REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE Dr YAHYA FARES DE MEDEA



COLLECTION DE LA FACULTE DES SCIENCES

COURS D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Titre :

Notes et exercices du cours d'Équations Différentielles licence 3 mathématiques

Auteur : Walid OUKIL

N° de série

Année : 2019

Approuvé par le Conseil Scientifique de la Faculté en date du : 06 Mars 2019

Notes et exercices du cours d'Équations Différentielles

Ce manuscrit rassemble d'une manière simplifiée quelques notions de bases du module d'équations différentielles enseigné en licence mathématiques. Il se partage équitablement en deux entrainements : Un entrainement basé sur les notions abstraites qui aide le lecteur à utiliser les théorèmes fondamentaux des équations différentielles. Le deuxième entrainement rentre dans le cadre de la théorie quantitative qui aide le lecteur à pouvoir résoudre explicitement et d'une manière arithmétique quelques équations différentielles intégrables en présentant avant la méthode de résolution.

Table des matières

1 Introduction **4**

1.1 Note Historique 4

1.2 Trajectoire d'une voiture 5

1.3 Chute libre d'une masse sans frottements 5

2 Généralités **9**

2.1 Équations différentielles scalaires du 1^{er} ordre 9

2.1.1 Problème de Cauchy - Cas scalaire 11

2.1.1.1 Contre exemple 11

2.1.1.2 Théorèmes de Cauchy-Lipschitz cas scalaire 13

2.1.2 Sous et sur-solution 14

2.1.3 Lemme de Gronwall 16

2.1.4 Résolution de quelques équations 16

2.1.4.1 Équation différentielle linéaire scalaire 17

2.1.4.2 Équation à variables séparables 18

2.1.4.3 Équation de Riccati à coefficients constants 19

2.1.4.3.a Cas où $\Delta > 0$ 19

2.1.4.3.b Cas où $\Delta = 0$ 20

2.1.4.3.c Cas où $\Delta < 0$ 20

2.1.4.4 Équation de Bernoulli 21

3 Équations différentielles du 1er ordre **23**

3.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz 24

3.2 Existence locale et unicité 29

3.3 Solution maximale 30

3.4 Dépendance par rapport aux conditions initiales 31

3.5 Dépendance par rapport aux paramètres 33

3.6 Équations différentielles d'ordre supérieur 34

4 Systèmes linéaires **37**

4.1 Exponentiel d'une matrice 37

4.2 Systèmes linéaires homogènes à coefficients constants 40

4.3 Systèmes linéaires non-homogènes 43

4.4 Résolution de quelques systèmes 43

4.4.1 Résolution d'un système linéaire homogène à coefficients constants 43

4.4.2 Résolution d'un système linéaire non homogène 46

4.5 Résolution d'équations linéaires scalaires d'ordre supérieur 47

5 Introduction aux notions de stabilité **50**

5.1 Flot, champ de vecteurs et espace de phases 50

5.1.1 Flot d'un système dynamique 50

5.1.2 Champ de vecteurs et origine 51

5.1.3 Espace de phases 52

5.2 Stabilité et stabilité exponentielle- Cas générale 53

5.2.1 Étude de stabilité du cas linéaire scalaire 54

5.3 Stabilité des systèmes linéaires 57

5.3.1 Méthode de résolution 58

5.3.2 Exemple d'application 60

5.3.3 Sous-espace stable et instable 61

6 Exemples corrigés **63**

6.1 Exemple No 1 63

6.1.1 Correction de l'éxemple No 1 64

6.2 Exemple No 2 66

6.2.1 Correction de l'éxemple No 2 67

6.3 Exemple No 3 69

6.3.1 Correction de l'éxemple No 3 69

6.4 Exemple No 4 71

6.4.1 Correction de l'éxemple No 4 72

6.5 Test 73

6.5.1 Correction du Test 74

7 Exercices non corrigés **80**

Chapitre 1

Introduction

1.1 Note Historique

À la fin du XVII^{ème} siècle des scientifiques de l'époque comme Leibniz (1646 - 1716) et Newton (1643 - 1727) se sont intéressé à des problèmes de la physique qui nécessitent le calcul intégrale, parmi ces problèmes physiques on cite : le mouvement de pendules, la force gravitationnelle entre deux corps, les cordes vibrantes...etc. Leibniz et Newton inventent le calcul infinitésimal (autrement dit : calcul différentiel et calcul intégral) et répondent partiellement à leurs questions posées en physique. Puis en 1739, Euler (1707 - 1783) résous des équations différentielles linéaires à coefficients constants bien que la fonction l'exponentielle n'était pas encore familière chez les mathématiciens de l'époque. La difficulté d'intégration des équations différentielles à conduit des mathématiciens comme Poincaré (1854 - 1912) à inventer la théorie qualitative des équations différentielles, cette dernière se base sur l'aspect qualitatif des trajectoires des solutions. Notons, qu'il existe des équations pour les quelles jusqu'à présent on ne connaît pas la forme explicite de leurs solutions, on cite par exemple l'équation différentielle de Riccati à coefficients non constants : Pour quelques cas particuliers on peut intégrer cette équation mais pour le reste on ne peut trouver la solution explicite que si on connaît une solution particulière. Le développement de l'informatique actuel à pu aider d'une

manière significative la prévision des solutions des équations différentielles et leurs applications touchent actuellement de plusieurs domaines comme la biologie, la chimie, l'économie,.. etc.

1.2 Trajectoire d'une voiture

Lorsqu'on connait la vitesse d'une voiture sur une route droite on peut connaître sa position à un instant donné une fois que l'on connait sa position initiale. En effet, si la vitesse est constante et égale à v alors en posant p la position de la voiture et t le temps on obtient la formule suivante

$$\frac{dp}{dt} = v, \tag{1.1}$$

qui est une équation différentielle.

Si à un instant t_0 la voiture est dans la position $p(t_0)$ (*condition initiale*) alors la position $p(T)$ de la voiture à un instant $T > t_0$ est donnée par

$$p(T) = v(T - t_0) + p(t_0).$$

On a donc "intégré" l'équation différentielle (1.1), soit

$$\int_{t_0}^{T} \frac{dp}{dt} dt = \int_{t_0}^{T} v dt \iff p(T) - p(t_0) = v(T - t_0),$$

cela vient du fait que la fonction p est la primitive de $\frac{dp}{dt}$ et du fait que v est supposée constante.

1.3 Chute libre d'une masse sans frottements

D'après la loi de Newton : entre deux corps de masses m_1 et m_2 (en kilogramme) il existe deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ centrées au centre des deux corps de m_1 et m_2 respectivement et de direction opposée. Ces deux forces induisent un mouvement suivant une

accélération a_1 de la masse m_1 et une accélération a_2 de la masse m_2 (voir Figure 1.1) données par la formule

$$\vec{F_1} = a_1 m_1 = G\frac{m_1 m_2}{R^2}, \quad \vec{F_2} = a_2 m_2 = G\frac{m_1 m_2}{R^2},$$

où

- R est le rayon (la distance) entre les deux corps,
- G est la Constante gravitationnelle. $G = 6.67408 \times 10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2}$.

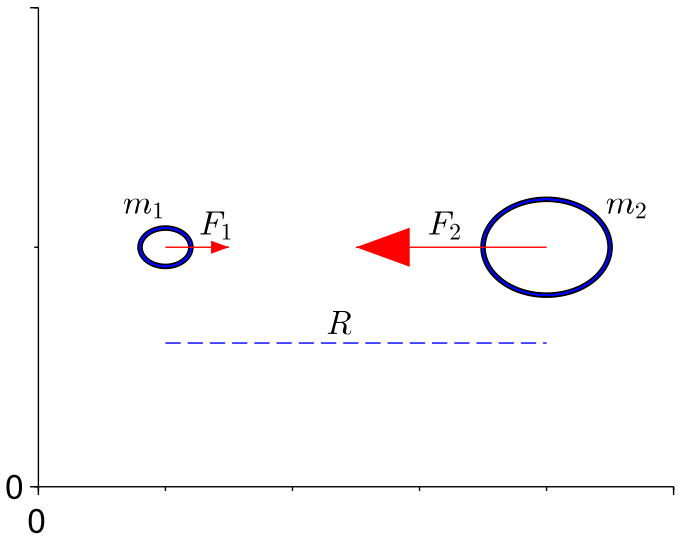


FIGURE 1.1 – Illustration de la force de gravitation entre deux corps isolés.

On considère maintenant la chute libre d'un corps de masse M, d'une hauteur de $R = 35$ mètre du sole de la terre sans vitesse initiale, comme illustré dans la Figure 1.2. On suppose que les frottements de l'aire sont négligeable et que le corps ne reçoivent pas d'autres forces extérieures. Il existe une force de gravitation $\vec{F}$ centrée dans le corps de masse M de direction vers le centre de la terre et est donné par

$$\vec{F} = gM,$$

où g est la force de la pesanteur : $g = 9,80665\ m\ s^{-2}$. D'un autre coté, d'après la loi de Newton, le corps de masse m chute librement vers la terre avec une accélération a

$$\vec{F} = aM,$$

On déduit que $a = g$. La question qu'on peut poser est : Quel est la durée T pour que le corps M atteint le sole de la terre ?.
Posons v la vitesse du corps M, donc

$$v' = a, \quad \text{où } v' \text{ est la dérivé de } v,$$

D'àprs l'exemple précédent (vitesse d'une voiture), on se ramène à l'étude de l'équation différentielle suivante

$$\frac{d^2}{dt^2}p = a,$$

où p est la position du corps M. On intègre deux fois, on obtient

$$R = p(T) - p(0) = \int_0^T at\ dt = \left[\frac{1}{2}at^2\right]_0^T.$$

Par hypothèse $R = 35$ mètre donc

$$T^2 = \frac{2R}{a}, \quad \Longrightarrow T = \sqrt{\frac{2R}{a}} = \sqrt{\frac{70}{9,80665}} = 2.67170s. \quad (s := seconde).$$

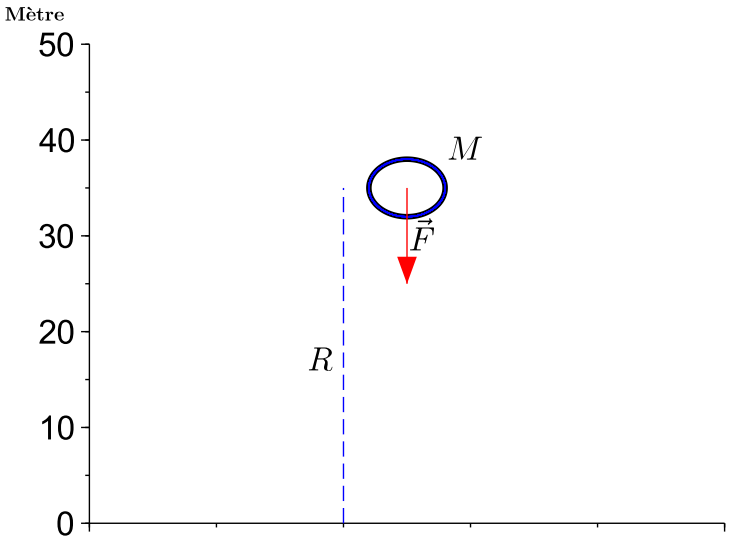


FIGURE 1.2 – Illustration d'une chute libre d'un corps sans vitesse initiale et sans frottements.

Les équations différentielles permettent l'étude des systèmes physiques, biologiques, économiques,...,etc. Dans ce qui suit la notation $\frac{d}{dt}x$ ou $\dot{x}$ désigne la dérivé x' par rapport à la variable t.

Chapitre 2

Généralités

2.1 Équations différentielles scalaires du 1er ordre

On appelle équation différentielle scalaire du 1er ordre toute équation de la forme

$$\frac{d}{dt}x = f(t,x), \tag{2.1}$$

avec $t \in I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. $f : \mathbb{R}\times\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ est une fonction où $\mathbb{K}$ est l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$. La fonction $x(t)$ est la fonction inconnue à déterminer.

Cette dernière équation est dite "scalaire" car l'image de la fonction f est dans $\mathbb{K}$. Rappelons à ce titre qu'en algèbre l'espace vectoriel défini par le produit cartésien $\mathbb{R}^p$ avec $p \in \mathbb{N}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel ; ses éléments sont appelés "vecteurs" et les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés "scalaires". On renvoie donc au cours d'algèbre pour la terminologie du mot "scalaire". On va se réduire dans la suite à l'ensemble des scalaires réels, c'est à dire : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 1. On dit que la fonction $x(t)$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle (2.1) sur I si elle est dérivable sur I et si elle vérifie

$$\forall t \in I \ : \ \frac{d}{dt}x = f(t,x).$$

L'équation différentielle (2.1) est dite du premier ordre car on dérive une fois par rapport à la variable t ; $(\frac{d}{dt}x(t))$.

Exemple 2. *L'équation suivante*

$$\dot{x} = \sin(t + x)$$

est une équation différentielle scalaire du premier ordre et dans ce cas

$$f(t, x) = \sin(t + x).$$

L'équation différentielle (2.1) est dite **autonome** si lorsque on remplace $x(t)$ par la variable z dans la fonction f alors f ne dépend plus de la variable t.

Exemple 3. *L'équation suivante*

$$\dot{x} = \sin(t + x),$$

est une équation différentielle scalaire du premier ordre non autonome, par contre l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = \sin(x),$$

est une équation différentielle scalaire du premier ordre autonome.

L'équation différentielle (2.1) est dite **linéaire scalaire avec second membre** ou **linéaire scalaire non-homogène** si elle s'écrit sous la forme

$$\dot{x} = a(t)x + b(t),$$

où $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son deux fonctions. L'équation différentielle (2.1) est donc dite **linéaire scalaire sans second membre** ou **linéaire scalaire homogène** si elle s'écrit sous la forme

$$\dot{x} = a(t)x.$$

Une équation différentielle linéaire scalaire autonome avec ou sans second membre s'appelle en général *équation différentielle linéaire à coefficients constants*.

La résolution des équations différentielles n'est pas toujours triviale. Pour cette raison on s'intéresse à des résultats d'existence et d'unicité.

2.1.1 Problème de Cauchy - Cas scalaire

On appelle problème de Cauchy la donnée d'une équation différentielle et d'une *condition initiale*

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$ est la condition initiale de la solution $x(t)$ au temps t_0.
Problème : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant t_0. Est ce que le problème de Cauchy (P.C) admet une solution définie sur I.

2.1.1.1 Contre exemple

On considère le problème de Cauchy suivant

$$(R) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = x^2, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

On cherche a savoir si ce problème admet une solution sur l'intervalle $[0,1]$. L'équation différentielle qui définit le problème de Cauchy précédent est une équation autonome. La solution constante nulle de l'équation différentielle $\frac{d}{dt}x = x^2$ n'est pas une solution au problème de Cauchy (R) précédent car elle ne vérifie pas l'hypothèse de la condition initiale. Pour résoudre le problème, on intègre comme suit

$$\frac{\dot{x}(t)}{x^2(t)} = 1 \iff \int_0^s \frac{\dot{x}(t)}{x^2(t)}dt = \int_0^s 1dt.$$

Sachant que la condition initiale est donnée par $x(0) = 1$ alors

$$[-\frac{1}{x(t)}]_0^s = s \iff -\frac{1}{x(s)} + 1 = s \iff x(s) = \frac{1}{1-s}.$$

La fonction $X(s)$ est définie pour tout $s \in \mathbb{R}/\{1\}$, elle est continue et dérivable en particulier sur $[0, 1[$. Comme $s \to_< 1$ on a $x(s) \to +\infty$ cela implique que $x(s)$ n'est pas définie en 1. Donc la fonction x est définie uniquement sur $[0, 1[$ (Voir figure 5.1) et le problème de Cauchy (R) précédent n'admet pas de solution sur $[0, 1]$ tout entier.

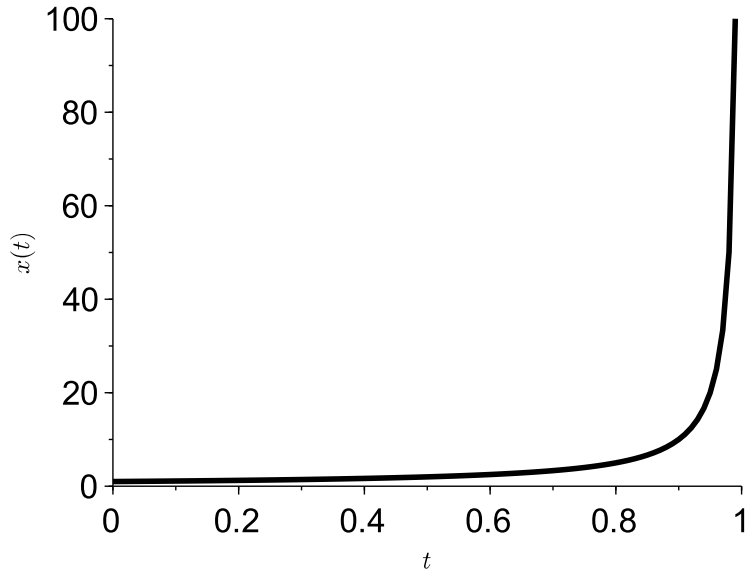


FIGURE 2.1 – On voit dans cette figure le graphe de la solution $x(t)$ du problème de Cauchy (R), la solution est tracée sur $[0, z]$ avec $z \approx 1$.

Dans le contre exemple précédent on a vu un exemple de problème de Cauchy qui n'admet pas de solution. On va voir dans ce qui suit des théorèmes et des propositions qui assurent l'existence de solutions sous certaines conditions. Pour cela on définit dans la définition suivante la notion de fonction lipschitzienne.

Définition 4 (Fonction lipschitzienne- Cas scalaire)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur I s'il existe une constante $\kappa > 0$ tel que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \kappa |x - y|, \quad \forall t \in I, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Soient I et D deux intervalles de $\mathbb{R}$, on note dans ce qui suit $C(I \times D, \mathbb{R})$ l'ensemble

des fonctions continues de $I \times D$ dans $\mathbb{R}$.

2.1.1.2 Théorèmes de Cauchy-Lipschitz cas scalaire

Le théorème suivant est démontré dans le cas général dans la section 3.1

Théorèm 5. *[Théorème de Cauchy-Lipschitz cas scalaire] Soit $f \in C(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère le problème de Cauchy*

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

avec $t_0 \in I$. Supposons que f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur I. Alors pour tout x_0 dans $\mathbb{R}$ et pour tout t_0 dans I le problème de Cauchy (P.C) admet une unique solution définie sur I.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz précédent affirme que lorsque la fonction f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur I alors le problème de Cauchy admet forcément une solution définie sur I tout entier. Revenant au contre exemple 2.1.1.1, on déduit que la fonction $f(z) = z^2$ n'est pas lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur $[0,1]$. Car si elle y était alors pa le théorème de Cauchy-Lipschitz le problème (R) admettra une solution sur $I = [0,1]$ tout entier ce qui n'est pas le cas.

Proposition 6 (Régularité)**.** *Si f est de classe C^k avec $k \in \mathbb{N}^*$ sur un intervalle I alors la solution $x(t)$ si elle existe est de classe C^{k+1} sur I.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons que f est de classe C^k sur I et que x n'est pas de classe C^k. Donc il existe $l < k$ tel que x est de classe C^l mais pas de classe C^{l+1}.

La fonction $f(t,x)$ est une composée des deux fonctions f et x et donc est de classe C^l ; en effet $f \in C^l$ car $C^k \subset C^l$. La focntion $\frac{d^l}{dt^l}f(t,x)$ est donc continue. Or, $\frac{d^{l+1}}{dt^{l+1}}x(t) = \frac{d^l}{dt^l}f(t,x)$ car $\dot{x} = f(t,x)$. On déduit que x est de classe C^{l+1}. Contradiction avec l'hypothèse du départ. Donc x est de classe C^{k+1}. □

Théorèm 7. *[Théorème de Cauchy-Lipschitz cas linéaire scalaire] Soit l'équation différentielle linéaire scalaire avec second membre*

$$\frac{d}{dt}x = a(t)x + b(t).$$

Supposons que $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions continues d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors pour tout x_0 dans $\mathbb{R}$ et pour tout t_0 dans I le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = a(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

admet une solution sur I.

La section 2.1.4.1 donne une preuve du théorème précèdent.

2.1.2 Sous et sur-solution

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle scalaire et non-autonome suivante :

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2.2}$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz (5), la différentiabilité de f implique que pour chaque condition initiale $x_a \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $x(t)$ vérifiant $x(a) = x_a$ définit et continue sur $[a, b]$, on définie donc dans la suite la notion de sur et sous-solution :

Définition 8 (Sous et sur-solution)**.** Une fonction ψ de classe C^1 sur $[a, b]$ est dite une **sous-solution** de l'équation (2.2) sur $[a, b]$ si

$$\dot{\psi}(t) < f(t, \psi(t)), \quad \forall t \in [a, b].$$

elle est dite une **sur-solution** de l'équation (2.2) sur $[a, b]$ si

$$\dot{\psi}(t) > f(t, \psi(t)), \quad \forall t \in [a, b].$$

Théorèm 9 (Sous-solution). *Soit x une solution de l'équation (2.2) sur $[a, b]$ de condition initiale $x(a) = x_a \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe une sous-solution ψ de l'équation (2.2) de classe C^1 sur $[a, b]$ vérifiant $\psi(a) < x_a$, Alors :*

$$\psi(t) < x(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

Démonstration. Supposons que ψ est une sous-solution de l'équation (2.2) sur $[a, b]$, et que $\psi(a) < x_a$. Par continuité il existe $\epsilon > a$ tel que

$$\psi(t) < x(t), \quad \forall t \in [a, a + \epsilon].$$

Posons

$$T^* = \sup_{t \geq a} \{a \leq s \leq t, \quad \psi(s) < x(s)\}.$$

Pour montrer le théorème on doit montrer que $T^* \geq b$. Par l'absurde supposons que $T^* < b$ alors

$$\dot{\psi}(t) < f(t, \psi(t)), \quad \forall t \in [a, T^*[.$$

Par définition T^* vérifie $\psi(T^*) = x(T^*)$. On a

$$\dot{\psi}(T^*) < f(T^*, \psi(T^*)) = f(T^*, x(T^*)) = \dot{x}(T^*).$$

Donc il existe $a < s < T^*$ avec s assez proche de T^* tel que $\psi(s) > x(s)$. Contradiction avec la définition de T^*. Donc $T^* \geq b$. □

De même on a la théorème suivant concernant les sur-solutions

Théorèm 10 (Sur-solution). *Soit x une solution de l'équation (2.2) de l'équation (2.2) sur $[a, b]$ de condition initiale $x(a) = x_a \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe une sur-solution ψ de*

classe C^1 *sur* $[a, b]$ *vérifiant* $\psi(a) > x_a$*, Alors :*

$$\psi(t) > x(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

Démonstration. Même méthode de démonstration utilisée dans la preuve du théorème 9. □

2.1.3 Lemme de Gronwall

Le lemme de Gronwall suivant permet d'avoir une estimation du compretement d'une solution du problème de Cauchy qui satisfait une certaine condition.

Lemme 11. *Soient* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *contenant un point* t_0 *et* $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur* I*. Supposons qu'il existe* $a > 0$ *et* $b > 0$ *tels que*

$$|f(z, y)| < a|y| + b, \quad \forall (z, y) \in I \times \mathbb{R}.$$

Alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ *toute solution* $x : I \subset\to \mathbb{R}$ *du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

vérifie

$$|x(t)| \leq |x_0| \exp(a|t - t_0|) + \frac{b}{a}\big(\exp(a|t - t_0|) - 1\big), \quad \forall t \in I.$$

2.1.4 Résolution de quelques équations

On va voir dans la suite quelques exemples de résolution. Cela rentre dans le cadre de la théorie quantitative qui consiste à trouver la forme explicite des solutions d'une équation différentielle

2.1.4.1 Équation différentielle linéaire scalaire

On considère le problème de Cauchy suivant

$$(E.L) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = a(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

où $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz 7 pour toute condition initiale $x(t_0) = x_0$ le problème précédent admet une solution définie sur $\mathbb{R}$. On va donc résoudre explicitement le problème précédent et déterminer la forme de la solution générale. On considère le changement de variable suivant

$$y(t) = \exp(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds)x(t). \tag{2.3}$$

Donc

$$x(t) = \exp(\int_{t_0}^{t} a(s)ds)y(t) \text{ et } \frac{d}{dt}x(t) = a(t)\exp(\int_{t_0}^{t} a(s)ds)y(t) + \exp(\int_{t_0}^{t} a(s)ds)\frac{d}{dt}y(t)$$

En remplaçant ces valeurs dans le problème (E.L) on obtient le nouveau problème de Cauchy suivant

$$(E.L.N) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = b(t)\exp(\int_{t_0}^{t} -a(s)ds), \\ y(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Par une simple intégration on obtient

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} b(z)\exp(\int_{t_0}^{z} -a(s)ds)dz.$$

D'où

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} b(z)\exp(\int_{t_0}^{z} -a(s)ds)dz.$$

Finalement on déduit de l'équation (2.3) la forme générale de la solution $x(t)$ du problème (E.L) de condition initiale $x(t_0) = x_0$ qui est donnée par

$$x(t) = \exp(\int_{t_0}^{t} a(s)ds)\big[x_0 + \int_{t_0}^{t} b(z)\exp(\int_{t_0}^{z} -a(s)ds)dz\big].$$

2.1.4.2 Équation à variables séparables

Une équation à variables séparables est une équation de la forme

$$\dot{x} = g(t)f(x). \tag{2.4}$$

avec $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonction continues. Si f s'annule en un point x_* de $\mathbb{R}$ alors la fonction constante $x(t) = x_*$ est une solution de l'équation (2.4) sur $\mathbb{R}$. En posant F primitive de la fonction $z \to \frac{1}{f(z)}$ et en posant G primitive de la fonction g alors la solution générale de (2.4) satisfait l'équation

$$F(x(t)) = G(t) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Tout dépend de la forme de F on peut dans quelques cas déduire la forme explicite de la solution $x(t)$.

Exemple 12.

$$\dot{x} = g(t)x,$$

avec $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de primitive G. Cette équation différentielle est une équation différentielle à variables séparables et c'est une équation différentielles linéaire scalaire homogène. Dans ce cas la primitive F de la fonction $z \to \frac{1}{z}$ est

$$F(z) = \ln(|z|).$$

Donc la solution vérifie

$$\ln(|x(t)|) = G(t) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

donc

$$x(t) = c' \exp(G(t)), \quad c' \in \mathbb{R}.$$

2.1.4.3 Équation de Riccati à coefficients constants

Une équation de Riccati à coefficients constants est définie par l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = a + bx + cx^2,$$

avec a, b et c sont des constantes dans $\mathbb{R}$ avec $c \neq 0$. Soit $\Delta := b^2 - 4ac$ le discriminant du polynôme du deuxième degré en z

$$a + bz + cz^2, \quad z \in \mathbb{R}.$$

2.1.4.3.a Cas où $\Delta > 0$

Pour $\Delta > 0$ il existe deux solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ constantes définies sur $\mathbb{R}$ par

$$x_1(t) = \lambda_1, \quad \text{et} \quad x_2(t) = \lambda_2, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

où λ_1 et λ_2 sont les deux racines du polynôme $a + bz + cz^2$. Les autres solutions peuvent être calculées par la décomposition suivante

$$\dot{x} = a + bx + cx^2 = c(x - \lambda_1)(x - \lambda_2),$$

$$\iff \frac{\dot{x}(t)}{(x(t) - \lambda_1)(x(t) - \lambda_2)} = c \iff \frac{\dot{x}(t)}{(x(t) - \lambda_1)} - \frac{\dot{x}(t)}{(x(t) - \lambda_2)} = c(\lambda_1 - \lambda_2).$$

En intégrant on obtient

$$\int \frac{\dot{x}(t)}{(x(t) - \lambda_1)} dt - \int \frac{\dot{x}(t)}{(x(t) - \lambda_2)} dt = \int c(\lambda_1 - \lambda_2) dt,$$

$$\ln|(x(t)-\lambda_1)| - \ln|(x(t)-\lambda_2)| = c(\lambda_1-\lambda_2)t + k, \quad k \in \mathbb{R},$$
$$\iff \frac{x(t)-\lambda_1}{x(t)-\lambda_2} = k' \exp(c(\lambda_1-\lambda_2)t), \quad k' \in \mathbb{R}.$$

Finalement, on obtient la forme explicite suivante

$$x(t) = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 k' \exp(c(\lambda_1-\lambda_2)t)}{1 - k' \exp(c(\lambda_1-\lambda_2)t)}.$$

2.1.4.3.b Cas où $\Delta = 0$

Lorsque $\Delta = 0$ il existe une racine double réelle λ, donc il existe une solution $x_*(t)$ constante définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x_*(t) = \lambda, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Cela entraine que

$$a + bx + cx^2 = c(x - x_*)^2, \iff \dot{x}(t) = c(x(t) - x_*)^2.$$

Cette dernière équation est une équation à variables séparbles et équivalente à

$$\frac{\dot{x}(t)}{(x(t)-x_*)^2} = c.$$

On utilise donc la méthode de l'équation à variable séparables pour déduire que

$$x(t) = x_* - \frac{1}{ct+k}, \quad , k \in \mathbb{R}.$$

2.1.4.3.c Cas où $\Delta < 0$

Lorsque $\Delta < 0$ on utilise la forme canonique suivante

$$a + bz + cz^2 = c\left[(z + \frac{b}{2c})^2 - \frac{\Delta}{4c^2}\right].$$

On a

$$\dot{x}(t) = c\left[(x(t) + \frac{b}{2c})^2 - \frac{\Delta}{4c^2}\right]$$

Donc

$$\frac{\dot{x}(t)}{(\frac{2c}{\sqrt{-\Delta}}x(t) + \frac{b}{\sqrt{-\Delta}})^2 + 1} = \frac{-\Delta}{4c}.$$

Par changement de variable, soit

$$y(t) = \frac{2c}{\sqrt{-\Delta}}x(t) + \frac{b}{\sqrt{-\Delta}}.$$

On alors

$$\dot{y}(t) = \frac{2c}{\sqrt{-\Delta}}\dot{x}(t).$$

Cela entraine que

$$\frac{\dot{y}(t)}{y^2(t) + 1} = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

Donc

$$\int \frac{\dot{y}(s)}{y^2(s) + 1}ds = \int \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}ds \implies \arctan(y(t)) = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$y(t) = \tan(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t + k).$$

Finalement par le changement de variable choisi, on obtient

$$x(t) = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2c}\left[\tan(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t + k) - \frac{b}{\sqrt{-\Delta}}\right], \quad k \in \mathbb{R}.$$

2.1.4.4 Équation de Bernoulli

Une équation de Bernoulli est définie par l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = f(t)x + g(t)x^n,$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$ et f, g sont des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour résoudre l'équation de Bernoulli on considère le changement de variable $x(t) = y(t)z(t)$ alors

$$\dot{y}(t) = f(t)y(t) \quad \text{et} \quad \dot{z}(t) = g(t)y^{n-1}(t)z^n(t),$$

car

$$\dot{x}(t) = \dot{y}(t)z(t) + \dot{z}(t)y(t) = f(t)y(t)z(t) + g(t)y^{n-1}(t)z^n(t)y(t) = f(t)x(t) + g(t)x^n(t).$$

Par intégration on trouve

$$y(t) = \exp(\int f(t)dt), \quad \frac{z^{1-n}(t)}{1-n} = c + \int g(t)y^{n-1}(t)dt, \quad c \in \mathbb{R},$$

donc

$$x(t) = y(t)z(t) = \exp(\int f(t)dt)\Big[(1-n)(c + \int g(t)(\exp(\int f(t)dt))^{n-1}dt)\Big]^{\frac{1}{1-n}}.$$

~~~~~~~~~Fin du chapitre

Chapitre 3

Équations différentielles du 1er ordre

On a vu dans les sections précédentes la définition d'une équation différentielle scalaire ainsi quelques théorèmes d'existence de solutions concernant ces équations. On va voir maintenant la forme d'une équation différentielle du premier ordre qui n'est pas nécessairement scalaire. On considère dans ce qui suit un espace de Banach E sur le corps $\mathbb{R}$ (exemple : $E = \mathbb{R}^n$). On note la norme d'un élément X de E par $\|X\|$. Rappelons qu'un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance induite par la norme ; c'est-à-dire : toute suite d'éléments de E qui est de Cauchy converge. On note dans ce qui suit $C(I \times D, E)$ l'ensemble des fonctions continues de $I \times D$ dans E où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $D \subset E$.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $D \subset E$. On appelle une équation différentielle du premier ordre sur $I \times D$ toute équation de la forme

$$\frac{d}{dt}X = f(t, X), \tag{3.1}$$

où $f : I \times D \to E$ est une fonction définie de $I \times D$ dans E. La fonction $X : I \to E$ est la fonction inconnue à déterminer de I dans E.

On voit que les équations différentielles scalaires du premier ordre est un cas particulier de ces derniers ; en effet il suffit de prendre $E = \mathbb{R}$ qui est un espace de Banach.

Définition 13. On dit que la fonction $X(t)$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans E est solution de l'équation différentielle (3.1) sur I si elle est dérivable sur I et si elle vérifie

$$\forall t \in I \ : \ \frac{d}{dt}X = f(t, X).$$

Le problème de Cauchy sera donc la donnée d'une équation différentielle et d'une condition initiale

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}X = f(t, X), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

où $X_0 \in E$ est la condition initiale de la solution $X(t)$ au temps t_0.

3.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre l'existence d'une unique solution sur I. Avant d'énoncer le théorème, on définit une fonction lipschitzienne dans un espace de Banach

Définition 14. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(E, \|.\|)$ un espace de Banach. Soit $D \subset E$. Une fonction $f : I \times D \to E$ est dite localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur $I \times D$ si pour tout $(t, X) \in I \times D$ il existe un voisinage $V \subset I \times D$ de (t, X) et il existe une constante $\kappa(t, x) > 0$ tels que

$$\|f(s, Y) - f(s, Z)\| \leq \kappa(t, X)\|Z - Y\|, \quad \forall (s, Y) \in V \quad \text{et} \quad \forall (s, Z) \in V.$$

Elle est dite lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur I si $\kappa(t, X)$ ne dépend pas de (t, X). La constante $\kappa(t, x)$ est appelée la constante de Lipschitz.

Remarque 15. On utilise le théorème d'accroissement finis pour montrer que :
1) Si $f : I \times D \to E$ est de classe C^1 sur $I \times D$ alors elle est localement lipschitzienne

par rapport à la deuxième variable sur $I \times D$.
2) Si $f : I \times D \to E$ est de classe C^1 et sa différentielle est bornée sur $I \times D$ alors elle est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur I par rapport à la deuxième variable.

Pour montrer le théorème de Cauchy-Lipschitz dans la suite on a besoin de la proposition suivante

Proposition 16. *Soient $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $t_0 \in [a, b]$. Soit $f \in C(I \times E, E)$ lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur I de constante de Lipschitz κ. Alors pour tout $X_0 \in E$ la suite de fonctions récurrente $(X_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par*

$$\begin{cases} X_1(t) = X_0, \quad \forall t \in [a, b], \\ X_n(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X_{n-1}(s))ds, \quad \forall t \in [a, b], \end{cases}$$

converge uniformément vers une fonction $X(t)$ dans l'espace de Banach $C(I, E)$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. De plus $X(t)$ est l'unique fonction dérivable vérifiant

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

Démonstration. Soit la suite de fonctions récurrente $(X_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$X_n(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X_{n-1}(s))ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

avec $X_1(t) = X_0$ pour tout $t \in [a, b]$.
Comme l'espace $C(I, E)$ des fonctions continues de I dans E muni de la norme $\|X\|_\infty = \sup_{s\in I} \|X(s)\|$ pour tout $X \in C(I, E)$ est de Banach, alors pour montrer que $(X_n)_n$ converge il suffit donc de montrer qu'elle est de Cauchy.
On remarque par récurrence que $X_n(t)$ est dérivable et continue sur $[a, b]$. On définit la

quantité suivante

$$\|X_{n+1} - X_n\|_* = \max_{s\in I}[\exp(-\kappa|s-t_0|)\|X_{n+1}(s) - X_n(s)\|],$$

qui est définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'un autre coté posons $J = [t, t_0]$ si $t \leq t_0$ et $J = [t_0, t]$ si $t_0 \leq t$, alors on a

$$\begin{aligned}
\|X_{n+1}(t) - X_n(t)\| &= \| \int_{t_0}^{t} f(s, X_n(s)) - f(s, X_{n-1}(s))ds\| \\
&\leq \int_J \|f(s, X_n(s)) - f(s, X_{n-1}(s))\|ds \\
&\leq \int_J \kappa\|X_n(s) - X_{n-1}(s)\|ds \\
&= \int_J \exp(\kappa|s-t_0|)\exp(-\kappa|s-t_0|)\kappa\|X_n(s) - X_{n-1}(s)\|ds \\
&\leq \kappa\|X_n - X_{n-1}\|_* \int_J \exp(\kappa|s-t_0|)ds \\
&= \kappa\|X_n - X_{n-1}\|_* \frac{1}{\kappa}(\exp(\kappa|t-t_0|) - 1).
\end{aligned}$$

Ce qui implique donc pour tout $t \in [a, b]$:

$$\exp(-\kappa|t-t_0|)\|X_{n+1}(t) - X_n(t)\| \leq \|X_n - X_{n-1}\|_*(1 - \exp(-\kappa|t-t_0|)),$$

Par passage au maximum et par définition de la quantité $\|.\|_*$ on obtient

$$\|X_{n+1} - X_n\|_* \leq \|X_n - X_{n-1}\|_*(1 - \exp(-\kappa(b-a))),\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Alors par récurrence et en posant $L = 1 - \exp(-\kappa(b-a))$ on déduit que

$$\|X_{n+1} - X_n\|_* \leq L^{n-1}\|X_2 - X_1\|_*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

D'où

$$\exp(-\kappa(b-a))\|X_p - X_q\|_\infty \leq \|X_p - X_q\|_* = \|\sum_{k=q}^{p-1} X_{k+1} - X_k\|_*$$
$$\leq \|X_2 - X_1\|_* \sum_{k=q}^{p-1} L^{k-1} = \|X_2 - X_1\|_* \frac{L^{q-1} - L^{p-1}}{1-L} \to_{p,q\to+\infty} 0 \tag{3.2}$$

Comme

$$\exp(-\kappa(b-a)) \leq \exp(-\kappa|s-t_0|) \leq 1, \quad \forall s \in I,$$

alors

$$\exp(-\kappa(b-a))\|X_p - X_q\|_\infty \leq \|X_p - X_q\|_* \quad \text{et} \quad \|X_2 - X_1\|_* \leq \|X_2 - X_1\|_\infty.$$

Par conséquent la formule (3.2) implique que

$$\implies \|X_p - X_q\|_\infty \leq \exp(\kappa(b-a))\|X_2 - X_1\|_\infty \frac{L^{q-1} - L^{p-1}}{1-L} \to_{p,q\to+\infty} 0$$

donc (X_n) est de Cauchy dans l'espace de Banach des fonctions continues de $[a,b]$ dans E muni de la norme $\|.\|_\infty$ (topologie de la convergence uniforme). Donc X_n converge uniformément vers une fonction dérivable $X(t)$ définie sur $[a,b]$ de plus

$$\lim_{n\to+\infty} X_n(t) = X_0 + \lim_{n\to+\infty} \int_{t_0}^t f(s, X_{n-1}(s))ds \iff X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t f(s, X(s))ds$$

Montrons qu'elle est unique : Supposons qu'il existe deux fonctions $X(t)$ et $Y(t)$ telles $Y \neq X$ et telles que pour tout $t \in I$ on a

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t f(s, X(s))ds \quad \text{et} \quad Y(t) = X_0 + \int_{t_0}^t f(s, Y(s))ds.$$

$X \neq Y$ sur $[a,b]$ implique que $\max_{s\in[a,b]} \|X(s)-Y(s)\| \neq 0$. On a

$$X(t)-Y(t)=\int_{t_0}^{t} f(s,X(s))-f(s,Y(s))ds,$$

$$\Longrightarrow \ \|X(t)-Y(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \kappa\|X(s)-Y(s)\|ds \leq \kappa \max_{s\in[a,b]} \|X(s)-Y(s)\|(b-a),$$

Par passage au maximum dans le membre droit, on obtient

$$\Longrightarrow \max_{t\in[a,b]} \|X(t)-Y(t)\| \leq \kappa(b-a) \max_{s\in[a,b]} \|X(s)-Y(s)\|.$$

Comme $\max_{s\in ab,b]} \|X(s)-Y(s)\| \neq 0$ alors

$$1 \leq (b-a)\kappa.$$

Contradiction, car par hypothèse $(b-a)\kappa < 1$. □

Théorèm 17. *[Théorème de Cauchy-Lipschitz] Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in C(I\times E, E)$. Soit le problème de Cauchy*

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}X = f(t,X), \\ X(t_0)=X_0. \end{cases}$$

avec $(t_0,X_0) \in I\times E$. Supposons que f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur I. Alors pour tout t_0 dans I et pour tout X_0 dans E le problème de Cauchy (P.C) admet une solution unique définie sur I.

Démonstration. Comme f est uniformément lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et d'après la proposition 16 il existe une unique fonction $X : I \to E$ dérivable sur I telle que

$$X(t)=X_0+\int_{t_0}^{t} f(s,X(s))ds, \quad \forall t \in I.$$

Donc

$$\frac{d}{dt}X(t) = f(t, X(t)), \quad \forall t \in I \qquad \text{et} \quad X(t_0) = X_0,$$

Par conséquent $X(t)$ est solution du problème de Cauchy $(P.C)$ sur I. □

Définition 18. On appelle la solution $X(t)$ définie sur tout I, du problème de Cauchy $(P.C)$ précédent, une "solution globale".

3.2 Existence locale et unicité

Le théorème de Cauchy-Lipschitz (17) se généralise au cas de fonctions localement lipschitziennes et montre l'existence et unicité de solutions d'une manière locale (dans un voisinage). Avant de voir cette généralisation on définit une fonction localement lipschitzienne comme suit

Théorèm 19. *[Solution locale] Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $D \subset E$ un connexe de E. Soit $f \in C(I \times D, E)$. Soit le problème de Cauchy*

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}X = f(t, X), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

avec $(t_0, X_0) \in I \times D$. Supposons que f es localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur $I \times D$. Alors pour tout $(t_0, X_0) \in I \times D$ il existe un intervalle $J \subset I$ contenant t_0 tel que le problème de Cauchy (P.C) admet une unique solution définie sur J.

Démonstration. Exercice. [Indication : Prolonger la fonction f en une fonction globalement lipschitzienne]. □

Le théorème précédent affirme l'existence d'une solution sur un intervalle J inclu dans I mais pas forcément égale à I c'est-à-dire il affirme l'existence d'une solution d'une manière locale.

Définition 20. La solution $x(t)$ définie sur J du problème de Cauchy (P.C) du théorème précédent s'appelle "solution locale" et on note $(x(t), J)$.

3.3 Solution maximale

Théorèm 21. *[Solution maximale] Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $D \subset E$ un connexe de E. Soit $f \in C(I \times D, E)$. Soit le problème de Cauchy*

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}X = f(t, X), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

avec $(t_0, X_0) \in I \times D$. Supposons que f es localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur $I \times D$. Alors pour tout $(t_0, X_0) \in I \times D$ le problème de Cauchy (P.C) admet une unique solution définie sur un intervalle I_0 inclue dans I tel que toute solution locale $(y(t), J)$ du problème (P.C) vérifie $J \subset I_0$.

Démonstration. Comme f est localement lipschitzienne, par le théorème (19) soient $(Y_1(t), J_1)$ et $(Y_2(t), J_2)$ deux solutions locales. Par unicité $Y_1(t) = Y_2(t)$ pour tout $t \in J_1 \cap J_2$. Soit I_0 la réunion de tous les intervalles des solutions locales. Donc pour tout $t \in I_0$ il existe une solution locale $(Y(t), J)$ telle que $t \in J$, posons alors $X(t) = Y(t)$. Donc $X(t)$ est définie sur I_0 tout entier de plus par unicité si $(Y_*(t), J_*)$ est une solution locale alors $J_* \subset I_0$ et $Y_*(t) = X(t)$ sur J_*. □

Le théorème précédent affirme l'existence d'une solution sur un intervalle ouvert maximal I_0 inclue dans I. Intuitivement l'intervalle I_0 est le plus grand intervalle dans I contenant t_0 où la solution du (P.C) est définie.

Définition 22. La solution $X(t)$ définie sur I_0 du problème de Cauchy (P.C) du théorème précédent s'appelle "solution maximale" et I_0 s'appelle "intervalle maximale".

Remarque 23. Si $f : I \times E \to E$ est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et si l'intervalle maximale $I_0 \subset I$ d'une solution $X(t)$ de l'équation (21) est de la forme $]-\infty, b[$, $]a, +\infty[$ ou $]a, b[$ et $a, b \in I$ alors

$$\lim_{t \to a} \|X(t)\| = +\infty \text{ et } \lim_{t \to b} \|X(t)\| = +\infty.$$

3.4 Dépendance par rapport aux conditions initiales

On va voir dans cette section le comportement des solution lorsque on perturbe les conditions initiales. On considère le problème de Cauchy suivant

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}X = f(t, X), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

avec $(t_0, X_0) \in I \times E$. On a le théorème suivant

Théorèm 24. *Soit $I = [a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Soient $f \in C(I \times E, E)$ et $(t_0, Y_0) \in I \times E$. On considère le problème de Cauchy*

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}Y = f(t, Y), \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Supposons que f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur I. Soit $\Phi : I \times E \to E$ la fonction définie par

$$\Phi(t, X) = X(t), \quad \forall X \in E,$$

où $X(t)$ est la solution du problème de Cauchy $(P.C)$ de condition initiale $X \in E$. Alors la fonction Φ est continue par rapport à X sur E.

Démonstration. Montrons que Φ est continue par rapport à la deuxième variable sur E. Soient $X \neq Y \in E$. Soit $X(t)$ et $Y(t)$ solutions de $(P.C)$ de condition initiale$X$ et Y respectivement. On a

$$X(t) = X + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))ds, \text{ et } Y(t) = Y + \int_{t_0}^{t} f(s, Y(s))ds, \quad \forall t \in I.$$

Par définition de la fonction Φ on a $\Phi(t, X) = X(t)$ et $\Phi(t, Y) = Y(t)$. On remplace on

obtient pour tout t dans I

$$[\Phi(t,X)-\Phi(t,Y)]-[\Phi(t_0,X)-\Phi(t_0,Y)]=\int_{t_0}^{t} f(s,\Phi(s,X))-f(s,\Phi(s,Y))ds.$$

Posons $J=[t,t_0]$ si $t\leq t_0$ et $J=[t_0,t]$ si $t_0\leq t$. Posons aussi

$$\|\Phi_X-\Phi_Y\|_*=\max_{s\in I}\big[\exp(-\kappa|s-t_0|)\|\Phi(s,X)-\Phi(s,Y)\|\big].$$

Comme $\Phi(t_0,X)=X$ et $\Phi(t_0,Y)=Y$ on a

$$\begin{aligned}
\|[\Phi(t,X)-\Phi(t,Y)]-[X-Y]\| &= \|\int_{t_0}^{t} f(s,\Phi(s,X))-f(s,\Phi(s,Y))ds\| \\
&\leq \int_J \|f(s,\Phi(s,X))-f(s,\Phi(s,Y))\|ds \\
&\leq \int_J \kappa\|\Phi(s,X)-\Phi(s,Y)\|ds \\
&= \kappa\int_J \exp(\kappa|s-t_0|)\exp(-\kappa|s-t_0|)\|\Phi(s,X)-\Phi(s,Y)\|ds \\
&\leq \|\Phi_X-\Phi_Y\|_*\int_J \kappa\exp(\kappa|s-t_0|)ds \\
&= \|\Phi_X-\Phi_Y\|_*(\exp(\kappa|t-t_0|)-1).
\end{aligned}$$

Ce qui implique donc pour tout $t\in[a,b]$:

$$\exp(-\kappa|t-t_0|)\|\Phi(t,X)-\Phi(t,Y)\|\leq(1-\exp(-\kappa|t-t_0|))\|\Phi_X-\Phi_Y\|_*+\|X-Y\|,$$

Par passage au maximum et par définition de la quantité $\|.\|_*$ on obtient

$$\|\Phi_X-\Phi_Y\|_*\leq(1-\exp(-\kappa(b-a)))\|\Phi_X-\Phi_Y\|_*+\|X-Y\|.$$

Donc

$$\exp(-\kappa(b-a))\|\Phi_X-\Phi_Y\|_*\leq\|X-Y\|.$$

Comme

$$\exp(-\kappa(b-a)) \leq \exp(-\kappa|s-t_0|) \leq 1, \quad \forall s \in I,$$

alors

$$\max_{t\in I} \|\Phi(t,X) - \Phi(t,Y)\| \leq \exp(2\kappa(b-a))\|X-Y\|.$$

On déduit que Φ est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur $[a,b]$ de constante de Lipschitz $\exp(2\kappa(b-a))$ ce qui montre que Φ est continue par rapport à la deuxième variable sur E. □

3.5 Dépendance par rapport aux paramètres

Une équation différentielle peut dépendre d'un paramètre. On va voir quelques résultats sur le comportement des solutions en variant un paramètre dans une équation différentielle. Soit

$$\frac{d}{dt}X = f(t,X,\lambda),$$

une équation différentielle qui dépend du paramètre $\lambda \in [c,d] \subset \mathbb{R}$ et $f : I \times E \times [c,d] \to E$ une fonction définie de $I \times E \times [c,d]$ dans E où I est un intervalle borné dans $\mathbb{R}$. Pour chaque λ fixé dans $[c,d]$ supposons que $f(t,z,\lambda)$ est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur I (On considère λ comme étant une constante), donc le problème de Cauchy suivant

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}X = f(t,X,\lambda), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

avec $(t_0,X_0) \in I \times E$ admet une solution $X_\lambda : I \to E$ qui dépend de $\lambda \in [c,d]$. On note dans la suite $C(I \times E \times [c,d], E)$ l'ensemble des fonctions continues de $I \times E \times [c,d]$ dans E. On a le théorème suivant

Théorèm 25. *Soient $f \in C(I \times E \times [c,d], E)$ et $(t_0,X_0) \in I \times E$. On considère le problème*

de Cauchy

$$(P.C,\lambda)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}X = f(t,X,\lambda), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

avec $\lambda \in [c,d]$. *Supposons que pour tout* $\lambda \in [c,d]$ *fixé la fonction* f *est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur* I. *Soit* $\phi : I \times [c,d] \to E$ *la fonction définie par* $\phi(t,\lambda) = X_\lambda(t)$ *où* $X_\lambda : I \to E$ *est solution du problème* (P,C,λ). *Alors* ϕ *est continue sur* $I \times [c,d]$.

Démonstration. On va voir dans cette preuve que l'étude de la dépendance par rapport aux parametres revient à l'étude de la dépendance aux conditions initiales vue dans la section précédente. Soit la fonction $G : I \times E^{n+1} \to E^{n+1}$ définie pour tout

$$G(t,Z) = \begin{pmatrix} f(t,(z_1,\dots,z_n),z_{n+1}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall Z = (z_1,\dots,z_n,z_{n+1}) \in E^{n+1}.$$

Donc le problème $(P.C)$ est équivalent à

$$(P.C)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\tilde{X} = G(t,\tilde{X}) \\ \tilde{X}(t_0) = \tilde{X}_0. \end{cases}$$

où $\tilde{X}(t) = (X(t), x_{n+1}(t)) = (x_1(t),\dots,x_n(t),x_{n+1}(t))$ et $\tilde{X}_0 = (X_0,\lambda)$. Donc varier le paramètre λ dans le problème $(P.C,\lambda)$ revient à varier la condition initiale $\tilde{X}_0$. On peut donc utiliser le théorème 24 pour conclure la preuve du présent théorème. □

3.6 Équations différentielles d'ordre supérieur

Soient $n,m \in \mathbb{N}^*$. Une équation différentielle d'ordre n sur $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$ est une équation de la forme

$$X^{(n)} = F(t,X,X',\dots,X^{(n-1)}) \tag{3.4}$$

où $F : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^n \to \mathbb{R}^m$ et $X : I \to \mathbb{R}^m$ est la fonction inconnue à déterminer. On va voir que cette équation peut se réduire à une équation du premier ordre. On considère le changement de variable $Y_0(t) = X(t)$ alors l'équation différentielle du première ordre suivante

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}Y_0(t) = Y_1(t), \\ \frac{d}{dt}Y_1(t) = Y_2(t), \\ \frac{d}{dt}Y_2(t) = Y_3(t), \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{d}{dt}Y_{n-2}(t) = Y_{n-1}(t), \\ \frac{d}{dt}Y_{n-1}(t) = F(t, Y_0(t), Y_1(t), \ldots, Y_{n-1}(t)) \end{cases}$$

est équivalente à l'équation (3.4). Donc toute équation différentielle d'ordre n est équivalente à une équation d'ordre 1. Par conséquent tous les théorèmes d'existence et d'unicité vus dans les équations différentielles du 1^{er} ordre s'appliquent au équations différentielles d'ordre n.

Exemple 26. *Soit l'équation différentielle d'ordre 2 dans $\mathbb{R}$ suivante (ici $n = 2$ et $m = 1$)*

$$x'' = x + \sin(t) \tag{3.5}$$

Dans cet exemple $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(t, x) = x + \sin(t)$. Posons $y_0(t) = x(t)$ alors l'équation différentielle d'ordre 2 (3.5) est équivalente à l'équation différentielle du premier ordre suivante

$$(E) \quad \begin{cases} y_0' = y_1, \\ y_1' = y_0 + \sin(t). \end{cases}$$

Cette équation du premier ordre est de la forme $Y'(t) = G(t, Y(t))$ avec $Y(t) = (y_0(t), y_1(t))$ et $G(t, Y(t)) = (y_1(t), y_0(t) + \sin(t))$. Donc G est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur $\mathbb{R}$; l'équation (E) admet une solution sur $\mathbb{R}$ pour toute condition initiale. On intègre (E) : Posons $u(t) = y_0(t) + y_1(t)$ par addition on a

$$u'(t) = y_0'(t) + y_1'(t) = y_1(t) + y_0(t) + \sin(t) = u(t) + \sin(t),$$

qui est une équation différentielle linéaire scalaire, donc

$$u(t) = \exp(t)[c + \int \sin(s)\exp(-s)ds], \quad c \in \mathbb{R}.$$

Posons $w(t) = y_0(t) - y_1(t)$*, de* (E) *on a*

$$w'(t) = -w(t) - \sin(t),$$

qui est une équation différentielle linéaire scalaire, donc

$$w(t) = \exp(-t)[c' - \int \sin(s)\exp(s)ds], \quad c' \in \mathbb{R}.$$

On déduit que

$$x(t) = y_0(t) = \frac{u(t) + w(t)}{2}.$$

∼∼∼∼∼∼∼∼∼Fin du chapitre

Chapitre 4

Systèmes linéaires

On va étudier dans ce chapitre un cas particulier d'équations différentielles. Plus précisément on va s'intéresser à des équations différentielles sur $\mathbb{R}$ linéaires qui sont de la forme

$$\frac{d}{dt}X = A(t)X + B(t) \tag{4.1}$$

où A est une matrice $n \times n$ et $B(t)$ est un vecteur de taille n qui dépendent du temps $t \in \mathbb{R}$. $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ est la fonction inconnue à déterminer. L'équation (4.1) s'appelle aussi "système linéaire".

On appelle "équation homgène associée" à l'équation (4.1) l'équation sans second membre suivante

$$\frac{d}{dt}X = A(t)X.$$

On va s'intéresser dans la suite au cas lorsque la matrice $A(t)$ ne dépend pas de t. Pour résoudre le système (4.1) on doit définir l'exponentiel d'une matrice.

4.1 Exponentiel d'une matrice

La fonction exponentielle scalaire $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ne permet pas de calculer l'exponentiel d'une matrice. Par contre on connait le développement de cette fonction qui est sous

la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k.$$

On donne donc une définition analogue à ce développement pour définir l'exponentiel d'une matrice.

Définition 27 (Exponentiel d'une matrice)**.** Soient $n \in \mathbb{N}$ et M une matrice d'ordre $n \times n$. On appelle "exponentiel de M" et on note $\exp(M)$ la quantité suivante

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k,$$

où M^k est k fois le produit de la matrice M et où M^0 est la matrice identité d'ordre n.

Le calcul de l'exponentiel d'une matrice n'est pas toujours trivial, car on doit calculer à chaque fois le produit matriciel M^k. On va voir quelques exemples où on peut calculer cet exponentiel.

Exemple 28. *Si*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Donc pour tout $k \geq 3$

$$M^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

On déduit que

$$\exp(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1!}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Proposition 29. *Soient* $n \in \mathbb{N}$ *et* M *une matrice d'ordre* $n \times n$*, alors la série entière de somme partielle* $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *définie par*

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} M^k,$$

converge vers une matrice d'ordre $n \times n$ *dans l'espace des matrices d'ordre* $n \times n$ *muni de la norme* $\|.\|$ *usuelle.*

Démonstration. Comme pour toute matrice A et B d'ordre $n \times n$ on a $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ donc $\|M^k\| \leq \|M\|^k$. On a donc

$$\|S_N\| \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\|M\|^k \to_{N\to+\infty} \exp(\|M\|).$$

Donc S_N converge absolument d'où S_N converge. □

Il existe des cas particuliers où on peut calculer l'exponentiel d'une matrice. On a donc les propiétés suivantes

Proposition 30. *Soient* $n \in \mathbb{N}$ *et* M *une matrice d'ordre* $n \times n$*.*

- *Si M est une matrice triangulaire avec des 0 dans la diagonale alors*

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} M^k.$$

- *Si M est une matrice diagonale $(M = diag(m_1, \ldots, m_n))$ alors*

$$\exp(M) = diag(\exp(m_1), \ldots, \exp(m_n)).$$

- *Si A et B sont deux matrices $n \times n$ qui commuttent (i.e, $AB = BA$) alors*

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B).$$

- *La matrice $\exp(M)$ est une matrice inversible de plus $(\exp(M))^{-1} = \exp(-M)$.*

4.2 Systèmes linéaires homogènes à coefficients constants

On considère dans $\mathbb{R}$ le système linéaire à coefficients constants suivant

$$\frac{d}{dt} X = AX \tag{4.2}$$

où A est une matrice à coefficients constants d'ordre $n \times n$ et $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est la fonction inconnue à déterminer. Dans la suite on considère un temps initiale $t_0 \in \mathbb{R}$

Proposition 31. *On note S l'ensemble de solutions du système (4.2). Alors S est un espace vectoriel de dimension n et est donné par*

$$S = \{\exp(tA)Z, \quad Z \in \mathbb{R}^n\},$$

et on appelle la matrice $\exp(tA)$ qui dépend du temps $t \in \mathbb{R}$ la "résolvante" du système

(4.2). *Une base de S s'appelle "ensemble fondamental" du système* (4.2).

Démonstration. Montrons que les éléments de S sont des solutions. On a

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

D'après la proposition 29 sur tout compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ la série converge uniformément, donc

$$\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^{k-1} = A \exp(tA).$$

Donc pour tout vecteur constant $X_0 \in \mathbb{R}^n$ la fonction $X(t) = \exp(tA)X_0$ vérifie

$$\frac{d}{dt} X = AX,$$

qui est une solution de (4.2). On remarque par linéarité du système que S est un espace vectoriel. Montrons qu'il est de dimension n :
Soient $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ des solutions de conditions initiales vérifiant $X_1(t_0) = e_1, \ldots, X_n(t_0) = e_n$ où $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrons qu'elle est génératrice :
On a pour tout $Y(t) \in S$ il existe $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$Y(t) = \exp(tA)Y = y_1 \exp(tA)e_1 + \ldots y_n \exp(tA)e_2 = y_1 X_1(t) + \ldots, + y_n X_n(t).$$

donc $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ est une famille génératrice de S.
Montrons que c'est une famille linéairement indépendante. Par l'absurde, supposons qu'elle n'est pas libre donc il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X(t) = 0.$$

Donc il existe aussi $t_* \in \mathbb{R}$ et tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X(t_*) = 0.$$

Sans perte de généralité supposons que $\lambda_1 \neq 0$. On a alors

$$X_1(t_*) = -\sum_{i=2}^{n} \lambda_i X_i(t_*).$$

Mais $-\sum_{i=2}^{n} \lambda_i X_i(t) \in S$ donc c'est une solution de (4.2). Par unicité de solution

$$X_1(t) = -\sum_{i=2}^{n} \lambda_i X_i(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En particulier

$$X_1(t_0) = -\sum_{i=2}^{n} \lambda_i X_i(t_0).$$

Contradiction avec le fait que $X_1(t_0) = e_1 \dots X_n(t_0) = e_0$ ou $e_1, \dots, e_n)$ qui est une base (famille libre). □

Remarque 32. Si $X_1(t), \dots, X_n(t)$ est un ensemble fondamental de S. On appelle la matrice

$$\Big(X_1(t)X_2(t)\dots X_n(t)\Big),$$

matrice fondamentale et on a

$$\Big(X_1(t)X_2(t)\dots X_n(t)\Big) = \exp(tA)\Big(X_1(t_0)X_2(t_0)\dots X_n(t_0)\Big),$$

car $X_i(t) = \exp(tA)X_i(t_0)$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

4.3 Systèmes linéaires non-homogènes

On considère dans $\mathbb{R}$ le système linéaire non homgène suivant

$$\frac{d}{dt}X = AX + B(t) \tag{4.3}$$

$$X(t_0) = X_0,$$

où A est une matrice à coefficients constants d'ordre $n \times n$ et $B(t)$ un vecteur de taille n qui dépend du temps.

Proposition 33. *La solution $X(t)$ du système (4.3) de condition initiale $X_0 \in \mathbb{R}^n$ est donnée par*

$$X(t) = \Phi(t - t_0)\big[X_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(s - t_0)^{-1} B(s)ds\big],$$

où $\Phi(t - t_0)$ est la rśolvante du du système linéaire homogène associé. (c'est à dire $\Phi(t - t_0) = \exp((t - t_0)A)$, et où $\Phi(t - t_0)^{-1} = \exp(-(t - t_0)A)$ est la matrice inverse de $\Phi(t - t_0)$.

4.4 Résolution de quelques systèmes

4.4.1 Résolution d'un système linéaire homogène à coefficients constants

On suppose dans la suite que A est une matrice diagonalisable. On considère dans $\mathbb{R}^n$ le système linéaire à coefficients constants suivant

$$\frac{d}{dt}X = AX. \tag{4.4}$$

Pour résoudre ce système homgène on doit trouver la matrice résolvante $\exp(tA)$. On considère le changement de variable

$$X(t) = \exp(\lambda t)V, \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad V \in \mathbb{R}^n.$$

Donc de (4.4)

$$\lambda \exp(\lambda t)V = A \exp(\lambda t)V,$$

$$\iff \lambda V = AV.$$

Cela revient à trouver les valeurs propres de A et dans ce cas λ est valeur propre de vecteur propre associé V. Dans le cas où A est diagonalisable alors elle admet n vecteurs propres $(V_1, \ldots, V_n)$ linéairement indépendants associés à n valeurs propres rélles $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. L'ensemble de solutions $\{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}$ de l'équation (4.4) donnée par

$$\{X_i(t) = \exp(\lambda_i t)V_i / \quad 1 \leq i \leq n\},$$

est donc linéairement indépendant et donc forme un ensemble fondamental. D'après la remarque 32 on a

$$\Big(\exp(t\lambda_1)V_1 \ldots \exp(t\lambda_n)V_n\Big) = \exp(tA)\left(V_1 \ldots V_n\right).$$

Comme $V_1, \ldots, V_n$ sont linéairement indépndant donc la matrice $\Big(V_1 \ldots V_n\Big)$ est inversible on déduit que

$$\exp(tA) = \Big(\exp(t\lambda_1)V_1 \ldots \exp(t\lambda_n)V_n\Big)\left(V_1 \ldots V_n\right)^{-1}.$$

Donc les solutions $X(t)$ du système (4.4) s'écrit sous la forme

$$X(t) = \Big(\exp(t\lambda_1)V_1 \ldots \exp(t\lambda_n)V_n\Big)\left(V_1 \ldots V_n\right)^{-1} X(t_0).$$

Exemple 34.

$$\frac{d}{dt}X = AX, \quad \textit{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Les valeurs propres de A *sont* $\lambda_1 = 6$ *et* $\lambda_2 = -2$. *L'un des vecteurs propres de* λ_1 *est* $V_1 = (1, 1)$ *et l'un des vecteurs propres de* λ_2 *est* $V_2 = (-1, 1)$. *Donc les deux solutions*

$$X_1(t) = \exp(6t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \textit{et} \quad X_2(t) = \exp(-2t)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

forment une ensemble fondamentale des solutions du système homogène (4.5). *La résolvante dans ce cas est donnée par*

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} \exp(6t) & -\exp(-2t) \\ \exp(6t) & \exp(-2t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \exp(6t) & -\exp(-2t) \\ \exp(6t) & \exp(-2t) \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$\exp(tA) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \exp(6t) + \exp(-2t) & \exp(6t) - \exp(-2t) \\ \exp(6t) - \exp(-2t) & \exp(6t) + \exp(-2t) \end{pmatrix}$$

$$= \exp(2t)\begin{pmatrix} \cosh(4t) & \sinh(4t) \\ \sinh(4t) & \cosh(4t) \end{pmatrix}$$

D'où les solutions de $X(t)$ *de* (4.5) *sont donnée par*

$$Y(t) = \exp(tA)Y(t_0).$$

4.4.2 Résolution d'un système linéaire non homogène

On considère dans $\mathbb{R}^n$ le système linéaire non homogène suivant

$$\frac{d}{dt}X = AX + B(t), \quad \text{avec} \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ . \\ . \\ . \\ b_n(t) \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

Avec A matrice constante qu'on suppose diagonalisable et $B(t)$ est une fonction continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. On utilise la section 4.4.1 précédente pour trouver la résolvante $\exp(tA)$ du systèmes homgène suivant associé au système (4.6)

$$\frac{d}{dt}X = AX.$$

Donc d'après la proposition 33 les solution du systèmes non homogène (4.6) est donné par

$$X(t) = \{\Phi(t-t_0)\big[X_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(s-t_0)^{-1}B(s)ds\big]\},$$

avec $\Phi(t-t_0) = \exp((t-t_0)A)$.

Exemple 35.

$$\frac{d}{dt}X = AX + B(t), \quad \textit{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} \exp(2t) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

D'après l'exemple 34 la résolvante du système homgène associé

$$\frac{d}{dt}X = AX,$$

est donnée par

$$\exp(tA) = \exp(2t)\begin{pmatrix}\cosh(4t) & \sinh(4t)\\ \sinh(4t) & \cosh(4t)\end{pmatrix}.$$

Donc les solution du système (4.7) *sont données par*

$$X(t) = \exp((t-t_0)A)[X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \exp(-(s-t_0)A)\begin{pmatrix}\exp(2s)\\ 0\end{pmatrix} ds$$

$$= \exp((t-t_0)A)[X(t_0) + \exp(2t_0)\begin{pmatrix}\int_{t_0}^{t}\cosh(-4(s-t_0))ds\\ \int_{t_0}^{t}\sinh(-4(s-t_0))]ds\end{pmatrix}]$$

$$= \exp((t-t_0)A)\big[X(t_0) - \frac{\exp(2t_0)}{4}\begin{pmatrix}\sinh(-4(t-t_0))\\ \cosh(-4(t-t_0))-1\end{pmatrix}\big],$$

où

$$\exp((t-t_0)A) = \exp(2(t-t_0))\begin{pmatrix}\cosh(4(t-t_0)) & \sinh(4(t-t_0))\\ \sinh(4(t-t_0)) & \cosh(4(t-t_0))\end{pmatrix}.$$

4.5 Résolution d'équations linéaires scalaires d'ordre supérieur

On considère l'équation linéaire scalaire d'ordre n suivante

$$y^{(n)} = a_n y^{(n-1)} + \ldots + a_3 y'' + a_2 y' + a_1 y + f(t),$$

avec $a_1, a_2, .., a_n \in \mathbb{R}$ sont des constantes et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. D'après la section 3.6 du chapitre précédent en posant $x_1(t) = y(t)$ cette équation peut se réduire au système linéaire d'ordre 1 suivant

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 = x_2, \\ \frac{d}{dt}x_2 = x_3, \\ ..... \\ \frac{d}{dt}x_{n-1} = x_n, \\ \frac{d}{dt}x_n = a_n x_n + \ldots + a_2 x_2 + a_1 x_1 + f(t), \end{cases}$$

qui est sous forme matriciel équivalent à

$$\frac{d}{dt}X = AX + B(t), \quad \text{avec} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

$$\text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0..... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0..... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1..... & 0 \\ .... & .... & ... & ..... & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0..... & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4..... & a_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Dans le cas où A est diagonalisable on utilise la méthode illustrée dans la section 4.4.1 et la section 4.4.2 pour calculer la solution $X(t)$ on déduit donc la solution $y(t) = x_1(t)$.

Exemple 36.

$$y''' = 3y'' + y' + \sin(t).$$

En posant $x_1(t) = y(t)$ alors le système est équivalent à

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 = x_2, \\ \frac{d}{dt}x_2 = x_3, \\ \frac{d}{dt}x_3 = 3x_3 + x_2 + \sin(t), \end{cases}$$

qui est sous forme matricielle équivalent à

$$\frac{d}{dt}X = AX + B(t), \quad \textit{avec} \quad X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)),$$

$$\textit{et où} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

On calcul la résolvante du système linéaire homogène

$$\frac{d}{dt}Y(t) = AY(t).$$

Cela revient donc à chercher les valeurs propres de A. Dans le cas où la matrice n'est pas diagonalisable on utilise les propriétés de l'exponentiel matriciel de la Proposition 30.

~~~~~~~~~Fin du chapitre

Chapitre 5

Introduction aux notions de stabilité

La stabilité est l'étude de la dépendance des solutions par rapport aux conditions initiales. Physiquement, si on jette deux pierres tout d'un cous on aimerai bien savoir si l'une s'éloigne de l'autre au cours du temps ou non. En terme d'équations différentielles, si on prend deux solutions d'une même équation différentielle est-ce-que ceux deux solutions restent assez proches lorsque leurs conditions initiales sont suffisamment proches. Pour cela on la définition suivante

5.1 Flot, champ de vecteurs et espace de phases

5.1.1 Flot d'un système dynamique

Une équation différentielle est aussi appelée un "système dynamique" car elle représente une dynamique qui évolue avec le temps. Le "flot" représente cette dynamique.

Définition 37 (Le flot)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, une fonction uniformément lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$. Soi l'équation différentielle automone

$$\dot{x} = f(x), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

On appelle flot de l'équation (5.1) la fonction $\Phi^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie pour chaque $t \in \mathbb{R}$

par

$$\forall X \in \mathbb{R} : \Phi^t(X) = X(t),$$

où $X(t)$ est la solution du système (5.1) de condition initiale $X \in \mathbb{R}^n$.

Propriétés 38. On a les propriétés suivantes

- $\Phi^0 = Id$ où $Id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est la fonction identité, d'un autre terme $\forall X \in \mathbb{R} : \Phi^0(X) = X$.
- Φ^t est continue de plus si f est C^1 alors Φ^t est de classe C^1.
- Pour tout $t, s \in \mathbb{R}$ et tout $X \in \mathbb{R}^n$ on a $\Phi^s(\Phi^t(X)) = \Phi^{s+t}(X)$.

Définition 39 (Ensemble invariant)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, une fonction uniformément lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$. Soi l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = f(x), \quad t \geq 0. \tag{5.2}$$

Notons Φ^t le flot de l'équation (5.2). Soit $\mathcal{O}$ un ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que l'ensemble $\mathcal{O}$ est positivement invariant par le flot ou il est positivement Φ^t-invariant si

$$\forall X \in \mathcal{O} : \Phi^t(X) \in \mathcal{O}, \quad \forall t \geq 0.$$

5.1.2 Champ de vecteurs et origine

Pour pouvoir étudier les équations différentielles d'une manière qualitative on introduit la notion du "champ de vecteurs" et de "l'espace de phases" comme suit

Définition 40 (Champ de vecteurs)**.** On appelle champ de vecteurs toute fonction F de classe C^1 d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Un champ de vecteurs représente une transformation des vecteurs de Ω.

Définition 41 (Origine d'un champ de vecteurs)**.** On appelle l'origine d'un champs de vecteurs $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tout point $X_* \in \Omega$ tel que

$$F(X_*) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Définition 42 (Point stationnaire)**.** On appelle point stationnaire d'une équation autonome

$$\dot{X} = F(X), \quad , X \in \mathbb{R}^n,$$

tout origine du champ F. Un point stationnaire est donc la solution constante, de cet équation, qui passe par l'origine.

Notons que toute équation non autonome peut se réduire à une équation autonome. En effet si on considère l'équation suivante

$$\dot{X} = F(t, X), \quad X \in \mathbb{R}^n, \quad X(t_0) = X_0, \tag{5.3}$$

avec $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ alors on considère le changement de variable suivant :

$$x_{n+1}(t) = t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Et en posant $\tilde{F}(\tilde{X}) = (F(t, X), 1)$ où $\tilde{X} = (X, x_{n+1})$ alors on a l'équation autonome suivante et qui est équivalente à (5.3)

$$\frac{d}{dt}\tilde{X} = \tilde{F}(\tilde{X}), \quad \tilde{X}(t_0) = (X_0, 0).$$

5.1.3 Espace de phases

Soit $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs. On considère l'équation différentielle

$$\dot{X} = F(X), \quad t \geq t_0, \tag{5.4}$$

avec $t_0 \in \mathbb{R}$. L'espace de phases de l'équation (5.4) est la représentation géométrique (qualitative) du comportement des solutions. Cette représentation géométrique peut ce faire à l'aide du champ de vecteurs F qui indique à chaque point $X \in \mathbb{R}^N$ la tangente $\vec{Y}$ associée en utilisant la relation $F(X) = \vec{Y}$. En effet, le vecteur $\vec{Y}$ représente la tangente $\dot{X}$ de la solution ("la phase") $X(t)$ passe au point X. Malheureusement, la représentation d'un espace de phases dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 3$ ne peut pas se faire d'une manière simple.

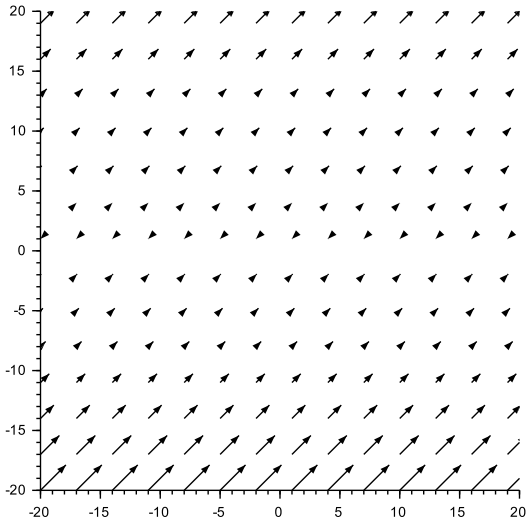


FIGURE 5.1 – La figure montre l'espace de phases de l'équation de Riccati scalaire à coefficients constants suivante $\dot{x} = 1 - 4x + 1$.

5.2 Stabilité et stabilité exponentielle- Cas générale

Définition 43 (Stabilité et stabilité exponentielle)**.** Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, une fonction lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur $\mathbb{R}$. Soi l'équation différentielle suivante

$$\dot{X} = f(t, X), \quad t \geq 0. \tag{5.5}$$

Soit $X(t)$ solution de l'équation (6.1). La solution $X(t)$ est stable si pour toute solution $Y(t)$ de (6.1) on a

$$\exists M > 0, \exists \delta > 0 : \|X(0) - Y(0)\| < \delta \implies \|X(t) - Y(t)\| \leq M\|X(0) - Y(0)\|, \forall t \geq 0.$$

Dans le cas contraire la solution $X(t)$ est dite instable. La solution $X(t)$ est exponentiellement stable si pour toute solution $Y(t)$ de (6.1) on a

$$\begin{aligned}\exists M > 0, \exists c > 0, \exists \delta > 0 : \ & \|X(0) - Y(0)\| < \delta \\ & \implies \|X(t) - Y(t)\| \leq M \exp(-ct)\|X(0) - Y(0)\|, \forall t \geq 0,\end{aligned}$$

Remarque 44. Une solution exponentiellement stable est stable. La réciproque est en générale fausse ! (Voir l'exemple donné dans la section 5.2.1 ci-dessous).

5.2.1 Étude de stabilité du cas linéaire scalaire

Maintenant on va voir ce que signifie la stabilité dans le cas scalaire. Soit l'équation différentielle linéaire scalaire non-homogène suivante

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \quad t \geq 0, \tag{5.6}$$

avec $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues. Soit $x(t)$ et $y(t)$ solutions de (5.6) de condition initiale $(x(0), y(0) = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ respectivement, on a

$$\frac{d}{dt}[x(t) - y(t)] = a(t)[x(t) - y(t)], \quad t \geq 0.$$

Posons $\theta(t) = x(t) - y(t)$ donc

$$\dot{\theta} = a(t)\theta, \quad t \geq 0,$$

qui est une équation différentielle linéaire scalaire homogène, donc

$$\theta(t) = \theta(0)\exp(\int_0^t a(s)ds), \quad t \geq 0.$$

Comme $\theta(t) = x(t) - y(t)$ alors,

$$x(t) - y(t) = [x - y]\exp(\int_0^t a(s)ds).$$

On remarque que si la fonction a est constante et vérifie $a(t) = \alpha < 0$ pour tout $t \geq 0$ alors

$$|x(t) - y(t)| = |x - y||\exp(\alpha t)|, \forall t \geq 0.$$

Dans ce cas toute solution $x(t)$ de l'équation (5.6) est donc exponentiellement stable (Voir la Figure (5.2)). On peut vérifier que dans le cas où $a(t) = \alpha > 0$ pour tout $t \geq 0$ alors toute solution est instable (Voir la Figure (5.3)). Dans le cas où $\int_{t_0}^t a(s)ds$ est bornée (Exemple : périodique par rapport à t) alors la solution $x(t)$ est stable mais non exponentiellement stable (Voir la Figure (5.4)).

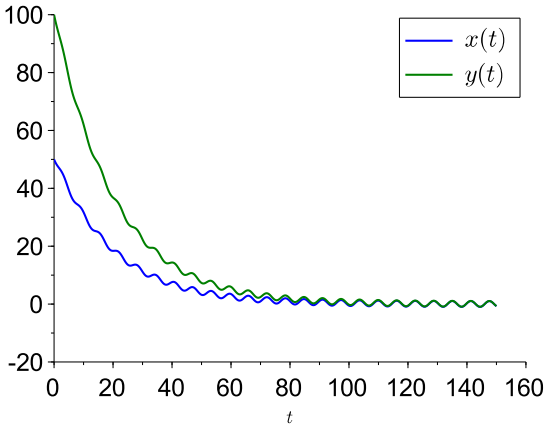


FIGURE 5.2 – On choisis dans l'équation différentielle (5.6) $a(t) = -0.05$ pour tout $t \geq t_0 = 0$ et $b(t) = \sin(t)$. La figure illustre le graphe en couleur bleu de la solution $x(t)$ de condition initiale $x(0) = 500$ et le graphe en couleur verte de la solution $y(t)$ de condition initiale $y(0) = 100$ de l'éuqtaion différentielle (5.6). Ici $a(t) = -0.05$ pour tout $t \geq t_0 = 0$ ce qui correspond à une stabilité exponentielle. La distance entre les deux solution $x(t)$ et $y(t)$ décroit d'une manière exponentielle.

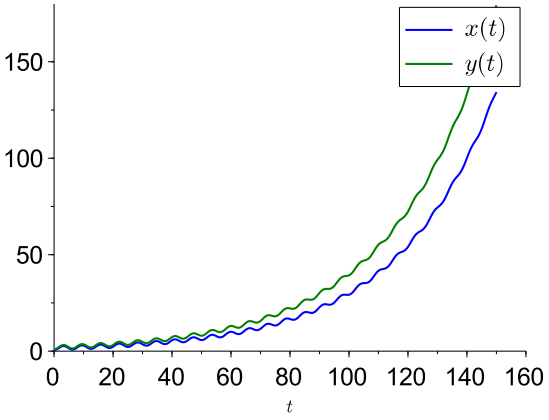


FIGURE 5.3 – On choisis dans l'équation différentielle (5.6) $a(t) = 0.03$ pour tout $t \geq t_0 = 0$ et $b(t) = \sin(t)$. La figure illustre le graphe en couleur bleu de la solution $x(t)$ de condition initiale $x(0) = 0.5$ et le graphe en couleur verte de la solution $y(t)$ de condition initiale $y(0) = 1$ de l'éuqtaion différentielle (5.6). Ici $a(t) = 0.03$ pour tout $t \geq t_0 = 0$ ce qui correspond à une instabilité. La distance entre les deux solution $x(t)$ et $y(t)$ n'est pas bornée dans le temps.

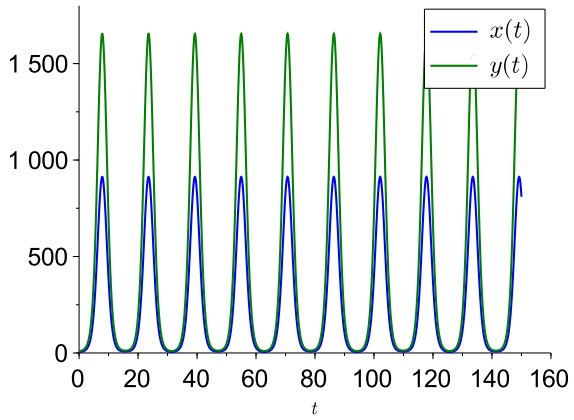


FIGURE 5.4 – On choisis dans l'équation différentielle (5.6) $a(t) = \sin(0.4t)$ pour tout $t \geq t_0 = 0$ et $b(t) = \sin(t)$. La figure illustre le graphe en couleur bleu de la solution $x(t)$ de condition initiale $x(0) = 5$ et le graphe en couleur verte de la solution $y(t)$ de condition initiale $y(0) = 10$ de l'éuqtaion différentielle (5.6). Ici $a(t) = \sin(0.4t)$ ce qui implique que $\int_{t_0}^{t} a(s)ds$ est périodique par rapport à t ce qui correspond à une stabilité mais pas à une stabilité exponentielle. La distance entre les deux solution $x(t)$ et $y(t)$ est bornée mais ne décroit pas d'une manière exponentielle.

5.3 Stabilité des systèmes linéaires

On va étudier dans cette section la stabilité des systèmes linéaires du type

$$\dot{X} = AX + B(t), \tag{5.7}$$

où A est une matrice d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients constants et $B(t)$ est un vecteur de taille n à coefficients dépendant du temps t. On a la proposition suivante

Proposition 45. *Soit $X(t)$ une solution du système (6.2). $X(t)$ est une solution stable si et seulement si le système linéaire homogène*

$$\dot{Y} = AY, \tag{5.8}$$

admet un point stationnaire stable.

Démonstration. Soit $X(t)$ la solution stable du système (6.2) de condition initiale $X \in \mathbb{R}^n$. Pour toute solution $Y(t)$ du système (6.2) de condition initiale Y on a

$$\exists M > 0, \exists \delta > 0 : \forall Z \in \mathbb{R}^n, \|X - Z\| < \delta \implies \|X(t) - Z(t)\| \leq M\|X - Z\|, \forall t \geq 0,$$

Posons $R(t, 0)$ la matrice fondamental du système linéaire homogène (6.3). Alors

$$R(t, 0)(X - Z) = X(t) - Z(t), \quad \forall X, Z \in \mathbb{R}^n.$$

Soit $\tilde{Z}(t)$ la solution stable du système (6.2) de condition initiale $Z + X \in \mathbb{R}^n$ avec $Z \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \forall Z \in \mathbb{R}^n : \|Z\| \leq \delta \implies \|R(t, 0)Z\| &= \|\tilde{Z}(t) - X(t)\| \\ &< M\|Z + X - X\| = M\|X\|, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Soit $V(t)$ et $W(t)$ deux solutions arbitraires du système (6.2) de conditions initiales $V, W \in \mathbb{R}^n$ respectivement. Alors

$$\|V - W\| < \delta \implies \|V(t) - W(t)\| = \|R(t, 0)(V - W)(t)\| \leq M\|V - W\|, \forall t \geq 0.$$

Ce qui montre que la solution $V(t)$ est stable. De la même manière on peut vérifier la réciproque de la proposition. □

5.3.1 Méthode de résolution

D'après le chapitre 4 la solution du système linéaire homogène (6.3) de condition initiale $X \in \mathbb{R}$ est donné par

$$X(t) = \exp(tA)X, \quad \forall t \geq 0.$$

Posons $R(t,0)$ la matrice fondamental

$$R(t,0)X = \exp(tA)X, \quad \forall X \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \geq 0.$$

Lorsque A est diagonalisable alors comme on a vu dans la section 4.4 du chapitre précédent la matrice fondamentale s'écrit sous la forme

$$\exp(tA) = \Big(\exp(t\lambda_1)V_1 \dots \exp(t\lambda_n)V_n\Big)\Big(V_1 \dots V_n\Big)^{-1}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les n valeurs propres réels de la matrice A et $V_1, \dots, V_n$ sont les vecteurs propres associés dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition 46. *On considère l'équation* (6.3). *Alors le point stationnaire est stable (respectivement : exponentiellement stable) si et seulement si pour tout* $1 \leq i \leq n$ *les valeurs propres de la matrice* A *vérifient* $\lambda_i \leq 0$ *(respectivement : pour tout* $1 \leq i \leq n$ *on a* $\lambda_i < 0$*).*

Démonstration. Cela vient du fait que pour tout $t \geq 0$ on a

$$\begin{aligned}\forall X \in \mathbb{R}^n : \|R(t,0)X\| = \|\exp(tA)X\| &= \| \Big(\exp(t\lambda_1)V_1 \dots \exp(t\lambda_n)V_n\Big)\Big(V_1 \dots V_n\Big)^{-1} X\| \\ &\leq \max\{\exp(\lambda_i t), 1 \leq i \leq n\}\|(V_1, \dots, V_n)\|\|(V_1, \dots, V_n)^{-}1\|\|X\| \\ &= \exp(\lambda_* t)M\|X\|,\end{aligned}$$

où $\lambda_* = \max\{\lambda_i, 1 \leq i \leq n\}$ et $M = \|(V_1, \dots, V_n)\|\|(V_1, \dots, V_n)^{-}1\|$. Ce qui implique que si $1 \leq i \leq n$ on a $\lambda_i \leq 0$ on a

$$\forall X \in \mathbb{R}^n : \|R(t,0)X|| \leq M\|X\|, \quad \forall t \geq 0,$$

d'un autre terme le point stationnaire est stable.

Supposons maintenant qu'il existe une valeur propre $\lambda_{i_0} > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ soit le

vecteur W défini par

$$W = (y_1, \ldots, y_{i_0-1}, 1, y_{i_0+1}, \ldots, y_n), \quad y_i = 0, \forall 1 \leq i \neq i_0 \leq n.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ soit $X = x(V_1, \ldots, V_n)W$. On a pour tout $t \geq 0$

$$y_X(t) = \Big(\exp(t\lambda_1)V_1 \ldots \exp(t\lambda_n)V_n\Big)\,(V_1, \ldots, V_n)^{-}1x(V_1, \ldots, V_n)W = x\exp(t\lambda_{i_0})V_{i_0}.$$

Comme $V_{i_0} \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et le fait que $\lambda_{i_0} > 0$ on déduit que le point stationnaire est instable.

□

Remarque 47. La proposition précédente se généralise à n'importe quelle matrice constante A. Pour étudier la stabilité avec de telles matrices, il suffit de calculer les valeurs propres et voir leurs signes.

5.3.2 Exemple d'application

D'après ce qui précède la partie non homogène n'influence pas sur la stabilité de l'équation. Pour cela soit $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une fonction continue arbitraire. On va étudier dans cet exemple la stabilité des solutions des équations différentielles linéaires non-homogènes suivantes

$$\frac{d}{dt}X = AX + B(t), \tag{5.9}$$

avec $A \in \{A_1, A_2, A_3\}$ où

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'après la proposition 45 la stabilité des solutions de (5.9) revient à l'étude de la stabilité de le point stationnaire du système homogène associé qui revient aussi d'après la proposition 46 à l'étude des valeurs propres des matrices A.

La matrice A_1 admet deux valeurs propres $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -4$. Donc lorsque $A = A_1$

on a une stabilité exponentielle .
La matrice A_2 admet deux valeurs propres $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -5$. Donc lorsque $A = A_2$ on a stabilité mais non stabilité exponentielle.
La matrice A_3 admet deux valeurs propres $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 3$. Lorsque $A = A_3$ on a instabilité.

5.3.3 Sous-espace stable et instable

On considère l'équation linéaire

$$\dot{X} = AX, \quad t \geq 0, \tag{5.10}$$

où A est une matrice d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients constants. Supposons que la matrice A admet des valeurs propres de différents signes. Dans ce cas le point stationnaire n'est pas une solution stable. Par contre on peut décomposer l'espace $\mathbb{R}^N$ en somme directe de sous-espaces vectoriels stable, instable. Plus précisément on a le théorième suivant.

Théorèm 48. *On considère l'équation linéaire* (5.10). *Supposons que la matrice A admet des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ réelles de vecteurs propres $V_1, \ldots, V_n$ respectivement. Soit*

$$\Omega_1 = \{1 \leq i \leq n : \ \lambda_i < 0\}$$
$$\Omega_2 = \{1 \leq i \leq n : \ \lambda_i = 0\}$$
$$\Omega_3 = \{1 \leq i \leq n : \ \lambda_i > 0\}$$

Pour $m \in \{1, 2, 3\}$, soit E_m le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs propres

$\{V_i\}_{\{i\in\Omega_m\}}$. *Alors*

$$\forall X \in E_1, \exists \alpha, \beta > 0 : \qquad \|\exp(tA)X\| \leq \beta \exp(-\alpha t)\|X\|, \quad \forall t \geq 0.$$

$$\forall X \in E_2, \exists M > 0 : \qquad \|\exp(tA)X\| \leq M\|X\|, \quad \forall t \geq 0.$$

$$\forall X \in E_3, X \neq 0_{\mathbb{R}^n} : \qquad \|\exp(tA)X\| \to_{t\to+\infty} +\infty.$$

Les sous-espaces E_1, E_2 et E_3 du théorème précédent vérifient $E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 = \mathbb{R}^n$ de plus E_i est invariant par la matrice fondamentale pour tout $1 \leq i \leq 3$. On appelle E_1 le sous-espace exponentiellement stable, E_2 le sous-espace stable et E_3 le sous-espace instable.

∼∼∼∼∼∼∼∼∼Fin du chapitre

Chapitre 6

Exemples corrigés

6.1 Exemple No 1

Soient $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ deux fonctions de classe C^1.
On considère le problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$ suivant

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = f(\sin(t), g(x)), \\ x(\frac{\pi}{2}) = x_0. \end{cases}$$

avec , $x_0 \in \mathbb{R}$.
1) Montrer que si la dérivé g' est bornée alors le problème $(P.C)$ admet une solution globale.
2) Posons

$$f(\sin(t), g(z)) = \sin(t)g(z), \quad \text{et} \quad g(z) = 2[\cos(z) + \sin(z)], \quad \forall (t, z) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Intégrer le problèlem $(P.C)$.

b) Trouver $x(t)$ lorsque $x_0 = \pi$.

6.1.1 Correction de l'éxemple No 1

On considère le problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = f(\sin(t), g(x)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

avec $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$.

On a $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ deux fonctions de classe C^1.

1) Comme f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ respectivement donc la fonction

$$F(t, z) = f(\sin(t), g(z)), \quad z \in \mathbb{R},$$

est aussi de classe C^1 car elle est une composée de deux fonctions de classe C^1. Posons DF la Jacobienne de F, on a

$$DF(\sin(t), g(z)) = \begin{pmatrix} f'(\sin(t), g(z))\cos(t) \\ f'(\sin(t), g(z))g'(z) \end{pmatrix}$$

Comme $\sin(t) \in [-1, 1]$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $g(z) \in [-1, 1]$ pour tout $z \in \mathbb{R}$ et par hypothèse f' est continue donc bornée sur le compact $[-1, 1] \times [-1, 1]$ alors en supposant que g' est bornée, il existe $M > 0$ tel que

$$\sup_{(t,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}} ||DF(\sin(t), g(z))|| \leq M.$$

Ce qui implique par l'inégalité d'accroissements fini que F est uniformément lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur $\mathbb{R}$. Le Théorème de Cauchy-Lipschitz implique que pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le problème de Cauchy $(P.C)$ admet une solution

globale sur $\mathbb{R}$.

2) Posons

$$f(\sin(t), g(z)) = \sin(t)g(z), \quad \text{et} \quad g(z) = 2[\cos(z) + \sin(z)], \quad \forall (t, z) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Intégration de problèlem $(P.C)$:

Pour $x_0 \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, on considère le changement de variable

$$y = \tan(\frac{x}{2}).$$

Donc

$$\sin(x) = \frac{2y}{1+y^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad \dot{x} = \frac{2\dot{y}}{1+y^2}.$$

En terme de nouvelles variables le problème $(P.C)$ est équivalent à

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y = \sin(t)[1 + 2y - y^2], \\ y(t_0) = \tan(\frac{x_0}{2}), \end{cases}$$

qui est une équation de Riccati et au même temps une équation à variable séparables. On a

$$\dot{y} = \sin(t)[1 + 2y - y^2] \implies \frac{\dot{y}}{1 + 2y - y^2} = \sin(t),$$

$$\iff \frac{\dot{y}}{y - \lambda_1} - \frac{\dot{y}}{y - \lambda_2} = (\lambda_2 - \lambda_1)\sin(t)$$

où $\lambda_1 = 1 - \frac{\sqrt{8}}{2}$ et $\lambda_2 = 1 + \frac{\sqrt{8}}{2}$. On intègre donc et on trouve

$$\ln\left|\frac{y - \lambda_1}{y - \lambda_2}\right| = (\lambda_1 - \lambda_2)\cos(t) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{y - \lambda_1}{y - \lambda_2} = \kappa \exp\Big((\lambda_1 - \lambda_2)\cos(t)\Big), \qquad \kappa \in \mathbb{R},$$

$$y = \frac{\lambda_1 - \lambda_2\kappa \exp\Big((\lambda_1 - \lambda_2)\cos(t)\Big)}{1 - \kappa \exp\Big((\lambda_1 - \lambda_2)\cos(t)\Big)}, \qquad \kappa \in \mathbb{R},$$

On déduit que

$$x(t) = 2\arctan\Big[\frac{\lambda_1 - \lambda_2\kappa\exp\Big((\lambda_1-\lambda_2)\cos(t)\Big)}{1-\kappa\exp\Big((\lambda_1-\lambda_2)\cos(t)\Big)}\Big] + n\pi,\ \kappa\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{Z}.$$

3) Finalement $x(\frac{\pi}{2}) = x_0 = \pi$ implique que

$$\kappa = 1, \quad \text{et} \quad n = 0.$$

6.2 Exemple No 2

Soiten $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1.
Soiten $\alpha\in\mathbb{R}$ et $t_0\in\mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$ suivant

$$(P.C,\alpha)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = f(\alpha, g(x)), \\ x(t_0) = 0, \end{cases}$$

1) Est ce que le problème $(P.C,\alpha)$ admet une solution locale pourt tout $\alpha\in\mathbb{R}$? Si oui, pourquoi ?
2) Posons

$$f(\alpha, g(z)) = 1-\alpha z^2, \quad \forall (t,z)\in\mathbb{R}^2.$$

(a) Intégrer le problèlem $(P.C,\alpha)$.

(a) Posons $t_0 = 0$ et I_α l'intervalle maximal de $x(t)$.

Pour quelles valeurs α on a

$$\pi \in I_\alpha, \quad \text{et} \quad I_\alpha \subset]-1, 1[.$$

(b) Posons $t_0 = 1$. Déterminer I_α.

6.2.1 Correction de l'éxemple No 2

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1.
Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$ suivant

$$(P.C, \alpha) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = f(\alpha, g(x)), \\ x(t_0) = 0, \end{cases}$$

1) Oui, car f est la composée de deux fonctions C^1 donc localement lipschitziennes ce qui implique l'existence et unicité de solution locale pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
2) Posons

$$f(\alpha, g(z)) = 1 - \alpha z^2, \quad \forall (t, z) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Intégration de problèlem $(P.C, \alpha)$.

Cas :$\alpha = 0$

$$\dot{x} = 1 \implies x(t) = t + c, \quad c_i n \mathbb{R} \implies x(t) = t - t_0.$$

Cas :$\alpha < 0$

$$\dot{x} = 1 + (\sqrt{-\alpha}x)^2 \implies \frac{\dot{x}}{1 + (\sqrt{-\alpha}x)^2} = 1 \implies \arctan[\sqrt{-\alpha}x] = \sqrt{-\alpha}t + c, \ c \in \mathbb{R},$$

$$\implies c = -\sqrt{-\alpha}t_0, \quad \implies x(t) = \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} \tan(\sqrt{-\alpha}(t - t_0))$$

Cas :$\alpha > 0$

$$\dot{x} = (1 - \sqrt{\alpha}x)(1 + \sqrt{\alpha}x) \implies \frac{\dot{x}}{1 - \sqrt{\alpha}x} + \frac{\dot{x}}{1 + \sqrt{\alpha}x} = 2$$

$$\ln\left|\frac{1 + \sqrt{\alpha}x}{1 - \sqrt{\alpha}x}\right| = 2\sqrt{\alpha}t + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$\implies c = -2\sqrt{\alpha}t_0, \quad \text{donc} \quad \frac{1 + \sqrt{\alpha}x}{1 - \sqrt{\alpha}x} = \exp(2\sqrt{\alpha}(t - t_0))$$

$$\implies x(t) = \frac{\exp(2\sqrt{\alpha}(t - t_0)) - 1}{\sqrt{\alpha}(1 + \exp(2\sqrt{\alpha}(t - t_0)))}$$

(a) Posons $t_0 = 0$ et I_α l'intervalle maximal de $x(t)$.

Pour $\alpha \geq 0$ on a $I_\alpha = \mathbb{R}$. Donc

$$\pi \in I_\alpha, \quad \text{et} \quad I_\alpha \not\subset]-1, 1[.$$

On a pour $\alpha < 0$,

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} \tan(\sqrt{-\alpha}t))$$

$$I_\alpha =]-\frac{\pi}{\sqrt{-\alpha}}, \frac{\pi}{\sqrt{-\alpha}}[$$

$$\pi \in I_\alpha \iff \sqrt{-\alpha} < 1 \iff 0 > \alpha > -1.$$

et

$$I_\alpha \subset]-1, 1[\iff \pi < \sqrt{-\alpha} \iff \alpha < -\pi^2.$$

(b) Posons $t_0 = 1$. On a $I_\alpha = \mathbb{R}$ si $\alpha \geq 0$.

Si $\alpha < 0$ on a

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} \tan(\sqrt{-\alpha}(t - 1)))$$

$$\Longrightarrow\ I_\alpha =]\frac{-\pi}{\sqrt{-\alpha}} + 1, \frac{\pi}{\sqrt{-\alpha}} + 1[.$$

6.3 Exemple No 3

Soient $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{N}$. On considère sur $\mathbb{R}_+^*$ le problème de Cauchy suivant

$$(P.C, \beta) \quad \begin{cases} x' & = \frac{\exp(1+\beta x^2)}{t}, \\ x(t_0) & = x_0, \end{cases}$$

1) Est-ce-que le problème $(P.C, \beta)$ admet une solution locale ? Si oui, pourquoi ?.

2) Pour quelles valeurs de $\beta \in \mathbb{N}$ le problème $(P.C, \beta)$ admet une solution globale ?

3) Posons $(t_0, x_0) = (1, \tan(\beta))$ et posons I_β l'intervalle maximal de $x(t)$. Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{N}$ tel que

$$I_\beta \subset]0, \exp(\pi)[.$$

6.3.1 Correction de l'éxemple No 3

1) Oui, car la fonction $(t, z) \to \frac{\exp(1+\beta z^2)}{t}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ ce qui implique qu'elle est localement lipschitzienne. Donc pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ le problème $(P.C, \beta)$ admet une solution locale.

2) On a pour $\beta \geq 1$

$$\dot{x} = \frac{\exp(1+\beta x^2)}{t} > \frac{1+\beta x^2}{t} \geq \frac{1+x^2}{t}.$$

Soit

$$\dot{y} = \frac{1+y^2}{t}.$$

la solution $x(t)$ est une sur solution de $y(t)$. Donc le problème $(P.C, \beta)$ admet une solution globale que pour $\beta = 0$.

3) On a pour $\beta \geq 1$

$$\dot{x} = \frac{\exp(1+\beta x^2)}{t} > \frac{1+\beta x^2}{t}.$$

Soit

$$\dot{y} = \frac{1+\beta y^2}{t}.$$

L a solution $x(t)$ est une sur solution de $y(t)$. On va montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{N}$ tel que l'intervalle maximal de Y est inclu dans $]0, \exp(\pi)[$

$$\frac{\sqrt{\beta}\dot{y}}{1+(\sqrt{\beta}y)^2} = \frac{\sqrt{\beta}}{t}$$

$$\implies \arctan(\sqrt{\beta}y(t)) - \arctan(\sqrt{\beta}y(1)) = \sqrt{\beta}\ln(t)$$

$$\implies y(t) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan\big[\arctan(\sqrt{\beta}y(1)) + \sqrt{\beta}\ln(t)\big].$$

Donc, l'intervalle maximal de $y(t)$ est de la forme

$$[0, t_\beta[, \quad \text{où} \quad \ln(t_\beta) = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\big[\frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{\beta}y(1))\big]$$

$$\iff t_\beta = \exp\big(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\big[\frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{\beta}y(1))\big]\big).$$

Pour $y(1) < x_0 = \tan(\beta)$ on a $x(t) > y(t)$ pour tout $t \geq 1$. Donc l'intervalle maximale I_β

de $x(t)$ vérifie

$$I_\beta \subset]0, t_\beta[.$$

Pour que $I_\beta \subset]0, \exp(\pi)[$ il suffit de prendre

$$\exp\big(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\big[\frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{\beta}\tan(\beta))\big]\big) < \exp(\pi).$$

cela est vrai lorsque

$$\frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{\beta}\tan(\beta)) < \sqrt{\beta}\pi \iff \arctan(\sqrt{\beta}\tan(\beta)) > \pi(\frac{1}{2} - \sqrt{\beta}).$$

qui est vraie pour tout $\beta \geq 1$ car $\arctan(\sqrt{\beta}\tan(\beta)) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

6.4 Exemple No 4

Soient $t_0 \in \mathbb{R}^+$ et $\beta \in \mathbb{N}$. On considère sur $\mathbb{R}^+$ le problème de Cauchy suivant

$$(P.C, \beta) \quad \begin{cases} x' & = (1 + \beta x^2)^\beta, \\ x(t_0) & = x_0, \end{cases}$$

1) Est-ce-que le problème $(P.C, \beta)$ admet une solution locale ? Si oui, pourquoi ?.

2) Posons $(t_0, x_0) = (0, 0)$ et I_β l'intervalle maximal de $x(t)$. Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{N}$ tel que

$$I_\beta \subset [0, 1[.$$

2) Pour quelles valeurs de $\beta \in \mathbb{N}$ le problème $(P.C, \beta)$ admet une solution globale ?

6.4.1 Correction de l'éxemple No 4

Soient $t_0 \in \mathbb{R}^+$ et $\beta \in \mathbb{N}$. On considère sur $\mathbb{R}^+$ le problème de Cauchy suivant

$$(P.C, \beta) \quad \begin{cases} x' & = (1+\beta x^2)^\beta, \\ x(t_0) & = x_0, \end{cases}$$

1) Oui, car la fonction $z \to (1+\beta z^2)^\beta$ est un polynôme au fonction de z. Donc elle est de classe C^1 ce qui implique qu'elle est localement lipschitzienne. Donc pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ le problème $(P.C, \beta)$ admet une solution locale.

2) On a pour $\beta \geq 1$

$$\dot{x} = (1+\beta x^2)^\beta > 1 + \beta x^2.$$

Soit

$$\dot{y} = 1 + \beta y^2.$$

la solution $x(t)$ est une sur solution de $y(t)$. On va montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{N}$ tel que l'intervalle maximal de Y est inclu dans $[0, 1[$

$$\frac{\sqrt{\beta}\dot{y}}{1+(\sqrt{\beta}y)^2} = \sqrt{\beta}$$

$$\implies \arctan(\sqrt{\beta}y(t)) - \arctan(\sqrt{\beta}y(0)) = \sqrt{\beta}t$$

$$\implies y(t) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan\big[\arctan(\sqrt{\beta}y(0)) + \sqrt{\beta}t\big].$$

Donc, l'intervalle maximal de $y(t)$ est de la forme

$$[0, t_\beta[, \quad \text{où} \quad t_\beta = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\big[\frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{\beta}y(0))\big]$$

Pour $y(0) < 0$ on a $x(t) > y(t)$ pour tout $t \geq 0$. Donc l'intervalle maximale I_β de $x(t)$ vérifie

$$I_\beta \subset [0, t_\beta[.$$

Pour que $I_\beta \subset [0, 1[$ il suffit de prendre

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}}\big[\frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{\beta}y(0))\big] < 1.$$

2) Le problème $(P.C, \beta)$ admet une solution globale que pour $\beta = 0$ car pour $\beta \geq 1$ on a

$$\dot{x} = (1 + \beta x^2)^\beta > 1 + \beta x^2 > 1 + x^2.$$

6.5 Test

Exercice 1 (Questions de cours):

(A)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, une fonction C^1 de différentielle bornée sur sur $\mathbb{R}^n$. Soi l'équation différentielle suivante

$$\dot{X} = f(X), \quad t \geq t_0. \tag{6.1}$$

Soit $X(t)$ solution de l'équation (6.1) de condition initiale $X \in \mathbb{R}^n$.

1) Donner la définition de stabilité de la solution $X(t)$.

2) Donner la définition de l'exponentielle stabilité de la solution $X(t)$.

3) Est-ce qu'on a équivalence entre la stabilité et l'exponentielle stabilité ?

(B)

Soit le système linéaire non-homogène suivant

$$\dot{X} = AX + B(t), \tag{6.2}$$

où A est une matrice diagonalisable d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients constants et $B(t)$ est un vecteur de taille n à coefficients dépendant du temps t.

1) Quelle est la relation entre la stabilité des solutions du système (6.2) et la stabilité des solutions du système homogène suivant

$$\dot{X} = AX. \tag{6.3}$$

2) Quelle est la relation entre les valeurs propres de la matrice A et la stabilité du système homogène (6.3).

Exercice 2: Soient $t_0 \in \mathbb{R}^+$ et $\beta \in \mathbb{N}$. On considère sur $\mathbb{R}^+$ le problème de Cauchy suivant

$$(P.C, \beta) \quad \begin{cases} x' & = (1 + \beta x^2)^\beta, \\ x(t_0) & = x_0. \end{cases}$$

Posons $(t_0, x_0) = (0, 0)$ et I_β l'intervalle maximal de $x(t)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $\beta_n \in \mathbb{N}$ tel que

$$I_{\beta_n} \subset [0, \frac{1}{n}[.$$

Exercice 3: Soient $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ et $\beta \in \mathbb{N}$. Intégrer le problème suivant

$$(R, \beta) \quad \begin{cases} x' & = \sin(x - \beta\frac{\pi}{2}) + \cos(x + \beta\frac{\pi}{2}), \\ x(t_0) & = x_0. \end{cases}$$

Exercice 4: Résoudre avec deux méthodes le système suivant

$$\frac{d}{dt}X = AX + B(t), \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} \exp(2t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6.5.1 Correction du Test

Exercice 5 (Questions du cours):

(A)

1) (1 point) La solution $X(t)$ est stable si

$$\exists M > 0, \exists \delta > 0 : \forall Y \in \mathbb{R}^n, ||X - Y|| < \delta$$
$$\Longrightarrow ||\Phi^t(X) - \Phi^t(Y)|| \leq M||X - Y||, \forall t \geq t_0.$$

2) (1 point) La solution $X(t)$ est exponentiellement stable si

$$\exists M > 0, \exists c > 0, \exists \delta > 0 : \forall Y \in \mathbb{R}^n, ||X - Y|| < \delta$$
$$\Longrightarrow ||\Phi^t(X) - \Phi^t(Y)|| \leq M \exp(-ct)||X - Y||, \forall t \geq t_0.$$

3) (1 point) Une solution exponentiellement stable est stable. La réciproque est en générale fausse.

(B)

1) (1 point) La stabilité des solutions du système (2) est équivalente à la stabilité du point stationnaire du système homogène (3).

2) (1 point) Le point stationnaire du système (3) est stable (respectivement : exponentiellement stable) si et seulement si pour tout $1 \leq i \leq n$ les valeurs propres $\{\lambda_i\}_i$ de la matrice A vérifient $\lambda_i \leq 0$ (respectivement : pour tout $1 \leq i \leq n$ on a $\lambda_i < 0$).

Exercice 6: Soient $t_0 \in \mathbb{R}^+$ et $\beta \in \mathbb{N}$. On considère sur $\mathbb{R}^+$ le problème de Cauchy suivant

$$(P.C, \beta) \quad \begin{cases} x' & = (1 + \beta x^2)^\beta, \\ x(0) & = 0, \end{cases}$$

On a pour $\beta \geq 1$

$$\text{(1 point)} \quad \dot{x} = (1 + \beta x^2)^\beta > 1 + \beta x^2.$$

Soit

$$\dot{y} = 1 + \beta y^2.$$

La solution $x(t)$ est une sur solution de $y(t)$. On va montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il

existe $\beta_n \in \mathbb{N}$ tel que l'intervalle maximal de Y est inclut dans $[0, \frac{1}{n}[$

$$\text{(1 point)} \quad \frac{\sqrt{\beta}\dot{y}}{1+(\sqrt{\beta}y)^2} = \sqrt{\beta}$$

$$\text{(1 point)} \quad \Longrightarrow \arctan(\sqrt{\beta}y(t)) - \arctan(\sqrt{\beta}y(0)) = \sqrt{\beta}t$$

$$\text{(1 point)} \quad \Longrightarrow y(t) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan\big[\arctan(\sqrt{\beta}y(0)) + \sqrt{\beta}t\big].$$

Donc, l'intervalle maximal de $y(t)$ est de la forme

$$[0, t_\beta[, \quad \text{où} \quad t_\beta = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\big[\frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{\beta}y(0))\big]$$

Pour $y(0) < 0$ on a $x(t) > y(t)$ pour tout $t \geq 0$. Donc l'intervalle maximale I_β de $x(t)$ vérifie

$$I_\beta \subset [0, t_\beta[.$$

Comme

$$\frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{\beta_n}y(0)) < \pi.$$

Pour que $I_\beta \subset [0, \frac{1}{n}[$ il suffit de prendre

$$\text{(1 point)} \quad \frac{\pi}{\sqrt{\beta_n}} < \frac{1}{n}.$$

Exercice 7:

$$x' = \sin(x - \beta\frac{\pi}{2}) + \cos(x + \beta\frac{\pi}{2})$$

$$\Longleftrightarrow \; x' = [\cos(\beta\frac{\pi}{2}) - \sin(\beta\frac{\pi}{2})][\sin(x) + \cos(x) \text{(0.5 point)}$$

$$\Longleftrightarrow \; x' = \kappa[\sin(x) + \cos(x)]$$

où

$$\kappa = -1, \quad \text{si} \quad \beta \in \{4m+1,\ 4m+2, \quad m \in \mathbb{N}\}$$
$$\kappa = 1, \quad \text{si} \quad \beta \in \{4m+3,\ 4m+4, \quad m \in \mathbb{N}\}$$

On considère le changement de variable

$$y = \tan(\frac{x}{2}) \implies \sin(x) + \cos(x) = \frac{1+2y-y^2}{1+y^2}, \text{ et } \dot{x} = \frac{2y'}{1+y^2}.$$ (1.5 point)

En terme de ces nouvelles variable, on a l'équation de Riccati suivante

$$\dot{y} = \frac{\kappa}{2}(1+2y-y^2)$$ (0.5 point)

$$y(t) = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 c \exp(\frac{\kappa}{2}(\lambda_1-\lambda_2)t)}{1 - c\exp(\frac{\kappa}{2}(\lambda_1-\lambda_2)t)},\ c \in \mathbb{R}.$$

où λ_1 et λ_2 sont les racines du polynôme $1+2y-y^2$. D'òu

$$x(t) = 2\arctan[\frac{\lambda_1 - \lambda_2 c \exp(\frac{\kappa}{2}(\lambda_2-\lambda_1)t)}{1 - c\exp(\frac{\kappa}{2}(\lambda_2-\lambda_1)t)}],\ c \in \mathbb{R}$$ (0.5 point)

Exercice 8:

Première Méthode

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 6$ et $\lambda_2 = -2$. L'un des vecteurs propres de λ_1 est $V_1 = (1,1)$ et l'un des vecteurs propres de λ_2 est $V_2 = (-1,1)$. Donc les deux solutions

$$Z_1(t) = \exp(6t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad Z_2(t) = \exp(-2t)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},$$

forment une ensemble fondamentale des solutions du système homogène

$$\dot{X} = AX,$$

La résolvante dans ce cas est donnée par

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} \exp(6t) & -\exp(-2t) \\ \exp(6t) & \exp(-2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, \text{(1 point)}$$

donc

$$\exp(tA) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \exp(6t) + \exp(-2t) & \exp(6t) - \exp(-2t) \\ \exp(6t) - \exp(-2t) & \exp(6t) + \exp(-2t) \end{pmatrix}$$

$$= \exp(2t) \begin{pmatrix} \cosh(4t) & \sinh(4t) \\ \sinh(4t) & \cosh(4t) \end{pmatrix}. \text{(1 point)}$$

Par conséquent les solution du système non-homogène sont données par

$$X(t) = \exp((t-t_0)A)[X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \exp(-(s-t_0)A) \begin{pmatrix} \exp(2s) \\ 0 \end{pmatrix} ds]$$

$$= \exp((t-t_0)A)\big[X(t_0) - \frac{\exp(2t_0)}{4} \begin{pmatrix} \sinh(-4(t-t_0)) \\ \cosh(-4(t-t_0)) - 1 \end{pmatrix}\big], \text{(1 point)}$$

où

$$\exp((t-t_0)A) = \exp(2(t-t_0)) \begin{pmatrix} \cosh(4(t-t_0)) & \sinh(4(t-t_0)) \\ \sinh(4(t-t_0)) & \cosh(4(t-t_0)) \end{pmatrix}.$$

Deuxième Méthode

Soit $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$. Posons $u(t) = x_1 t) + x_2(t)$ (0.5 point) par addition on a

$$u'(t) = x_1'(t) + x_2'(t) = 6u(t) + \exp(2t), \text{(0.5 point)}$$

qui est une équation différentielle linéaire scalaire, donc

$$u(t) = \exp(6t)[c - \frac{1}{4}\exp(-4t)], \quad c \in \mathbb{R}. \text{(0.5 point)}$$

Posons $w(t) = x_1(t) - x_2(t)$ (0.5 point). On a

$$w'(t) = -2w(t) + \exp(2t), \text{ (0.5 point)}$$

qui est une équation différentielle linéaire scalaire, donc

$$w(t) = \exp(-2t)[c' + \frac{1}{4}\exp(4t)], \quad c' \in \mathbb{R}. \text{(0.5 point)}$$

On utilise

$$x_1(t) = \frac{u(t) + w(t)}{2} \quad \text{et} \quad x_2(t) = \frac{u(t) - w(t)}{2} \text{(1 point)}$$

Pour déduire la forme explicite de la solution $X(t)$.

Chapitre 7

Exercices non corrigés

Exercice 9:

Intégrer les équations suivantes

- $\dot{x} = 1$,
- $\dot{x} = t$,
- $\dot{x} = x$,
- $\dot{x} = x^2$.

Déterminer le domaine de définition de $x(t)$ lorsque $x(0) = 0$ et $x(0) = 1$.

Exercice 10:

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite *uniformément (ou globalement) lipschitzienne* s'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que

$$|f(x) - f(y)| \leq \kappa |x - y|, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Est-ce que les fonctions suivantes sont lipschitziennes par rapport à la deuxième variable uniformément sur $\mathbb{R}$?

- $f(x) = 2x$,
- $f(x) = x^2$,
- $f(x) = \sin(x)$,
- $f(x) = \exp(x)$.

Donner une condition suffisante pour qu'une fonction soit lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur un intervalle I.

Exercice 11:

Résoudre les équations différentielles suivantes

$$\begin{array}{ll} 1) \quad \dot{x} = 2x, & 3) \quad \dot{x} = ax + 3, \quad a \in \mathbb{R}, \\ 2) \quad \dot{x} = 2x + 1, & 4) \quad \dot{x} = ax + b, \quad (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{array}$$

Exercice 12:

Résoudre les équations différentielles suivantes

$$\begin{array}{ll} 1) \quad \dot{x} = tx, & 3) \quad \dot{x} = tx + 1, \\ 2) \quad \dot{x} = 2x + t, & 4) \quad \dot{x} = tx + t. \end{array}$$

Exercice 13:

Est-ce-que les fonctions $f : I \times D \to \mathbb{R}$ définies par

$$\begin{array}{ll} 1) f(t, x) = t + x, & I = \mathbb{R} \text{ et } D = \mathbb{R}, \\ 2) f(t, x) = t^2 + x^2, & I = \mathbb{R} \text{ et } D = \mathbb{R}, \\ 3) f(t, x) = tx^2, & I = \mathbb{R} \text{ et } D = \mathbb{R}, \\ 4) f(t, x) = \ln(t + x), & I = \mathbb{R}_+^* \text{ et } D = \mathbb{R}_+^*, \\ 5) f(t, x) = \dfrac{x}{1 - t}, & I = [0, 1[\text{ et } D = \mathbb{R}, \\ 6) f(t, x) = \sin(t)\cos(x), & I = \mathbb{R} \text{ et } D = \mathbb{R}, \end{array}$$

sont localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur $I \times D$?

Donner une condition suffisante pour qu'une fonction $f : I \times D \to \mathbb{R}$ soit localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur $I \times D$ où I et D sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Exercice 14:

On considère sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy suivant

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = x^2, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}$ le problème de Cauchy (E) admet une solution locale sur $\mathbb{R}$.

2) Trouver la solution maximale sur $\mathbb{R}$ lorsque $(t_0, x_0) = (1, 1)$, lorsque $(t_0, x_0) = (1, -5)$ et lorsque $(t_0, x_0) = (0, 0)$.

Exercice 15:

Montrer que les équations différentielles suivantes n'admettent pas de solutions sur $\mathbb{R}$

- $\frac{d}{dt}x = \exp(1 + x^2)$.
- $\frac{d}{dt}x = \frac{1+x^2}{2+\sin(x)}$.
- $\frac{d}{dt}x = \ln\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right) - x^2$.

Exercice 16:

Résoudre les équations différentielles suivantes

- $\frac{d}{dt}x = \cos(t)\sin(x)$.
- $\frac{d}{dt}x = \exp(t)\exp(x)$.
- $\frac{d}{dt}x = x + x^2$.
- $\frac{d}{dt}x = 1 + 5x + x^2$.

Exercice 17:

Intégrer les équations différentielles suivantes

- $\frac{d}{dt}x = 1 - 4\sin(x)$,
- $\frac{d}{dt}x = 1 - 4\sin(x) + \cos(x)$.

Exercice 18:

Est-ce-que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ le problème de Cauchy suivant admet une

solution globale sur $\mathbb{R}$

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = \sin(x+y), \\ \frac{d}{dt}y = \cos(y-x), \\ (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0). \end{cases}$$

Si oui, pourquoi ?

Exercice 19:

Intégrer l'équation différentielle suivante

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = \cos(t)y + \sin(t), \\ \frac{d}{dt}y = \cos(t)x - \sin(t), \\ (x(0), y(0)) = (0, 0). \end{cases}$$

Exercice 20:

Soit $\lambda \in [0,1]$. Est-ce-que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ le problème de Cauchy suivant admet une solution $Z_\lambda(t) = (x_\lambda(t), y_\lambda(t))$ sur $[0,1]$?

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = \sin(\lambda(x+y)), \\ \frac{d}{dt}y = \sin(\lambda(x-y)), \\ (x(0), y(0)) = (0, 0). \end{cases}$$

Montrer que

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \lambda_\epsilon \in [0,1] : \quad \max_{t\in[0,1]} \|Z_\lambda(t)\| < \epsilon, \quad \forall \lambda \in [0, \lambda_\epsilon].$$

Exercice 21: [Solution locale]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $D \subset E = \mathbb{R}^n$ un connexe de E. Soit

$f : I \times D \to E$ une fonction continue . Soit le problème de Cauchy

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}X = f(t, X), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

avec $(t_0, X_0) \in I \times D$. Supposons que f es localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur $I \times D$. Montrer que pour tout $(t_0, X_0) \in I \times D$ il existe un intervalle $J \subset I$ contenant t_0 tel que le problème de Cauchy (P.C) admet une unique solution définie sur J.

Exercice 22:

Intégrer, avec deux méthodes différentes, les équations différentielles suivantes

$$(E1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = y + a, \\ \frac{d}{dt}y = x + b, \\ (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0), \\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}, (E2) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = x + 2y + \sin(t), \\ \frac{d}{dt}y = y + 2x + \cos(t), \\ (x(0), y(0)) = (0, 0). \end{cases}$$

Exercice 23:

Soit $N \in \mathbb{N}$.

(1) Soit le problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$ dépendant d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(P.C, \lambda) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}X_\lambda = F(t, X_\lambda, \lambda), \\ X_\lambda(0) = 0_{\mathbb{R}^N}, \end{cases}$$

où $0_{\mathbb{R}^N} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^N$ et $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ une fonction de classe C^1 de différentielle bornée et telle que $F(t, 0_{\mathbb{R}^N}, \lambda) = 0_{\mathbb{R}^N}$ pour tout t et λ dans $\mathbb{R}$. Posons $g_n(t) = X_{\frac{1}{n}}(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la limite de la suite de fonctions $(g_n)_n$?

(2) Énoncer le théorème d'existence locale d'une solution du problème de Cauchy

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

où $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^N$ et $f : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 24:

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère sur $]0, +\infty[$ le problème de Cauchy suivant

$$(E1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = \frac{x^2}{t}, \\ x(1) = \alpha. \end{cases}$$

1) Calculer $x(t)$ en fonction de α et calculer son intervalle maximal.

2) Posons I_α l'intervalle maximal de la solution $x(t)$. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $\pi \in I_\alpha$?

Exercice 25:

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. On considère sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy suivant

$$(E2) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = 1 + \beta x - x^2, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

1) Est ce que le problème de Cauchy $(E2)$ admet une solution locale dans $\mathbb{R}$? Si oui, pourquoi ?

2) Pour quelles valeurs de $\beta \in \mathbb{R}$ le problème $(E2)$ admet une solution sur $]-\infty, 1[$.

3) Pour quelles valeurs de $\beta \in \mathbb{R}$ le problème $(E2)$ admet une solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 26:

Soient t_0 et x_0 dans $\mathbb{R}$. On considère sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy suivant

$$(E3) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = (1+x^2)^2, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

1) Est ce que le problème de Cauchy $(E3)$ admet une solution locale dans $\mathbb{R}$? Si oui, pourquoi ?
2) Montrer que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ le problème précédent n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27:
Résoudre les équations suivantes

- $y'' = y + 1$.
- $y'' = y' + 2y + 1$.
- $y''' = y'' + y' + y + 1$.
- $y''' = 2y' + y + 1$.
- $y''' = 2y'' + y' + 3$.

Exercice 28:
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, une fonction lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur $\mathbb{R}$. Soi l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = f(x), \quad t \geq 0. \tag{7.1}$$

Notons Φ^t le flot de l'équation (7.1). Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a les propriétés suivantes

- $\Phi^0 = Id$ où $Id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est la fonction identité, d'un autre terme $\forall X \in \mathbb{R} : \Phi^{t_0}(X) = X$.
- Φ^t est continue.
- Pour tout $t, s > t_0$ et tout $X \in \mathbb{R}^n$ on a $\Phi^s(\Phi^t(X)) = \Phi^{s+t}(X)$.

Exercice 29:

Soit le système linéaire suivant

$$\dot{X} = AX + B(t), \tag{7.2}$$

où A est une matrice d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients constants et $B(t)$ est un vecteur de taille n à coefficients dépendant du temps t. Montrer que le système (7.2) admet une solution stable si et seulement si le point stationnaire du système linéaire homogène

$$\dot{X} = AX,$$

est stable.

Exercice 30:

Soit le système linéaire suivant

$$\dot{X} = AX, \tag{7.3}$$

où A est une matrice d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients constants. Montrer que le point stationnaire est stable si et seulement si le système (7.2) admet une solution bornée.

Exercice 31:

Soit A est une matrice d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients constants Supposons que la solution nulle du système

$$\dot{X} = AX, \quad t \geq 0 \in \mathbb{R}$$

est exponentiellement stable. Notons par Φ^t le flot. Montrer qu'il existe $t_* \geq t_0$ tel que que toute boule fermée de centre $0_{\mathbb{R}^n}$ est positivement invariante par la translation du flot Φ^{t+t_*}.