الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
—
Université
Yahia FARES de MEDEA

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
—
جامعة يحي فارس بالمدية

Faculté des Sciences

كليـة العلـوم

N°:……/CSF/2018

POLYCOPIE DE COURS

« GRAPHES ET MODELISATION »

Auteur :

Bouchou Ahmed

Destiné aux étudiants de

Discipline : Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Niveau : 2ème année master

Année : 2018

Approuvé par le Conseil Scientifique de la Faculté en date du :

TABLE DES MATIERES

Avant propos

1. NOTIONS GENERALES SUR LES GRAPHES.....09

1.1. Concepts fondamentaux.....09

1.1.1. Définition d'un Graphe.....09

1.1.2. Distance, excentricité et diamètre.....10

1.1.3. Quelques graphes particuliers.....10

1.1.4. Quelques opérations sur les graphes.....14

1.1.5. Connexité.....15

1.2. Invariants de graphes.....16

1.2.1. Couplage…….....17

1.2.2. Stable.....17

1.2.3. Clique.....17

1.2.4. Transversale.....17

1. 2.5. Recouvrement.....18

1.3. Notion de complexité.....19

2. LA DOMINATION DANS LES GRAPHES.....23

2.1. Problèmes étudiés en domination.....24

2.2. La domination.....24

2.2.1. Définitions et propriétés.....24

2.2.2. Application de la domination.....27

2.2.3. Algorithmes et complexité.....28

2.2.4. Bornes sur γ…….....32

2.3. L'indépendance.....40

2.3.1. Définitions et propriétés.....40

2.3.2. Bornes sur α.....42

2.4. L'irrédondance.....46

2.4.1. Définitions et propriétés.....46

2.4.2. Bornes sur IR et ir.....47
2.5. Autres paramètres de domination.....50
2.5.1. La domination stable.....51
2.5.2. La domination totale.....53
2.5.3. La domination couplée.....55
2.5.4. La domination connexe.....57
2.5.5. La domination double.....60
3. LA COLORATION DE GRAPHES.....64
3.1. Coloration des sommets.....64
3.1.1. Algorithme de coloration de Welsh et Powell.....66
3.1.2. Application.....67
3.1.3. Bornes sur le nombre chromatique.....69
3.2. Graphes parfaits.....72
3.3. Coloration des arêtes.....74
3.4. Coloration totale.....75
4. NOTION DE NOYAUX DANS LES DIGRAPHES.....76
4.1. Définitions et notations utilisées dans les digraphes.....76
4.1.1. Digraphe.....76
4.1.2. L'ensemble des prédécesseurs, successeurs et voisins d'un sommet.....77
4.1.3. Degré entrant, degré sortant et degré d'un sommet.....78
4.1.4. Graphe non orienté associé à un digraphe.....79
4.1.5. Graphe orienté.....79
4.1.6. Sous-graphe, graphe partiel.....81
4.1.7. Graphe orienté fortement connexe.....82
4.1.8. Mise en ordre d'un graphe sans circuit.....82
4.1.9. Ensemble stable, ensemble absorbant.....83
4.2. Noyaux et Graphes noyaux parfaits.....83
4.2.1. Définitions.....83
4.2.2. Applications.....84

4.2.3. Propriétés du noyau.....85
4.2.4. Quelques sous classes des digraphes noyau-parfaits.....86
4.2.5. Noyaux et fonctions de Grundy.....87
4.2.6. Méthodes de démonstration d'existence du noyau.....89
4.2.7. Etude algorithmique de la recherche de noyau.....90
4.2.8. Jeux de Nim…….....91
REFERENCES.....92

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

Figure 1.1 Un graphe G……..….....9

Figure 1.2 Sous graphe et sous graphe partiel d'un graphe…….....11

Figure 1.3 Un graphe et son complémentaire...……...…….....11

Figure 1.4 Le graphe $K_{2,3}$……..……..……...….....11

Figure 1.5 Un arbre……..……..……..……...….....12

Figure 1.6 Une chaîne, une étoile et une chenille.....12

Figure1.7 Le cycle C_5…….....12

Figure 1.8 Un cactus.....13

Figure 1.9 Un graphe 3-régulier…….....13

Figure 1.10 Les graphes $K_{1,3}$, $K_{1,3}$+e …….……....14

Figure 1.11 La subdivision d'une étoile……..14

Figure 1.12 Le cycle C_4 et sa couronne ……..…….....14

Figure 1.13 Le produit carré $P_2 \square P_2$…….....15

Figure 1.14 Le produit croisé $P_2 \times P_2$…….....15

Figure 1.15 Le produit total $P_2 \boxtimes P_2$…..……...…...15

Figure 1.16 Un graphe à 5 blocs..…….....16

Figure 2.1 Un exemple de graphe G avec $\gamma(G)=2$ et $\Gamma(G) = 3$…….....26

Figure 2.2 La composition de deux arbres G et H…….....29

Figure 2.3 Un exemple de la construction du graphe G(I)…….....31

Figure 2.4 La couronne de $K_{1,p}$.....51

Figure 2.5 Exemple d'un graphe G avec $\gamma_t(G) = 3$…….....53

Figure 2.6 Exemple d'un graphe G avec $\gamma_{pr}(G) = 4$…….....55

Figure 2.7 Exemple d'un graphe G avec $\gamma_c(G) = 4$…….....58

Figure 2.8 Exemple d'un graphe G avec $\gamma_c(G) = 4$…….....60

Figure 3.1 Exemple d'un graphe G avec $\chi(G) = 3$…….....65

Figure 3.2 Le graphe $K_{4,4}$ moins un couplage parfait…….....67

Figure 3.3 Un graphe de planification d'horaires des examens…….…….....68

Figure 4.1 Un exemple d'un digraphe…….....77

Figure 4.2 Un digraphe Δ et son associé le graphe Γ…….....79

Figure 4.3 Un tournoi d'ordre 4…….…….....80

Figure 4.4 Un arbre orienté…….....80

Figure 4.5 Une chaîne orientée Π_8……..…….....80

Figure 4.6 Une chaîne orientée sans arcs symétriques Π_5..…….…….....81

Figure 4.7 Un chemin P_6 ……...…….....81

Figure 4.8 Un cycle orienté d'ordre 3 et le circuit d'ordre 3……81

Figure 4.9 Un digraphe sans noyau, un digraphe avec un noyau unique et un digraphe avec deux noyaux…….……83

Figure 4.11 La représentation graphique d'un problème concret.……..…...85

Figure 4.12 Un digraphe qui n'admet pas une fonction de Grundy et un digraphe avec deux fonctions de Grundy……..……..….....88

Figure 4.14 Un digraphe possédant un noyau mais n'admettant pas de fonction de Grundy……..…..……..…...88

Figure 4.14 Le graphe représentatif du jeu de Nim pour p = 2.…….……..…...91

Avant propos

La vie moderne mène l'homme actuel à confronter des situations problématiques d'un système de relations sociales et économiques très complexe. De plus en plus d'éléments doivent être pris en compte lors des prises des décisions concernant une action donnée qui deviennent l'objet de véritables recherches qui ne peuvent être menées sans l'aide d'outils mathématiques appropriés. C'est ainsi que s'est développé un domaine de mathématiques centré sur l'activité de décision : la *Recherche Opérationnelle.*

Ce n'est qu'après la deuxième guerre mondiale qu'on a vu apparaître des applications de la Recherche Opérationnelle dans le domaine de la gestion. Cette discipline est définie comme étant l'approche scientifique des problèmes complexes rencontrés dans la direction et la gestion de grands systèmes. La théorie des graphes, la programmation linéaire, l'optimisation combinatoire, l'optimisation dans les réseaux, les processus aléatoires, la théorie de jeux, les files d'attente, ... sont les principales techniques mathématiques auxquelles recourt la recherche opérationnelle.

La théorie des graphes représente une classe très importante de la recherche opérationnelle, elle constitue un outil très puissant pour schématiser les modèles des liens et relations entre les objets.

L'étude des graphes a commencé en 1736 quand *Euler* posa le fameux problème: "comment parcourir une fois et une seule fois les sept ponts de la ville de Konigsberg".

La théorie des graphes est devenue très utile comme modèle mathématique. Elle regroupe généralement des problèmes assez variés qui ont tous comme caractéristique commune de pouvoir être représentés par un schéma . Ce schéma appelé graphe est constitué par un ensemble de points (sommets) représentant des individus, des objets, des situations, etc ... et qui sont reliés par des flèches ou des lignes (arcs ou arêtes) symbolisant les relations entre eux.

Parmi les problèmes les plus importants et très étudié en théorie des graphes sont les problèmes de domination, les problèmes de coloration et les problème de noyau dans les graphes, de nombreuses recherches, au-delà de l'importance théorique liée à leur résolution,

ces problèmes trouvent également un intérêt pratique dans la modélisation des problèmes réels issus de l'industrie. La technique de domination est devenue donc un outil très puissant dans la résolution des problèmes de la théorie des graphes. Généralement, il s'agit de trouver un ensemble de sommets d'un graphe qui satisfasse certaines conditions d'optimalité.

Ce cours s'adresse aux étudiants du deuxième année Master, Recherche Opérationnelle. Il a pour objectif de donner les bases en théorie de graphes,et il est structuré de manière que l'attention du lecteur se focalise sur les applications pratiques. Il est composé de quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous présentons les définitions et les notions de base nécéssaires utilisées tout au long de ce document. Les notions propres à un chapitre donné seront définies dans le chapitre lui même. Dans le deuxième chapitre, nous abordons la domination dans les graphes, nous définissons quelques paramètres de domination et nous donnons des bornes sur ces parmètres avec des caractérisations des graphes extrémaux. Au chapitre trois, nous etudions la coloration des sommets et la coloration des arêtes dans les graphes en donnant des bornes sur le nombre chromatique χ et l'indice chromatique χ' d'un graphe. Dans le dernier chapitre, nous donnons un aperçu générale sur les digraphes et nous étudions l'existance d'un noyau dans un digraphe.

Ce cours s'appuie sur les livres de Berge [12], Haynes, Hedetniemi et Slater [62, 63] et sur beaucoup d'articles.

CHAPITRE 1

Notions générales sur les graphes

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions et terminologie utilisées dans l'ensemble de ce document. Dans la premiére partie, nous rappelons quelques définitions de base de la théorie des graphes. Ensuite nous donnons un bref aperçu sur les paramètres structurels d'un graphe. Enfin nous citons quelques invariants de graphes.

1.1 Concepts fondamentaux

1.1.1 Définition d'un Graphe

Un *graphe* $G = (V, E)$ est la donnée de deux ensembles finis, un ensemble de sommets V et un ensemble d'arêtes E. Le cardinal de V est appelé l'ordre de G, noté par $n(G)$ et le cardinal de E est appelé la taille de G, noté par $m(G)$. Une arête $e \in E$ est un couple de sommets $\{u, v\}$ notée par uv, où u et v sont les extrémités de e. On dira dans ce cas que u et v sont adjacents et que e est incidente à u et v. Une boucle est une arête dont les deux extrémités sont confondues. Un graphe est dit simple s'il est sans boucles et sans arêtes multiples. Dans ce qui suit, on cosidère que les graphes simples.

Par exemple, la Figure 1.1. montre un graphe simple $G = (V, E)$ avec $V(G) = \{x, y, z, u, v\}$ et $E(G) = \{xy, yz, zx, zu, xu, uv\}$.

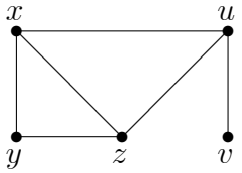


Figure 1.1. Un graphe G

Le voisinage ouvert d'un sommet v est $N_G(v) = \{u \in V : uv \in E\}$ et le voisinage fermé de v est $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Pour un sous-ensemble $S \subset V$ le voisinage ouvert

de S est $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$ le voisinage fermé est $N_G[S] = N_G(S) \cup S$ et le voisinage privé d'un sommet $v \in S$ par rapport à S, noté $pn[v, S]$, est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont pas de voisins dans S autre que v, i.e, $pn[v; S] = \{u \in V : N[u] - S = \{v\}\}$.

Le degré d'un sommet $v \in V$, noté $d_G(v)$ est égal au cardinal de son voisinage ouvert. On note par $N_S(x) = N_G(x) \cap S$ et $d_G(v) = |N_S(x)|$. On notera par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$, respectivement, le degré maximum et le degré minimum dans G. Un sommet de degré nul sera dit sommet isolé, un sommet de degré égal à un sera dit sommet pendant. Un sommet adjacent à un sommet pendant sera dit sommet support et une arête incidente à un sommet pendant est appelée arête pendante.

Pour le graphe G de la Figure 1.1. Le voisinage ouvert du sommet b est $N_G(y) = \{x, z\}$ et son voisinage fermé est $N_G[b] = \{x, y, z\}$. Le graphe G n'a pas de sommets isolés, et v est un sommet pendant. Le degré minimum du G est donc $\delta(G) = 1$ et le degré maximum est $\Delta(G) = 3$.

Le théorème suivant est un résultats qui relie la somme des degrés des sommets et la taille d'un graphe.

Théorème 1.1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, avec $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, Alors on a:*

$$\sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) = 2m.$$

1.1.2 Distance, excentricité et diamètre

Soit u et v deux sommets d'un graphe G. On appelle *distance* entre u et v, notée $d_G(u, v)$, la longueur de la plus courte chaîne joignant u et v. L'*excentricité* d'un sommet v dans G est $exc(v) = max\{d_G(v; w) : w \in V\}$. Un sommet de G ayant une excentricité minimum est appelé un *centre*.

Le *diamètre* de G, noté diam(G), est égal $\max\{exc(v) : v \in V\}$.

Pour le graphe G de la Figure 1.1. $d_G(x, v) = 2$, exc$(u) = 2$ et diam$(G) = 3$.

1.1.3 Quelques graphes particuliers

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

Pour un sous-ensemble $S \subset V$, le *sous graphe induit* par S noté par $G[S]$ est le graphe ayant S pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans S.

Pour un sous-ensemble $U \subset E$, le *graphe partiel* de G défini par U noté G_U est le graphe dont les ensembles de sommets et d'arêtes sont respectivement V et U (Voir Figure 1.2.).

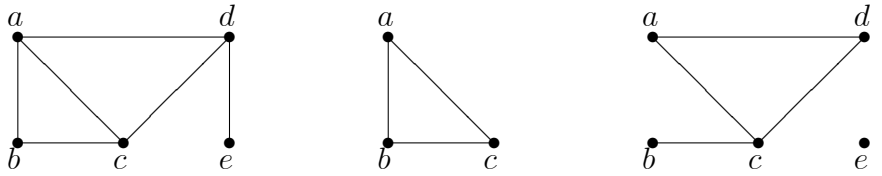


FIGURE 1.2. Le sous graphe de G induit par $\{a, b, c\}$ et un sous graphe partiel de G.

Le *graphe complémentaire* de G noté $\overline{G}$ est un graphe ayant le même ensemble de sommets que G et une arête est dans $\overline{G}$ si elle n'est pas dans G (Voir Figure1.3.).



FIGURE 1.3. Un graphe et son complémentaire

Pour $r \geq 2$, un graphe est dit *r-parti* si l'on peut partitionner l'ensemble de ses sommets en r sous-ensembles $X_1, X_2, ..., X_r$ tels que les sous graphes $G[X_1], G[X_2], ..., G[X_r]$ ne contiennent aucune arête. En particulier, pour $r = 2$, le graphe G est appelé biparti. Si un sommet dans un ensemble de partition X_i d'un graphe r-parti est adjacent à tout sommet des autres ensembles $X_j : j \neq i$ pour tout sommet dans G, alors G est appelé multiparti complet et noté par $K_{p_1,p_2,...,p_r}$ avec $p_j = |X_j|$ pour $j \in \{1, 2, ..., r\}$ (Voir Figure1.4.).

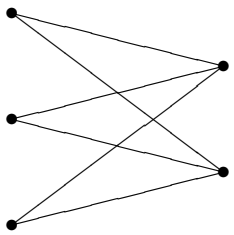


FIGURE 1.4. Le graphe $K_{2,3}$

Un *arbre* est un graphe connexe ayant exactement $n-1$ arêtes (Voir Figure 1.5.).

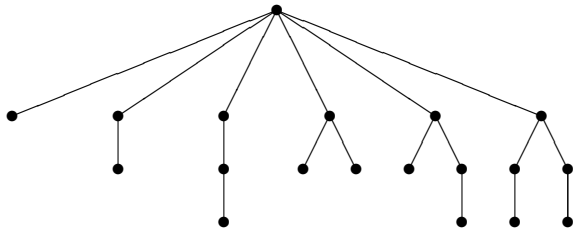


FIGURE 1.5. Un arbre

Une *chaîne* P dans un graphe $G=(V,E)$ est une séquence finie de sommets $v_1, v_2, ..., v_k$ de V telle que $v_iv_{i+1} \in E$ pour tout $1 \leq i \leq k-1$. L'entier $k-1$ représente la longueur de la chaîne P et les deux sommets v_1 et v_k sont appelés respectivement extrémité initiale et extrémité finale de la chaîne P. Une chaîne est dite élémentaire (respectivement, simple) si tous ses sommets sont distincts (respectivement, toutes ses arêtes sont distinctes). Une corde est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne minimale induite par n sommets, notée par P_n, est une chaîne élémentaire sans cordes.

Une *étoile* $K_{1,n}$ est un arbre à $n+1$ sommets ayant n sommets pendants.

Une *chenille* $C(t_1, t_2, ..., t_s)$ est un arbre dont la supression de ses sommets pendants donne une chaîne $u_1, u_2, ..., u_s$, où t_i est le nombre de sommets pendants adjacents à u_i (Voir Figure 1.6).

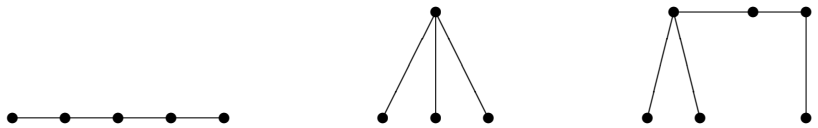


FIGURE 1.6. Une chaîne, une étoile et une chenille

Un *cycle* est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues. Un cycle élémentaire C_n induit par n sommets est un cycle dont les sommets sont distincts (Voir Figure 1.7.).

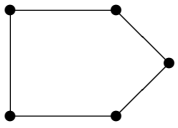


FIGURE 1.7. Le cycle C_5

Un *cactus* est un graphe, où toute arête appartient à au plus un cycle. Un graphe contenant un seul cycle est appelé un unicycle (Voir Figure 1.8.).

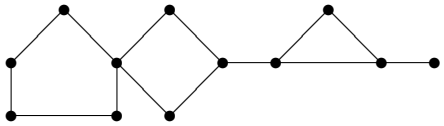


FIGURE 1.8. Un cactus

Un graphe G est *d-régulier* si tous ses sommets sont de degré d.

Un graphe *complet* d'ordre n, est un graphe dont tous les sommets sont adjacents. Un graphe complet G est un graphe $(n-1)$-régulier.

Un graphe *discret* d'ordre n, est un graphe dont tous les sommets sont non adjacents. Un graphe discret G est un graphe 0-régulier (voir Figure 1.9.).

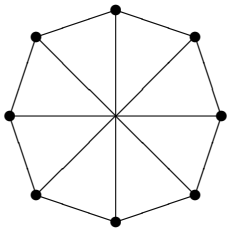


FIGURE 1.9. Un graphe 3-régulier

Etant donné un graphe F, un graphe G est dit sans F si G ne contient pas F comme sous-graphe induit.

La notion de sous graphes induits est très importante en théorie des graphes car elle permet de définir des classes de graphes caractérisées par sous-graphes exclus ou interdits.

Par exemple, la classe des arbres est caractérisée par exclusion des cycles, la classe des graphes bipartis est caractérisée par exclusion des cycles impairs, etc...

Parmi la liste des classes de graphes définies par les sous graphes exclus on trouve la classe des graphes sans griffe $K_{1,3}$, la classe des graphes sans patte $K_{1,3}+e$, la classe des graphes sans cycle C_4, etc...(voir Figure 1.10.).

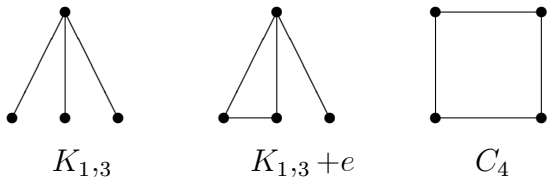


FIGURE 1.10.

1.1.4 Quelques opérations sur les graphes

Une *subdivision* $S(G)$ d'un graphe G est le graphe obtenu en remplaçant chaque arête uv de G par un sommet w et les deux arêtes uw et wv (voir Figure 1.11.).

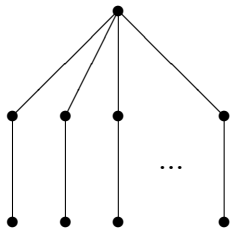


FIGURE 1.11. La subdivision d'une étoile

La k-*couronne* de $G = (V, E)$ est le graphe d'ordre $(k+1)|V|$ obtenu d'une copie de G en attachant à chaque sommet de G une chaîne de longueure $k-1$ de manière que les chaînes soient disjointes. Pour $k = 1$, la 1-*couronne* de G est appelé la *couronne* de G (voir Figure 1.12.).

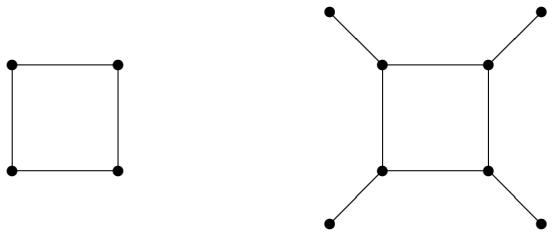


FIGURE 1.12. Le cycle C_4 et sa couronne $C_4 \circ K_1$

Etant donné deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ avec $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

L'*union* de G_1 et G_2 est le graphe $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ et leur *joint* est le graphe $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup E_{1,2})$ où $E_{1,2} = \{xy : x \in V_1, y \in V_2\}$.

Le *produit carré* $G \square H$ est le graphe $G = (V, E)$ tq $V = \{(u, v) : u \in V(G), v \in V(H)\}$ et deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont adjacents si $u_1 = u_2$ et $v_1 v_2 \in E(H)$ ou $v_1 = v_2$ et $u_1 u_2 \in E(G)$.

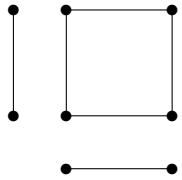


FIGURE 1.13. Le produit carré $P_2 \square P_2$

Le *produit croisé* $G_1 \times G_2$ est le graphe $G = (V, E)$ tel que $V = \{(u, v) : u \in V_1, v \in V_2\}$ et $E(G_1 \times G_2) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) : u_1u_2 \in E(G), v_1v_2 \in E(H)\}$.

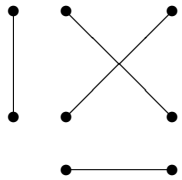


FIGURE 1.14. Le produit croisé $P_2 \times P_2$

Le *produit total* $G_1 \boxtimes G_2$ est le graphe $G = (G_1 \square G_2) \cup (G_1 \times G_2)$.

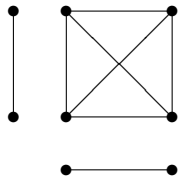


FIGURE 1.15. Le produit total $P_2 \boxtimes P_2$

1.1.5 Connexité

La relation $\sim$ entre les sommets d'un graphe G est définie comme suit : $u \sim v$ si et seulement s'il existe dans G une chaîne reliant u à v. Cette relation est une relation d'équivalence. Les sous-graphes induits par les classes d'équivalence sont appelés *composantes connexes* de G.

Le graphe G est dit *connexe* s'il possède une seule composante connexe.

Une *forêt* est un graphe ou chaque composante connexe est un arbre.

Si G est connexe, alors $\overline{G}$ est dit *co-connexe*. Les complémentaires des composantes connexes de G sont appelées composantes co-connexes de G. Il est bien connu que pour tout graphe G, G et $\overline{G}$ ne peuvent être tous les deux non connexes.

Une arête e d'un graphe G est appelée *isthme* (arête d'articulation du graphe G) si sa suppression augmente le nombre de composontes connexes, i.e. si G est connexe alors $G - e$ n'est pas connexe.

Un sommet v d'un graphe G est un *sommet d'articulation* si sa suppression augmente le nombre de composontes connexes, i.e. si G est connexe alors $G - v$ n'est pas connexe.

Le théorème suivant donne une caractérisation pour qu'une arête d'un graphe soit un isthme.

Théorème 1.2. *Une arête e d'un graphe connexe G est un isthme si et seulement si e n'appartient à aucun cycle de G.*

Un *bloc* dans un graphe G est un sous graphe connexe maximal qui ne contient pas de sommet d'articulation, on dit aussi 2-connexe maximal.

Un *bloc graphe* G est un graphe dont tous les blocs sont complets. Si G ne possède pas de sommet d'articulation, alors G est lui même un bloc. L'intersection de deux blocs contient au plus un sommet (voir Figure 1.16.).

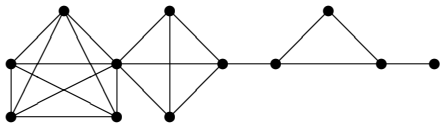


FIGURE 1.16. Un graphe à 5 blocs

1.2 Invariants de graphes

Deux graphes sont dits *isomorphes* s'il existe une fonction bijective entre les ensembles des sommets des deux graphes telle que deux sommets sont adjacents dans l'un des graphes si et seulement si leurs images par la fonction bijective sont adjacentes dans l'autre graphe. Si deux graphes sont isomorphes alors ils ont des propriétés communes. Ces propriétés communes sont appelées *invariants* de graphes, en d'autres termes un invariant est une propriéte stable par isomorphsime. Le nombre de sommets et d'arêtes sont deux invariants de base d'un graphe.

Nous définissons ci-après quelques invariants de graphes intervenant dans la suite.

1.2.1 Couplage

Etant donné un graphe $G = (V, E)$, on appelle couplage de G un sous-ensemble d'arêtes de E deux à deux non adjacentes. Un couplage maximum est un couplage de taille maximale. On désigne par $\alpha_0(G)$ la taille d'un couplage maximum dans G. Un sommet d'un graphe est saturé par un couplage de ce graphe lorsqu'il est extrémité d'une arête de ce couplage. Autrement, il est insaturé par ce couplage. Un couplage qui sature tous les sommets de G est dit parfait.

–Le cardinal d'un couplage d'un graphe d'ordre n est au plus $n/2$, ceci est dû au fait que chaque arête du couplage sature deux sommets.

–Un couplage est parfait si et seulement si $\alpha_0(G) = n/2$.

– Tout graphe d'ordre impair ne contient pas de couplage parfait. Egalement, un graphe d'ordre pair ne possède pas nécessairment un couplage parfait.

1.2.2 Stable

On appelle stable d'un graphe $G = (V, E)$ un sous ensemble de sommets de V deux à deux non adjacents. Un stable maximum de G est un stable de cardinalité maximale. La cardinalité d'un stable maximum est appelée nombre de stabilité, et notée $\alpha(G)$.

1.2.3 Clique

On appelle clique d'un graphe $G = (V, E)$ un sous ensemble de sommets de V deux à deux adjacents. Une clique maximum de G est une clique de cardinalité maximale. La cardinalité d'une clique maximum est appelée nombre de clique, et notée $\omega(G)$.

1.2.4 Transversal

On appelle transversal d'un graphe $G = (V, E)$ un sous ensemble T de sommets de V tel que toute arête de E a au moins une de ses extrémités dans T. En d'autres termes, un transversal T est un ensemble de sommets qui couvre toutes les arêtes de G. Notons que si

T est un transversal alors $V - T$ est un stable. Un transversal minimum est un transversal qui a le plus petit nombre possible de sommets. La cardinalité d'un transversal minimum est appelée nombre transversal, et notée $\tau(G)$.

Théorème 1.3 (Gallai [55] 1959)**.** *Soit G un graphe simple d'ordre n. Alors*

$$\tau(G) + \alpha(G) = n.$$

Théorème 1.4 (König [71] 1931)**.** *Si G est biparti, alors*

$$\tau(G) = \alpha_0(G).$$

Corollaire 1.5. *Si G est un graphe biparti, alors $\tau(G) = n/2$ si et seulement si G a un couplage parfait.*

1.2.5 Recouvrement

On appelle recouvrement d'un graphe $G = (V, E)$ sans sommet isolé, un sous ensemble d'arête R de E tel que tout sommet de G est extrémité d'une arête de R. En d'autres termes, un recouvrement R est un ensemble d'arêtes qui couvre tous les sommets de G. Un recouvrement minimum est un recouvrement de cardinalité minimum. On désigne par $\upsilon(G)$ la taille minimum d'un recouvrement de G.

Notons qu'un recouvrement existe toujours dans un graphe sans sommets isolés. Egalement, $\upsilon(G) \geq n/2$, de plus R contient toutes les arêtes pendantes.

Proposition 1.6. *Un ensemble d'arêtes R d'un graphe sans sommets isoles $G = (V, E)$ est un recouvrement de G si et seulement si $G_R = (V, R)$ est une forêt dont chaque composante connexe est une étoile.*

Théorème 1.7 (Gallai [55] 1959)**.** *Soit G un graphe simple d'ordre n sans sommets isolés. Alors*

$$\upsilon(G) + \alpha_0(G) = n.$$

1.3 Aspects algorithmiques et notion de complexité

Beaucoup de problèmes sont réputés difficiles en théorie des graphes. On introduit quelques éléments de base sur la complexité algorithmique et on définit quelques problèmes connus.

Un *algorithme* est une procédure de résolution composée d'une suite finie d'opérations élémentaires qui, pour toute instance du problème à traiter, transforme les données initiales (entrées) en résultats (sorties). Le mot "algorithme" vient du nom du mathématicien Al Khawarizmi ($9^{ème}$ siecle) qui a fournit le premier algorithmique pour résoudre les équations linéaires et quadratiques.

Un problème d'*optimisation combinatoire* consiste à déterminer un meilleur élément parmi un nombre fini d'éléments mais souvent très élevé. Pour ce type de problèmes, il est nécessaire de mesurer l'efficacité de tout algorithme mis en oeuvre. Ainsi, pour comparer les performances de plusieurs algorithmes résolvant un même problème, il existe une mesure basée sur leur temps d'exécution; c'est la complexité en temps.

L'*analyse de la complexité* d'un algorithme donne une estimation du temps d'exécution, exprimé en termes du nombre d'opérations élémentaires, en fonction de la taille de l'entrée, exprimée en termes du nombre de caractères nécessaires pour coder les données du problème. La notation de Landau O est utilisée pour donner une majoration du nombre d'opérations effectuées en fonction de la taille de l'entrée.

La notion d'*algorithme efficace ou polynomial* a été introduite par J. Edmonds [47]. Un algorithme est dit polynomial si le nombre d'opérations élémentaires $T(n)$, nécessaire pour résoudre un problème de taille n, est borné par un polynôme en n, c'est-à-dire, si $T(n) \leq c.n^k$ (c et k étant des constantes). Un tel algorithme est dit de complexité $O(n^k)$.

Un *problème de décision* est un problème dont la réponse attendue est de type “oui” ou “non”. La théorie de la *complexité* fournit une classification des problèmes de décision selon leur niveau de difficulté.

Un problème de décision est dit appartenir à la *classe P*, s'il existe un algorithme polynomial pour le résoudre. Plusieurs problèmes de graphes appartiennent à P, tels : la *connexité*, le *couplage parfait*, le *plus court chemin*, le *flot maximum*, l'*arbre de poids minimum* etc.

Un problème de décision est dit appartenir à la *classe* NP s'il existe, pour toute instance dont la réponse est "oui", un *certificat* vérifiable en temps polynomial en la taille des données. La classe NP (*Non déterministe Polynomial*) réunit les problèmes de décision qui peuvent être résolus en temps polynomial par un algorithme non déterministe. Nous retrouvons dans cette classe, tous les problèmes classiques en théorie des graphes, tels : l'*indépendance (stabilité)*, la *coloration* la *domination* etc.

Evidemment, P $\subseteq$ NP. Mais la classe NP contient des problèmes pour lesquels on ne connaît pas d'algorithme polynomial de résolution. De ce fait, une question majeure reste posée à ce jour : Est-ce que P = NP?

Plusieurs classes de complexité sont définies à l'aide de réductions. Une *réduction* est une transformation d'un problème P_1 à un autre problème P_2, s'il existe un algorithme pour P_1 qui fait appel à un algorithme de résolution de P_2. On dit que P_2 est au moins aussi difficile que P_1. Il existe plusieurs réductions, la plus utilisée est la réduction polynômiale.

Un problème de la classe NP est dit NP-*complet*, si tout problème dans NP peut lui être réduit en temps polynomial. En d'autres termes, s'il existait un algorithme polynomial permettant de résoudre un problème NP-complet, alors il existerait un algorithme polynomial pour tous les problèmes de la classe NP, et on aurait l'égalité P = NP. Les problèmes NP-complets sont les plus difficiles de la classe NP.

Il est montré par Ladner [72] que si P $\neq$ NP alors ils existent des problèmes qui ne sont ni dans P, ni NP-complet, ils sont dits NP-intermédiaire.

Il existe un lien fort entre un problème de décision et un problème d'optimisation. En fait, la plupart des problèmes de décision ont une version d'optimisation. Les problèmes d'optimisation associés aux problème de décision NP-complets sont qualifiés de NP-difficiles. Un problème NP-difficile (ou NP-dur) est un problème au moins aussi difficile qu'un problème NP-complet.

Pour une présentation plus complète, le lecteur peut consulter l'article de Cook [37], ou l'ouvrage de Garey et Johnson [56].

A noter que pour une sous classe de graphes $\mathcal{H}$ d'une classe $\mathcal{G}$, si un problème Q est NP-complet pour $\mathcal{H}$ alors il l'est pour $\mathcal{G}$. Et, un algorithme qui résout Q pour $\mathcal{G}$, le résout aussi pour $\mathcal{H}$.

Notons que, dans un graphe $G = (V, E)$, la taille d'une instance est $|V| + |E|$.

Quelques problèmes de décision NP-Complets : Le premier problème NP-Complet a été trouvé par Cook qui a montré que SAT (Satisfaisabilité) était complet et tout problème de décision est polynomialement réductible à SAT.

Soit $X = \{x_1, \dots x_n\}$ un ensemble de variables booléennes $x_j \in \{0, 1\}$, $C_1, C_2, \dots, C_m$ des clause et soit l'expression booléenne $E = C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_m$ où pour tout $i = 1, \dots, m$; la clause $C_i = x^*_{i_1} \vee x^*_{i_2} \vee ... \vee x^*_{i_k}$ avec $x^* = x$ ou $\overline{x}$.

Problème: SATISFAISABILITE

Entrée : Une formule booléenne $E = C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_m$ sur un ensemble de variables booléennes X.

Question : Existe-t-il une affectation de valeurs de vérité pour X tel que la formule E soit satisfaite, (c-à-d C_i vraie pour tout i)?

Avec plusieurs variantes NP-complètes :

– SAT-k : SAT avec au plus k occurrences de chaque x_i.

– 3-SAT : SAT où chaque clause a 3 littéraux $C_i = x^*_{i_1} \vee x^*_{i_2} \vee ... \vee x^*_{i_3}$.

– 3-SAT NAE : "not all equal", les trois variables de chaque clause ne sont pas toutes à la même valeur.

– 3-SAT OIT : "one in three", exactement une variable est VRAI dans chaque clause

Théorème 1.8 (Cook). *Le problème de reconnaissance SAT est NP-Complet.*

Il en résulte que si l'on disposait d'un algorithme efficace pour résoudre SAT, alors on saurait résoudre efficacement tout problème de la classe NP.

Remarque 1.9. *2-SAT est un problème de P.*

Parmi les premiers problèmes de décision connus NP-complets sont les problèmes :

Problème: CLIQUE

Entrée **:** Un graphe $G = (V, E)$ et un entier $p \leq |V|$.

Question : Y a-t-il un sous-ensemble $K \subseteq V$ de cardinalité p tel que $\forall x, y \in K$, $xy \in E$?

Complexité : NP-complet.

Problème: STABLE (INDEPENDENT)

Entrée : Un graphe $G = (V, E)$ et un entier $p \leq |V|$.

Question : Y a-t-il un sous-ensemble $S \subseteq V$ de cardinalité p tel que $\forall x, y \in S$, $xy \notin E$?

Complexité : NP-complet.

Problème: TRANSVERSAL

Entrée : Un graphe $G = (V, E)$ et un entier $p \leq |V|$.

Question : Y at-il un sous-ensemble $C \subseteq V$ de cardinalité au plus p tel que pour toute arête $xy \in E$, soit $x \in C$ ou $y \in C$?

Complexité : NP-complet même pour les graphes bipartis et les graphs scindés [56].

Il suffit pour cela de remarquer que le problème de la CLIQUE dans un graphe $G = (V, E)$ est équivalent au problème du STABLE dans le graphe complémentaire de G.

Le problème du STABLE se réduit polynomialement au problème du TRANSVERSAL puisque si S est un stable, $T = V - S$ est un transversal dans $G = (V, E)$.

CHAPITRE 2

La domination dans les graphes

Le concept de domination trouve son origine dans le jeu d'échec. Le principe est de couvrir (dominer) l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. L'idée semble remonter au 16^{eme} siecle en Inde (Voir [66]). En 1862, De Jaenisch [69] posa le problème suivant: Déterminer le nombre minimum de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée par une reine ou bien peut être occupée en un seul mouvement par l'une des reines. Pour un échiquier 5×5 le nombre minimum est 3 et pour un échiquier 8×8 le nombre minimum est 5. Le nombre minimum pour un échiquier $n \times n$ reste indéterminé jusqu'à présent. Pour plus de détails voir [53].

En 1958, Claude Berge [10] donna une formulation de la domination dans les graphes orientés. Le nombre de domination s'appelait alors coefficient de stabilité externe.

L'appelation actuelle du nombre de domination est due à Ore [88] en 1962. La domination n'a connue sa veritable expansion qu'après la parution de l'article de Cockayne et Hedetniemi [33] en 1977.

Depuis, l'étude de la domination dans les graphes avec des propriétés additionnelles a donné naissance à plusieurs paramètres de domination dont la résolution est NP-Complet (Voir [21, 73, 77]). Une étude approfondie de quelques types de domination fera l'objet des prochains sections.

En 1990, Un numéro spécial de la revue Discrete Mathematics édité par Hedetniemi et Laskar a été consacré entièrement à la domination dans les graphes. Dans ce numéro, Hedetniemi et Laskar [66] ont inclus une liste de quelques 400 références. On dénombre actuellement quelques 200 types de domination et plus de 3000 références dans le domaine.

2.1 Problèmes étudiés

Comme les paramètres de domination sont difficiles à déterminer (problème d'optimisation combinatoire NP-difficiles) et en l'absence de valeurs exactes pour ces paramètres, on est amené vers :

1. La recherche de bornes supérieures et inférieures simples à vérifier en fonction de l'ordre n de G, degré maximum Δ, degré minimum δ, etc...

2. La recherche des graphes extrémaux, i.e. caractériser les graphes pour lesquelles ces bornes sont atteintes.

3. La recherche des inégalités entre certains d'entre eux ainsi que des conditions permettant d'obtenir l'égalité.

4. Trouver, pour un paramètre donné $\mu(G)$, des relations entre $\mu(G)$ et $\mu(\overline{G})$ de type Nordhauss-Gaddaum (somme et produit), i.e. trouver deux fonctions $f_1(n, \Delta, \delta)$ et $f_2(n, \Delta, \delta)$ telles que $\mu(G) + \mu(\overline{G}) \leq f_1(n, \Delta, \delta)$ et $\mu(G).\mu(\overline{G}) \leq f_2(n, \Delta, \delta)$.

5. La recherche d'algorithmes polynomiaux, pour certaines classes de graphes (arbres, bipartis etc.).

2.2 La domination

2.2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un sous ensemble de sommets $D \subseteq V$ de G est dit ensemble* dominant *si tout sommet de $V - D$ est adjacent à au moins un sommet de D.*

Définition 2.2. *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un ensemble dominant D est dit* dominant minimal *si aucun sous ensemble propre de D n'est un ensemble dominant.*

Les deux premiers théorèmes sur les ensembles dominants sont dûs à Ore.

Théorème 2.3 (Ore [88] 1962)**.** *Soit D un ensemble dominant d'un graphe simple $G = (V, E)$. Alors D est minimal si et seulement si pour tout sommet $u \in D$, u est isolé dans D ou u a un voisin privé dans $V - D$.*

Preuve. Soit D est un ensemble dominant minimal de G. Par définition, pour tout sommet $u \in D$, $D - \{u\}$ n'est pas un ensemble dominant. Donc il existe un sommet $v \in (V - D) \cup \{u\}$ non dominé par l'ensemble $D - \{u\}$. Si $v = u$; alors u est isolé dans D. Si $v \neq u$, alors u est l'unique voisin de v dans D (i.e, $N(v) - D = \{u\}$).

Inversement. Supposons que D est un ensemble dominant non minimal. Alors il existe $u \in D$ tel que $D - \{u\}$ est un ensemble dominant. Donc u a un voisin dans D, d'où la première condition n'est pas vérifiée. Puisque $D - \{u\}$ domine V, alors tout sommet de $V - D$ a un voisin dans $D - \{u\}$ et par conséquent la deuxième condition n'est pas vérifiée aussi pour u, contradiction. □

Théorème 2.4 (Ore [88] 1962)**.** *Si $G = (V, E)$ est un graphe simple sans sommets isolés d'ordre au moins 2 et D est un ensemble dominant minimal de G, alors $V - D$ est un ensemble dominant de G.*

Preuve. Soit $v \in D$. Alors v satisfait l'une des deux propriétés du Théorème 2.3. Supposons d'abord qu'il existe un sommet $w \in V - D$ tel que $N(w) \cap D = \{v\}$. Alors v est adjacent à un certain sommet dans $V - D$. Supposons maintenant que v n'a aucun voisin dans D. Alors v est un sommet isolé dans le sous-graphe $G[D]$. Puisque v n'est pas isolé dans G, alors le sommet v doit être adjacent à un certain sommet de $V - D$. D'où $V - D$ est un ensemble dominant de G. □

Corollaire 2.5. *Tout graphe sans sommets isolés d'ordre au moins 2 possède un ensemble dominant D dont l'ensemble $V - D$ est aussi un ensemble dominant.*

Définition 2.6. *Le* nombre de domination inférieur *(ou* nombre de domination*) d'un graphe G , noté $\gamma(G)$, représente le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G.*

Un ensemble dominant minimum *avec une telle cardinalité est appelé* $\gamma(G)$-ensemble*, on note qu'un graphe G peut avoir plusieurs $\gamma(G)$-ensembles.*

La cardinalité maximum d'un ensemble dominant minimal est appelée nombre de domination supérieur*, et est noté par* $\Gamma(G)$*.*

Par exemple pour le graphe $K_{2,3}$ de la Figure 2.1, $\gamma(G) = 2$, et $\{u, v\}$, $\{u, x\}$ et $\{v, z\}$ sont des $\gamma(G)$-ensembles. $\Gamma(G) = 3$ et $\{x, y, z\}$ est l'unique $\Gamma(G)$-ensemble.

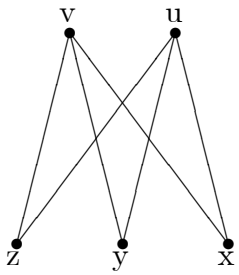


FIGURE 2.1.

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. En voici des exemples:

Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si pour tout $v \in V$, $|N[v] \cap D| \geq 1$,

Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si pour tout $v \in V - D$, $|N(v) \cap D| \geq 1$,

Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si $N[D] = V$.

De ce qui précède, nous avons les propriétés générales suivantes.

Remarque 2.7. *Si* D *est un ensemble dominant d'un graphe simple* $G = (V, E)$*, alors*

1. un sous-ensemble de D n'est pas nécessairement un ensemble dominant de G, tandis que tout ensemble contenant D est un ensemble dominant de G.

2. D contient tous les sommets isolés de G.

3. Puisque l'ensemble des sommets d'un graphe est toujours un ensemble dominant et un dominant contient au moins un sommet, alors le nombre de domination est toujours défini et $1 \leq \gamma(G) \leq |V|$.

   $\gamma(G) = 1$ si et seulement si G possède un sommet v de degré $n-1$ (sommet universel), dans ce cas $\{v\}$ est un ensemble dominant minimum de G.

   $\gamma(G) = n$ si et seulement si $G = \overline{K_n}$, et V est l'unique ensemble dominant de G.

Bollobas et Cokayne [20] ont montré que tout graphe sans sommet isolé possède un ensemble dominant minimum dont lequel chaque sommet satisfait la deuxième condtion du Théorème 2.3.

Théorème 2.8 (Bollobás, Cockayne [20] 1979)**.** *Tout graphe simple $G = (V, E)$ sans sommet isolé possède un ensemble dominant minimum D tel que pour tout sommet v de D, il existe un sommet w de $V(G) - D$ dont $N(w) \cap D = \{v\}$.*

Preuve. Parmi tous les ensembles dominants minimums, soit D un ensemble dominant de G tel que $G[D]$ a le maximum d'arêtes possibles. Supposons, au contraire que D contient un sommet v qui ne possède pas la propriété énoncée. Alors par le Théorème 2.3, v est un sommet isolé dans $G[D]$. De plus, tout sommet de $V - D$ qui est adjacent à v doit être adjacent aussi à un certain sommet de D. Vu que G est sans sommets isolés, v est adjacent à un sommet w dans $V - D$. En conséquence, $D' = (D - \{v\}) \cup \{w\}$ est un ensemble dominant minimum de G dont $G[D']$contient au moins une arête incidenté à w et donc le nombre d'arêtes de $G[D']$ est au moins le nombre d'arêtes de $G[D]$ plus un. Ceci donne une contradiction. □

2.2.2 Applications de la domination

La domination est utilisée dans beaucoup de situations concrètes et son développement théorique a énormément contribué dans la résolution de problèmes pratiques comme les problèmes relevant des réseaux de communications, les systèmes de surveillances (par Radars), les systèmes électriques, les réseaux informatiques et d'autres. Le côté pratique et appliqué de la domination a été souvent la cause de la naissance d'autres et nouveaux paramètres de domination, en effet beaucoup de paramètres de domination ont vu le jour lorsqu'on impose à la domination une condition supplémentaire dans le graphe considéré. Cette condition peut être intérieure à l'ensemble dominant, extérieure à l'ensemble dominant ou bien intérieure et extérieure en même temps à l'ensemble dominant. Comme on peut imposer simultanément des conditions des deux types, par exemple un dominant double est un dominant sans sommet isolé qui domine au moins deux fois tout sommet extèrieur.

1. Pour son application, on considère le problème de localisation des radars pour contrôler une région donnée: Un certain nombre de points stratégiques $a, b, c,....$ (les cellules) sont surveillés par des unités militaires pourvues de radars; on exige que chaque cellule soit surveiller par au moins un radar. Le problème consiste à déterminer le nombre minimum de radars à installer ainsi que leur emplacement de telle manière à contrôler toutes les cellules en respectant la contrainte de la domination pour chaque cellule.

2. Considérons un réseau de communication constitué de stations fixes, et entre deux stations quelconques il peut exister une communication directe. Le problème posé est de selectionner un ensemble minimum de stations pour instatller des transmetteurs, tout en assurant pour les stations qui ne possédent pas de transmetteurs d'avoir une liaison directe avec ceux qui en possèdent.

2.2.3 Algorithmes et complexité

En 1975, Cockayene, Goodman et Hedetniemi [32] ont construit le premier algorithme linéaire pour la détermination du nombre de domination d'un arbre. Johnson [56],en1975, était le premier qui a montré que le problème de détermination de $\gamma(G)$ pour un graphe arbitraire est NP-complet, En outre, Dewdney [40], Chang et Nemhauser [24], Bertossi [9], indépendement, ont montré que le problème reste NP-complet, même si l'on se restreint aux graphes bipartis. Booth et Johnson [21] ont montré que le problème reste aussi NP-complet pour les graphes triangulés.

Algorithmes de recherche du nombre de domination dans les arbres

La programation dynamique est une méthode puissante pour résoudre beaucoup de problèmes d'optimisation discrète; voir les livres de Bellman et Dreyfus [8], Dreyfus et Law [42], et Nemhauser [85]. On choisit un sommet spécial u de G. Si on note par:

$\gamma^1(G,u) = \min\{|D| : D$ est un ensemble dominant de G et $u \in D\}$.

$\gamma^0(G,u) = \min\{|D| : D$ est un ensemble dominant de G et $u \notin D\}$.

Alors il facile de voir que $\gamma(G) = \min\{\gamma^1(G,u), \gamma^0(G,u)\}$.

Supposons que H est un autre graphe avec un sommet special v. Soit I le graphs avec le sommet special u, obtenu par l'union de G et H en ajoutant une nouvelle arête uv; voir Figure 2.2.

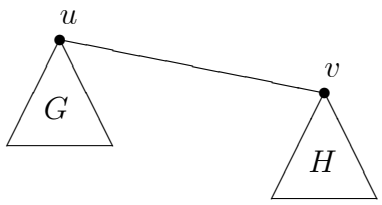


FIGURE 2.2. La composition de deux arbres G et H.

Le but est d'utiliser $\gamma^1(G,u)$, $\gamma^0(G,u)$, $\gamma^1(H,v)$ et $\gamma^0(H,v)$ pour trouver $\gamma^1(I,u)$ et $\gamma^0(I,u)$. Supposons que D est un ensemble dominant de I avec $u \in I$. Alors $D = D' \cup D''$, où D' est un ensemble dominant de G avec $v \in D'$ et D'' est un sous-ensemble de $V(H)$ qui domine $V(H) - \{v\}$. On a deux cas. Si $v \in D''$, alors D'' est ensemble dominant de H. D'autre part, si $v \notin D''$, alors D'' est un ensemble dominant de $H - v$. Pour couvrir le dernier cas. Le nouveau problème suivant est introduit.

$\gamma^{00}(G,u) = \min\{|D| : D \text{ est un ensemble dominant de } G - u\}$.

Notons que $\gamma^{00}(G,u) \leq \gamma^0(G,u)$, car un ensemble dominant D de G avec $u \notin D$ est aussi un ensemble dominant de $G - u$.

Théorème 2.9. *Supposons que G et H sont des graphes avec deux sommets spéciaux, respectivement, u et v. Soit I le graphe obtenu par l'union de G et H en ajoutant l'arête uv, avec le sommet special u. Alors on a:*

(1) $\gamma^1(I,u) = \gamma^1(G,u) + \min\{\gamma^1(H,v), \gamma^{00}(H,v)\}$.

(2) $\gamma^0(I,u) = \min\{\gamma^0(G,u) + \gamma^0(H,v), \gamma^{00}(G,u) + \gamma^1(H,v)\}$.

(3) $\gamma^{00}(I,u) = \gamma^{00}(G,u) + \min\{\gamma^1(H,v), \gamma^0(H,v)\}$.

Preuve. (1) Ceci découle du fait que D est un ensemble dominant de I avec $u \in D$, si et seulement si $D = D' \cup D''$, où D' est un ensemble dominant de G avec $u \in D'$ et D'' est un ensemble dominant de H avec $v \in D''$ ou un ensemble dominant de $H - v$.

(2) Ceci découle du fait que D est un ensemble dominant de I avec $u \notin D$, si et seulement si $D = D' \cup D''$, où D' est un ensemble dominant de G avec $u \notin D'$ et D'' est

un ensemble dominant de H avec $v \notin D''$, ou D' est un ensemble dominant de $G-u$ et D'' est un ensemble dominant de H avec $v \in D''$.

(3) Ceci découle du fait que D est un ensemble dominant de $I-u$, si et seulement si $D = D' \cup D''$, où D' est un ensemble dominant de $G-u$ et D'' est un ensemble dominant de H. □

Le lemme et le théorème ci-dessus donnent l'algorithme de programmation dynamique suivant pour le problème de domination dans les arbres.

AlgorithmeD Dom Arbre. Determiner le nombre de domination pour un arbre.

Entrée. Un arbre T avec l'ordre $[v_1, v_2, ..., v_n]$.

Sortie. Le nombre de domination $\gamma(T)$ de T.

Méthode.

for $i = 1$ to n do

$\gamma^1(v_i) \leftarrow 1$;

$\gamma^0(v_i) \leftarrow \infty$;

$\gamma^{00}(v_i) \leftarrow 0$;

end do;

for $i = 1$ to $n-1$ do

let v_j be the parent of v_i ;

$\gamma^1(v_j) \leftarrow \gamma^1(v_j) + \min\{\gamma^1(v_i), \gamma^{00}(v_i)\}$;

$\gamma^0(v_j) \leftarrow \min\{\gamma^0(v_j) + \gamma^0(v_i), \gamma^{00}(v_j) + \gamma^1(v_i)\}$;

$\gamma^{00}(v_j) \leftarrow \gamma^{00}(v_j) + \min\{\gamma^1(v_i), \gamma^0(v_i)\}$;

end do;

$\gamma(T) \leftarrow \min\{\gamma^1(v_n), \gamma^0(v_n)\}$.

Complexité du problème de domination

Problème: DOMINATION

Instance :Un Graphe $G = (V, E)$ et un entier $k \leq |V|$.

Question : Y at-il un sous-ensemble $D \subseteq V$ de cardinalité au plus k tel que pour tout sommet $y \in V - D$, $N(y) \cap D \neq \varnothing$?

Théorème 2.10. *Le problème de DOMINATION est NP-complet.*

Preuve. Il est évident que le problème de la domination est dans la classe NP, vu qu'un ensemble dominant peut être verfier en temps polynomial.

Pour montrer que le problème de DOMINATION est NP-complete, on construit une transformation polynomialle du problème de 3-SAT au probléme de DOMINATION. Soit I une instance arbitraire de 3-SAT pour l'ensemble des clauses $C = \{C_1, C_2, ..., C_q\}$ dans l'ensemble de variables $X = \{X_1, X_2, ..., X_p\}$. Soit k un entier positif, On construit le graphe $G(I)$, tel que I a une valeur de vérité satisfiable si et seulement si $G(I)$ a un ensemble dominant S avec $|S| \leq K = p$.

On associe à chaque clause C_j un sommet c_j; $1 \leq i \leq q$, et à chaque variable $X_i \in X$, une copie du triangle K_3 de l'ensemble de sommets $R_i = \{x_i, \overline{x_i}, v_i\}$. On ajoutte les arêtes entre le sommet c_i et les trois sommets correspondants aux trois litéraux dans la clause C_i, pour tout $1 \leq i \leq q$. Un exemple de la construction de $G(I)$ est donné par Figure 2.3.

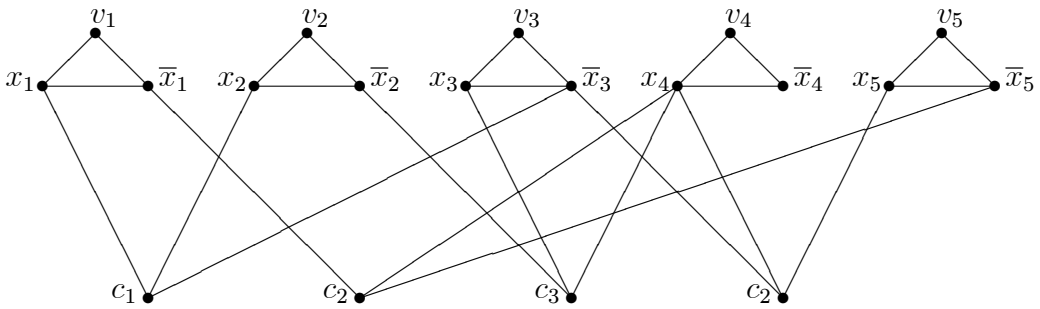


FIGURE 2.3. Construction de $G(I)$ pour $(X_1 \vee X_2 \vee \overline{X}_3) \wedge (\overline{X}_1 \vee X_4 \vee \overline{X}_5) \wedge (\overline{X}_2 \vee X_3 \vee X_4) \wedge (\overline{X}_3 \vee \overline{X}_4 \vee X_5)$

Soit une instance donné de 3-SAT a une valeur de vérité satisfiable A. Pour toute variable X_i, on pose $A(X_i) = VRAI$ si $x_i \in S$, et $A(X_i) = Faut$ si $\overline{x_i} \in S$. Les autres sommets de $G(I)$ sont dans $V - S$. Il facile de voir que S ainsi défini est un ensemble dominant de cardinalité $|S| \leq k = p$, car x_i ou $\overline{x_i}$ est dans S, qui domine le triangle R_i pour $1 \leq i \leq p$. Aussi, tout sommet c_i a au moins un voisin dans S, car A a une valeur de vérité satisfiable $VRAI$ pour au moins une variable litérale dans chaque clause C_i.

Invesement, Supposons que $G(I)$ a un ensemble dominant de cardinalité $|S| \leq K = p$. Il est facile de voir que pour tout sous graphe induit $G[R_i]$, on doit avoir $x_i \in S$ ou $\overline{x_i} \in S$. Donc S est de cardinalité au moins p. Il s'en suit que S domine les sommets c_i. D'où

l'instance de 3-SAT a une valeur de vérité satisfiable A, où $A(X_i) = VRAI$ si et seulement si $x_i \in S$.

Il est clair que le graphe $G(I)$ a $3p + q$ sommets et $3p + 3q$ arêtes. Alors la cardinalité de $G(I)$ est au plus une constante fois la cardinalité de C, et donc le graphe $G(I)$ peut être construit d'une instance de 3-SAT en temps polynomial. □

2.2.4 Bornes sur γ

Théorème 2.11 (Walikar et al. [107] 1979)**.** *Pour tout graphe G avec n sommets, m arêtes et de degré maximum Δ, on a:*

$$\gamma(G) \geq n - m \quad et \quad \gamma(G) \geq \frac{n}{\Delta + 1}.$$

Preuve. Soit D un $\gamma(G)$-ensemble. Le nombre $m(D, V - D)$ des arêtes entre D et $V - D$ satisfait $|V - D| \leq m(D, V - D) \leq \Delta |D|$. On peut déduire que le nombre m d'arêtes de G satisfait $m \geq |V - D|$, donc $\gamma(G) \geq n - m$, et $|V - D| \leq \Delta |D|$. Par conséquent $\gamma(G) \geq \frac{n}{\Delta+1}$. □

Proposition 2.12. *Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$ et de taille m, alors $\gamma(G) = n - m$ si et seulement si G est une etoile.*

Preuve. Supposons que G est une etoile. Alors G possède un sommet universel et $m = n - 1$, et donc $\gamma(G) = 1 = n - m$.

Inversement, soit D un $\gamma(G)$-ensemble. Si $\gamma(G) = n - m$, alors d'après le théorème précédent, $m = |V - D|$, toutes les arête de G sont entre D et $V - D$ et chaque sommet de $V - D$ a exactement un voisin dans D. Donc D et $V - D$ sont stables, et puisque $\gamma(G) \geq 1$ et G est connexe, $n - m \geq 1$ et $m \geq n - 1$ (respectivement), d'où $\gamma(G) = n - m = 1$. Par conséquent G est une etoile. □

Proposition 2.13. *Soit G un graphe connexe d'ordre n, de degré maximum Δ. Alors $\gamma(G) = \dfrac{n}{\Delta + 1}$ si et seulement si $V = X \cup Y$, X est stable, chaque sommet de X est de degré Δ et chaque sommet de Y a exactement un voisin dans X.*

Preuve. Supposons que $\gamma(G) = \frac{n}{\Delta+1}$. Soit D un $\gamma(G)$-ensemble de G. Alors, par la preuve du Théorème précédent, $|V - D| = m(D, V - D) = \Delta |D|$. Il est clair que chaque

sommet de D a Δ voisins dans $V - D$ et donc l'ensemble D est indépendant et chaque sommet de $V - D$ a exactement un voisins dans D.

Inversement, il est facile de voir que si G est l'un des graphes décrits dans la Proposition précédente, alors chaque sommets de Y a exactement un voisin dans X, et donc X est un dominant de G et $|Y| = |V - X| = m(X, Y) = \Delta |X|$, d'où $\gamma(G) \leq |X| = \frac{n}{\Delta+1}$, et l'égalité découle du fait que $\gamma(G) \geq \frac{n}{\Delta+1}$. □

Théorème 2.14 (Hansberg, Pepper [59] 2013)**.** *Soit G un graphe d'ordre n, de taille m et de degré maximum $\Delta \geq 1$. Alors on a:*

$$\gamma(G) \geq \frac{2m - (\Delta - 1)n}{\Delta + 1}.$$

Preuve. Soit D un ensemble dominant minimum de G. Alors tout sommet de $V - D$ a au moins un voisin dans D, et donc $m(G[V - D]) \leq \frac{1}{2}(\Delta - 1)(n - \gamma(G))$. En outre, $m(G[D]) + m(D, V - D) \leq \Delta\gamma(G)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} m &= m(G[V - D]) + m(G[D]) + m(D, V - D) \\ &\leq \frac{1}{2}(\Delta - 1)(n - \gamma(G)) + \Delta\gamma(G), \end{aligned}$$

ce qui implique que $\gamma(G) \geq \frac{2m-(\Delta-1)n}{\Delta+1}$. □

Proposition 2.15. *Soit G un graphe d'ordre n, de taille m et de degré maximum $\Delta \geq 1$. Alors $\gamma(G) = \dfrac{2m - (\Delta - 1)n}{\Delta + 1}$ si et seulement si $V = X \cup Y$, chaque sommet de X a Δ voisin dans Y, chaque sommet de Y a exactement un voisin dans X et G est régulier.*

Preuve. Soit D un $\gamma(G)$-ensemble. Par la preuve du Théorème précédent. Si $\gamma(G) = \frac{2m-(\Delta-1)n}{\Delta+1}$, alors $m(G[V-D]) = \frac{1}{2}(\Delta-1)(n-\gamma(G))$ et $m(G[D])+m(D, V-D) = \Delta\gamma(G)$, et donc $G[V - D]$ est $(\Delta - 1)$-régulier, chaque sommet de $V - D$ a exactement un voisin dans D, D est indépendant et chaque sommet de D a Δ voisins dans $V - D$. Donc G est régulier.

Inversement, il est facile de voir que si G est l'un des graphes décrits dans la Proposition précédente, alors $|N(y) \cap X| = 1$ pour tout $y \in Y$, et donc X est un dominant de G, et $m(G[Y]) = \frac{1}{2}(\Delta - 1)|Y|$, $m(G[X]) = 0$ et $m(X, Y) = \Delta |X|$, et donc $m(G) = m(G[Y]) +$

$m(X,Y) = \frac{1}{2}(\Delta - 1)|V - X| + \Delta|X|$. D'où $\gamma_1(G) \leq |X| = \frac{2m-(\Delta-1)n}{\Delta+1}$. L'égalité découle du fait que $\gamma(G) \geq \frac{2m-(\Delta-1)n}{\Delta+1}$. □

Nous considérons maintenant des bornes supérieures sur $\gamma(G)$.

Théorème 2.16 (Berge [12] 1973)**.** *Si G est un graphe d'ordre n et de degré maximum Δ, alors*

$$\gamma(G) \leq n - \Delta.$$

Preuve. Soit v un sommet de G de degré maximum. Alors $V - N(v)$ est un ensemble dominant de cardinalité $n - \Delta$, d'où $\gamma(G) \leq n - \Delta$. □

Domke, Dunbar, Markus [41] ont caractérisé les arbres T atteignant la borne du Théorème précédent.

On donne d'autres définitions. Pour un entier p, un arbre obtenu à partir d'une étoile $K_{1,t}, t \geq 1$ en subdivisant p arêtes. Si $p = t$, alors $S_p(K_{1,t})$ est une *araignée saine*. Si $p < t$, alors $S_p(K_{1,t})$ est une *araignée blessée*.

Théorème 2.17 (Domke et al. [41] 1997)**.** *Soit T est un arbre d'ordre n et de degré maximum Δ, alors $\gamma(T) = n - \Delta$ si et seulement si T est une* araignée blessée*.*

Preuve. Si T est une araignée blessée, il est facile de voir que $\gamma(T) = n - \Delta$.

Soit T un arbre avec $\gamma(T) = n - \Delta$ et v un sommet de degré maximum. Si $V - N_T[v] = \varnothing$, alors $T = K_{1,n-1}$. Supposons que $V - N_T[v] \neq \varnothing$. Soit I un stable maximum de $V - N_T[v]$. Alors $I \cup \{v\}$ est un dominant de T. Donc $n = \gamma(G) + \Delta \leq |I| + 1 + \Delta \leq n$, d'où $I \cup \{v\} = V - N_T(v)$ est un stable. Puisque T est un arbre, $N_T(v)$ est stable et chaque sommet de $V - N_T[v]$ doit être adjacent à exactement un sommet de $N_T(v)$. Supposons que $N_T(v)$ a un sommet a avec $d_T(a) \geq 3$. Alors $D' = (V - N_T[v]) \cup \{a\} - N_T(a)$ est un ensemble dominant de T avec $|D'| \leq n - \Delta - 1 < n - \Delta$, contradiction. Alors chaque sommet de $N_T(v)$ est adjacent à au plus un sommet de $V - N_T[v]$. Supposons que chaque sommet de $N_T(v)$ est adjacent à exactement un sommet de $V - N_T[v]$. Alors T est une araignée saine. Soit a un sommet de $N_T(v)$ et b son voisin tel que $b \neq v$. Alors $D'' = ((V - N_T[v]) \cup \{a\}) - \{b\}$ est un ensemble dominant de T avec $|D''| \leq n - \Delta - 1 < n - \Delta$,

contradiction. Alors il existe au moins un sommet de $N_T(v)$ qui n'a aucun voisin dans $V - N_T[v]$. Par conséquent T est une araignée blessée. □

En 1962, Ore [88] a prouvé que le nombre de domination d'un graphe sans sommets isolés est au plus la moitié de son ordre. Les graphes extrêmaux atteignant cette borne ont été déterminés par Payan et Xuong [93], et indépendamment par Fink, Jacobson, Kinch et Roberts [51].

Théorème 2.18 (Ore [88] 1962)**.** *Si G est un graphe d'ordre n sans sommet isolé, alors on a:*

$$\gamma(G) \leq \frac{n}{2}.$$

Preuve. Soit D un ensemble dominant minimum de G. Par le Théorème 2.4, $V - D$ est un ensemble dominant de G et donc $\gamma(G) = |D| \leq |V(G) - D| = n - \gamma(G)$. Par conséquent $2\gamma(G) \leq n$, et donc $\gamma(G) \leq n/2$. □

Théorème 2.19 (Payan et Xuong [93] 1982, Fink et al. [51] 1985)**.** *Soit G un graphe connexe d'ordre n. Alors $\gamma(G) = \frac{n}{2}$ si et seulement si G est la couronne $J \circ K_1$ où J est un graphe connexe, ou $G = C_4$.*

Preuve. Si $G = J \circ K_1$, alors G a $\frac{n}{2}$ sommets supports et $\frac{n}{2}$ sommets pendants, Les sommets pendants de G forment un ensemble dominant, et chaque ensemble dominant doit avoir au moins un sommet support ou son sommet pendant. D'où, $\gamma(G) = \frac{n}{2}$.

Inversement, Soit H un graphe partiel de G tel que $d_H(x) \geq 1$ pour tout sommet $x \in V$, et minimal pour cette propriété. Par la minimalité de H, l'ensemble A des sommets de H de degré plus grand que 1 est independant ou vide. Alors H est formé par l'union des étoiles, et soit B l'ensemble des centres de ces étoiles. Donc B est dominant de H contenant A, et donc $\gamma(H) \leq |B|$. Puisque chaque sommet de $V - B$ est de degré 1 dans H, et a un voisin dans B, $V - B$ est independent et dominant de H, et donc

$$\gamma(H) \leq |V - B| = n - |B| \leq n - \gamma(H).$$

D'où $\gamma(H) \leq \frac{n}{2}$ et puisque $\gamma(G) \leq \gamma(G - e)$ pour tout atrête e de G, $\gamma(G) \leq \gamma(H) \leq \frac{n}{2}$.

Si $\gamma(G) = \frac{n}{2}$, alors on a l'égalité dans toutes les inégalités précédentes. D'où $\gamma(H) = |V - B| = |B| = \frac{n}{2}$, et donc $H \cong \frac{n}{2}K_2$.

Si $n = 2$, alors $G = K_2$. Pour $n \geq 4$, il nous reste de voir quelles arêtes peuvent être ajoutés à H pour construire un graphe connexe G gardant la propriété $\gamma(G) = \frac{n}{2}$. Supposon qu'il y a deux sommets differents x et y d'une clique $L_i \cong K_2$ de H, disant L_1, et soit x' et y' des voisins, respectivement, de x et y, et $L(x')$ et $L(y')$ les cliques de H contenant, respectivement, x' et y', tel que les arêtes $xx', yy' \in G - H$.

Premièrement, supposons que $x' \neq y'$ et $L(x') = L(y')$. Alors les sommets x', x, y, y' forme un cycle de longueur 4. S'il y a une autre arête entre un sommet du cycle, disant x, et un autre sommet w (peut être y'), alors on pourait construire un dominant D avec exactement un sommet de chaque clique L_i, pour $i \geq 2$, et $w, y' \in D$, ce qui donne $|D| = n/2 - 1$, une contradiction avec $\gamma(G) = n/2$. Donc, puisque G est connexe, G est isomorphe au cycle C_4.

Maintenant supposons que $x' = y'$ ou $L(x') \neq L(y')$. Alors on peut construire un ensemble D dominant en prennant un sommet de chaque L_i pour $i \geq 2$, tel que $x', y' \in D$. D'où, $|D| = n/2 - 1$, une contradiction. Puisque G est connexe, Ceci signifie qu'il y a exactement une arête de $G - H$ qui a une extrémite dans chaque clique L_i pour $1 \leq i \leq p$ et que les sommets dont les arêtes sont dans $G - H$ forment un graphe connexe J, et donc G est isomorphe à $J \circ K_1$. □

En utilisant la méthode probabiliste, Arnautov [4], Payan [90] ont présenté la borne suivante.

Théorème 2.20 (Arnautov [4] 1974, Payan [90] 1975)**.** *Soit G un graphe d'ordre n, de degré minimum $\delta \geq 1$. Alors on a :*

$$\gamma(G) \leq \frac{n}{\delta + 1} \left(1 + \ln(\delta + 1)\right).$$

Preuve. Soit $p = \ln(\delta+1)/(\delta+1)$. Construisant un dominant comme suit. Choisissons un ensemble de sommet A, tel que chaque sommet est choisi indépendemment avec une probabilité p. La valeur de $|A|$ est np. Soit $B = V - N[A]$. Alors B n'est pas dominé par A. Il est clair que $S = B \cup A$ est un dominant de G. On montre que le cardinal de

B est au plus $ne^{-p(1+\delta)}$. Un sommet v est dans B si et seulement si $N[v] \cap A = \emptyset$. Donc la probabilité que v soit dans B est $(1-p)\,e^{1+d(v)}$. Puisque $e^x \geq 1-x$ pour $x \in [0, +\infty[$, et $d(v) \geq \delta(G)$, par suite la probabilité que v soit dans B est au plus $e^{-p(1+\delta)}$, et donc la valeur de $|B|$ est au plus $ne^{-p(1+\delta)}$. D'où la valeur de $|B|$ est au plus

$$n\left(p + e^{-p(1+\delta)}\right) = n\left(1 + \ln(\delta+1)\right)/(\delta+1).$$

Puisque l'ordre moyen de S est au plus $n\left(1+\ln(\delta+1)\right)/(\delta+1)$, il y a un ensemble particulier avec au plus cette cardinalité. □

Le nombre de stabilité, le nombre transversal et la cardinalité minimum d'un recouvrement d'un graphe sans sommets isolés constituent une borne supérieure pour le nombre de domination.

Théorème 2.21. *Si G est un graphe sans sommets isolés, alors*

$$\gamma(G) \leq \min\left\{\tau(G), \alpha(G), \upsilon(G)\right\}.$$

Preuve. Puisque tout transversal et tout stable maximal est un ensemble dominant, $\gamma(G) \leq \tau(G)$ et $\gamma(G) \leq \alpha(G)$.

Soit R un recouvrement de cardinalité $\upsilon(G)$. Alors tout sommet de G est incident à une arête de R. Soit S un ensemble de sommets, obtenu en choisissant un sommet incident à chaque arête de R. Alors S est un ensemble dominant et donc $\gamma(G) \leq |S| \leq |R| = \upsilon(G)$. □

Jaeger et Payan [68] ont établi les résultats de type Nordhauss-Gaddum suivants.

Théorème 2.22 (Jaeger, Payan [68] 1972)**.** *Si G est un graphe d'ordre $n \geq 2$, alors*

(i) $3 \leq \gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n+1$.

(ii) $2 \leq \gamma(G)\gamma(\overline{G}) \leq n$.

Preuve. Les bornes inférieures dans (i) et (ii) découlent directement du fait que si $\gamma(G) = 1$ ou $\gamma(\overline{G}) = 1$, alors $\gamma(\overline{G}) \geq 2$ ou $\gamma(G) \geq 2$, respectivement.

Nous vérifions maintenant la borne supérieure dans (i). Si G possède un sommet isolé, alors $\gamma(\overline{G}) = 1$, ainsi si $\overline{G}$ possède un sommet isolé, alors $\gamma(G) = 1$. Puisque $\gamma(G) \leq n$ et $\gamma(\overline{G}) \leq n$, dans les deux cas on a $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n + 1$.

Si G et $\overline{G}$ ne possèdent pas de sommets isolés, alors d'après le Théorème 2.18, $\gamma(G) \leq n/2$ et $\gamma(\overline{G}) \leq n/2$ et donc $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n$.

Il reste maintenant à vérifier la borne supérieure dans (ii). Si $\gamma(G) = 1$, alors il est clair que $\gamma(G)\gamma(\overline{G}) \leq n$, donc supposons que $\gamma(G) = k \geq 2$. Soit $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ un ensemble dominant minimum de G et considérons une partition de $V(G)$ en k sous-ensembles $V_1, V_2, ..., V_k$ tels que :

- $v_i \in V_i$ pour $1 \leq i \leq k$ et v_i est un sommet universel dans $G[V_i]$ et

- $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ soit maximum où n_i est le nombre des sommets universels dans le sous-graphe $G[V_i]$.

Nous allons montrer maintenant que chaque ensemble V_i $(1 \leq i \leq k)$ est un dominant de $\overline{G}$. Supposons le contraire. Alors il existe un sommet $x \in V_t$ qui n'est pas adjacent dans $\overline{G}$ à aucun sommet de V_s avec $t \neq s$. Donc x est adjacent dans G à tous les sommets de V_s. Si $x = v_t$, alors $S - \{v_s\}$ est un ensemble dominant de G ayant une cardinalité moins que $\gamma(G)$, ce qui est impossible. En conséquence, $x \in V_t - \{v_t\}$. Si x est un sommet univesel dans $G[V_t]$, alors $(S - \{v_s, v_t\}) \cup \{x\}$ est un ensemble dominant de G ayant une cardinalité moins que $\gamma(G)$, ce qui est encore impossible. Donc x n'est pas un sommet universel dans $G[V_t]$ mais il est adjacent à tous les sommets de V_s.

Définissons $V_t' = V_t - \{x\}$, $V_s' = V_s \cup \{x\}$ et $V_r' = V_r$ pour $r \neq s, t$. Alors, nous avons une nouvelle partition de $V(G)$ en k sous-ensembles $V_1', V_2', ..., V_k'$ telle que $v_i \in V_i'$ est un sommet universel dans $G[V_i']$. Cependant, $N' > N$ avec $N' = \sum_{i=1}^{k} n_i'$ où n_i' est le nombre des sommets universels dans le sous-graphe engendré par V_i', ce qui contredit notre hypothèse.

D'où, chaque sous-ensemble V_i $(1 \leq i \leq k)$ est un ensemble dominant de $\overline{G}$, et donc $\gamma(\overline{G}) \leq |V_i|$ pour tout i. Par conséquent, $n = \sum_{i=1}^{k} |V_i| \geq \gamma(G)\gamma(\overline{G})$. □

Théorème 2.23 (Cockayne, Hedetniemi [33] 1977)**.** *Si G est un graphe d'ordre n, alors $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = n + 1$ si et selement si $G = K_n$ ou $G = \overline{K_n}$.*

Preuve. Il est facile de voir que $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = n + 1$ pour $G = K_n$ ou $G = \overline{K_n}$.

Soit G un graphe avec $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = n + 1$. Alors, d'après la preuve du Théorème 2.22., G ou $\overline{G}$ possède un sommet isolé. Supposons, sans perte de généralité, que $\overline{G}$ possède un sommet isolé, alors G possède un sommet universel, donc $\gamma(G) = 1$, et puisque $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = n + 1$, $\gamma(\overline{G}) = n$. Par conséquent $\overline{G} = \overline{K_n}$ et $G = K_n$. □

Théorème 2.24 (Laskar, Peters [75] 1985)**.** *Si G est un graphe d'ordre n tels que G et $\overline{G}$ sont connexes, alors $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = n$ si et selement si $G = P_4$.*

Preuve. Il est facile de voir que $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = n$ pour $G = P_4$.

Soit G un graphe avec $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = n$. Alors, d'après le Théorème 2.18, $\gamma(G) = n/2$ et $\gamma(\overline{G}) = n/2$ et par le Théorème 2.19, G est la couronne $J \circ K_1$ où J est un graphe connexe, et $\overline{G}$ est la couronne $J' \circ K_1$ où J' est un graphe connexe. Par conséquent $G = \overline{G} = P_4$. □

Joseph et Arumugam [89] ont amélioré la borne supérieure $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n + 1$ dans le cas des graphes sans sommets isolés.

Théorème 2.25 (Joseph, Arumugam [89] 1995)**.** *Si G est un graphe d'odre $n \geq 2$ tel que G et $\overline{G}$ sont sans sommets isolés, alors*

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n/2 + 2.$$

Preuve. Vu que le graphe G et son complémentaire sont sans sommets isolés, il s'en suit d'après le Théorème 2.18 que $\gamma(G) \leq n/2$ et $\gamma(\overline{G}) \leq n/2$. Donc si $\gamma(G) \leq 2$ ou $\gamma(\overline{G}) \leq 2$, alors $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n/2 + 2$. Si $\gamma(G) \geq 4$ et $\gamma(\overline{G}) \geq 4$, alors par la borne supérieure (ii) du Théorème 2.22., nous avons $\gamma(G) \leq n/\gamma(\overline{G}) \leq n/4$ et $\gamma(\overline{G}) \leq n/\gamma(G) \leq n/4$, d'où $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n/2 < n/2 + 2$. Donc on peut supposer maintenant que $\gamma(G) = 3$ ou $\gamma(\overline{G}) = 3$. De ce fait, $3 = \gamma(G) \leq n/2$ et donc $n \geq 6$. Par le Théorème 2.22-(ii), $\gamma(G) \leq n/\gamma(\overline{G}) = n/3$. Par conséquent, $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n/3 + 3 \leq n/2 + 2$ pour $n \geq 6$. □

En 1963, Vizing [103] a conjecturé que $\gamma(G_1 \Box G_2) \geq \gamma(G_1)\gamma(G_2)$.

Conjecture 2.26 (Vizing [103] 1963)**.** *Soient G_1 et G_2 deux graphes. Alors*

$$\gamma(G_1 \Box G_2) \geq \gamma(G_1)\gamma(G_2).$$

Pour les graphes $P_4 \square P_4$ on a l'égalité $\gamma(P_4 \square P_4) = 4 = 2.2 = \gamma(P_4)\gamma(P_4)$, mais pour le graphe $P_3 \square C_4$, on a l'inégalité stricte $\gamma(P_3 \square C_4) = 3 > 1.2 = \gamma(P_3)\gamma(C_4)$.

2.3 L'indépendance

2.3.1 Définitions et propriétés

Une autre notion est apparue avant la notion de domination, c'est la notion d'*indépendance (stabilité)*.

Définition 2.27. *Soit G un graphe. Un sous ensemble S de V est un* indépendant *si* $\Delta(G[S]) = 0$.

Définition 2.28. *Soit G un graphe. Un ensemble indépendant S de G est* maximal *si pour tout sommet x dans $V - S$, $S \cup \{x\}$ n'est pas un indépendant.*

On donne ci-dessous les conditions dans lesquelles un ensemble indépendant d'un graphe G est maximal.

Théorème 2.29. *Un ensemble indépendante S d'un graphe G est maximal si et seulement si pour tout sommet $v \in V - S$, v est adjacent à au moins un sommet de S.*

Preuve. Soit S est un ensemble indépendante maximal de G. Par définition, pour tout sommet $v \in V - S$, $S \cup \{v\}$ n'est pas un ensemble indépendante. Donc il existe un sommet $u \in S$ adjacent à v.

Inversement. Soit S est un ensemble indépendante de G tel que pour tout sommet $v \in V - S$, v est adjacent à au moins un sommet de S, et donc $S \cup \{v\}$ n'est pas indépendant. D'où S est maximal. □

Définition 2.30. *Le cardinal maximum (resp. minimum) d'un ensemble indépendant maximal est appelée* nombre d'indépendance supérieur *(resp.* nombre d'indépendance inférieur*) de G, noté par $\alpha(G)$ (resp. $i(G)$).*

Un ensemble indépendant maximal avec une telle cardinalité est appelé $\alpha(G)$-ensemble*, on note qu'un graphe G peut avoir plusieurs $\alpha(G)$-ensembles.*

Pour le graphe $K_{2,3}$, représenté dans la Figure 2.1, les deux ensembles de sommets, $\{u, v\}$ et $\{x, y, z\}$ sont des ensembles indépendants maximaux. L'ensemble $\{x, y, z\}$ est l'ensemble indépendant maximal le plus large, il s'ensuit que $\alpha(K_{2,3}) = 3$, et l'ensemble indépendant maximal le plus petit est $\{u, v\}$, et donc $i(K_{2,3}) = 2$.

Cette notion est reliée à celle de la domination par le fait qu'un indépendant maximal est un dominant. La proposition suivante donne un résultat intuitif, reliant l'indépendance maximale et la domination minimale dans un graphe.

Proposition 2.31 (Berge [11] 1962)**.** *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Alors*

1. *Un ensemble indépendant S est maximal si et seulement si il est dominant.*

2. *Tout ensemble indépendant maximal de G est un dominant minimal de G.*

Preuve. **1.** Soit S un indépendant maximal de G. Le fait qu'un indépendant S est maximal signifie que tout sommet de $V - S$ possède un voisin dans S. Donc S est un dominant.

Inversement, Soi S est à la fois indépendant et dominant. Supposons que S n'est pas un indépendant maximal, alors il existe un sommet $u \in V - S$ tel que $S \cup \{u\}$ est indépendant, alors aucun sommet de S n'est adjacent à u, et donc u n'est pas dominé par S. D'où S ne peut pas être un ensemble dominant, contradiction.

2. Soit S un indépendant maximal de G. D'après le théorème précédent, S est un dominant. Montrons que S est minimal. Supposons le contraire, alors il existe un sommet $u \in S$ tel que $S - \{u\}$ est un dominant. Donc u possède un voisin dans S, d'où S n'est pas indépendant, contradiction. □

Corollaire 2.32. *Un ensemble indépendant et dominant est un dominant minimal.*

La Proposition précédente a pour conséquence immédiate la chaîne d'inégalités de Cockayne, Hedetniemi et Miller [34] reliant les quatre paramètres:

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \alpha(G) \leq \Gamma(G). \tag{2.1}$$

De ce qui précède, nous avons les propriétés générales suivantes.

Remarque 2.33. *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Alors*

1. Tout *sous-ensemble* d'un indépendant de G est indépendant.

2. Un ensemble indépendant maximal contient tous les sommets isolés de G. Le nombre d'indépendance est toujours défini et $1 \leq \alpha(G) \leq |V|$. $\alpha(G) = 1$ si et seulement si $G \cong K_n$, tandis que $\alpha(G) = n$ si et seulement si $G \cong \overline{K_n}$, dans ce cas V est l'unique ensemble indépendance maximum.

Le problème de la détemination de $\alpha(G)$ a été montré qu'il est NP-complet pour un graphe arbitraire par Garey et Johnson dans [56] en 1975. Aussi, Fricke, Hedetniemi et Jacobs [54], ont montré que le problème reste NP-complet pour la classe des graphes réguliers. Dayckin et Ng [39], ont fourni le premier algorithme pour la détermination de $\alpha(G)$ pour les arbres. En 1972, Gvaril [58] a montré que le problème peut être resolu en un temps polinomial si l'on se restreint aux graphes triangulés. Il est bien connu qu'il existe un algorithme polynomial pour résoudre ce problème dans les graphes bipartis, car $\alpha(G) = n - \alpha_0(G)$ pour les graphes bipartis, et $\alpha_0(G)$ peut être déterminé en un temps polynômial pour tout graphe G (Voir [47]).

2.3.2 Bornes sur β

Plusieurs bornes inférieures sont connues sur le nombre d'indépendance en fonction de degré maximum Δ, de degré moyen d^* ou la séquence de degrés d'un graphe G.

Théorème 2.34 (Berge [10] 1960)**.** *Pour tout graphe G d'ordre n, de degré maximum Δ, on a:*

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{1+\Delta}.$$

Preuve. En appliquant successivement l'inégalité (2,1) et le Théorème 2.3, on obtient l'énégalité désirée ($\alpha(G) \geq \gamma(G) \geq \frac{n}{1+\Delta}$). □

Théorème 2.35 (Wei [108] 1981)**.** *Pour tout graphe G, on a:*

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{n}{1 + d\,(v)}.$$

Preuve. (exercice) □

On rappele que:

Proposition 2.36. *Si G est un graphe biparti d'ordre n, alors*

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{2}.$$

avec égalité si et seulement si G a un couplage parfait.

Dans [105], Volkmann a donné une caractérisation constructive des graphes bipartis tels que $\alpha(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. On donne, ici seulement la caractérisation des arbres T tels que $\alpha(T) = \frac{n}{2}$. On introduit l'operation suivante :

Operation $\mathcal{O}$: Soit w un sommet arbitraire d'un arbre T_w et soit v un sommet de P_2. T est un arbre obtenu en joignant T_w et P_2 par l'arête vw.

On définis la famille $\mathcal{F}$ comme suit : $T \in \mathcal{F}$ si et seulement si $T \cong P_2$ ou T est obtenu de P_2 par une sequence finie d'Opération $\mathcal{O}$.

Théorème 2.37 (Volkmann [105] 2008)**.** *Soit T un arbre d'ordre n, Alors $\alpha(T) = \frac{n}{2}$ si et seulement si $T \in \mathcal{F}$.*

Preuve. Supposons que $T \in \mathcal{F}$. La définition de $\mathcal{F}$ montre que T a un couplage parfait. La Proposition 2.32 implique que $\alpha(G) = \frac{n}{2}$.

Inversement, supposons que $\alpha(T) = \frac{n}{2}$. Par La Proposition 2.32, l'arbre T a un couplage parfait M. On procède par induction sur $n = n(T)$. Si $n = 2$, alors $T = P_2 \in \mathcal{F}$. Maintenant, on suppose que $n \geq 4$ un entier pair avec $\alpha(T) = \frac{n}{2}$. Soit $P = x_1x_2...x_t$ la chaîne la plus longue dans T. Puisque T a un couplage parfait M, on conclut que $d_T(x_2) = 2$ et donc $x_1x_2 \in M$. Ceci implique que $T' = T - \{x_1, x_2\}$ et aussi un arbre d'ordre pair $n(T') = n(T) - 2$, avec un couplage parfait $M - \{x_1x_2\}$ et par conséquent $\alpha(T') = \frac{n(T')}{2}$. Par hypothèse d'induction, $T' \in \mathcal{F}$, et par la définition de $\mathcal{F}$, il s'en suit que $T \in \mathcal{F}$. □

Maintenant on présente des bornes supérieures sur $\alpha(G)$.

Théorème 2.38 (Hansberg, Pepper [59] 2013)**.** *Si G est un graphe d'ordre n, de taille m, de degré maximum Δ, de degré minimum $\delta \geq 1$, alors*

$$\alpha(G) \leq \frac{m}{\delta} \text{ et } \alpha(G) \leq \frac{\Delta n}{\Delta + \delta}.$$

Preuve. Soit S un $\alpha(G)$-ensemble. Le nombre $m(S, V - S)$ d'arêtes entre S et $V - S$ satisfait $|S|\,\delta \leq m(S, V - S) \leq \Delta\,|V - S|$. On peut déduire que le nomber m d'arêtes de G satisfait $m \geq |S|\,\delta$, donc $\alpha(G) \leq \frac{m}{\delta}$ et $\alpha(G)\delta \leq \Delta\,(n - \alpha(G))$. Par conséquent $\alpha(G) \leq \frac{\Delta n}{\Delta+\delta}$. □

Proposition 2.39. *Soit G un graphe de taille m et de degré minimum $\delta \geq 1$, alors $\alpha(G) = \frac{m}{\delta}$ si et seulement si G est biparti δ-semi-régulier.*

Preuve. Soit S un $\alpha(G)$-ensemble. Si $\alpha(G) = \frac{m}{\delta}$, alors $m = |S|\,\delta$ et toutes les arêtes de G sont entre S et $V - S$. Donc S et $V - S$ sont indépendants et chaque sommet de S est de degré δ. Alors G est un graphe biparti δ-semi-regulier.

Inversement, supposons que G est biparti δ-semi-regulier avec les parties A et B tel que chaque sommet de A est de degré δ. Alors A est indépendant et $m = |A|\,\delta$. Donc $\alpha(G) \geq |A| = \frac{m}{\delta}$, et l'égalité découle du fait que $\alpha(G) \leq \frac{m}{\delta}$. □

Proposition 2.40. *Soit G un graphe d'ordre n, de degré maximum Δ et de degré minimum δ. Alors $\alpha(G) = \frac{\Delta n}{\Delta + \delta}$ si et seulement si G est biparti avec les parties X et Y, telles que X est formée par les sommets de degré minimum et Y est formée par les sommets de degré maximum.*

Preuve. Soit S un $\alpha(G)$-ensemble. Si $\alpha(G) = \frac{n\Delta}{\Delta+\delta}$, alors $|S|\,\delta = m(S, V - S) = \Delta\,|V - S|$, et donc par la preuve du Théorème précédent, chaque sommet de S a exactement δ voisin dans $V - S$, et chaque sommet de $V - S$ a exactement Δ voisin dans S, et donc $V - S$ est indépendant, et chaque sommet de S est de degré δ dans G. Par conséquent G est biparti avec les parties $X = S$ et $Y = V - S$, telles que X est formée par les sommets de degré minimum et Y est formée par les sommets de degré maximum.

Inversement, il est facile de voir que si G est biparti avec les parties X et Y, telles que X est formée par les sommets de degré minimum et Y est formée par les sommets de degré

maximum. Alors X est indépendant et $|X|\,\delta = m(X,Y) = \Delta\,|Y|$, donc $\alpha(G) \geq |X| = \frac{\Delta n}{\Delta+\delta}$, et l'égalité découle du fait que $\alpha(G) \leq \frac{\Delta n}{\Delta+\delta}$. □

Théorème 2.41 (Hansberg, Pepper [59] 2013)**.** *Soit G un graphe d'ordre n, de taille m et de degré maximum Δ. Alors on a:*

$$\alpha(G) \leq n - \frac{m}{\Delta}.$$

Preuve. Soit S un ensemble indépendent maximum de G. Alors pour tout $m(G[S]) = 0$. En plus $m(G[V-S]) + m(V-S,S) \leq \Delta(n - \alpha(G))$. Par conséquent

$$\begin{aligned} m &= m(G[S]) + m(G[V-S]) + m(V-S,S) \\ &\leq \Delta(n - \alpha(G)), \end{aligned}$$

ce qui implique que $\alpha(G) \leq n - \frac{m}{\Delta}$. □

Proposition 2.42. *Soit G un graphe d'ordre n, de taille m et de degré maximum $\Delta \geq 1$. Alors $\alpha(G) = n - \frac{m}{\Delta}$ si et seulement si G est biparti avec les parties (X,Y), tel que chaque sommet de Y a exactement Δ voisins dans X.*

Preuve. Soit S un $\alpha(G)$-ensemble. Par la preuve du théorème précédent, Si $\alpha(G) = n - \frac{m}{\Delta}$, alors $m(G[S]) = 0$ et $m(G[V-S]) + m(V-S,S) = \Delta(n - \alpha(G))$, c-à-d que S est indépendant, $V - S$ est independant, chaque sommet de $V - S$ a Δ voisins dans S. Donc G est biparti.

Inversement, Si G est l'un des graphes décrits dans la Proposition précédente, alors X est independant et chaque sommet de Y a exactement Δ voisins dans X, et donc $m = m(V-X,X) = \Delta\,|V-X|$. D'où $\alpha(G) \geq |X| = n - \frac{m}{\Delta}$, et l'égalité découle du fait que $\alpha(G) \leq n - \frac{m}{\Delta}$. □

Les propositions 2.35, 2.36 et 2.38. sont equivalentes pour les graphes réguliers.

Corollaire 2.43. *Si G est régulier, alors $\alpha(G) = \dfrac{n}{2}$ si et seulement si G est biparti.*

Chartrand et Schuster [25] ont donné une relation de type Nordhaus-Gaddum pour β.

Théorème 2.44 (Chartrand, Schuster [25] 1974)**.** *Soit G un graphe d'ordre n. Alors*

$$\alpha(G) + \alpha(\overline{G}) \leq n + 1 \text{ et } \alpha(G)\alpha(\overline{G}) \leq \left\lceil \frac{n^2 + 2n}{4} \right\rceil.$$

Preuve. Soit S un $\alpha(G)$-ensemble de G, et soit S' un $\alpha(\overline{G})$-ensemble de $\overline{G}$. Si $A = S' \cap S$, alors $|A| \leq 1$. En outre nous avons $n \geq |S| + |S'| - |A|$, il s'en suit que $\alpha(G) + \alpha(\overline{G}) \leq n + 1$. D'autre part $(n+1)^2 \geq \left(\alpha(G) + \alpha(\overline{G})\right)^2 = \left(\alpha(G) - \alpha(\overline{G})\right)^2 + 4\alpha(G)\alpha(\overline{G}) \geq 4\alpha(G)\alpha(\overline{G})$, et donc $\alpha(G)\alpha(\overline{G}) \leq \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2+2n+1}{4} \leq \left\lceil \frac{n^2+2n}{4} \right\rceil$. □

2.4 L'irrédondance

2.4.1 Définitions et propriétés

En 1978, Cockayne, Hedetniemi et Miller donnaient une extension à la chaîne d'inégalité (2.1) en introduisant une nouvelle notion liée à la domination à savoir l'irrédondance définie comme suit :

Définition 2.45. *Un ensemble $S \subset V$ est dit* irrédondant *si pour tout sommet $x \in S$, on a : $pn[x, S] = N_G[x] - N[S - \{x\}] \neq \varnothing$ c'est à dire chaque sommet de S possède un voisinage privé relatif à S.*

Définition 2.46. *Soit G un graphe. Un ensemble irrédondant S de G est* maximal *si pour tout sommet x de $V - S$, $S \cup \{x\}$ n'est pas un irrédondant. Le* nombre d'irrédondance *$ir(G)$ (resp. le* nombre d'irrédondance supérieur *$IR(G)$) est le cardinal minimum (resp. maximum) d'un irrédondant maximal de G.*

Cette notion est reliée à celle de la domination par le fait que chaque sommet d'un dominant minimal S de G, non isolé dans S, possède au moins un voisin privé extèrieur.

Pour le graphe de la Figure 2.1, les deux ensembles de sommets $\{u, x\}$ et $\{v, x\}$ sont des ensemble irrédondant maximaux de cardinalité minimum, et $\{x, y, z\}$ est l'ensemble irrédondant maximal le plus large, il s'ensuit que $ir(G) = 2$ et $IR(G) = 3$.

Théorème 2.47 (Cockayne et al. [34] 1978)**.** *Un ensemble dominant S est minimal si et seulement si il est irrédondant.*

Preuve. Soit S un dominant minimal de G. D'après la Théorème 2.3 (Ore) on a exactement la propriété d'irrédondance.

Inversement, supposons que S est à la fois un dominant et un irrédondant. Montrons qu'il est minimal. Supposons que S n'est pas un dominant minimal, alors il existe un sommet u tel que $S - \{u\}$ est un dominant. Donc u possède un voisin dans S, mais puisque S est un irrédondant alors il existe un sommet $y \in V - S$ tel que u est l'unique voisin de y dans S. Donc y n'est pas dominé par $S - \{u\}$, contradiction. □

Théorème 2.48 (Cockayne et al. [34] 1978)**.** *Tout ensemble dominant minimal est un irrédondant maximal.*

Preuve. Soit S un dominant minimal de G. D'après le Théorème 2.43, S est un ensemble irrédondant. Montrons que S est un irrédondant maximal. Supposons le contraire. Alors il existe un sommet $x \in V - S$ tel que $S \cup \{x\}$ est un irrédondant. Comme S est un dominant, alors x est adjacent à au moins un sommet de S, et par suite il existe un sommet $z \in V - S$ qui soit adjacent uniquement à x dans $S \cup \{x\}$, mais dans ce cas S ne domine pas z, contradiction. □

Comme conséquence des théorèmes précédents, on a la célèbre chaîne d'inégalité de Cockayne, Hedetniemi et Miller [34] qui relient les six paramètres pour tout graphe G.

$$ir\,(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \alpha(G) \leq \Gamma(G) \leq IR\,(G)\,. \tag{2.2}$$

Fellows et al. [50] ont montré que le problème de détermination du nombre $IR(G)$ pour un graphe arbitraire est NP-complet. McRae [81] a montré que le problème reste NP-complet, même si l'on se restreint aux graphes adjoint ou le graphe adjoint d'un graphe biparti.

Cependant pour les graphes bipatis et les graphes triangulés, $\alpha(G) = \Gamma(G) = IR(G)$. Alors $IR(G)$ peut être calculer en temps polynomial pour ces graphes.

2.4.2 Bornes sur $IR(G)$ et $ir(G)$

En 1988, Favaron [48] a donné une borne pour IR en fonction de n et δ. Les graphes extrêmaux atteignant cette borne ont été déterminés par Cockayne, Mynhardt [36].

Théorème 2.49 (Favaron [48] 1988)**.** *Soit G un graphe connexe d'ordre n et de degré minimum δ. Alors on a:*

$$IR(G) \leq n - \delta.$$

Théorème 2.50 (Cockayne, Mynhardt [36] 1997)**.** *Soit G un graphe connexe d'ordre n et de degré minimum δ. Alors on a:*

$$IR(G) \leq n - \delta,$$

avec égalité si et seulement si G est l'un des graphes suivants:

(i) $V = X \cup W$, tel que $|X| = n - \delta$, X est indépendant et chaque sommet de X est adjacent à tout sommet de W.

(ii) $V = X \cup Y \cup Z$, tel que $|X| = n - \delta$, $|X| = |Y| = n - \delta$ (i.e., $\delta \geq n/2$), $G[X] \simeq G[Y] \simeq K_{n-\delta}$ et les sommets de X sont adjacents au sommets de Y par un couplage. En plus, $|Z| = 2\delta - n$ et chaque sommet de Z est adjacent à tout sommet de $X \cup Y$.

Preuve. Soient X un irredundant de G et v un sommet de X. Supposons que $|N_X(v)| = k$. Puisque $d_G(v) \geq \delta$, $|N(v) \cap (V - X)| \geq \delta - k$. Si $k = 0$, alors $|V - X| \geq \delta$, i.e., $|X| \leq n - \delta$. Si $k > 0$, alors chaque voisin de v dans X a un voisin privé dans $V - X$ et ces k voisins privés sont différents par définition. Donc, $|V - X| \geq (\delta - k) + k = \delta$, i.e., $|X| \leq n - \delta$.

Supposons que $|X| = n - \delta$. Si certain $v \in X$ est isolé dans $G[X]$, alors v a au moins δ voisins dans $W = V - X$. Puisque $|W| = \delta$, v est adjacent à chaque sommet de W. Il clair que pour tout $u \in X$, u n'a pas de voisins privés dans W, donc X est indépendent dans G.

Maintenant, supposons pour tout $v \in X$, v n'est pas isolé dans X. Alors chaque sommet $v \in X$ a un voisin privé dans $V - X$, i.e., $n - \delta = |X| \leq |V - X| = \delta$, d'où $\delta \geq n/2$. Posons $V - X = Y \cup Z$, avec $|Y| = n - \delta$, Y contient un seul sommet privé pour chaque sommet de X et $|Z| = 2\delta - n$. Chaque sommet de X a au plus $n - \delta - 1$ voisins dans X, a exactement un voisin dans Y et donc a au moins $2\delta - n$ voisins dans Z. Puisque $|Z| = 2\delta - n$ et $|X| = n - \delta$, $G[X] \cong K_{n-\delta}$ et chaque sommet de X est adjacent à

tout sommet de Z. Par le même argument on peut montrer que $G[Y] \cong K_{n-\delta}$ et chaque sommet de Y est adjacent à tout sommet de Z. □

Inversement, si G est l'un des graphes décrit cidessous, alors il est facile de voir que $IR(G) \geq |X| = n - \delta$, et l'égalité découle du fait que $IR(G) \leq n - \delta$.

Corollaire 2.51. *Soit G un graphe connexe d'ordre n et de degré minimum δ.*

(a) *Si $IR(G) = n - \delta$, alors $\Gamma(G) = IR(G)$.*

(b) *Si $IR(G) = n - \delta$ et $\delta < n/2$, alors $\alpha(G) = \Gamma(G) = IR(G)$.*

Cockayne et Mynhardt [35] ont trouvé une relation de type Nordhaus-Gaddum pour IR.

Théorème 2.52 (Cockayne, Mynhardt [35] 1989)**.** *Soit G un graphe d'ordre n. Alors*

$$IR(G) + IR(\overline{G}) \leq n + 1 \text{ et } IR(G)IR(\overline{G}) \leq \left\lceil \frac{n^2 + 2n}{4} \right\rceil.$$

Allan et Laskar [2], et indépendamment, Bollobas et Cockayne [20] ont établi une relation entre $\gamma(G)$ et $ir(G)$ pour tout graphe G.

Théorème 2.53 (Allan, Laskar [2] 1978, Bollobas, Cockayne [20] 1979)**.** *Pour tout graphe G, $ir(G) \leq \gamma(G) \leq 2ir(G) - 1$.*

Preuve. La borne inférieure découle directement de l'inégalité (2.2). Montrons la borne superieure. Soit $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ un $ir(G)$-ensemble. Puisque S est un ensemble irrédondant alors $pn[v_i, S] \neq \varnothing$ pour $1 \leq i \leq k$. Soit $S' = \{u_1, u_2, ..., u_k\}$ où $u_i \in pn[v_i, S]$ pour $1 \leq i \leq k$. A noter qu'il est possible d'avoir $u_i = v_i$ (si v_i est privé de lui même). Dans tous les cas, on a : $|S \cup S'| \leq 2k = 2ir(G)$.

Montrons que $S \cup S'$ est un ensemble dominant de G. Supposons le contraire. Alors, il existe au moins un sommet $w \in V - (S \cup S')$ non dominé par $S \cup S'$. Donc $w \notin N_G[x]$ pour tout $x \in S \cup S'$ et donc $pn[w; S \cup \{w\}] \neq \varnothing$. Ceci implique que $S \cup \{w\}$ est un ensemble irrédondant, ce qui contredit la maximalité de S. Donc $S \cup S'$ est un ensemble dominant de G.

S'il existe au moins un indice i tel que $u_i = v_i$ alors $\gamma(G) \leq |S \cup S'| < 2k = 2ir(G)$. Donc $\gamma(G) \leq 2ir(G) - 1$.

Supposons maintenant qu'il n'existe aucun indice i tel que $u_i = v_i$. Bien que $S \cup S'$ est un dominant, il ne peut être minimal car s'il est dominant minimal alors d'après le Théorème 2.44, $S \cup S'$ est un irrédondant maximal, ce qui contredit encore la maximalité de S. Par conséquent, il existe $y \in S \cup S'$ tel que $(S \cup S') - \{y\}$ est un dominant et donc $\gamma(G) \leq |(S \cup S') - \{y\}| \leq 2k - 1 = 2ir(G) - 1$. □

2.5 Autre paramètres de domination

Plusieurs types de dominations sont définis en imposant des propriètés supplémentaires sur l'ensemble des sommets qui dominent. Décrivons quelques types les plus étudiés. Par exemple imposer la condition que le sous graphe induit par l'ensemble dominant soit :

1. sans arêtes donne la domination stable.
2. sans sommets isolés donne la domination totale.
3. un couplage parfait donne la domination couplé.
4. connexe donne la domination connexe.
5. complet donne la domination clique.
6. un cycle donne la domination cycle.

On peut de même imposer des conditions extérieures, sur la façon de dominer, par exemple dominer au moins k fois chaque sommet extérieur, produit la *k-domination.*

Comme on peut imposer simultanément des conditions des deux types, par exemple un dominant double est un dominant sans sommet isolé qui domine au moins deux fois tout sommet extèrieur.

A signaler qu'il existe actuellement plus de 200 types de dominants et plus de 3000 articles réalisés sur la domination.

2.5.1 La domination stable

La notion de stabilité dans les graphes a été liée à celle de la domination par le fait qu'un stable maximal est un dominant.

Définition 2.54. *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, Un sous ensemble $S \in V$ est un* dominant stable *si S est un dominant et S est un stable.*

Puisque un dominant stable est un dominant minimal, alors la cardinalité minimum d'un stable maximal est appelé le nombre de domination stable, noté $i(G)$.

D'après la chaîne d'inégalités (2,2), $\gamma(G) \leq i(G) \leq \alpha(G)$. Ces bornes sont atteintes pour pour la couronne de l'étoile $K_{1,p}$. ($\gamma(K_{1,p} \circ K_1) = i(K_{1,p} \circ K_1) = \alpha(K_{1,p} \circ K_1) = p+1$). D'autre part, la différence $\gamma(G) - i(G)$ et $i(G) - \alpha(G)$ peut être aussi large que l'on veut. Ceci peut être vu en considérant la double étoile $S_{s,t}$ avec $1 \leq s \leq t$ ($\gamma(S_{s,t}) = 2$, $i(S_{s,t}) = s + 1$ et $\alpha(S_{s,t}) = s + t$).

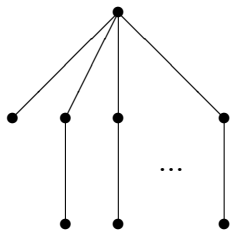


FIGURE 2.4. La couronne $K_{1,p} \circ K_1$

Garey et Johnson dans [56] sont les premiers qui ont montré que le problème de la détemination de $i(G)$ est NP-complet. Corniel et Perl [38] 1984 ont montré que le problème reste NP-complet pour la classe des graphes bipartis.

Le premier algorithme linéaire pour la détermination du nombre de domination stable d'un arbre a été construit par Beyer et al. [13].

L'un des problèmes intéressants est de caractériser les graphes G tels que $\gamma(G) = i(G)$. Allan et Laskar [2] ont donné une condition suffisante sur G pour que $\gamma(G) = i(G)$.

Théorème 2.55 (Allan, Laskar [2] 1978)**.** *Si G est un graphe sans griffe ($K_{1,3}$), alors*

$$i(G) = \gamma(G).$$

Preuve. Soit S un $\gamma(G)$-ensemble possédant le moins d'arêtes possible. Supposons que $|S| = \gamma(G) < i(G)$, donc il existe deux sommets u, v adjacents dans S. D'après la minimalité de S, u doit avoir un voisinage privé dans $V - S$. Soit A un tel ensemble. S'il existe deux sommets non adjacents $x, y \in A$, alors le sous-graphe induit par $\{u, x, y, v\}$ est une griffe. D'où A est une clique. Par ailleurs tout sommet de $(V - S) - A$ est dominé par $S - \{u\}$. Par conséquent, si $w \in A$, alors $(S - \{u\}) \cup \{w\}$ est un dominant minimum de G contenant moins d'arêtes que S, ce qui contredit le choix de S. Donc $\gamma(G) = i(G)$. □

Corollaire 2.56. *Si G est la chaîne P_n ou le cycle C_n, alors $\gamma(G) = i(G)$.*

Harary et Livingston ont caractérisé les arbres T tels que $\gamma(T) = i(T)$, Topp et Volkmann ont caractérisé les unicycliques bipartis et les graphes en blocs tels que $\gamma(G) = i(G)$.

Théorème 2.57 (Domke et al. [41] 1997)**.** *Si G est un graphe d'ordre n et de degré maximum, alors $i(G) \leq n - \Delta$.*

La borne précédente est atteinte pour la couronne de l'étoile $K_{1,p}$.

Pour les arbres, Favaron a établi une borne pour $i(T)$ en donnant une caractérisation constructive des arbres atteingant l'égalité.

Théorème 2.58 (Favaron [49] 1992)**.** *Soit T un arbre $n \geq 2$ ayant ℓ sommets pendants. Alors $i(T) \leq \dfrac{n + \ell}{3}$.*

Trivialement, on a; $i(G) + i\left(\overline{G}\right) \leq n + 1$. L'égalité est atteinte pour les graphes complets. Pour le produit $i(G)i\left(\overline{G}\right)$, le meilleur résultat connu est dû à Cockayne et al. [31].

Théorème 2.59 (Cockayne et al.[31] 1991)**.** *Pour tout graphe G d'ordre n on a:*

$$i(G)i\left(\overline{G}\right) \leq \begin{cases} (n+3)^2/8 \text{ si } n \leq 27 \\ (n+8)^2/10.8 \text{ sinon} \end{cases}$$

2.5.2 La domination totale

Définition 2.60. *Soit G un graphe, Un sous ensemble S de V est dit* dominant total *de G si tout sommet de V possède un voisin dans S ($N_G(S) = V$ ou bien S est un dominant et le sous graphe induit par S ne contient pas de sommets isolés). Le* nombre de domination total*, noté $\gamma_t(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant total de G.*

Par exemple pour la chaîne P_5, $\gamma_t(P_5) = 3$ et $\{v_2, v_3, v_4\}$ est l'unique ensemble dominant total minimum de P_5.

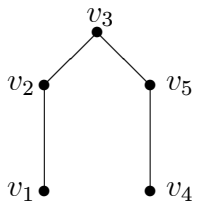


FIGURE 2.5.

Remarque 2.61. *Pour un graphe G.*

La domination totale est définie uniquement, si G est sans sommets isolés.

L'ensemble des sommets V de G est toujours un dominant total et un dominant total contient au moins deux sommets, alors $2 \leq \gamma_t(G) \leq |V|$.

Application : On sélectionne un comité à partir d'un ensemble d'individus tels que,

- tout individu non membre connaît au moins un membre du comité (représentativité).

- tout membre du comité connaît au moins un autre membre du comité pour qu'il ne soit pas isolé (coopération entre les membres du comité).

Le plus petit comité en taille avec ces propriétés est un γ_t-ensemble dans le graphe de connaissances sur l'ensemble de tous les individus.

Pfaff [91] a été le premier qui a montré que le problème de la détemination de $\gamma_t(G)$ est NP-complet, même si l'on se restreint aux graphes bipartis. Laskar et al. [77] ont construit un algorithme linéaire pour la détermination du nombre de domination total d'un arbre.

Proposition 2.62. *Soit G un graphe d'ordre n. Alors $\gamma_t(G) = n$ si et selement $G = \frac{n}{2}K_2$.*

Cockayne, Dawes et Hedetniemi ont donné une borne supérieure pour γ_t en fonction de n. Les graphes extrêmaux atteignant cette borne ont été déterminés par Payan et Xuong [93], et indépendamment par Fink, Jacobson, Kinch et Roberts [51].

Théorème 2.63 (Cockayne et al. [30] 1997)**.** *Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, alors*

$$\gamma_t(G) \leq \frac{2n}{3}.$$

Théorème 2.64 (Birgham et al. [23] 2000)**.** *Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, alors $\gamma_t(G) = \frac{2n}{3}$ si et seulement si G est C_3, C_6 ou 2-couronne d'un graphe connexe.*

Théorème 2.65 (Cockayne et al. [30] 1997)**.** *Soit G un graphe d'ordre n et de degré maximum Δ. Alors*

1. *Si G est sans sommet isolé, alors $\gamma_t(G) \leq n - \Delta + 1$.*
2. *Si G est connexe et $\Delta < n - 1$, alors $\gamma_t(G) \leq n - \Delta$.*

Pour les arbres Chellali et Haynes [27] ont donné une borne pour γ_t.

Théorème 2.66 (Chellali, Haynes [27])**.** *Soit T un arbre $n \geq 3$ ayant s supports. Alors*

$$\gamma_t(T) \leq (n+s)/2.$$

La borne précédente est atteinte pour la 2-couronne d'un arbre.

Allan, Laskar et Hedetniemi [3] ont établi une relation entre $\gamma_t(G)$ et $ir(G)$ pour tout graphe sans sommet isolé.

Théorème 2.67 (Allan et al. [3] 1984)**.** *Pour tout graphe G sans sommets isolés,*

$$\gamma_t(G) \leq 2ir(G).$$

Preuve. Soit $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ un $ir(G)$-ensemble de G. Puisque S est un ensemble irrédondant alors $pn[v_i, S] \neq \varnothing$ pour $1 \leq i \leq k$. Soit $S' = \{u_1, u_2, ..., u_k\}$ où $u_i \in pn[v_i, S]$ pour $1 \leq i \leq k$. A noter qu'il est possible d'avoir $u_i = v_i$ (si v_i est privé de lui même). Alors $S \cup S'$ est un dominant total de G, et donc $\gamma_t(G) \leq |S \cup S'| \leq 2k = 2ir(G)$. □

Corollaire 2.68. *Pour tout graphe G sans sommets isolés,*

$$\gamma(G) \leq \gamma_t(G) \leq 2\gamma(G).$$

Problème 2.69. *Caractériser les graphes G tels que $\gamma_t(G) = \gamma(G)$.*

Théorème 2.70 (Allan et al. [3] 1984)**.** *Si toute composante connexe de G a au moins trois sommets, alors on a:*

$$\gamma_t(G) + i(G) \leq n.$$

Théorème 2.71 (Cockayne et al. [30] 1997)**.** *Si G et $\overline{G}$ sont sans sommets isolés, alors*

$$\gamma_t(G) + \gamma_t(\overline{G}) \leq n + 2.$$

avec égalité si et seulement si G ou $\overline{G}$ est $\frac{n}{2}K_2$.

Théorème 2.72 (Arumugam, Thuraiswamy [5] 1996)**.** *Si G et $\overline{G}$ sont sans sommets isolés, alors*

$$\gamma_t(G) + \gamma_t(\overline{G}) = n + 1$$

si et seulement si G ou $\overline{G} \cong C_5$, $P_3 \cup \frac{n-3}{2}K_2$ ou $C_3 \cup \frac{n-3}{2}K_2$.

2.5.3 La domination couplée

Définition 2.73. *Un sous ensemble S de V est dit* dominant couplé *de G si S est dominant et le sous graphe induit par S admet un couplage parfait. Le* nombre de domination couplé *noté $\gamma_{pr}(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant couplé de G.*

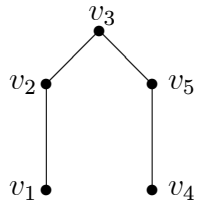


FIGURE 2.6.

Par exemple pour la chaîne P_5, $\gamma_{pr}(P_5) = 4$ et $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ est l'unique ensemble dominant couplé minimum de P_5.

La domination couplée a été introduite par Haynes et Slater [64], en 1998.

Remarque 2.74. *Tout graphe sans sommets isolés admet un dominant couplé, il suffit de prendre l'ensemble des sommets sur les arêtes d'un couplage maximal dans G, et un dominant couplé contient au moins deux sommets, alors $2 \leq \gamma_{pr}(G) \leq |V|$.*

Un ensemble dominant couplé est un ensemble dominant total. Mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai. Donc $\gamma_t(G) \leq \gamma_{pr}(G)$ pour tout graphe G.

Une application : Pour une garde d'une région donnée, on peut supposer qu'un gardient protége ses voisins et lui même (ensemble dominant).

On peut aussi supposer qu'un gardient doit être protégé par un autre gardient (ensemble dominant total).

Pour le dominant pair, on impose à ce que chaque gardien soit couplé (protection mutuelle) avec un autre gardien et dans ce cas, on doit chercher un dominant de taille minimale avec la propriété que ses sommets forment un couplage.

Dans [64], Haynes et Slater ont montré que le problème de la recherche du nombre de domination couplée est NP-Complet. Le côté algorithmique est traité uniquement pour la classe des arbres, citons le travail de Qiao et al. [95] qui donnent un algorithme polynomial pour la recherche du nombre de domination couplée dans les arbres.

Le théorème suivant regroupe quelques bornes, sur la domination couplée, établis par Haynes et Slater [64].

Théorème 2.75 (Haynes, Slater [64] 1998)**.** *Soit G un graphe sans sommets isolés d'ordre n. Alors*

1. $\gamma_{pr}(G) \leq 2\gamma(G)$.
2. $\gamma_{pr}(G) \geq \dfrac{n}{\Delta}$.
3. $\gamma_{pr}(G) \leq \dfrac{2n}{3}$ *pour* $n \geq 6$ *et* $\delta \geq 2$.

Problème 2.76. *Caractériser les graphes G tels que $\gamma_{pr}(G) = 2\gamma(G)$.*

Théorème 2.77 (Chellali, Haynes [28] 2005)**.** *Pour tout graphe G sans sommets isolés on a:*

$$\gamma_{pr}(G) \leq n - \delta + 1.$$

Preuve. Si $\delta = 1$ alors l'inégalité est vérifiée. Donc supposons que $\delta \geq 2$, et soit v un sommet de degré minimum et w un sommet voisin de v. Alors parmi tous les dominants couplés minimum de $G[(V - N(v)) \cup \{w\}]$, soit S celui qui contient l'arête vw (un tel ensemble existe puisque $G[(V - N(v)) \cup \{w\}]$ est sans sommets isolés possédant un couplage maximal contenant l'arête vw). Dans ce cas, S est aussi un dominant couplé de G, d'où, $\gamma_{pr}(G) \leq |S| \leq |(V - N(v)) \cup \{w\}| = n - \delta + 1$. □

Le cycle C_5 est un exemple de graphe pour lequel la borne est atteinte ($\gamma_{pr}(C_5) = 4 = n - \delta + 1$).

Dans [27], Chellali et Haynes ont donné des bornes pour γ_{pr}, pour les arbres.

Théorème 2.78 (Chellali, Haynes [27] 2004)**.** *Soit T un arbre d'ordre $n \geq 3$ ayant s supports. Alors*

1. $\gamma_t(T) \leq \gamma_{pr}(T) \leq \gamma_t(T) + s - 1$.
2. $\gamma_{pr}(T) \leq (n + 2s - 1)/2$.

Haynes et Slater [64] ont établi une relation de type Nordhaus-Gaddum pour γ_{pr}.

Théorème 2.79 (Haynes, Slater [64] 1998)**.** *Si G et $\overline{G}$ sont sans sommets isolés, alors*

$$\gamma_{pr}(G) + \gamma_{pr}(\overline{G}) \leq \begin{cases} n+3 \text{ si } n \text{ est impair} \\ n+2 \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

2.5.4 La domination connexe

Définition 2.80. *Un sous ensemble S de V est dit* dominant connexe *de G si S est un dominant et le sous graphe induit par S est connexe. Le* nombre de domination connexe *noté par $\gamma_c(G)$ est la taille minimum d'un ensemble dominant connexe de G.*

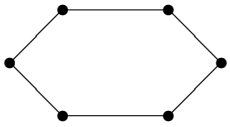


FIGURE 2.7. Le cycle C_6

Pour le cycle C_6 de la Figure 2.5, $\gamma_c(C_6) = 4$ tandis que $\gamma(C_6) = 2$.

La domination connexe a été introduite par Sapmpathkumar et Walikar [99], en 1979.

Remarque 2.81. *Un ensemble dominant connexe est un ensemble dominant total. Mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai. Donc* $\gamma(G) \leq \gamma_t(G) \leq \gamma_c(G)$ *pour tout graphe* G*, et si* $\gamma(G) = 1$*, alors* $\gamma(G) = \gamma_c(G) = i(G) = 1$*.*

Pfaff, Laskar et Hedetniemi [92] ont montré que le problème de la recherche du nombre de domination connexe est NP-Complet pour les graphes bipartis, et Laskar et Pfaff [73] ont montré que le problème est NP-Complet pour les graphes scindés. White, Farber et Pulleyblank [109] ont construit un algorithme polynomial pour la recherche du nombre de domination connexe dans les graphes fortement triangulés.

Lemme 2.82 (Sapmpathkumar et Walikar [99] 1979)**.** *Soient* G *un graphe et* G' *un sous graphe partiel de* G*. Alors,*$\gamma_c(G) \leq \gamma_c(G')$*.*

Preuve. Soit S un $\gamma_c(G')$-ensemble. Puisque G' est un sous graphe partiel de G, alors S est aussi un ensemble dominant connexe de G. Ceci donne $\gamma_c(G) \leq |S| = \gamma_c(G')$. □

Notons par ε_T le nombre maximum de feuilles dans un arbre couvrant de G.

Intuitivement, on peut facilement obtenir un ensemble dominant connexe en considérant un arbre couvrant T de G. Il suffit seulement de supprimer toutes les feuilles de T. En effet, Hedetniemi et Laskar [65] ont montré ce qui suit.

Théorème 2.83 (Hedetniemi, Laskar [65] 1984)**.** *Soit* G *un graphe connexe d'ordre* $n \geq 3$*. Alors*

$$\gamma_c(G) = n - \varepsilon_T \leq n - 2.$$

Preuve. Soit T un arbre couvrant tel que ε_T est le nombre de feuilles dans T. Soit $L(T)$ l'ensemble des feuilles dans T. Alors, il est clair que $V(T)-L(T)$ est un ensemble dominant connexe dans T et par le lemme précédent, $\gamma_c(G) \leq \gamma_c(T) \leq |V(T) - L(T)| = n - \varepsilon_T$.

Inversement, soit S un $\gamma_c(G)$-ensemble. Par la connexité de $G[S]$, il existe un arbre couvrant T_S de $G[S]$. Nous prolongeons T_S à un arbre T couvrant de G en ajoutant les sommets de $V(G) - S$ et des arêtes de $E(G)$ de telle sorte que chaque sommet ajouté est adjacent à exactement un sommet dans S (cela peut être réalisé puisque S est un ensemble dominant). Par conséquent, nous avons $\varepsilon_T \geq |V(G) - S| = n - \gamma_c(G)$. Combinant les deux inégalités, nous aurons l'égalité désiré, et puisque tout arbre a au moins deux feuilles, $\gamma_c(G) \leq n - 2$. □

Le corollaire suivant est un résultat immédiat du Théorème précédent.

Corollaire 2.84 (Sapmpathkumar et Walikar [99] 1979)**.** *Si T est arbre d'ordre $n \geq 3$ contenant ℓ sommet pendants, alors $\gamma_c(T) = n - \ell(T)$.*

Théorème 2.85 (Hedetniemi, Laskar [65] 1984)**.** *Pour tout graphe connexe G d'ordre n et de degré maximum Δ,*

$$\gamma_c(G) \leq n - \Delta.$$

Preuve. Soit $u \in V$ tel que $d_G(u) = \Delta$. Il existe un arbre partiel T dans G tel que $N_T(u) = N_G(u)$ (i:e; l'arbre T peut être choisi de manière que u reste adjacent à ses voisins). Donc T possède au moins Δ feuilles dans T. Par le Corollaire précédent, $\gamma_c(G) \leq \gamma_c(T) \leq n - \ell(T) \leq n - \Delta$. □

Corollaire 2.86 (Hedetniemi, Laskar [65] 1984)**.** *Pour tout arbre T, $\gamma_c(T) = n - \Delta(T)$ si et seulement si T a au plus un sommet de degré 3 ou plus.*

Théorème 2.87 (Sampathkumar, Waliker [99] 1979)**.** *Si G est un graphe connexe d'ordre n, de taille m et de degré maximum Δ, alors*

$$\frac{n}{\Delta + 1} \leq \gamma_c(G) \leq 2m - n.$$

Théorème 2.88 (Haynes, Hedetniemi, Slater [62] 1998)**.** *Si G est un graphe connexe d'ordre n avec $\delta \geq 3$, alors*

$$\gamma_c(G) \leq \frac{3n}{4} - 2.$$

Laskar et Pfaff [73] ont établi le resultat suivant.

Théorème 2.89 (Laskar, Pfaff [75] 1983)**.** *Si G est le complémentaire d'un graphe biparti ou un graphe scindé, alors*

$$ir(G) = \gamma(G) = \gamma_t(G) = \gamma_c(G).$$

Problème 2.90. *Caractériser les graphes G tels que $\gamma_c(G) = \gamma(G)$.*

2.5.5 La domination double

Définition 2.91. *Un sous ensemble S de V est dit* dominant double *de G si tout sommet de V est dominé par au moins deux autres sommets i.e., si $x \in V - S$ alors x a deux voisins dans S et si $x \in S$ alors x a au moins un voisin dans S. Le* nombre de domination double *noté par $\gamma_{\times 2}(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant double de G.*

Pour le graphe de la Figure 2.8, $\gamma_{\times 2}(G) = 4$.

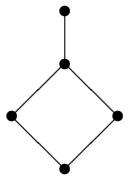


FIGURE 2.8. Le graphe G

La domination double a été introduite par Harary et Haynes [61] en 2000.

Remarque 2.92. *Pour un graphe G.*

La domination double est définie uniquement Si G est sans sommets isolés.

L'ensemble des sommets V de G est toujours un dominant double et un dominant double contient au moins deux sommets, alors $2 \leq \gamma_{\times 2}(G) \leq |V|$.

Application : Le problème du placement des gardiens dans une prison.

Un gardien placé sur un sommet v peut garder tous les sommets de $N[v]$. Dans ce cas, un ensemble dominant double S représente un ensemble de gardiens avec la propriété que tout prisonnier (un sommet de $V - S$) est surveillé par au moins deux gardiens et chaque gardien (un sommet de S) est voisin d'un autre gardien en vue de s'assurer une mutuelle aide et assistance en cas de besoin.

Dans [78], Liao et Chang ont montré que le problème de la détermination du nombre de domination double dans un graphe quelconque est NP-Complet. Ils ont donné aussi un algorithme polynomial pour la recherche du nombre de domination double dans les graphes fortement triangulés.

Cependant, Voici des exemples de graphes où le nombre de domination double est donné d'une façon exacte.

1) $\gamma_{\times 2}(K_n) = 2$ pour $n > 2$.

2) $\gamma_{\times 2}(C_n) = \lceil 2n/3 \rceil$.

3) $\gamma_{\times 2}(K_{r,s}) = 4$ pour $r \geq 3, s \geq 3$.

4) $\gamma_{\times 2}(K_{1,p}) = p + 1$.

On résume ci-dessous quelques bornes concernant le nombre de domination double établies par Harary et Haynes [61].

Théorème 2.93 (Harary, Haynes [61] 2000)**.** *Soit G un graphe sans sommets isolés, Alors*

1. $\gamma_{\times 2}(G) \geq \gamma(G) + 1$.

2. *Si G admet deux $\gamma_{\times 2}(G)$-ensembles disjoints alors* $\gamma_{\times 2}(G) \leq 2\gamma(G)$.

3. *Si $\delta \geq 2$, alors* $\gamma_{\times 2}(G) \leq \begin{cases} \lfloor n/2 \rfloor + \gamma(G) & si \;\; n = 3 \;\; ou \; 5 \\ \lfloor n/2 \rfloor + \gamma(G) - 1 & sinon. \end{cases}$

4. $\gamma_{\times 2}(G) \geq (4n - 2m)/3$.

5. $\gamma_{\times 2}(G) \geq 2n/(\Delta + 1)$.

Théorème 2.94 (Chellali, Haynes [28] 2005)**.** *Pour tout graphe G sans sommets isolés on a:*

$$\gamma_{\times 2}(G) \leq n - \delta + 1.$$

Proposition 2.95 (Chellali, Haynes [28] 2005)**.** *Pour tout graphe G avec $\delta \geq 2$,*

$$\gamma_{\times 2}(G) \leq \frac{n + \gamma_t(G)}{2}.$$

Preuve. Soient G un graphe de degré minimum $\delta \geq 2$ et S un $\gamma_t(G)$-ensemble. Soit A l'ensemble des sommets isolés dans $G[V - S]$. Alors chaque sommet de A a au moins deux voisins dans S. Soit D l'ensemble dominant minimum de $G[(V - S) - A]$. Puisque $G[(V - S) - A]$ est sans sommets isolés, il s'ensuit d'après le Théorème d'Ore ($\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$) que $|D| \leq \frac{|V-S-A|}{2} \leq \frac{|V-S|}{2}$. Donc $S \cup D$ est un ensemble dominant double de G, et par conséquent:$\gamma_{\times 2}(G) \leq |S \cup D| \leq |S| + \frac{|V-S|}{2} = \frac{n+\gamma_t(G)}{2}$. □

Le cycle C_5 est un exemple de graphe où la borne est atteinte.

Blidia et al. [17] 2003 ont établi quelques bornes sur les arbres pour le nombre de domination double en caractérisant pour certaines d'entre elles les arbres qui atteignent l'égalité.

Proposition 2.96 (Blidia et al. [17] 2003)**.** *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 3$,*

$$\gamma_{\times 2}(T) \geq \gamma(T) + \ell(T) \geq \gamma(T) + \Delta.$$

Preuve. Soit D un $\gamma_{\times 2}(T)$-ensemble. D'après la remarque précédente, $L(T) \subset D$ et $S(T) \subset D$. Donc $D - L(T)$ est un dominant de T et donc, $|D - L(T)| = \gamma_{\times 2}(T) - \ell(T)$, et puisque tout arbre contient au moins $\Delta(T)$ sommets pendants, alors $\gamma_{\times 2}(T) \geq \gamma(T) + \ell(T) \geq \gamma(T) + \Delta$. □

Afin de donner une caractérisation des arbres pour lesquels la borne inférieure de la proposition précédente est atteinte, on définit la famille des arbres notée $\mathcal{T}$ obtenus à partir de l'étoile $K_{1,t}$ pour $t \geq 3$, ou bien en subdivisant chaque arête une fois (ce qui donne une étoile subdivisée) ou bien en subdivisant au plus $(t - 1)$ arêtes au plus deux fois.

Théorème 2.97 (Blidia et al. [17] 2003)**.** *Soit T un arbre. Alors $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma(T) + \Delta(T)$ si et seulement si $T = P_n$ pour $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ ou bien $T \in \mathcal{T}$.*

Théorème 2.98 (Blidia et al. [17] 2003)**.** *Soit T un arbre d'ordre $n \geq 3$ avec ℓ sommets pendants et s sommets supports. Alors*

$$\gamma_{\times 2}(T) \leq \frac{2n + \ell + s}{3}.$$

Harary et Haynes [61] 2000, ont établi les résultats de type Nordhauss-Gaddum suivants:

Théorème 2.99 (Harary, Haynes [61] 2000)**.** *Si G et $\overline{G}$ sont sans sommets isolés, alors*

$$\gamma_{\times 2}(G) + \gamma_{\times 2}\left(\overline{G}\right) \leq 2n,$$

et cette borne est atteinte si et seulement si $G = P_4$.

Problème 2.100. *Caractériser les graphes G tels que $\gamma_{\times 2}(G) = 2\gamma(G)$.*

CHAPITRE 3

La coloration dans les graphes

L'un des thèmes majeurs de la théorie des graphes est la coloration des graphes, car il fournit un grand nombre de problèmes célèbres et de nombreuses applications pratiques. Dans cette optique, le problème de coloration consiste à regrouper les objets en classes "indépendantes" i.e. On s'intéresse alors à déterminer une solution pour laquelle le nombre de classes est le plus petit possible. Ce nombre est appelé nombre chromatique.

En 1852, le jeune Anglais Francis Guthrie s'est demandé s'il est possible de colorer toute carte de géographie avec quatre couleurs en respectant la condition que deux pays voisins ne soient pas recouverts par la même couleur. Ce n'est qu'en 1976 que deux chercheurs américains ont pu répondre affirmativement à cette conjecture des quatre couleurs.

En effet, à tout pays d'une carte géographique, on associe un sommet du graphe. A deux sommets du graphe, on associe une arête si et seulement si les deux régions correspondantes ont une extrémité commune. Une coloration des sommets du graphe est alors équivalente à une coloration des régions. Cette technique de coloration est devenue donc un outil très puissant dans la résolution des problèmes de la théorie des graphes.

3.1 Coloration des sommets

Définition 3.1. *On appelle coloration des sommets d'un graphe toute attribution d'une couleur à chaque sommet (est une fonction* $c : V \rightarrow \{1, 2, 3, .., k\}$ $(k \in N)$*).*

Une coloration est propre si chaque deux sommets voisins portent des couleurs différentes $(c(v) \neq c(w), \forall v, w \in V$ *adjacents.*

G est k-colorable si on peut colorer ses sommets avec k couleurs distinctes, sans que deux sommets voisins aient la même couleur.

Etant donné un graphe $G = (V, E)$. Une coloration triviale de G consiste à attribuer à chacun de ses sommets une couleur différente. Ainsi, tout graphe à n sommets admet une

n-coloration. Donc il est naturel de se demander quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer G. D'où la définition du nombre chromatique de G.

Définition 3.2. *Le nombre chromatique d'un graphe G, noté $\chi(G)$, est le plus petit nombre de couleurs nécessaires à une coloration propre des sommets de G.*

On le définit aussi comme étant le plus petit entier k tel que G admet une k-coloration. C'est donc la taille minimale d'une partition de V en stables. Une $\chi(G)$-coloration d'un graphe G est dite coloration optimale (minimale) de G, il est dit aussi que G est $\chi(G)$-chromatique.

Pour le graphe $G = K_4 - e$ de la Figure 3.1, G est 3-colorable, et $\chi(G) = 3$.

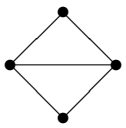


FIGURE 3.1.

Pour le cycle C_n de longueur n et de sommets $v_1, ..., v_n$ disposés dans cet ordre autour du cycle. Si nous affectons la couleur 1 à v_1, alors v_2 doit être coloré différemment, disons par la couleur 2. Mais alors nous pouvons colorer encore v_3 par 1. En continuant de cette façon pour les sommets restants, nous constatons que si n est impair, alors v_n aura besoin d'une couleur différente, 3. D'où $\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 3 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

Remarque 3.3. *Soit G un graphe d'ordre n. Il clair que $1 \leq \chi(G) \leq n$.*

1. *$\chi(G) = 1$ si et seulement si $G \cong \overline{K_n}$.*

2. *$\chi(G) = n$ si et seulement si $G \cong K_n$.*

On donne à présent une caractérisation des graphes pour lesquels $\chi(G) = 2$.

Théorème 3.4. *Soit G un graphe non nul. Alors $\chi(G) = 2$ si et seulement si G est biparti.*

Preuve. Soit G un graphe biparti de classes de sommets X_1, X_2. Affectons la couleur i $(i = 1, 2)$ à tous les sommets de X_i, ceci donne une 2-coloration pour G et donc $\chi(G) \leq 2$, puisque $G \ncong \overline{K_n}$, $\chi(G) \geq 2$. D'où $\chi(G) = 2$.

Inversement, supposons que $\chi(G) = 2$. Alors G a une 2-coloration. Pour $i = 1, 2$, notons par X_i l'ensemble des sommets colorés par i. Alors deux sommets quelconques de X_i $(i = 1, 2)$ sont non adjacents. Par conséquent, toute arête de G joint un sommet de X_1 et un sommet de X_2. D'où G est biparti de classes de sommets X_1, X_2. □

Le problème de la détermination d'une coloration optimale est NP-complet [56].

Problème: 3-Colorabilté

Instance **:** Un graphe $G = (V, E)$.

Question : Existe-t-il une application f de V dans $\{1, 2, 3\}$ telle que pour toute arête uv de G, on ait $f(u) \neq f(v)$?

Complexité : NP-complet.

Une question qui se pose de façon naturelle est la suivante. En général, comment peut-on colorer un graphe donné ?

Une approche évidente est fourni par un algorithme de type glouton suivant.

3.1.1 Algorithme de coloration de Welsh et Powell (Algorithme glouton)

1. Classer les sommets suivant un ordre décroissant de leur degrés.

2. En parcourant la liste dans l'ordre, attribuer une couleur non encore utilisée au premier sommet non coloré, et attribuer cette même couleur à chaque sommet non encore coloré, et non adjacent à un sommet de cette couleur.

3. S'il reste des sommets non encore colorés dans le graphe, revenir à l'étape 2.

L'algorithme de Welsh et Powell couramment utilisé permet d'obtenir une assez bonne coloration d'un graphe, c'est-à-dire une coloration n'utilisant pas un trop grand nombre de couleurs. Cependant, il n'assure pas que le nombre de couleurs utilisé soit minimum.

Par exemple, pour le graphe de la Figure 3.1, le nombre chromaique de ce graphe est évidement 2. Tous les sommets étant de même degré, ils vont être visités dans l'ordre

croissant des numéros de sommets. On voit bien que L'algorithme de Welsh et Powell fournira une coloration propre c telle que $c(v_{2i}-1)=i$ et $c(v_{2i})=i$ $(i=1,2,3,4)$. Alors le nombre de couleurs trouvé est $4>\chi(G)=2$.

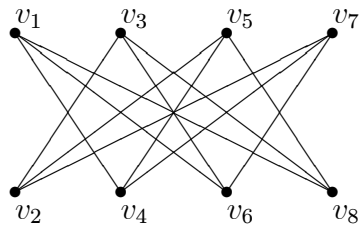


FIGURE 3.2. $K_{4,4}$ moins un couplage parfait

Plusieurs algorithmes efficaces ont été développés pour déterminer le nombre chromatique de certaines classes de graphes. Il existe par ailleurs des heuristiques de coloration qui produisent des bornes supérieures de ce paramètre.

3.1.2 Application

Problème d'examen : Le problème consiste en l'affectation d'un ensemble de tâches à un ensemble d'employés sous forme de vacations.

(Une vacation : une succession de tâches deux à deux disjointes dans le temps).

- $\{T_i\}_{(i=1,..,N)}$ ensemble de tâches possédant chacune une date de début «d_i» et une date de fin « f_i ».

- $I_i=[d_i,f_i]$ est l'intervalle associé à la tâche T_i sur la droite de temps.

Objectif : Minimiser le nombre de vacations nécessaire à l'exécution de toutes les tâches.

Contraintes : les vacations doivent respecter certaines conditions liées au code de travail.

- $I_i\cap I_j=\varnothing$.

- Nombre de tâches pour chaque vacation $\leq m$ $(m\in\mathbb{N})$.

Modélisation : les tâches sont les sommets d'un graphe d'intervalles et une arête reliant deux sommets lorsque les intervalles correspondants sont en intersection.

Soit $G = (V, E)$ un graphe où V désigne l'ensemble des tâches T_i et E est l'ensemble des arêtes tel que une arête placée entre deux sommets T_i et T_j si $I_i \cap I_j = \varnothing$.

Solution du problème : Coloration minimale de ce graphe. Chaque couleur marque au plus « m » sommets. C'est-à-dire une partition minimum en stables de cardinalité au plus « m ».

Exemple 3.5. *(Planification d'horaires des examens).*

Une université doit organiser des horaires des examens. On suppose qu'il y a 7 épreuves à planifier correspondant aux cours $C_1, C_2, \ldots, C_7$ et que les paires des cours suivantes ont des étudiants communs : (C_1, C_2), (C_1, C_3), (C_1, C_4), (C_1, C_7), (C_2, C_3), (C_2, C_4), (C_2, C_5), (C_2, C_7), (C_3, C_4), (C_3, C_6), (C_3, C_7), (C_4, C_5), (C_4, C_6), (C_5, C_6), (C_5, C_7), (C_6, C_7).

Comment organiser ces épreuves de façon qu'aucun étudiant n'ait à passer deux épreuves en même temps et cela sur une durée minimale ?

Solution 3.6. *Construisons le graphe G dont les sommets sont $C_1, C_2, \ldots, C_7$. Une arête relie deux de ces sommets lorsque les deux cours correspond possèdent des étudiants communs.*

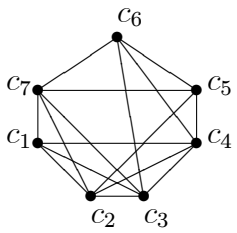


FIGURE 3.3.

Planifier les examens en un temps minimal consiste à déterminer une k-coloration de G, avec $k = c(G)$.

Première méthode : *Pour montrer que le nombre chromatique de ce graphe est égal à 4 il suffit de suivre les deux étapes suivantes.*

1. *Vérifier que ce graphe ne peut pas être coloré par trois couleurs: G possède un sous graphe complet d'ordre 4 (de sommets C_1, C_2, C_3, C_4), donc $c(G) \geq 4$.*

2. *trouver une coloration de ce graphe avec quatre couleurs:* $S_1 = \{C_1, C_6\}$, $S_2 = \{C_2\}$, $S_3 = \{C_3, C_5\}$, $S_4 = \{C_4, C_7\}$ *est une partition de sommets de* G *en sous-ensembles stables, d'où* $c(G) \leq 4$. *Finalement* $c(G) = 4$.

Les examens peuvent être répartis en 4 *périodes, de la manière suivante:*

1^{er} *période, épreuves des cours* C_1, C_6.

2^{e} *période, épreuves des cours* C_2.

3^{e} *période, épreuves des cours* C_3, C_5.

4^{e} *période, épreuves des cours* C_4, C_7.

Deuxième méthode : *Si on utilise l'algorithme de Welch et Powel, on trouvera le même résultat.*

Soit L *la liste des sommets du graphe* G *ordonnés dans l'ordre décroissant de leur degré* $L = \{C_2, C_3, C_4, C_1, C_5, C_6\}$.

On commence par la couleur rouge *attribuable au sommet* C_2 *et tous les sommets non adjacents à cette couleur qui est* C_6. *De la même manière, on attribue la couleur* verte *pour* C_3 *et* C_5. *Puis la couleur* bleue *pour* C_4 *et* C_7. *Finalement la couleur* jaune *pour le sommet* C_1.

3.1.3 Bornes sur le nombre chromatique

Proposition 3.7 (Berge [12] 1973)**.** *Si* H *est un sous-graphe de* G, *alors* $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Preuve. Si c est une coloration propre de G, alors c est clairement une coloration propre de H. □

Proposition 3.8 (Berge [12] 1973)**.** *Pour tout graphe* G, $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Preuve. On applique la proposition précédente à H où H est le sous graphe induit par une clique de G de cardinalité maximum. Donc $\chi(G) \geq \chi(H) = \omega(G)$. □

Proposition 3.9 (Berge [12] 1973)**.** *Soit* $G_1, G_2, ..., G_p$ *les composantes connexes d'un graphe* G. *Alors*

$$\chi(G) = \max\{\chi(G_i) : 1 \leq i \leq p\}.$$

Preuve. Soit G_i une composante connexe de G. D'après la Proposition 3.5, $\chi(G) \geq \max\{\chi(G_i) : 1 \leq i \leq p\}$. Pour $1 \leq i \leq p$, soit c_i une coloration propre de G_i avec $\chi(G_i)$ couleurs. Soit π une coloration de G définie par $c(v) = c_i(v)$ si $v \in G_i$. Comme il n'y a pas d'arêtes entre deux sommets appartenant à deux composantes connexes diférentes, c est une coloration propre de G. Ainsi, $\chi(G) = \max\{\chi(G_i) : 1 \leq i \leq p\}$. □

Proposition 3.10 (Berge [12] 1973)**.** *Pour tout graphe G d'order n,*

$$n/\alpha(G) \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1.$$

Preuve. Posons $k = \chi(G)$. Soit $\{V_1, V_2, ..., V_k\}$ une partition de V en k stables. Puisque chaque V_i est un stable, $|V_i| \leq \alpha(G)$, pour $1 \leq i \leq k$. D'où, $n = \sum_{i=1}^{k} |V_i| \leq k\alpha(G)$, ce qui donne la borne inférieure.

Pour montrer la borne superieure, considérons un stable maximum S. Alors les sous-ensembles de $V - S$ de cardinalité 1 avec S forment une partition de V en $n - \alpha(G) + 1$ sous-ensembles stables. □

Théorème 3.11 (Berge [12] 1973)**.** *Soit G un graphe simple de degré maximum Δ, Alors*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Preuve. Soit $\{S_1, S_2, \ldots, S_p\}$ une partition de V en stable telle que $p = \chi(G)$. Alors il existe un sommet $x_i \in S_i$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., p\}$ tel que $N(x_i) \cap S_j \neq \varnothing$ pour tout $i \neq j$, ceci implique que $d_G(x_i) \geq p - 1$. Par conséquent $\Delta(G) \geq p - 1 = \chi_k(G) - 1$. □

Théorème 3.12 (Brooks [22] 1941)**.** *Soit G un graphe connexe autre qu'une clique ou un cycle impaire et de degré maximum Δ. On a alors $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Théorème 3.13 (Hansen [60] 1979)**.** *Dans un graphe simple de n sommet et m arrête, on a*

$$\chi(G) \leq \sqrt{2m(G) + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}.$$

Preuve. Soit $\{S_1, S_2, \ldots, S_p\}$ une partition de V en stable telle que $p = \chi(G)$. Alors il existe au moins une arête entre deux stables, d'où $m(G) \geq \mathbb{C}_2^p = p((p-1)/2$, et donc $\chi(G) = p \leq \sqrt{2m(G) + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$. □

Lemme 3.14 (Cauchy-Schwartz). *Soit $n, p \geq 1$. Si $x_1, x_2, \ldots, x_p \geq 1$ sont des entiers avec $\sum_{i=1}^{p} x_i = n$, alors $\sum_{i=1}^{p} x_i^2 \geq n^2/p$.*

Théorème 3.15 (Meyers, Liu [83] 1972). *Soit G un graphe d'ordre n et de taille m, alors*

$$\chi(G) \geq \frac{n^2}{n^2 - 2m(G)}.$$

Preuve. Soit $\{S_1, S_2, \ldots, S_p\}$ une partition de V en $p = \chi(G)$ indépendent. En appliquant le lemme précédent, on obtient

$$\begin{aligned} n(n-1) &= 2m(G) + 2m(\overline{G}) \geq 2m(G) + \textstyle\sum_{i=1}^{p} 2m(\overline{G[S_i]}) \\ &\geq 2m(G) + \textstyle\sum_{i=1}^{p} |S_i| \left(|S_i| - 1\right) = 2m + \sum_{i=1}^{p} |S_i|^2 - \sum_{i=1}^{p} |S_i| \end{aligned} \tag{3.1}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, $n(n-1) \geq 2m(G) + \left(\sum_{i=1}^{p} |S_i|\right)^2 / p - \sum_{i=1}^{p} |S_i| = 2m(G) + n^2/p - n$. Par conséquent, $\chi(G) \geq \frac{n^2}{n^2 - 2m(G)}$. □

Théorème 3.16 (Nordhaus, Gaddum [87] 1996). *Pour tout graphe simple G d'ordre n,*

$$n \leq \chi(G)\,\chi\left(\overline{G}\right) \leq \left((n+1)/2\right)^2 \quad et \quad 2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi\left(\overline{G}\right) \leq n+1.$$

Preuve. Soit $\{S_1, S_2, \ldots, S_{\chi(G)}\}$ une partition de V en $\chi(G)$ ensembles independants. Alors chaque S_i est une clique de $\overline{G}$, et donc $|S_i| \leq \omega(\overline{G}) \leq \chi(\overline{G})$, ceci donne $n = \sum_{i=1}^{\chi(G)} |S_i| \leq \chi(\overline{G})\chi(G)$.

$$4n \leq 4\chi(G)\chi(\overline{G}) \leq \left(\chi(G) - \chi(\overline{G})\right)^2 + 4\chi(G)\chi(\overline{G}) = \left(\chi(G) + \chi(\overline{G})\right)^2.$$

D'autre part, $4n \leq 4\chi(G)\chi(\overline{G}) \leq \left(\chi(G) - \chi(\overline{G})\right)^2 + 4\chi(G)\chi(\overline{G}) = \left(\chi(G) + \chi(\overline{G})\right)^2$. Ainsi $\chi(G) + \chi\left(\overline{G}\right) \geq 2\sqrt{n}$.

Pour montrer que $\chi(G) + \chi\left(\overline{G}\right) \leq n+1$, on utilise l'induction sur n. Pour $n = 1$ ou 2, le résultat est trivial. Supposons alors que le résultat est vrai pour tout graphe ayant moins de n sommets, et considérons le graphe H obtenu à partir de G en supprimant un sommet v. Il est clair que $\chi(G) \leq \chi(H) + 1$ et $\chi\left(\overline{G}\right) \leq \chi\left(\overline{H}\right) + 1$.

Si $\chi(G) = \chi(H) + 1$ et $\chi\left(\overline{G}\right) \leq \chi\left(\overline{H}\right) + 1$, alors $d_G(x) \geq \chi(H)$ et $d_{\overline{G}}(x) \geq \chi\left(\overline{H}\right)$. Ceci implique que $\chi(H) + \chi\left(\overline{H}\right) \leq n-1$, et par conséquent $\chi(G) + \chi\left(\overline{G}\right) = \chi(H) + \chi\left(\overline{H}\right) + 2 \leq n+1$.

Sinon $\chi(G)+\chi\left(\overline{G}\right) \leq \chi(H)+\chi\left(\overline{H}\right)+1$, et par l'hypothèse d'induction, on trouve $\chi(G)+\chi\left(\overline{G}\right) \leq n+1$.

Finalement, en appliquant l'inégalité$\sqrt{\chi(G)\chi\left(\overline{G}\right)} \leq \chi(G)+\chi\left(\overline{G}\right)/2$, on trouve $\chi(G)\chi\left(\overline{G}\right) \leq \left(\chi(G)+\chi\left(\overline{G}\right)\right)^2/4 \leq (n+1)^2/4$. □

3.2 Graphes parfaits

Les graphes parfaits constituent une des classes les plus importantes en théorie des graphe, introduites par Berge au début des années soixante.

L'intérêt de Berge pour cette classe de graphes est issu des travaux de Shannon [98] en 1956, en théorie de l'information sur les codages optimaux et la capacité d'un canal de communication.

Pour un graphe connexe $G=(V,E)$, on note par $\omega(G)$et $\theta(G)$, respectivement, la cardinalité d'une clique maximum de G et est la cardinalité d'une partition minimale de V en cliques.

Proposition 3.17. *Pour tout graphe G, $\alpha(G) \leq \theta(G)$ et $\omega(G) \leq \chi(G)$.*

Définition 3.18. *Un graphe G est dit χ-parfait, si pour tous sous-graphes H induit de G on a : $\omega(H)=\chi(H)$.*

Définition 3.19. *Un graphe G est dit α-parfait, si pour tous sous-graphes H induit de G on a : $\alpha(H)=\theta(H)$.*

On nomme un trou un cycle sans corde de longueur au moins 4, et un anti-trou le complémentaire d'un trou.

Définition 3.20. *Un graphe G est dit graphe de Berge s'il ne contient ni de trou impairs, ni d'anti-trou impair.*

En 1960, Claude Berge [10] a énoncé les deux conjectures connues respectivement,

Conjecture 3.21 (conjecture faible des graphes parfaits)**.** *Un graphe est α-parfait si est seulement s'il est χ-parfait.*

Conjecture 3.22 (conjecture forte des graphes parfaits)**.** *Un graphe G est parfait si est seulement si G est de Berge.*

La validité de la conjecture forte des graphes parfaits implique celle de la conjecture faible. Cette dernière, a été démontrée par Lovasz en 1972, depuis, elle est connue comme étant le théorème des graphes parfaits suivant :

Théorème 3.23 (Lovasz [80] 1972)**.** *Pour un graphe G les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *Pour tout sous graphe induit H de G : $\chi(H) = \omega(H)$.*

ii) *Pour tout sous graphe induit H de G : $\theta(H) = \alpha(H)$.*

iii) *Pour tout sous graphe induit H de G : $\alpha(H)\omega(H) \geq |V(H)|$.*

Et depuis, la conjecture forte est appelée conjecture des graphes parfaits ou conjecture de Berge.

Corollaire 3.24. *Un graphe est parfait si et seulement si son complémentaire est parfait.*

Gröstchel, Lovàsz et Schrijver, [57] ont développé des algorithmes polynomiaux pour résoudre ce problème, en utilisant une variante des ellipsoïdes.

Théorème 3.25 (Gröstchel, Lovàsz, Schrijver, [57] 1988)**.** *Si G est un graphe parfait, alors on peut colorer G en $\omega(G)$ couleurs en temps polynomial.*

On sait que tout graphe parfait est un graphe de berge.

Le problème qui restait posé : Existe-t-il des graphes de Berge qui ne sont parfaits (*Monstre*)?

En 2002, Chudnovsky, Robertson, Seymourt Thomas [29] ont montré qu'il n'y avait pas de Monstres et que la conjecture forte des graphes parfaits est vraie.

En effet, ils montrent que tout graphe de Berge appartient à une de quatre classes suivante :

• Graphes bipartis,

• Graphes complémentaires des graphes bipartis,

• Graphes adjoint des graphes bipartis,

• Graphes complémentaires de graphes adjoint des graphes bipartis, ou

• peut être construit à partir de trois ou quatre opérations (skew partition, 2-joint ou 2-joint dans le complémentaire).

3.3 Coloration des arêtes

Définition 3.26. *On appelle coloration des arêtes d'un graphe toute attribution d'une couleur à chaque arête (est une fonction* $c : E \to \{1, 2, 3, .., k\}$ $(k \in N)$*), telle que pour toute paire d'arêtes* e *et* f *adjacentes* $c(e) \neq c(f)$*.*

G est k-arête-colorable si on peut colorer ses arêtes avec k couleurs distinctes, sans que deux arêtes adjacentes aient la même couleur.

*Le plus petit k tel que G soit k-arête-colorable est appelé l'*indice chromatique *de G, noté* $\chi'(G)$*.*

Remarque 3.27. *Pour tout graphe G.*

1) $\chi'(G) = 1$ *si et seulement si* $G = \frac{n}{2}K_2$*.*

2) $\chi'(G) = m(G)$ *si et seulement si* $G = K_{1,n}$ *ou* K_3*.*

3) $\chi'(G) = \chi(L(G))$*, où est* $L(G)$ *le graphe adjoint (line graph) de G.*

4) $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$*.*

Exemple 3.28. *Soit* C_n *est un cycle d'ordre n et* K_n *est une clique d'ordre n. Alors*

$$\chi'(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 3 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ n \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

König [70] a donné le resultat suivant pour les graphes bipartis.

Théorème 3.29 (König [70] 1916)**.** *Si G est un graphe biparti, alors*

$$\chi'(G) = \Delta(G).$$

Cette relation n'est pas vraie lorsque le graphe n'est pas biparti. Par exemple, pour un cycle impaire C_n, $\Delta(C_n) = 2$, mais $\chi'(C_n) = 3$.

Vizing [104] a établi une borne superieure pour $\chi'(G)$ en fonction $\Delta(G)$ pour tout graphe G.

Théorème 3.30 (Vizing [104] 1964)**.** *Pour tout graphe G, $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Il est cependant difficile de déterminer si $\chi'(G)$ est égal à $\Delta(G)$ ou à $\Delta(G) + 1$ (le problème et NP-complet).

3.4 Coloration totale

Définition 3.31. *Une coloration totale est une coloration des arêtes et des sommets telle que, deux sommets adjacents ont des couleurs différentes, deux arêtes adjacentes ont des couleurs différentes, et une arête a une couleur différente de celles de ses extremités.*

Le nombre chromatique total, noté $\chi^T(G)$, est nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorer totalement un graphe.

Exemple 3.32. *Coloration totale de C_5 : $\chi^T(C_5) = 4$*

Conjecture 3.33. *Pour tout graphe G, $\chi^T(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

CHAPITRE 4

Notion de noyaux dans les digraphes

Parmi les concepts étudiés en théorie des graphes, celui du noyau qui a été introduit pour la première fois, en 1944 par Neumann et Morgenstern, comme une solution d'un jeu coopératif à n joueurs, pour le digraphe dont les sommets représentent les résultats possibles des décisions et les arcs les préférences efficaces. En effet, ils ont démontré qu'un digraphe (directed graph) sans circuits admet un noyau.

Le fait qu'un digraphe ne possède pas toujours un noyau a amené beaucoup d'auteurs à s'intéresser à l'existence de noyaux dans un digraphe donné. Plusieurs travaux ont été réalisés notamment par Berge, Blidia, Duchet, Jacob, Meyniel, Mafray, Neumann et Sànchez.

Les problèmes importants sur les noyaux sont de type, structure des digraphes qui admettent un noyau, opérations sur les graphes orientés noyaux-parfaits, algorithmes efficaces pour trouver un noyau et détermination d'orientation dans un graphe non orienté au départ pour qu'il admette un noyau.

4.1 Définitions et notations utilisées dans les digraphes

4.1.1 Digraphe

Un *digraphe* $D = (V, A)$ est la donnée de deux ensembles (finis) V et A non vides, V (noté aussi par V) est dit ensemble des *sommets* et A (noté aussi par A) est dit ensemble des couples ordonnés appelés des *arcs* (ou arêtes orientées). Le cardinal de V est appelé l'*ordre* de D, noté n. Le cardinal de A est appelé la *taille* de D, noté m. Si on écrit $\overrightarrow{xy} \in A$(ou $(x, y) \in A(D)$), ceci signifie que l'arc est orienté de x vers y. Pour un arc $a = \overrightarrow{xy}$, le sommet x est son son *extrémité initiale* et le sommet y son *extrémité terminale*.

Soit $D = (V, A)$ un digraphe et (x, y) un arc de D. (x, y) est dit *symétrique* si l'arc

$(x, y) \in A$, sinon l'arc (x, y) est dit *antisymétrique* (ou asymétrique). Si $y = x$ alors l'arc (x, x) est appelé une *boucle*.

Dans un digraphe D, deux arcs a_1 et a_2 sont dit *adjacents*, s'ils ont au moins une extrémité en commun, et deux sommets x e y sont dit adjacents, s'il existe au moins un arc entre eux.

Un digraphe $D = (V, A)$ est dit *symétrique* si tous ses arcs sont symétriques, sinon il est dit *antisymétrique* (ou asymétrique). Aussi, D est dit *transitif* si $(x, y) \in A$ et $(y, z) \in A \Longrightarrow (x, z) \in A$ pour tout x, y, z dans V.

Un *digraphe simple* est un digraphe dont tout couple ordonné de sommets est relié par au plus un arc (sans arcs multiples) et tout arc de D a ses extrémités distinctes (sans boucle). Dans ce document, le digraphe $D = (V, A)$ considéré est simple et fini, c'est-à- dire ne contient pas de boucles ni d'arcs multiples (mais les arcs symétriques sont autorisés). Au vu de cette définition, il est naturel de représenter graphiquement un digraphe où les points représentent les sommets et les flèches entre deux points représentent les arcs.

Exemple 4.1. *Le digraphe $D = (V, A)$ représenté par la figure 4.1. L'ensemble de sommets de D est $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ l'ordre de D est $n = |V| = 9$. Le cardinal de A est $m = |A| = 18$ (chaque arc symétrique représente deux arcs). Le digraphe D est ni symétrique ni transitif, en effet, on a par exemple l'arc $(b, a) \in A$ est asymétrique et de plus les deux arcs $(f, i) \in A$, $(i, h) \in A$, mais l'arc $(i, f) \notin A$.*

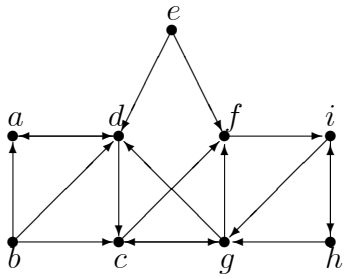


FIGURE 4.1. Un digraphe D sans boucles ni d'arcs multiples.

4.1.2 L'ensemble des prédécesseurs, successeurs et voisins d'un sommet

Soi $D = (V, A)$ un digraphe et $a = (x, y)$ un arc de D. Alors x est appelé un *prédécesseur* de y et y un *successeur* du sommet x.

- On appelle *voisinage intérieur* du sommet x l'ensemble $\Gamma^-(x) = \{y : (y,x) \in A\}$ des prédécesseurs du sommet x. De même $\Gamma^-[x] = \Gamma^-(x) \cup \{x\}$, et si $S \subseteq V$ alors $\Gamma^-(S) = \bigcup_{x \in S} \Gamma^-(x)$ et $\Gamma^-[S] = \bigcup_{x \in S} \Gamma^-[x]$.

- On appelle *voisinage extérieur* du sommet x l'ensemble $\Gamma^+(x) = \{y : (x,y) \in A\}$ des successeurs du sommet x. De même $\Gamma^+[x] = \Gamma^+(x) \cup \{x\}$, et si $S \subseteq V(D)$ alors $\Gamma^+(S) = \bigcup_{x \in S} \Gamma^+(s)$ et $\Gamma^+[S] = \bigcup_{x \in S} \Gamma^+[x]$.

- On désigne par $\Gamma(x) = \Gamma_D^+(x) \cup \Gamma_D^-(x)$ l'ensemble des voisins de x, on a $\Gamma[x] = \Gamma(x) \cup \{x\}$.

Exemple 4.2. *Si on prend par exemple l'ensemble $S = \{d, f\}$ dans le digraphe précédent (Figure 4.1.), alors $\Gamma^-(S) = \{a, b, c, e, g\}$ et $\Gamma^+(S) = \{a, c, i\}$.*

Considérons le digraphe correspondant à la figure 4.1. On a par exemple les ensembles des prédécesseurs et successeurs de g sont $\Gamma^-(g) = \{c, h, i\}$ et $\Gamma^+(g) = \{c, d, f\}$.

4.1.3 Degré entrant, degré sortant et degré d'un sommet

Soit $D = (V, A)$ un digraphe et x un sommet de D.

- Le *degré entrant* (ou demi-degré intérieur) du sommet x, noté par $d^-(x)$ est le nombre d'arcs entrant à x, $d^-(x) = |\Gamma^-(x)|$.

-Le *degré sortant* (ou demi-degré extérieur) du sommet x, noté par $d^+(x)$ est le nombre d'arcs sortant de x, $d^+(x) = |\Gamma^+(x)|$.

- Le degré entrant maximal de D, noté par $\Delta^-(D) = \max\{d^-(x), x \in V)\}$, est le *maximum de degrés entrant* dans D.

- Le degré entrant minimal de D, noté par $\delta^-(D) = \min\{d^-(x), x \in V)\}$, est le *minimum de degrés* entrant dans D.

- Le degré sortant maximal de D, noté par $\Delta^+(D) = \max\{d^+(x), x \in V\}$, est le *maximum de degrés sortant* dans D.

- Le degré sortant minimal de D, noté par $\delta^+(D) = \min\{d^+(x), x \in V\}$, est *le minimum de degrés sortant* dans D.

$$d(x) = |N(x)| = d^+(x) + d^-(x).$$

Ainsi

$$\sum_{x\in V(D)} d_D^+(x) = \sum_{x\in V(D)} d_D^-(x) \text{ et } \sum d_D(x) = 2m$$

Dans le graphe de la figure figure 4.1, on a : $d^-(c) = |\Gamma^-(c)| = 3$ et $d^+(c) = |\Gamma^+(c)| = 2$, et $\delta^-(D) = 0$, $\delta^+(D) = 1$, $\Delta^-(D) = 4$, $\Delta^+(D) = 4$.

- Comme dans les graphes non orientés, un sommet de degré 0 est dit sommet *isolé*, et un sommet de degré 1 est dit sommet *pendant* (ou une *feuille*) et le sommet adjacent au sommet pendant est dit sommet *support*.

- Pour un entier $k > 0$, si tout sommet x de D, $d^+(x) = k$ (resp. $d^-(x) = k$) on dit alors que D est un digraphe k-out-régulier (resp. k-in-régulier).

4.1.4 Graphe non orienté associé à un digraphe (underline graph)

Le graphe non orienté G associé à un digraphe D est le graphe obtenu à partir de D en supprimant l'orientation des arcs, et une arête reliant deux sommets x et y existe dans G si les deux sommets x et y sont adjacents dans D.

Exemple 4.3. *Dans la figure 4.2, on a le graphe orienté D et son graphe associé G.*

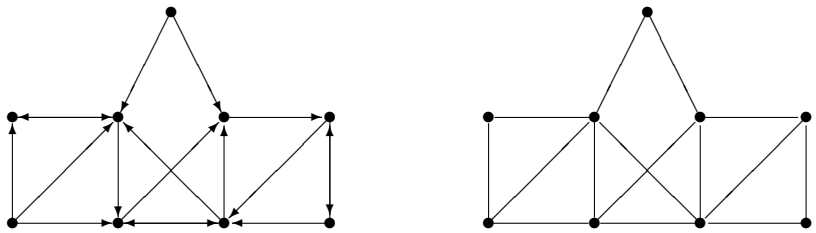


FIGURE 4.2. Un digraphe D et son graphe associé G.

4.1.5 Graphe orienté

Un *graphe orienté* est un digraphe sans arcs symétriques, c'est-à-dire, pour chaque paire x et y des sommets distincts de D, au plus un de (x, y) et (y, x) est un arc de D.

Un *tournoi* d'ordre n noté par T_n est un graphe orienté dont son graphe associe est un graphe complet, c'est-à-dire pour toute paire de sommets, disant, x et y de V ou bien $(x, y) \in A$ ou bien $(y, x) \in A$ mais pas les deux (Voir Figure 4.3).

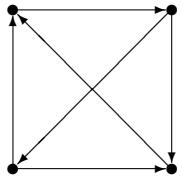


FIGURE 4.3. Un tournoi d'ordre 4.

Un *arbre orienté* (Directed tree) est un digraphe dont son graphe associe est un arbre $T = (V, E)$. Un exemple d'un arbre orienté d'ordre 10 est donné par la Figure 4.4.

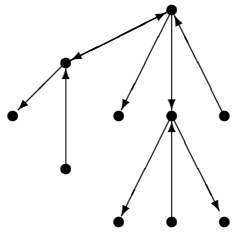


FIGURE 4.4. Un arbre orienté $T = (V, A)$ d'ordre 10.

Une *chaîne orientée* d'ordre n noté par P_n est une chaîne P_n dans son graphe associe, où les arêtes de $\overrightarrow{P_n}$ sont orientées arbitrairement. Une chaîne orientée P_8 est représentée par la Figure 4.5.

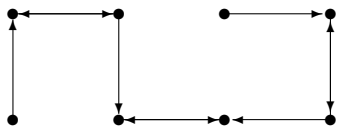


FIGURE 4.5. Une chaîne orientée P_8.

Une chaîne orientée sans arcs symétriques P_5 est représentée par la Figure 4.6.

Un *chemin* d'ordre n, noté par $\overrightarrow{P_n}$ est une chaîne orientée P_n dont ses arcs sont tous orientés dans le même sens, i.e., sont tous orientés antisymétriquement. Un chemin $\overrightarrow{P_6}$ est représenté par la Figure 4.7.

Un *cycle orienté* d'ordre n noté par C_n est un graphe dont son graphe associe est un cycle C_n, où les arêtes de C_n sont orientées arbitrairement (ou peut définir aussi un cycle comme étant une chaîne orientée fermée).

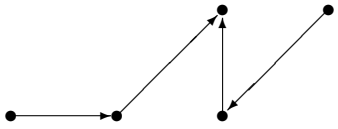


FIGURE 4.6. Une chaîne orientée sans arcs symétriques P_5.

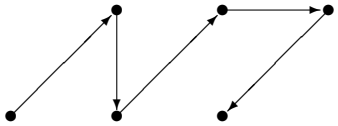


FIGURE 4.7. Un chemin $\overrightarrow{P_6}$.

Un *circuit* d'ordre n noté par $\overrightarrow{C_n}$ c'est un chemin d'ordre n fermé. la Figure 4.8 repésente un cycle orienté d'ordre 3 et le circuit $\overrightarrow{C_3}$.



FIGURE 4.8. Un cycle orienté d'ordre 3 et le circuit $\overrightarrow{C_3}$.

Considérons un digraphe $D = (V, A)$ et deux sommets x et y de ce graphe. On appelle *distance* entre x et y, notée $d(x, y)$, la longueur d'un plus court chemin de x et y. Si aucun chemin n'existe, on prendra $d(x, y) = +\infty$.

4.1.6 Sous-digraphe, digraphe partiel

Soit $D = (V, A)$ un digraphe. Le *sous-digraphe* de D engendré par $U \subset V$, noté par $D[A]$ est le digraphe qui a pour ensemble de sommets l'ensemble U et dont les arcs sont ceux de U ayant leurs deux extrémités dans A. Le *digraphe partiel* de D défini par $W \subset U$ est le digraphe (V, W). Le sous-digraphe partiel de D est un sous-digraphe du digraphe partiel de D.

4.1.7 Graphe orienté fortement connexe

Un digraphe $D = (V, A)$ est *fortement connexe* si $\forall x, y \in V, d(x, y) < +\infty$ et $d(y, x) < +\infty$ c.-à-d. $\forall x, y \in V$, ils existent un chemin de x à y et un chemin de y à x.

La relation $x\Re y \Longleftrightarrow$"$x = y$ ou $x \neq y$ et il existe un chemin de x à y et un chemin de y à x" est une relation d'équivalence. les classes d'équivalence de cette relation sont les composantes fortement connexes de D, qui forment une partition de V en sous-digraphes fortement connexes.

On appelle graphe réduit D_r le quotient du digraphe D par la relation de forte connexité $D_r = D/\Re$, les sommets de D_r sont donc les composantes fortement connexes et deux composantes fortement connexes C_i et C_j sont reliées par un arc de C_i vers C_j si et seulement s'il existe au moins un arc d'extrémité initiale d'un sommet de C_i et d'extrémité terminale d'un sommet de C_j. Le graphe D_r est sans circuit.

Une composante fortement connexe C est dite terminale si $\Gamma^+(C) \subset C$.

4.1.8 Mise en ordre d'un graphe sans circuit

Soit un graphe orienté $D = (V, U)$ sans circuit. Ordonner un graphe orienté revient à disposer dans un certain ordre ses sommets, tel que les arcs soient dans le même sens. On définit pour cela les différents niveaux des sommets du graphe. Alors la mise en ordre d'un graphe orienté sans circuit est la détermination des niveaux $N_0, N_1, ..., N_k$ qui forment une partition de V.

On construit les sous-ensembles $N_0, N_1, ..., N_k$ par le procédé suivant:

$N_0 = \{x \in V : \Gamma^-(x) = \varnothing\}$,

$N_1 = \{x \in V - N_0 : \Gamma^-(x) \subset N_0\}$,

.

.

.

$N_k = \left\{x \in V - \bigcup_{i=1}^{k-1} N_i : \Gamma^-(x) \subset \bigcup_{i=1}^{k-1} N_i\right\}$.

Ainsi de suite jusqu'à épuisement de tous les sommets, i.e $N_k \neq \varnothing$ et $N_{k+1} = \varnothing$.

(x_i, x_j) est un arc avec $x_i \in N_i$ et $x_j \in N_j$ si et seulement si $i < j$.

4.1.9 Ensemble stable, ensemble absorbant

Soit $D = (V, U)$ un 1-graphe orienté sans boucles.

Définition 4.4. *Un stable dans D est un sous-ensemble de sommets $S \subset V$ tel que $\Gamma^-(S) \cap S = \varnothing$, autrement dit; les sommets de S sont deux à deux non adjacents.*

Définition 4.5. *Un absorbant dans D est un sous-ensemble de sommets $A \subset V$ tel que $\Gamma^-(A) \cup A = V$, autrement dit; tout sommet x qui n'est pas dans A, possède au moins un successeur dans A.*

4.2 Noyaux et Graphes noyaux parfaits

4.2.1 Définitions

A partir du concept de "Solution" d'un jeu à n joueurs, dû à Neumann et Morgenstern, Berge a introduit la notion de noyau et l'a reliée à la fonction de Grundy.

Définition 4.6. *Un noyau dans D est un sous-ensemble de sommets $N \subset V$ qui est un stable et un absorbant dans D.*

Définition 4.7. *D est noyau-parfait si seulement si tout sous-graphe orienté de D (y compris D) possède un noyau.*

Remarque 4.8. *Dans un graphe orienté, le noyau n'existe pas toujours et s'il existe, alors il n'est pas necessairement unique.*

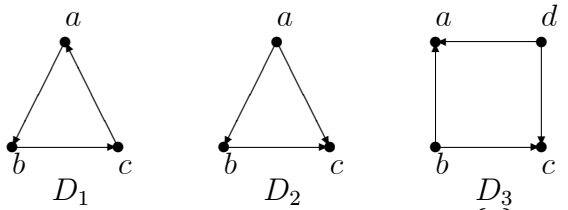


FIGURE 4.9. D_1 sans noyau, D_2 avec unique noyau $\{c\}$, D_3 avec deux noyaux $\{a, c\}$, $\{b, d\}$

4.2.2 Applications

L'interêt du concept de noyau ne réside pas seulement dans son application à la théorie des jeux, mais aussi à la logique et même aux problèmes de décision, afin d'illustrer ces applications, nous citons quelques exemples.

Théorie des jeux (Berge [12] 1973) **:** Supposons que n joueurs, que l'on désignera par $(1), (2), ..., (n)$ peuvent se concerter pour choisir une situation x dans un ensemble X; si le joueur (i) préfère la situation a à la situation b, on écrira $a \succeq^i b$; et $\succeq^i$ est un préordre total. Les préférences individuelles $\succeq^i$ peuvent ne pas être compatibles, et par conséquent il est nécessaire d'introduire la notion du préférence efficace $\succ$. La situation a est dite préférée efficacement à b, s'il existe un ensemble de joueurs qui préfèrent a à b et qui sont capables s'ils le veulent de faire prévaloir leur point de vue, si en outre $b \succ c$ il existera un ensemble de joueurs qui fera prévaloir b à c, mais comme ce n'est pas nécessairement le même, on peut ne pas avoir $a \succ c$, et la relation n'est pas nécessairement transitive.

Soit le digraphe $D = (V, U)$ où $\Gamma^+(x)$ désigne l'ensemble des situations préférées efficacement à x. Soit N un noyau du digraphe D (s'il existe). Von Neumann et Morgenstern ont proposé de limiter le jeu aux éléments de N. Comme N est stable, alors toute situation de N ne peut pas être préférée efficacement à une autre situation de N et comme N est absorbant, alors à toute situation $x \notin N$, on peut préférer efficacement une situation de N ce qui écarterait immédiatement la situation x.

Base d'axiome d'une théorie (Berge [12] 1973) : Considérons une théorie c'est-à-dire un ensemble de propositions $p_1, p_2, p_3, ...,$ que l'on peut représenter par des points. Traçons l'arc (p_i, p_j) si l'on peut déduire logiquement la proposition p_i de la proposition p_j (ou : $p_j \Longrightarrow p_i$), on obtient un graphe orienté transitif $D = (V, U)$, car : $(p_i, p_j) \in U$ et $(p_j, p_k) \in U \Longrightarrow (p_i, p_k) \in U$.

On se propose de déterminer une base de proposition dite "axiomes" parmi toutes les propositions, avec les deux propriétés suivantes:

(1) toute proposition de la théorie peut se déduire d'un axiome de la base;

(2) aucun axiome de la base ne peut se déduire d'un autre axiome.

Le problème consiste donc à construire un noyau du digraphe D.

Problème de décisions (Exemple concret) **(**Droeske et al. [43] 1987**)** :

Un gouvernement ayant décidé de répartir trois milliards de Francs en vue de diminuer la mortalité sur les routes, on propose cinq initiatives: augmentation du nombre de gendarmes, construction d'autoroutes, mise en place des signaux lumineux à tous les carrefours, récompenses aux meilleurs conducteurs et la gratuité des transports publics. Il charge un groupe de recueillir les préfèrences du public et ce groupe parvient à établir le digraphe suivant où les cinq sommets représentent les cinq initiatives dans l'ordre repris ci-dessus où un arc (x_i, x_j) existe s'il est certain que la population préfére l'initiative x_j à l'initiative x_i (Voir Figure 4.11).

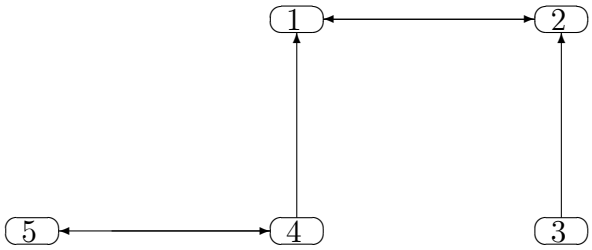


FIGURE 4.10. La représentation graphique du problème

L'ensemble qui contient les sommets $2, 5$, constitue le noyau dans le digraphe, c'est l'ensemble qui ne contient pas les mauvaises actions, ce qui justifie l'omission des initiatives $1, 3, 4$.

Le décideur peut consacrer un budget de $1,5$ milliards de Francs à chacune des initiatives 2 et 5 (si bien sûr, il n'arrive pas à trancher entre les deux initiatives).

4.2.3 Propriétés du noyau

Proposition 4.9 (Berge [12] 1973)**.** *Si N est un noyau d'un digraphe D, alors N est un stable maximal et un absorbant minimal (par rapport à l'inclusion).*

Preuve. Soit N un noyau du digraphe $D = (V, U)$.

Supposons que N n'est pas un stable maximal c'est-à-dire $\exists x \in V - N$ tel que x n'est pas relié à aucun sommet de N, donc il n'est pas absorbé par N, contradiction avec la définition de N.

Supposons que N n'est pas un absorbant minimal c'est-à-dire $\exists x \in N$ tel que $N - \{x\}$ est un absorbant, donc x est absorbé par un sommet de $N - \{x\}$ d'où $N \cap \Gamma^-(N) \neq \varnothing$. Contradition avec la stabilité de N. □

A partir de la constatation qu'un noyau dans un digraphe n'existe pas toujours, une question se pose d'une manière naturelle: "Quelles sont les propriétés structurelles d'un digraphe qui impliquent l'existence d'un noyau ?".

Le théorème suivant, dû à Berge, donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous ensemble de sommets dans un digraphe soit un noyau.

Théorème 4.10 (Berge [12] 1973)**.** *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble $N \subset V(D)$ soit un noyau d'un digraphe $D = (V, U)$ est que sa fonction caractéristique $\varphi_N(x)$ vériffie: $\forall x \in V, \varphi_N(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y)$ avec*

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in N \\ 0 & si \quad x \notin N \end{cases}$$

Si $\Gamma^+(x) = \varnothing$, on posera par convention $\max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y) = 0$.

Théorème 4.11 (Berge [12] 1973)**.** *Si $D = (V, U)$ est un digraphe transitif, tout ensemble absorbant minimal est de cardinalité $\beta(D)$ (i.e. nombre minimum de sommets de D qui absorbent tous les sommets), en outre, un ensemble $N \subset V$ est un noyau si et seulement si c'est un ensemble absorbant minimal.*

Théorème 4.12 (Berge [12] 1973)**.** *Si $D = (V, U)$ est un digraphe symétrique, alors D admet un noyau, en outre, $N \subset V$ est un noyau si et seulement si c'est un ensemble stable maximal.*

Théorème 4.13 (Neumann, Morgenstern **[86]** 1944)**.** *Un digraphe sans circuits admet un noyau, en outre, ce noyau est unique.*

4.2.4 Quelques sous classes des digraphes noyau-parfaits

Une propriété P d'un digraphe D est dite héréditaire si tous les sous-digraphes d'un digraphe ayant la propriété P ont cette propriété. Donc pour montrer qu'un digraphe D

possédant une propriété héréditaire P, est noyau parfait, il suffit de montrer que D admet un noyau.

Théorème 4.14 (Richardson [97] 1953)**.** *Un digraphe sans circuits impairs est noyau-parfait; (le noyau n'est pas nécessairement unique).*

Théorème 4.15 (Duchet [44] 1979)**.** *Un digraphe tel que tout circuit impair possède deux arcs symétriques est noyau-parfait.*

Théorème 4.16 (Duchet [44] 1979)**.** *Un digraphe tel que tout circuit a au moins un arc symétrique est noyau-parfait.*

Théorème 4.17 (Duchet, Meyniel [46] 1983)**.** *Un digraphe tel que tout circuit impair* $\{v_1, v_2, ..., v_{2k+1}\}$ *a deux cordes de la forme* (v_i, v_{i+2}) *et* (v_{i+1}, v_{i+3}) *est noyau-parfait.*

Théorème 4.18 (Sànchez, Neumann [100] 1984)**.** *Un digraphe tel que tout circuit impair possède deux pôles consécutifs est noyau-parfait.*

Définition 4.19. *Un digraphe est de parité si pour tout couple de sommets distincts, les chemins minimaux reliant ce couple de sommets ont la même parité.*

Théorème 4.20 (Blidia [15] 1984)**.** *Un digraphe de parité est noyau-parfait.*

Dans [45], Duchet a posé la conjecture suivante : " Soit D un digraphe tel que tout circuit impair possède deux cordes courtes, alors D est noyau parfait". Puis il a affirmé cette conjecture dans le cas où tout 3-circuit est symétrique, en donnant le théorème suivant:

Théorème 4.21 (Duchet, [45] 1987)**.** *Un digraphe tel que tout* 3*-circuit est symétrique et tout circuit impair possède deux cordes courtes est noyau-parfait.*

4.2.5 Noyaux et fonctions de Grundy

Le concept de fonction de Grundy a été introduit par Grundy, en 1939, pour des digraphes sans circuits, puis étendu en 1956, par Berge et Schützenberger aux digraphes quelconques.

Définition 4.22. *Considérons un digraphe orienté, sans boucles $D = (V, U)$. Une fonction $g : V \longrightarrow \mathbb{N}$ est dite une fonction de Grundy, si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

(i) $g(x) = k > 0$, entraîne que, pour tout $j < k$ il existe un $y \in \Gamma^+(x)$ avec $g(y) = j$.

(ii) $g(x) = k$, entraîne que tout $y \in \Gamma^+(x)$ vérifie $g(y) \neq k$.

Remarque 4.23. *Une fonction de Grundy n'existe pas toujours, et un digraphe peut admettre plusieurs fonctions de Grundy.*

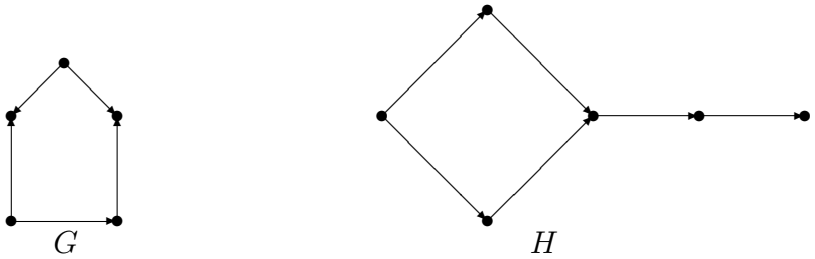


FIGURE 4.11. G n'admet pas de fonction de Grundy, mais H a deux fonctions de Grundy

Proposition 4.24 (Berge [12] 1973)**.** *Si D admet une fonction de Grundy g, alors D a un noyau.*

Preuve. $S = \{x \in V : g(x) = 0\}$ est un noyau de D, puisque l'on a simultanément:

(1) $x \in S \Longrightarrow g(x) = 0 \Longrightarrow \min_{y \in \Gamma^+(x)} g(y) > 0 \Longrightarrow \Gamma^+(x) \cap S = \varnothing$.

(2) $x \notin S \Longrightarrow g(x) > 0 \Longrightarrow \min_{y \in \Gamma^+(x)} g(y) = 0 \Longrightarrow \Gamma^+(x) \cap S \neq \varnothing$. □

Mais la réciproque n'est pas vraie, on peut vérifier que le digraphe de la Figure 4.15. admet $\{d\}$ comme noyau, mais il n'admet pas de fonction de Grundy.

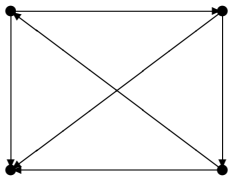


FIGURE 4.12. Un digraphe possédant un noyau mais n'admettant pas de fonction de Grundy

Théorème 4.25 (Berge [12] 1973)**.** *Si D est un digraphe noyau-parfait alors D admet une fonction de Grundy.*

Corollaire 4.26. *Un digraphe symétrique admet une fonction de Grundy.*

Un digraphe transitif admet une fonction de Grundy.

Un digraphe sans circuits de longueur impaire admet une fonction de Grundy.

4.2.6 Méthodes de démonstration d'existence du noyau

Pour montrer qu'un digraphe est noyau-parfait on peut utiliser trois moyens:

La première méthode : Elle consiste en se donnant des conditions d'existence d'arcs symétriques sur les circuits, à se ramener aux théorèmes connus de Von Neumann (tout digraphe sans circuits est noyau-parfait) et de Richardson (tout digraphe sans circuits impairs est noyau-parfait), en réorientant une partie de l'ensemble des arcs du digraphe.

Une réorientation D' d'un digraphe D est une orientation induite du digraphe D dont certains arcs symétriques deviennent des arcs antisymétriques. Si le digraphe D' admet un noyau, alors ce dernier est un noyau du digraphe D.

Cette méthode a été élaborée par Duchet en montrant le Théorème 4.12.

La deuxième méthode : Cette méthode permet, lorsque le digraphe D satisfait à certaines conditions, en supposant que tout sous-digraphe est noyau-parfait de construire un noyau du digraphe D au moyen d'une certaine procédure.

Des méthodes constructives différentes ont été utilisées par plusieurs auteurs Duchet, Meyniel, Jacob et Blidia.

La troisième méthode : L'idée de cette méthode est de se servir de compositions nouvelles de digraphes noyaux-parfaits. Elle permet de construire un digraphe noyau-parfait à partir d'autres digraphes noyaux-parfaits. C'est ainsi que Jacob [67] et Meyniel [84] ont montré que le joint de deux digraphes noyaux-parfait est noyau-parfait.

Définition 4.27. *Le joint de deux digraphe $D_1 = (V_1, U_1)$ et $D_2 = (V_2, U_2)$, noté $D_1 + D_2$, est le digraphe $D = (V, U)$ dont l'ensemble des sommet est $V = V_1 \cup V_2$ et dont la restriction à V_1 ou V_2 est identique à D_1 ou D_2 respectivement avec les conditions supplémentaires:*

(i) Si $x \in V_1$ et $y \in V_2$, alors (x, y) ou $(y, x) \in U$.

(ii) Tout circuit d'ordre 3 empruntant des sommets de V_1 et V_2 admet deux cordes.

4.2.7 Etude algorithmique de la recherche de noyau dans certaines classes de digraphes noyau-parfaits

Le problème de recherche d'un noyau dans un digraphe est en général est difficile. Fraenkel [52] a montré que le problème d'existance de noyau dans un graphe arbitraire est NP-complet. Aussi il a montré qu'il existe un algorithme polynomial pour ce problème dans certaines classes de digraphes.

Ainsi, des algorithmes polynomiaux ont été proposés pour résoudre ce problème dans certaines classes de digraphes noyau-parfaits.

En effet, en utilisant les algorithmes polynomiaux fournis par Zémir dans [111], on peut déterminer un noyau dans un digraphe $D = (V, U)$ s'il est sans circuit en $O(|V|^2)$, et en $O(|U| \,.\, |V|^2)$ si D est sans circuit impair.

D'autre part, pour les graphes munis d'une orientation, des algorithmes polynomiaux ont été établis pour la recherche de noyau dans certaines de ces classes de graphes.

Un algorithme en, au plus $(|V|^4 + |V|)$ opérations, pour un graphe $G = (V, E)$ triangulé (tout cycle de longueur > 3 admet une corde) muni d'une orientation normale (toute clique possède un puits) est donné par Zémir dans [111].

Trois autres algorithmes polynomiaux sont élaborés par Abbas et Saoula dans [1].

Le premier nécessite $O(|V|^2 \,.\, |E|)$ opérations pour un graphe de comparibilité $G = (V, E)$ (ses arêtes peuvent être orientés transitivement et sans circuits) relativement à M-orientation (tout circuit de longueur trois possède deux arcs symétriques). Le deuxième détermine un noyau dans un graphe de permutation $G = (V, E)$ (si $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ il existe une permutation P des entiers $1, 2, ..., n$ telle que v_i est adjacent à v_j dans G si et seulement si $\frac{P(i)-P(j)}{i-j}$ muni d'une orientation normale, en temps polynomial $O(|V|^2 \,.\, |E|)$. Le troisième qui est de complexité $O(|V| \,.\, |E|)$ permet de déterminer un noyau dans un graphe $G = (V, E)$ sans P_4 muni d'une orientation normale.

4.2.8 Jeux de Nim

Jeu à deux joueurs A et B (ils jouent à tour de rôle suivant les règles de jeu), le premier qui ne peut plus jouer il perd la partie.

Proposition 4.28. *Si G admet un noyau S, le joueur qui chosit un point de S est celui qui gagne. S est l'ensemble des positions gagnantes.*

Exemple 4.29. *Deux joueurs se trouvent en présence de p tas d'allumettes, ceux-ci contiennent respectivement $1, 3, 5, ..., 2p-1$ allumettes. A tour de rôle, ils choisissent un tas (non vide) et y prélèvent un nombre arbitraire d'allumettes (au moins une) le joueur gagnant est celui qui enlève la dernière allumette (Considérer le cas $p = 2$).*

Solution 4.30. *Représentons ce jeu au moyen d'un graphe en associant un sommet à chaque position du jeu, les arcs représentent la possibilité de passer en un coup d'une position à une autre.*

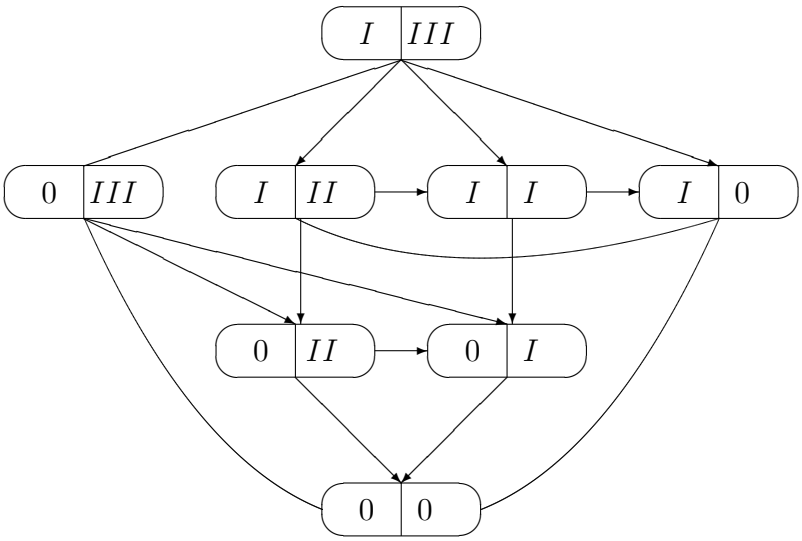


FIGURE 4.13. Le graphe représentatif du jeu de Nim pour $p = 2$.

Quand on choisit un sommet du noyau on est sûr de gagner ou faire nul dans la partie. L'ensemble $\{(I, I), (0, 0)\}$ est un noyau du graphe.

Références

[1] M. Abbas, Y. Saoula, "*Polynomial algorithms for kernels in comparability, permutation and P_4-free graphs*", A Quarterly Journal of Operations Research, 40R 3(2005) 217-225.

[2] R.B. Allan and R. C. Laskar, *On domination and independent domination numbers of a graph.* Discrete Math., 23(1978) 73-76.

[3] R.B. Allan, R. C. Laskar and S. T. Hedetniemi, *A note on total domination,* Discrete Math., 49(1984) 7-13.

[4] V.I. Arnautov, *Estimation of the exterior stability number of a graph by means of the minimal degree of the vertices.* (Russian). Prikl. Mat. i Programmirovanie Vyp., 11(1974) 3-8, 126.

[5] S. Arumugam, A. Thuraiswamy. *Total dominationin graphs.* Ars Comnin., 43(1996) 89-92.

[6] S. Arumugam, S, Velammal. *Edge domination in graphs.* Taiwanese Journal of Mathematics 2,2 (1989) 173.179.

[7] T.J. Bean, M.A. Henning and H.C. Swart, *On the integrity of distance domination in graphs.* Australas. J. Comb. 10 (1994) 29-43.

[8] R.E. Bellman and S.E. Dreyfus. *Applied Dynamic Programming.* Princeton University Press, 1962.

[9] A.A. Bertossi, *Dominating set for split and bipartite graphs*, Inform. Process. Lett., 19(1984) 37-40.

[10] C. Berge, *Les problémes de coloration en théorie des graphes.* Publ.Inst. Statist. Univ. Paris 9, (1960) 123-160.

[11] C. Berge, *Theory of Graphs and its Aplication*, Methuen, London, 1962.

[12] C. Berge. "*Graphs et hypergraphes*", 2ème ed. Dunod, Paris, 1973.

[13] T.A. Beyer, A. Proskurowski, S. T. Hedetniemi, and S. Mitchell. Independent domination in trees. Congr. Numer., 19(1977) 321-328.

[14] M. Blidia, M. Chellali and T.W. Hayens. *Characterization of trees with equal paired and double domination numbe*r, Discrete Mathematics 306(16)(2006),1840-1845.

[15] M. Blidia, "*Contribution à l'étude des noyaux dans les graphes*", Thèse de 3ème cycle, Université de Paris VI, 1984.

[16] M. Blidia, M. Chellali and L. Volkmann. *Some bounds on the p-domination number in trees*. Discrete Mathematics 306(2006) 2031-2037.

[17] M. Blidia, M. Chellali, T.W. Haynes et M.A. Henning, *Independent and double domination in trees*. Utilitas Mathematica, 70(2006) 159-173.

[18] M. Blidia, M. Chellali and L. Volkmann. *On the p-domination number of cactus graphs*, Discussiones Mathematicae. Graph Theory 25 (2005) 355-361.

[19] M. Blidia; A. Ramoul,"*A note on Duchet's conjecture*", AKCE International of Graphs and Combinatorics, 2008.

[20] B. Bollobás and E.J. Cockayne, *Graph-theoretic parameters concerning domination, independence and irredundance. Journal of Graph Theory* 3 (1979).

[21] K.S. Booth et J.H. Johnson, *Dominating sets in chordal graphs*. SIAM J. Comput. 11(1982) 191-199.

[22] R.L. Brooks, *On coloring the nodes of network*. Proc. Camb. Philos. Soc. 37 (1941) 194-197.

[23] R.C. Brigham, J.R. Carrington and R.P. Vitray, *Connected graphs with maximum total domination number*. J. Combin. Math. Combin. Comput. 34(2000) 81-95.

[24] G.J. Chang and G.L. Nemhauser, *the k-domination and k-stability problems in sun-free chordal graphs*, SIAM J. Algebraic Discrete Methods, 5(1984) 332-345.

[25] G. Chartrand and S. Schuster, *On the independence numbers of complementary graphs*, Trans. New York Acad. Sci., Series II, 36 (1974) 247-251.

[26] M. Chellali and T.W. Haynes. *A note on the total domination number of a tree*, J. Combin. Math. Comput. 58, 189(2006) 189-193.

[27] M. Chellali and T.W. Haynes. *Total and paired domination number of a tree*, AKCE International of Graphs and Combinatorics, 1(2)2004 69-75.

[28] M. Chellal.i et T.W Haynes, *On paired and double domination in graphs*. Utilitas Mathematica 67(2005) 161-171.

[29] M. Chudnovsky, N. Robertson, P.D. Seymour and R. Thomas, *The strong perfect graph theorem*, Annals of Mathematics, 164(2006) 51–229.

[30] E.J. Cockayne R.M. Dawes et S.T. Hedetniemi, *Total domination in graphs*. Networks 10 (1980) 211-219.

[31] E.J. Cockayne, O. Favaron, H. Li and G. MacGillivray, *The product of the independent domination numbers of a graph and its complement*. Discrete Math. 90(1991) 313-317.

[32] E. Cockayne, S. Goodman and S. Hedetniemi. *A linear algorithm for the domination number of a tree*. Inform. Process. Lett., 4(2)(1975) 41-4.

[33] E.J. Cockayne and S.T. Hedetniemi, *Towards a theory of domation in graphs*, Networks 7(1977) 247-261.

[34] E.J. Cockayne, S.T. Hedetniemi and D.J. Miller, *Properties of hereditary hypergraphs and middle graphs*, Canad Math . Bull. 21(1978) 461-468.

[35] E.J. Cockayne and C.M. Mynhardt, *On the product of upper irredundance numbers in graphs and its complement,* Discrete Math. 76(1989) 117-121.

[36] E.J. Cockayne and C.M. Mynhardt, *Domination and irredundance in cubic graphs,* Discrete Math. 167/168(1997) 205-214.

[37] S. Cook, "The complexity of theorem proving procedures" Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing, 22 (1)(1971) 151-158.

[38] D.G. Corniel et Y. Perl, *Clustering and domination in perfect graphs*. Discrete Appl. Math, (9)(1984) 926-934.

[39] D.E. Daykin and C.P. Ng, *Algorithms for generalized stanility number of tree graphs*, J. Austral. Math. Soc., 6(1994) 89-100.

[40] A.K. Dewdney, *Fast turning reductions between problems in NP; chapter 4; reductions between NP-compet problems. Technical report 71*, Dep. Computer Science, Univ. Western Ontario, 1981.

[41] G.S. Domke, J.E. Dunbar and L.R. Markus, *Gallai-type theorems and domination parameters*. Discrete Math 167/168(1997) 237-248.

[42] S.E. Dreyfus and A.M. Law. *The Art and Theory of Dynamic Programming*. Academic Press, New York, 1977.

[43] F. Droeske, M.Hllinbe et C.L. Lefevre, "*Les graphes par exemple*", Ellipses (87).

[44] P. Duchet, "*Représentations: Noyaux en théorie des graphes et hypergraphes*", Thèse d'état, Université de Paris VI,1979.

[45] P. Duchet, "*A sufficient condition for a graph to be kernel perfect*", Journal of Graph Theory, 11(1987) 81-85.

[46] P. Duchet et H. Meyniel, "*Une généralisation du théorème de Richardson sur l'existence de noyau dans les graphes orientés*", Discr. Math. 43(1983) 21-27.

[47] J. Edmonds, *Paths trees and flowers*, Canad. J. Math. 17 (1965) 449-467.

[48] O. Favaron, *Two relations between the parameters of independence and irredundance,* Discrete Math. 70(1988) 17-20.

[49] O. Favaron, *A bound on the independent domination number of a tree.* Internat. J. Graph Theory, 1(1992) 19-27.

[50] M.R. fellow,G.H. Fricke, S.T. Hedetmiemi and D.P. Jacobs, *The private neighbor cube*. SIAM J. Discrete Math., 7(1)(1994) 41-47.

[51] J.F. Fink, M.S. Jacobson, L.F. Kinch and J. Roberts, *On graphs having domination number half their order*, Period. Math. Hungar 16(1985) 287-293.

[52] A. Fraenkel, *Planar kernel and grundy with* $d \leq 3$, $d_{out} \leq 2$, $d_{in} \leq 3$ *are NP-Complete*. Discrete Appl. Math, (3)(1981) 257-262.

[53] G.H. Fricke, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, A.A. McRae, C.K. Wallis, M.S. Jacobson, H.W. Martin and W.D. Weakley, *Combinatorial problems on chessboards*, A briev survey, dans Graph Theory, Combinatorics and Applications: Proc. Seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and Applications of Graphs, vol. 1, Y. Alavi and A. Schwenk, Eds., Wiley, (1995) 507-528.

[54] G.H. Fricke, S.T. Hedetmiemi and D.P. Jacobs, *Independence and Irredundance in* k*-regular graphs*, Ars Combin., 49(1998) 271-279.

[55] T. Gallai, *Über extreme Punkt- und Kantenmengen*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math. 2(1959) 133-138.

[56] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and Intractability*: A Guide to the Theory of NP-Completeness. W. H. Freeman, 1979.

[57] M. Gröstchel, L. Lovàsz, A. Schrijver, *Geometric algorithms and combinatorial optimization*. Springer Verlag, 1988.

[58] F. Gvaril, *Algorithms for minimum colorings, maximum clique, minimum covrings by cliques, and maximum independent set of a chordal graph*, SIAM J. Compu. 1(1972) 180-187.

[59] A. Hansberg and A. Pepper, *On* k*-domination and* j*-dependence in graphs*, Discrete Applied Mathematics 161(10-11) (2013) 1472-1480.

[60] P. Hansen. *Upper bounds for the stability number of agraph. rev.Roumaine Math. Pures appl.*, 24(1979) 1195-1199.

[61] F. Harary and T.W. Haynes., *Double domination in graphs*,. Ars Combin. 55(2000) 201-2013.

[62] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi and P.J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, New York, 1998.

[63] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, and P.J. Slater, *Domination in Graphs: Advanced Topics*, Marcel Dekker, New York, 1998.

[64] T.W. Haynes and P.J. Slater, *Paired domination in graphs*. Networks 32(1998) 199-206.

[65] S.T. Hedetniemi and R.C. Laskar, *Connected domination in graphs*. In B. Bollobas, editor, Graph Theory and Combinatorics, (1984) 209-218.

[66] S.T. Hedetniemi and R.C. Laskar, *Introduction*, Discrete Mathematics 86(1990) 3-9.

[67] H. Jacob, "*Etude théorique du noyau d'un graphe*", Thèse de 3ème cycle, Paris VI, 1979.

[68] F. Jaeger, C. Payan, *Relations du type Nordhaus-Gaddum pour le nombre d'absorption d'un graphe simple*, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A 274 (1972) 728-730.

[69] C.F. de Jaenisch, *Applications de l'analyse mathématique au jeu des echecs*, Petrograde (1862).

[70] D. König, *Uder graphen und ihre Anweendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre.* Math. Ann. 77(1916) 453-465.

[71] D. König, *Graphen und Matrizen*, Mat. Fiz. Lapok 38(1931) 116-119.

[72] R.E. Ladner, *On the structure of polynomial time reducibility*, Journal of the ACM, 22 (1)(1975) 151-171.

[73] R. Laskar and K. Peters, *Domination and irredundance in graphs*. Technical Report 434, Dep. Mathematical Sciences, Clemson univ, (1983).

[74] R. Laskar and K. Pfaff, *Domination and irredundance in split graphs*. Technical Report 430, Dep. Mathematical Sciences, Clemson univ, (1983).

[75] R. Laskar and K. Peters, *Vertex and edge domination parameters in graphs*. Cong. Numer. 48(1985) 291-305.

[76] R. Laskar, J. Pfaff and S.T. Hedetniemi, *NP-complitness of total dominationand connected domination, and irredundance for bipartite graphs*. Technical Report 428, Dep. Mathematical Sciences, Clemson univ, (1983).

[77] R. Laskar, J. Pfaff, S.M. Hedetniemi and S.T. Hedetniemi, *On the algorithmic complexity of total domination*. SIAM J. Algebraic Discret Methods, 5(1984) 420-425.

[78] C.S Liao and G.J. Chang, k-tuple domination in graphs. Information Processing Letters 87(2003) 45-50.

[79] L. Lovasz, *A characterization of perfect graphs*. J. Combin. Theory Ser . B, 13(1972) 95-98.

[80] L. Lovasz, *Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture. Discrete Math. 2*(1972) 253-267.

[81] A.A. McRae. *Generalizing NP-complitness proofs for bipartite and chordal graphs*. PhD thesis, Clemson Univ., 1994.

[82] A. Meir and J.W. Moon, *Relations between packing and covering number of a tree*, Pacific J. Math. 61(1975) 225-233.

[83] B.R. Meyers and R. Liu, *A lower bound on the chromatic number of a graph*. Networks 1 (1971/72) 273-277.

[84] H. Meyniel, "*Contribution à l'étude de quelques problèmes en théorie des graphes* (circuit hamiltonien, coloration, noyaux)", Thèse Doctorat d'état ès-Science, Université de Paris VI, 1982.

[85] G. L. Nemhauser. *Introduction to Dynamic Programming*. John Wiley & Sons, 1966.

[86] J.V. Neumann and O. Morgenstern, "*Theory of games and economic behaviour*", Princeton University Press, Princeton 1944.

[87] E.A. Nordhaus and J. W. Gaddum. *On complementary graphs. Amer. Math. Monthly*, 63(1996)175-177.

[88] O. Ore, *theory of graphs*, Amer. Math soc. Colloq. Publ. 38(1962).

[89] J. Paulraj Joseph, S. Arumugam. *Domination in graph.* Internat. J. Management Systems, 11(1995) 177-182.

[90] C. Payan, *Sur le nombre d'absorption d'un graphe simple*, Cahiers Centre Etudes Rech. Opér. (2.3.4), 171, 1975.

[91] J. Pfaff, *Algorithmic Complexity of domination-related Graph Parameters.* PhD thesi, Clemson Univ., 1984.

[92] J. Pfaff, R. Laskar and S.T. Hedetniemi. *NP-completeness of total and connected domination, and irredundance for bipartite graphs.* Technical Report 428, Dept. Mathematical Science, Clemson Univ. 1983.

[93] C. Payan and N.H. Xuong, *Domination-balanced graphs*, J. Graph Theory 6(1982) 23-32.

[94] B. Rautenbach and L. Volkmann, *Characterization of graphs with equal domination and covering number*, Discrete Math. 191(1998) 159-169.

[95] H. Qiao, L. Kang, M. Cardei et D-Z. Du, *Paired-domination of trees,* Journal of Global Optimization 25(2003) 43–54.

[96] B. Reed, *Paths, stars, and the number three,* Comb. Prob. Comp 5(1996) 227-295.

[97] M. Richardson, "*Solutions of irré‡éxive relation*", Ann.Math, 58(1953) 573-580.

[98] C.E. Shannon, The zero capacity of a noisy channel, IRE Trans. Theory IT-2(1956) 8-19.

[99] E. Sampathkumar and H.B. Waliker. *The connected domination number of a graph.* J. Math. Phys. Sci. 13(1979) 607-613.

[100] H. G. Sànchez and V. Neumann-Lara, "*On kernel and semi-kernels of digraphs*", Discr. Math, 48(1984) 67-76.

[101] C. Stracke and L. Volkmann. *A new domination conception.* J . Graph Theory 17(1993) 315-323.

[102] D.P. Sumner and P. Blitch, *Domination Critical Graphs*, J. Combin. Theory Ser. B, 34(1983) 65–76.

[103] V.G. Vizing, *The cartisien product of graphs*, Vychisl. Sistemy, 9(1963) 30-43.

[104] V.G. Vizing, *Critical Graphs with Given Chromatic Class*, Diskret, Analiz 5(1965) 9-17.

[105] L. Volkmann, *A characterization of bipartite graphs with independence number half their order*, Australasian Journal of Vombinatorics, 41(2008) 219-222.

[106] H.B. Walikar and B.D. Acharya, *Domination Critical Graphs*, Nat. Acad. Sci. Lett., 2(1979) 70–72.

[107] H.B. Walikar, B.D. Acharya and E. Sampathkumar. *Recent developments in the theory of domination in graphs.* In MRI lecture Notes in Math., Mahta Research Instit., Allahabad, Volume1, 1979.

[108] V.K. Wei, *A lower bound on the stablity number of a simple graph.* Bell Laboratories Technical Memorandum 81-11217-9, Murray Hill, NJ,(1981).

[109] K. White, M. Farber et W. Pulleyblank, *Steiner trees, connecteddomination and strongly chordel graphs. Networrks,* 15(1985) 109-124.

[110] B. Xu, E.J. Cockayne, T.W. Haynes, S. Hedetniemi and Z. Shangchao, *Extremal graphs for inequalities involving domination parameters, Discrete Mathematics* 216(2000) 1-10.

[111] Z. Zémir, "*Recherche de noyaux dans les graphes orientés et graphes munis d'une orientation, étude algorithmique*", Thèse de Magistère, Université de Blida, 1996.