^{p} y(u)) - a_2 G(u, y(u), D^{\gamma} y(u)) \\ -a_3 H(u, y(u)) - \frac{k}{u^{\lambda}} D^{\alpha} y(u) \end{array} \right] duds \\
& - \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\
& \times \left[\begin{array}{c} L(u) - a_1 F(u, y(u), D^{\gamma} y(u), J^{p} y(u)) - a_2 G(u, y(u), D^{\gamma} y(u)) \\ -a_3 H(u, y(u)) - \frac{k}{u^{\lambda}} D^{\alpha} y(u) \end{array} \right] duds
\end{aligned}$$

La preuve est présentée par les étapes suivantes

A1: On montre que Φ est un opérateur continu sur X.

Comme les fonctions $F : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $G : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $H : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $L : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, alors Φ est un opérateur continu sur X.

A2: On montre maintenant que l'opérateur Φ est uniformément bornée sur X.

Soit $B_r := \{x \in X, \|x\|_X \leq r\}$. Si $y \in B_r$, alors grâce à (H_3) et (H_4), comme:

$$\|\Phi y\|_{\infty} = \sup_{t \in I} \mid \Phi y\,(t) \mid .$$

on peut écrire alors:

$$\begin{aligned}
\|\Phi y\|_{\infty} &= \sup_{t\in I} \mid \Phi y\,(t) \mid \leq a_1 \sup_{t\in I} \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left|F(u,y(u),D^{\gamma}y(u),J^{p}y(u))\right| duds \\
&+a_2 \sup_{t\in I} \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left|G(u,y(u),D^{\gamma}y(u))\right| duds \\
&+a_3 \sup_{t\in I} \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left|H(u,y(u))\right| duds \\
&+|k| \sup_{t\in I} \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{u^{\lambda}} \left|D^{\alpha}y(u)\right| duds \\
&+a_1 \sup_{t\in I} \left(\frac{1-t^{\beta}}{\beta}\right) \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma\left(\beta\right)} \int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left|F(u,y(u),D^{\gamma}y(u),J^{p}y(u))\right| duds \\
&+a_2 \sup_{t\in I} \left(\frac{1-t^{\beta}}{\beta}\right) \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma\left(\beta\right)} \int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left|G(u,y(u),D^{\gamma}y(u))\right| \\
&+a_3 \sup_{t\in I} \left(\frac{1-t^{\beta}}{\beta}\right) \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma\left(\beta\right)} \int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left|H(u,y(u))\right| duds \\
&|k| \sup_{t\in I} \left(\frac{1-t^{\beta}}{\beta}\right) \int_0^1 \frac{(t-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{u^{\lambda}} \left|D^{\alpha}y(u)\right| duds \\
&-a_1 \sup_{t\in I} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma\left(\beta\right)} \int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left|F(u,y(u),D^{\gamma}y(u),J^{p}y(u))\right| duds \\
&-a_2 \sup_{t\in I} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma\left(\beta\right)} \int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left|G(u,y(u),D^{\gamma}y(u))\right| duds \\
&-a_3 \sup_{t\in I} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma\left(\beta\right)} \int_1^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left|H(u,y(u))\right| duds \\
&+|k| \sup_{t\in I} \int_0^1 \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{u^{\lambda}} \left|D^{\alpha}y(u)-D^{\alpha}x(u)\right| duds
\end{aligned}$$

$$\|\Phi y\|_{\infty} \leq \left[E_L + a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3\right] \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\right] + |k| \left[\frac{\Gamma\left(1-\lambda\right)}{\Gamma\left(\beta-\lambda+1\right)}\right] < +\infty \quad (3.6)$$

D'autre part ona:

$$\begin{aligned}
|D^{\alpha}\Phi y(t)| \leq\ & a_1 W_1 \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} |y(u)|ds \\
& + a_1 W_2 \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} |D^{\gamma}y(u)|ds \\
& + a_1 W_3 \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} |J^{p}y(u)|ds \\
& + a_2 W_4 \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} |y(u)|ds \\
& a_2 W_5 \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} |D^{\gamma}y(u)|ds \\
& + a_3 W_6 \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} |y(u)|ds \\
& + |k| \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{u^{\lambda}} |D^{\alpha}y(u)| ds \\
& a_1 W_1 \left(\frac{1-t^{\beta}}{\beta}\right) \int_0^1 \frac{(t-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} (|y(u)|) ds \\
& a_1 W_2 \left(\frac{1-t^{\beta}}{\beta}\right) \int_0^1 \frac{(t-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} (|D^{\gamma}y(u)|) ds \\
& a_1 W_3 \left(\frac{1-t^{\beta}}{\beta}\right) \int_0^1 \frac{(t-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} (|J^{p}y(u)|) ds
\end{aligned}$$

$$a_2W_4\left(\frac{1-t^\beta}{\beta}\right)\int_0^1\frac{(t-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)}\left(|y\left(u\right)|\right)ds$$

$$+a_2W_5\left(\frac{1-t^\beta}{\beta}\right)\int_0^1\frac{(t-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)}\left(|D^\gamma y(u)|\right)ds$$

$$+a_3W_6\left(\frac{1-t^\beta}{\beta}\right)\int_0^1\frac{(t-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)}\left(|J^p y(u)|\right)ds$$

$$+|k|\left(\frac{1-t^\beta}{\beta}\right)\int_0^1\frac{(t-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{u^\lambda}\left|D^\alpha y(u)\right|ds$$

$$+a_1W_1\int_0^1\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\left(|y\left(u\right)|\right)ds$$

$$+a_1W_2\int_0^1\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\left(|D^\gamma y(u)|\right)ds$$

$$+a_1W_3\int_0^1\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\left(J^p y(u)|\right)ds$$

$$+a_2W_4\int_0^1\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\left(|y\left(u\right)|\right)ds$$

$$-a_2W_5\int_0^1\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}|D^\gamma y(u)|ds$$

$$-a_3W_6\int_0^1\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\left(|y\left(u\right)|\right)ds$$

$$+|k|\int_0^1\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{u^\lambda}\left|D^\alpha y(u)\right|ds$$

$$
\begin{aligned}
\left\|D^{\alpha}\Phi y\right\|_{\infty} &= \sup_{t\in I}\left|D^{\alpha}\Phi y\right| \\
\sup_{t\in I}\left|D^{\alpha}\Phi y\right| &\leq a_1E_1\sup_{t\in I}\int_0^t\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}ds \\
&\quad +a_2E_2\sup_{t\in I}\int_0^t\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}ds \\
&\quad +a_3E_3\sup_{t\in I}\int_0^t\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}ds \\
&\quad +|k|\sup_{t\in I}\int_0^t\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{u^{\lambda}}\left|D^{\alpha}y(u)\right|ds \\
&\quad +a_1E_1\sup_{t\in I}\left(\frac{1-t^{\beta}}{\beta}\right)\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma\left(\beta\right)}ds \\
&\quad +a_2E_2\sup_{t\in I}\left(\frac{1-t^{\beta}}{\beta}\right)\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma\left(\beta\right)}ds \\
&\quad +a_3E_3\sup_{t\in I}\left(\frac{1-t^{\beta}}{\beta}\right)\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma\left(\beta\right)}ds \\
&\quad |k|\sup_{t\in I}\left(\frac{1-t^{\beta}}{\beta}\right)\int_0^1\frac{(t-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{u^{\lambda}}\left|D^{\alpha}y(u)\right|ds \\
&\quad -a_1E_1\sup_{t\in I}\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma\left(\beta\right)}ds-a_2E_2\sup_{t\in I}\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma\left(\beta\right)}ds \\
&\quad -a_3E_3\sup_{t\in I}\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma\left(\beta\right)}ds \\
&\quad +|k|\sup_{t\in I}\int_0^1\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{u^{\lambda}}\left|D^{\alpha}y(u)\right|ds
\end{aligned}
$$

$$
\left\|D^{\alpha}\Phi y\right\|_{\infty}\leq\left[E_L+a_1E_1+a_2E_2+a_3E_3\right]\left[\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right]+|k|\left[\frac{\Gamma\left(1-\lambda\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta-\lambda+1\right)}\right]<+\infty \tag{3.7}
$$

D'une manière similaire ona:

$$\begin{aligned} \left\|D^{\gamma}\Phi y\right\|_{\infty} &\leq [E_L + a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3] \times \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma 1)}\right] \quad (3.8) \\ +|k| \left[\frac{\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\gamma+\beta-\lambda+1)}\right] &< +\infty \end{aligned}$$

Ainsi, de (3.6) ,(3.7) et (3.8), on en déduit que $\left\|\Phi y\right\|_X < +\infty$.On conclut alors que Φ est uniformément borné sur B_r.**A3:** On montre que Φ est complètement continu dans X. **A3:** Soient $t_1, t_2 \in [0,1]$, $t_1 < t_2$ et soit B_r un ensemble borné de X. Alors pour $y \in B_r$ et pour tout $t \in [0,1]$, on a:

$$\begin{aligned} \Phi y(t_1) - \Phi y(t_2) &= \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\beta-1} - (t_2-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^{s} \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ &\times \left[\begin{array}{c} L(u) - a_1F(u,y(u),D^{\gamma}y(u),J^{p}y(u)) - a_2G(u,y(u),D^{\gamma}y(u)) \\ -a_3H(u,y(u)) - \frac{k}{u^{\lambda}}D^{\alpha}y(u) \end{array}\right] duds \\ &- \left[\left(\frac{1-t_1^{\beta}}{\beta}\right) - \left(\frac{1-t_2^{\beta}}{\beta}\right)\right] \int_0^{1} \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} \int_1^{s} \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ &\times \left[\begin{array}{c} L(u) - a_1F(u,y(u),D^{\gamma}y(u),J^{p}y(u)) - a_2G(u,y(u),D^{\gamma}y(u)) \\ -a_3H(u,y(u)) - \frac{k}{u^{\lambda}}D^{\alpha}y(u) \end{array}\right] duds \\ &+ \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^{s} \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right. \\ &\times \left.\left[\begin{array}{c} L(u) - a_1F(u,y(u),D^{\gamma}y(u),J^{p}y(u)) - a_2G(u,y(u),D^{\gamma}y(u)) \\ -a_3H(u,y(u)) - \frac{k}{u^{\lambda}}D^{\alpha}y(u) \end{array}\right] duds\right. \end{aligned}$$

D'aprés $(H3)$ et $(H4)$ on déduit que:

$$
\begin{aligned}
|\Phi y(t_1)-\Phi y(t_2)| \;\leq\; & \begin{pmatrix} E_L+a_1E_1 \\ +a_2E_2+a_3E_3 \end{pmatrix} \int_0^{t_1} \frac{\begin{vmatrix} (t_1-s)^{\beta-1} \\ -(t_2-s)^{\beta-1} \end{vmatrix}}{\Gamma(\beta)} \int_0^{s} \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} duds \qquad (3.9)\\
& + |k| \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\beta-1}-(t_2-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^{s} \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{|D^{\alpha}y(u)|}{u^{\lambda}} duds \\
& + \begin{pmatrix} E_L+a_1E_1 \\ +a_2E_2+a_3E_3 \end{pmatrix} \left[\left(\frac{\left|t_2^{\beta}-t_1^{\beta}\right|}{\beta} \right) \right] \int_0^{1} \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} \int_1^{s} \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} duds \\
& + |k| \left[\left(\frac{\left|t_2^{\beta}-t_1^{\beta}\right|}{\beta} \right) \right] \int_0^{1} \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} \int_0^{s} \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{|D^{\alpha}y(u)|}{u^{\lambda}} duds \\
& + (E_L+a_1E_1+a_2E_2+a_3E_3) \int_{t_1}^{t_2} \frac{\left|(t_2-s)^{\beta-1}\right|}{\Gamma(\beta)} \int_0^{s} \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} duds \\
& |k| \int_{t_1}^{t_2} \frac{\left|(t_2-s)^{\beta-1}\right|}{\Gamma(\beta)} \int_0^{s} \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{|D^{\alpha}y(u)|}{u^{\lambda}} duds
\end{aligned}
$$

D'autre part ona:

$$
\begin{aligned}
D^{\alpha}\Phi y(t_1)-D^{\alpha}\Phi y(t_2) \;=\; & \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\beta-1}(t_2-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \\
& \times \begin{bmatrix} L(u)-a_1F(u,y(u),D^{\gamma}y(u),J^{p}y(u))-a_2G(u,y(u),D^{\gamma}y(u)) \\ -a_3H(u,y(u))-\frac{k}{u^{\lambda}}D^{\alpha}y(u) \end{bmatrix} ds \\
& - \left[\left(\frac{1-t_1^{\beta}}{\beta} \right) - \left(\frac{1-t_2^{\beta}}{\beta} \right) \right] \int_0^{1} \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} \\
& \times \begin{bmatrix} L(u)-a_1F(u,y(u),D^{\gamma}y(u),J^{p}y(u))-a_2G(u,y(u),D^{\gamma}y(u)) \\ -a_3H(u,y(u))-\frac{k}{u^{\lambda}}D^{\alpha}y(u) \end{bmatrix} ds \\
& + \Big(\int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \\
& \times \begin{bmatrix} L(u)-a_1F(u,y(u),D^{\gamma}y(u),J^{p}y(u))-a_2G(u,y(u),D^{\gamma}y(u)) \\ -a_3H(u,y(u))-\frac{k}{u^{\lambda}}D^{\alpha}y(u) \end{bmatrix} ds
\end{aligned}
$$

Par conséquent ona:

$$
\begin{aligned}
|D^{\alpha}\Phi y(t_1) - D^{\alpha}\Phi y(t_2)| \;\leq\; & \begin{pmatrix} E_L + a_1E_1 \\ +a_2E_2 + a_3E_3 \end{pmatrix} \times \int_0^{t_1} \frac{\left|(t_1-s)^{\beta-1} - (t_2-s)^{\beta-1}\right|}{\Gamma(\beta)} duds \quad (3.10)\\
& + |k| \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\beta-1} - (t_2-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \frac{|D^{\alpha}y(u)|}{u^{\lambda}} duds \\
& + (E_L + a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3) \left[\left(\frac{\left|t_2^{\beta} - t_1^{\beta}\right|}{\beta} \right) \right] \int_0^{1} \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} duds \\
& + |k| \left[\left(\frac{\left|t_2^{\beta} - t_1^{\beta}\right|}{\beta} \right) \right] \int_0^{1} \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} \frac{|D^{\alpha}y(u)|}{u^{\lambda}} duds \\
& + (E_L + a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3) \int_{t_1}^{t_2} \frac{\left|(t_2-s)^{\beta-1}\right|}{\Gamma(\beta)} duds \\
& |k| \int_{t_1}^{t_2} \frac{\left|(t_2-s)^{\beta-1}\right|}{\Gamma(\beta)} \frac{|D^{\alpha}y(u)|}{u^{\lambda}} duds
\end{aligned}
$$

Ona aussi:

$$
\begin{aligned}
& |D^{\gamma}\Phi y(t_1) - D^{\gamma}\Phi y(t_2)| \leq (E_L + a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3) \times \\
& \int_0^{t_1} \frac{\left|(t_1-s)^{\beta-\gamma-1} - (t_2-s)^{\beta-\gamma-1}\right|}{\Gamma(\beta)} \int_0^{s} \frac{(s-u)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)} duds \\
& + |k| \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\beta-\gamma-1} - (t_2-s)^{\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\beta-\gamma)} \int_0^{s} \frac{(s-u)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha-\gamma)} \frac{|D^{\alpha}y(u)|}{u^{\lambda}} duds \\
& + (E_L + a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3) \times \\
& \left[\left(\frac{\left|t_2^{\beta-\gamma} - t_1^{\beta-\gamma}\right|}{\beta-\gamma} \right) \right] \int_0^{1} \frac{(1-s)^{\beta-\gamma-2}}{\Gamma(\beta-\gamma)} \int_1^{s} \frac{(s-u)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha-\gamma)} duds \\
& + (E_L + a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3) \int_{t_1}^{t_2} \frac{\left|(t_2-s)^{\beta-\gamma-1}\right|}{\Gamma(\beta-\gamma)} \int_0^{s} \frac{(s-u)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha-\gamma)} duds \quad (3.11) \\
& |k| \int_{t_1}^{t_2} \frac{\left|(t_2-s)^{\beta-\gamma-1}\right|}{\Gamma(\beta-\gamma)} \int_0^{s} \frac{(s-u)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha-\gamma)} \frac{|D^{\alpha}y(u)|}{u^{\lambda}} duds
\end{aligned}
$$

Lorsque $t_1 \to t_2$, les second membres des l'inégalités (3.9) , (3.10) et (3.11) tend vers zéro. Ainsi, grâce à **A1**,**A2** et **A3**,

on peut conclure que Φ est équicontinu et d'après le théorème d'Ascolli Arzella, Φ est un opérateur **complètement continu.**

A4: On termine la preuve du théorème en montrant que l'ensemble V est borné tel que: $V = \{x \in X : x = \eta\Phi x, 0 < \eta < 1\}$.

Soit $y \in V$, on a: $y = \eta\Phi(y)$, avec $0 < \eta < 1$.

Alors on peut écrire:

$$\begin{aligned} \|\Phi y\|_\infty \leq \eta\left[E_L + a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3\right] \times \left[\tfrac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\right] \\ +|k|\left[\tfrac{\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\beta-\lambda+1)}\right] < +\infty \end{aligned} \tag{3.12}$$

Et on a:

$$\begin{aligned} \|D^\alpha\Phi y\|_\infty \leq \eta\left[E_L + a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3\right] \times \left[\tfrac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right] \\ +|k|\left[\tfrac{\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\alpha+\beta-\lambda+1)}\right] < +\infty \end{aligned} \tag{3.13}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \|D^\gamma\Phi y\|_\infty \leq \eta\left[E_L + a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3\right] \times \left[\tfrac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma1)}\right] \\ +|k|\left[\tfrac{\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\gamma+\beta-\lambda+1)}\right] < +\infty \end{aligned} \tag{3.14}$$

Grâce à (3.12) ,(3.13) et (3.14), on déduit que $\|y\|_X < \infty$.

Cela montre que l'ensemble V est borné.

En application directe du théorème de point fixe de Schaefer, on conclut que Φ a au moins un point fixe, qui est l'une des solutions du problème de type Lane-Emden (2.5). □

3.2 Validatation théorique des résultats

Nous nous intéresserons à la discussion de deux problèmes. Le premier est donné par :

Exemple 3.5.

$$\begin{cases} D^{0.97}D^{0.98}z(t) + \frac{0.06}{t^{0.5}}D^{0.97}z(t) + 0.01F\big(t, z(t), D^{0.002}z(t), J^{1.5}z(t)\big) \\ +0.002G\big(t, z(t), D^{0.002}z(t)\big) + 0.0003H\big(t, z(t)\big) = L(t). \\ z(0) + z(1) = 0, \qquad z'(0) + z'(1) = 0, \\ k > 0, 0 < \beta \leq 1, \quad 0 < \gamma \leq \alpha \leq 1, 1 < \alpha + \beta \leq 2 \quad 0 < \lambda < 1, p > 0, t \in I. \end{cases} \tag{3.15}$$

On notera que

$$\begin{aligned}
\alpha &= 0.97, \quad \beta = 0.98, \quad \gamma = 0.002, \quad k = 0.06, \quad p = 1.5 \\
a_1 &= 0.01, \quad a_2 = 0.002, \quad a_3 = 0.003, \quad \lambda = 0.5, \\
W_1 &= \frac{1}{10}, W_2 = \frac{38}{100}, W_3 = \frac{7}{200}, W_4 = \frac{1}{13}, W_5 = \frac{\pi}{50}, W_6 = \frac{17}{100}.
\end{aligned}$$

En choisissant:

$$\begin{aligned}
F(t, x_1, x_2, x_3) &= \frac{e^t}{1+t^2} + \frac{1}{10}x_1 + \frac{38}{100}x_2 + \frac{7}{200}x_3 \\
G(t, x_1, x_2) &= \frac{2}{\sqrt{1+t^3}} + \frac{1}{13}x_1 + \frac{\pi}{50}x_2. \\
H(t, x_1) &= \frac{\cos(1+t^2)}{3t^2+2} + \frac{17}{100}x_1. \\
L(t) &= \ln(1+t^2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(t, y_1, y_2, y_3) &= \frac{e^t}{1+t^2} + \frac{1}{10}y_1 + \frac{38}{100}y_2 + \frac{7}{200}y_3 \\
G(t, y_1, y_2) &= \frac{2}{\sqrt{1+t^3}} + \frac{1}{13}y_1 + \frac{\pi}{50}y_2. \\
H(t, y_1) &= \frac{\cos(1+t^2)}{3t^2+2} + \frac{17}{100}y_1. \\
L(t) &= \ln(1+t^2).
\end{aligned}$$

On trouve, pour chaque $t \in [0,1]$ et $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$, :

$$\begin{aligned}
|F(t, x_1, x_2, x_3) - F(t, y_1, y_2, y_3))| &\leq \frac{1}{10}|x_1 - y_1| + \frac{38}{100}|x_2 - y_2| + \frac{7}{200}|x_3 - y_3|. \\
|G(t, x_1, x_2) - G(t, y_1, y_2))| &\leq \frac{1}{13}|x_1 - y_1| + \frac{\pi}{50}|x_2 - y_2|. \\
|H(t, x_1) - H(t, y_1)| &\leq \frac{17}{100}|x_1 - y_1|.
\end{aligned}$$

On notera que

$$\begin{aligned}
\alpha &= 0.97, \quad \beta = 0.98, \quad \gamma = 0.002, \quad k = 0.06, \quad p = 1.5 \\
a_1 &= 0.01, \quad a_2 = 0.002, \quad a_3 = 0.003, \quad \lambda = 0.5, \\
W_1 &= \frac{1}{10}, W_2 = \frac{38}{100}, W_3 = \frac{7}{200}, W_4 = \frac{1}{13}, W_5 = \frac{\pi}{50}, W_6 = \frac{17}{100}.
\end{aligned}$$

Alors $M_{1=}0.122\,77$, $M_2 = 0.0875$, $M_3 = 0.125\,3$

Par conséquent $M = \max(M_1, M_2, M_3) = 0.1253 < 1.$

Donc grâce au premier résultat principal donné par le théorème3.3 , le problème(3.15) admet une solution unique.

Exemple 3.6.

$$\begin{cases} D^{0.99}D^{0.98}z(t) + \frac{0.06}{t^{0.9}}D^{0.99}z(t) + 0.02F\big(t, z(t), D^{0.02}z(t), J^{3.5}z(t)\big) \\ +0.003G\big(t, z(t), D^{0.02}z(t)\big) + 0.0004H\big(t, z(t)\big) = L(t). \\ z(0) + z(1) = 0, \qquad z'(0) + z'(1) = 0, \\ k > 0, 0 < \beta \leq 1, \quad 0 < \gamma \leq \alpha \leq 1, 1 < \alpha + \beta \leq 2 \quad 0 < \lambda < 1, p > 0, t \in I. \end{cases} \tag{3.16}$$

En choisissant:

$$\begin{aligned} F(t, x_1, x_2, x_3) &= \frac{\cos(x_1 + x_2) + \sin(x_3)}{(4e^t)^3}, \quad G(t, x_1, x_2) = \frac{3\sin(x_1x_2) - 1}{4 + t(x_1)^3}, \\ H(t, x_1) &= \frac{\cos(x_1)}{2 + tx_1^2}, \quad L(t) = 2t^2 + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |F(t, x_1, x_2, x_3)| &= \left|\frac{\cos(x_1 + x_2) + \sin(x_3)}{(4e^t)^3}\right|, \quad |G(t, x_1, x_2)| = \left|\frac{3\sin(x_1x_2) - 1}{4 + t(x_1)^3}\right|, \\ |H(t, x_1)| &= \left|\frac{\cos(x_1)}{2 + tx_1^2}\right|, \|L(t)\|_\infty = 2t^2 + 1. \end{aligned}$$

Alors:

$$\begin{aligned} |F(t, x_1, x_2, x_3)| &\leq \sup\left|\frac{\cos(x_1 + x_2) + \sin(x_3)}{(4e^t)^3}\right|, \quad |G(t, x_1, x_2)| \leq \sup\left|\frac{3\sin(x_1x_2) - 1}{5 + t(x_1)^3}\right|, \\ |H(t, x_1)| &\leq \sup\left|\frac{\cos(x_1)}{2 + tx_1^2}\right|, \|L(t)\|_\infty = 2t^2 + 1. \end{aligned}$$

On a:

$$\begin{aligned} |F(t,x_1,x_2,x_3)| &\leq \frac{1}{32} = E_1, \quad |G(t,x_1,x_2)| \leq \frac{4}{5} = E_2, \\ |H(t,x_1)| &\leq \frac{1}{2} = E_{3,} \quad \|L(t)\|_\infty = 3 = E_L. \end{aligned}$$

Puisque les hypothèses de théorème(3.4) sont satisfaites, alors le problème(3.16) admet au moins une solution sur I.

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés au calcul fractionnaire en présentant en premier partie quelques travaux de recherches scientifiques qui ont étudier les problèmes différentiels fractionnaires de type Lane et Emden.

Dans la deuxième partie, nous avons proposé un nouveau problème fractionnaire de type Lane et Emden.. Le problème introduit avec ses paramètres, qui ne satisfont pas les propriétés de commutativité et de semi-groupe, permet notamment d'obtenir la forme standard de l'équation de Lane et Emden. Sous certaines conditions, nous avons prouvé un résultat d'existence et d'unicité, puis sous d'autres conditions suffisantes, nous avons établi un autre résultat qui traite de l'existence d'au moins une solution. Des exemples illustratifs ont également été discutés.

Comme perspective, nos travaux restants seront consacrés à essayer de traiter les études suivantes:

■ Etude du problème intégro-différentiel séquentiel (α, β, γ) de type Lane-Emden

■ Etude de la stabilité Hyers-Ulam et la stabilité Hyers-Ulam généralisée pour les équations différentielles fractionnaires.

Références

[1] M.A. Abdellaoui and Z. Dahmani: *Solvability for nonlinear systems of differential equations with two arbitrary orders,* New Zealand Journal of Mathematics, Vol. 46, (2016), Pages 115-128.

[2] R.P. Agarwal, D. O'Regan: *Singular boundary value problems for superlinear second order ordinary and delay differential equations*, Journal of Differential Equations, 130 (1996)

[3] R.P. Agarwal, D. ORegan and S. Staněk: *Positive solutions for mixed problems of singular fractional differential equations*, Mathematische Nachrichten., Vol. 285, No. 1, (2012), 27-41.

[4] Y. Bahous, Z. Dahmani and Z. Bekkouche: *A two parameter singular fractional differential problem of Lane Emden type,* Turkish J. Ineq., 3 (1) (2019), 35-53.

[5] Z. Bai and W. Sun: *Existence and multiplicity of positive solutions for singular fractional BVPs*, Computers & Mathematics with Applications, Vol. 63, No. 9, (2012), 1369-1381.

[6] Z. Bekkouche, Z. Dahmani and G. Zhang: *Solutions and stabilities for a 2D-non homogeneous Lane-Emden fractional system,* Int. J. Open Problems Compt. Math., Vol. 11, No. 2, (2018), 15-24.

[7] S. Chandrasekhar: *An introduction to the study of stellar structure*, Dover, New York, 1967.

[8] Z. Dahmani, A. Taieb and N. Bedjaoui: *Solvability and stability for nonlinear fractional integro-differential systems of high fractional orders,* Facta Nis Ser. Math. Inform., Vol. 31, No. 3, (2016), 629-644.

[9] Z.Dahmani, M.M. Belhamiti: M.Z. Sarikaya: *A three fractional order Jerk equation with anti periodic conditions*. e. Mathematics (2022),10, 3546.

[10] A. Goswami, J. Singh, D. Kumar, S. Gupta, Sushila: *An efficient analytical approach for fractional equal width equations describing hydro-magnetic waves in cold plasma,* Phys. A, Stat. Mech. Appl. 524, (2019), 563-575.

[11] Y. Gouari, Z. Dahmani and M.Z. Sarikaya: *A non local multi-point singular fractional integro-differential problem of Lane-Emden type,* Mathematical Methods in the Applied Sciences, Accepted March 2020.

[12] A.Granas and J.Dugundji: *Fixed point theory,* Springer-Verlas, New York.2003

[13] G. Guidarelli, J. Nordhaus, L. Chamandy , Z. Chen , E.G. Blackman, A. Frank, J. Carroll-Nellenback and B. Liu: *Hydrodynamic simulations of disrupted planetary accretion discsinside the core of an AGB star*, MNRAS 490, (2019), 1179-1185.

[14] R.W. Ibrahim: *Stability of a fractional differential equation,* International Journal of Mathematical, Computational, Physical and Quantum Engineering., Vol. 7, No. 3, (2013), 300-305.

[15] R.W. Ibrahim: *Existence of nonlinear Lane-Emden equation of fractional order,* Miskolc Mathematical Notes, Vol. 13, No. 1, (2012), 39-52.

[16] A.A.Kilbas, H.M. Srivastava, J.J.Trujillo: *Theory and applications of fractional differential equations*. North-Holland Mathematics Studies. Vol. 204. Elsevier Science B.V, Amsterdam (2006)

[17] AA. Kilbas, AA.Titjura: *Hadamard-type fractional integrals and derivatives*. Tr. Inst. Mat., Minsk 11, 79-87 (2002).

[18] J.H. Lane: *Am. J. Sci. Arts.* 50, (1870), 57-59 .

[19] S.M. Mechee and N. Senu: *Numerical Study of Fractional Differential Equations of Lane-Emden Type by Method of Collocation,* Applied Mathematics., Vol. 3, (2012), 851-856.

[20] K.S. Miller and B. Ross: *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations.* Wiley, New York, (1993).

[21] I. Podlubny: *Fractional Differential Equations*. Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, 1999.

[22] S.G.Samko, A.A.Kilbas and O.I.Marchev: Fractional integrals and derivatives. Theory and applications, Gordon and Breach, Yverdon. 1993.

[23] M. Talaee, M. Shabibi, A. Gilani, S. Rezapour: *On the existence of solutions for a pointwise defined multi-singular integro-differential equation with integral boundary condition,* Adv. Diff. Eq. 2019:41, (2020).

[24] K. Tablennehas, A. Abdenebi, Z. Dahmani and M.M. Belhamiti: *An anti-periodic singular fractional differential problem of Lane-Emden type,* Journal of Interdisciplinary Mathematics, (2021).