UNIVERSITÉ Dr. YAHIA FARÈS DE MÉDÉA

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et de l'Informatique



MÉMOIRE DE MASTER

en mathématique

Spécialité : Recherche Opérationnelle

PROBLÈME DE RECOUVREMENT OPTIMAL D'UNE RÉGION GÉOGRAPHIQUE PAR DES ANTENNES GSM :

MODÉLISATION ET TECHNIQUES DE RÉSOLUTION

Présenté par

SAFAR BATI Ikram

devant le Jury composé de :

N. IKHELEF ESCHOUF	Maître de Conférences	U.YF.Médéa	Président
R. LEMEDANI	Maître Assistant	U.YF.Médéa	Examinateur
A. BENKACI	Maître Assistant	U.YF.Médéa	Encadreur

01 juin 2017

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous intéressons au problème de recouvrement optimal d'une région géographique par des antennes de transmission GSM, dont l'objectif est de maximiser le pourcentage de couverture, tout en respectant la contrainte budgétaire.

Ce problème, provenant de la télécommunication et logistique, est formulé comme un problème de programmation linéaire en nombres binaires (0/1). Pour le résoudre, nous appliquons la technique des coupes planes.

Un programme informatique a été élaboré, en utilisant la composante logicielle CPLEX qui est implémentée sous le langage de modélisation AMPL.

Nous reportons des résultats numériques qui sont obtenus en testant ce programme sur un exemple type du problème. Ces résultats confirment l'efficacité de cette approche.

Mots–clés : recouvrement optimal, modélisation mathématique, programmation en nombre entiers, télécommunication et logistique.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier, ALLAH le Tout Puissant, pour m'avoir donnée le courage et la force pour réaliser ce modeste travail.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à mon enseignant Monsieur BENKACI Azzedine, Maître-assistant à l'université de Médéa - Faculté des Sciences, pour m'avoir encadrée et guidée tout au long de ce mémoire. Il m'a permis de réaliser ce travail en me manifestant sa confiance et en m'encourageant dans mon travail. Il a été toujours à ma disposition.

J'adresse mes remerciements à Monsieur Lemedani Rachid, Maître-Assistant à l'université de Médéa, d'avoir accepté de juger mon travail.

Je suis très honorée par la présence au jury de Monsieur, Zamime Mohamed, Maître de conférences à l'université de Médéa. Je le remercie très sincèrement d'avoir accepté d'être président du jury.

Je tiens à remercier Monsieur IKHLEF ESCHOUF Nouredine, Maître de conférence à l'université de Médéa - Faculté des Sciences, pour ses suivis permanents de la formation de la chaire : Recherche Opérationnelle, au niveau du département de mathématiques et de l'informatique

Je ne pourrais terminer sans mentionner tout ce que je dois à mes parents et à mon frère et sœurs, qui m'ont toujours soutenue et supportée. Sans eux ce travail n'aurait pu voir le jour.

Enfin, je remercie toute personne qui m'a aidé par sont soutient et sa confiance afin d'accomplir ce modeste travail.

Table des matières

Résumé 1

Remerciements 2

Table des matières 3

Liste des Figures 5

Liste des Tableaux 6

Introduction 7

1. Outils mathématiques 10

1.1 Introduction 10
1.2 Notions préliminaires de Graphes 10
1.2.1 Graphe partiel et sous-graphe 11
1.2.2 Matrice d'adjacence associée à un graphe 13
1.2.3 Différents types de graphe 13
1.3 Programmation Linéaire en Nombres Entiers 15
1.3.1 Qualité de formulation algébrique (Large ou Serrée) 16
1.3.2 Inégalité valide et coupe valide 16
1.3.3 Exemple (Stable de taille maximum) 17
1.4 Conclusion 18

2. Recouvrement optimal d'une région géographique 19

2.1 Introduction 19
2.2 Opérateur de réseau mobile 19
2.2.1 Antenne de téléphonie mobile 19
2.2.2 Les opérateurs mobiles en Algérie 20
2.3 Objectifs principaux d'un opérateur mobile 20

2.4 Problème de recouvrement optimal 21
2.5 Conclusion 22

3. Modélisation mathématique **23**

3.1 Introduction 23
3.2 Modélisation en termes de graphe 23
3.3 Programmes mathématiques 24
3.3.1 Notations et paramètres 24
3.3.2 La mise en équations 25
3.3.3 Modèle mathématique de base 27
3.3.4 Modèle adjoint 27
3.3.5 Modèle d'agrégation 28
3.4 Processus de résolution 28
3.5 Conclusion 29

4. Implémentation et tests numériques **30**

4.1 Introduction 30
4.2 Quelques mots sur le langage AMPL 30
4.3 Exemple Test 31
4.4 Résultats obtenus 34
4.4.1 Qualité de couverture 34
4.4.2 Effet du budget M sur le pourcentage de couverture 36
4.4.3 Recouvrement total 38
4.4.4 La courbe de solutions efficaces 39
4.5 Conclusion 41

Conclusion **42**

A. Codes AMPL **44**

A.1 Fichier des données (paramètres) 44
A.2 Fichier du modèle mathématique 45
A.3 Script de résolution et affichage des résultats 45

Liste des symboles et des abréviations **47**

Références **48**

Liste des Figures

FIGURE 1-1 : Un graphe $G = (V, E)$ d'ordre 6 comportant 7 arêtes. 12

FIGURE 1-2 : Graphe partiel et Sous-graphe de *G*. 12

FIGURE 1-3 : Différents types de graphe. 14

FIGURE 2-1 : Les différents logos des opérateurs mobiles en Algérie..... 21

FIGURE 3-1 : Modélisation en termes de graphe, (graphe biparti de type $K_{m,n}$)..... 24

FIGURE 3-2 : Relation de couverture « l'ensemble $\Gamma(i)$ couvre la commune *i* » 26

FIGURE 3-3 : Schéma conceptuel de résolution d'un problème réel..... 29

FIGURE 4-1 : Exemple test (15 communes et 7 sites potentiels). 31

FIGURE 4-2 : Graphe biparti comportant 15 communes et 7 sites potentiels. 33

FIGURE 4-3 : Solution N°1, pourcentage de couverture est à 83%, avec $M = 8$..... 35

FIGURE 4-4 : Solution N°2, pourcentage de couverture est à 93%, avec $M = 10$..... 35

FIGURE 4-5 : Solution N°3, pourcentage de couverture est à 100%, avec $M = 12$... 36

FIGURE 4-6 : Pourcentage de couverture en fonction du budget *M*..... 38

FIGURE 4-7 : La population $P(x)$ en fonction du Budget $F(y)$. 40

FIGURE 4-8 : La population couverte $P(x)$ en fonction de λ. 40

FIGURE 4-9 : Données (Paramètres). 44

FIGURE 4-10 : Modèle mathématique..... 45

FIGURE 4-11 : Console AMPL. 46

Liste des Tableaux

TABLEAU 3-1 : Notations des paramètres.....25
TABLEAU 4-1 : Population (×1000) des communes. 32
TABLEAU 4-2 : Coût fixe (en M$) et communes couvertes pour chaque antenne. ..32
TABLEAU 4-3 : Effet du budget *M* sur la qualité de couverture. 37
TABLEAU 4-4 : Budget et population couverte en fonction du paramètre λ 39

ALGORITHME 4-1 : Pourcentage de couverture, maximal. 36
ALGORITHME 4-2 : Courbe de solutions efficaces.....41

Introduction

Apparue juste avant la seconde guerre mondiale dans le domaine militaire, la Recherche Opérationnelle (en abrégé RO) a pour but d'apporter une démarche scientifique à la résolution de problèmes de décision complexes issus du monde réel. Sa vocation scientifique est de construire des modèles mathématiques d'aide à la décision, en particulier les modèles liés à des problèmes d'optimisation et de proposer des méthodes de résolution efficace (précise et rapide).

La Recherche Opérationnelle intervient de manière cruciale dans des secteurs de plus en plus nombreux et diversifiés comme les transports, la production industrielle, la planification et la logistique, la télécommunication, …, etc.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons au problème de recouvrement optimal d'une région géographique par des antennes de transmission GSM. Ce problème est issu du domaine de la télécommunication. Il s'agit de couvrir une région ou une population donnée par des antennes placées dans sites choisis et fixés à l'avance. Le problème est de déterminer le nombre d'antennes et leurs emplacements dans des sites appropriés afin de couvrir une région géographique de manière optimale, et ce tout en respectant le montant budgétaire alloué à ce projet.

Un opérateur de réseau mobile est une compagnie de télécommunication qui propose des services de téléphonie mobile ou d'accès mobile à Internet. L'opérateur fournit une carte SIM au client qui l'insère dans son téléphone mobile pour avoir accès au réseau cellulaire de l'opérateur. Il existe plusieurs normes internationales (GSM, CDMA, UMTS,…, etc.)

GSM, ou Global System for Mobile, est une norme numérique de seconde génération pour la téléphonie mobile. Le groupe de travail chargé de la définir, a été établi en 1982 par la Conférence Européenne des administrations des Postes et Télécommunications (CEPT).

Les objectifs principaux d'un opérateur mobile sont l'augmentation de l'offre de services de communication et l'amélioration de la Qualité du Service (QoS), ainsi que le développement du réseau de communication.

Notre problème d'optimisation peut être formulé comme un programme linéaire en nombres binaires (0/1). Ce problème est une extension directe du problème classique « couverture par des sommets », qui est classé NP–difficile ([9], [14]).

Un programme linéaire en nombres binaires est un système d'équations ou d'inéquations linéaires appelées «contraintes». À partir de ces contraintes, on cherche à optimiser une fonction ou un critère également linéaire appelé «objectif». Les inconnus du programme sont appelés variables de décision, elles ne peuvent prendre que deux valeurs logiques (1 ou 0).

Notre objectif est double :

- Appliquer la technique de coupes planes de type Chvatal–Gomory ([1], [5], [9], [14]) pour la résolution du problème.
- Élaborer et implémenter un programme informatique permettant la résolution effective du problème, en utilisant la composante logicielle CPLEX ([8]).

Ce mémoire est composé de quatre chapitres, d'une conclusion générale et d'une annexe.

Le premier chapitre est consacré à la présentation de quelques définitions sur les graphes simples non orientés. Les principaux concepts de la Programmation Linéaire en Nombres Entiers (PLNE) sont rappelés, ainsi que leur développement mathématique qui va nous être utile tout au long de ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons brièvement les définitions de base utilisées dans le domaine de la télécommunication. Les objectifs principaux et les buts à atteindre d'un opérateur de téléphonie mobile sont cités. Au final, nous présentons la position de notre problème d'optimisation.

Dans le chapitre trois, nous exposons une formulation mathématique de base du problème. Ensuite nous présentons des programmes mathématiques qui permettent de modéliser les préférences du décideur.

Le chapitre quatre est consacré à l'implémentation de notre approche de résolution. Nous reportons aussi des résultats numériques qui ont été obtenus en testant notre programme AMPL([8]) sur un exemple réel du problème, et ce en utilisant la composante logicielle CPLEX.

Dans l'annexe-A, nous présentons les scripts de nos programmes informatiques codés en langage de modélisation AMPL, ainsi que les résultats numériques obtenus sur un exemple type.

Enfin, nous terminons notre travail par une conclusion générale.

1. Outils mathématiques

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons quelques définitions sur les graphes simples non orientés. Les principaux concepts de la Programmation Linéaire en Nombres Entiers (PLNE) sont rappelés, ainsi que leur développement mathématique qui va nous être utile tout au long de ce mémoire.

1.2 Notions préliminaires de Graphes

- Un graphe est défini par deux ensembles : un ensemble $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dont les éléments sont appelés sommets, et un ensemble $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ dont les éléments sont appelés arêtes. On note $G = (V, E)$.
- Une arête e est une paire de sommets $(u, v) \in E \times E$. Les sommets u et v sont les extrémités de l'arête $e = (u, v)$.
- Deux sommets d'un graphe sont voisins ou adjacents s'ils ont une arête incidente en commun.
- Deux arêtes d'un graphe sont adjacentes si elles ont un sommet en commun.
- On appelle ordre d'un graphe le nombre de sommets de ce graphe.
- Le nombre d'arêtes incidentes à un sommet est le nombre d'arêtes sortant ou rentrant du sommet.
- Le degré d'un sommet v de G est le nombre d'arêtes incidentes à v. Il est noté $d(v)$. On note aussi :
    - Le degré maximal $\Delta(G) = \max\{d(v) : v \in V\}$.

- Le degré minimal $\delta(G) = \min\{d(v) : v \in V\}$.

- Lorsque $d(v) = 0$, on dit que le sommet v est isolé. Lorsque $d(v) = 1$, on dit que le sommet v est pendant.
- L'ensemble de sommets voisins de *v*, est noté $\Gamma(v) = \{u \in V : (v,u) \in E\}$.

Exemple : Soit, le graphe $G = (V, E)$ représenté dans la FIGURE 1-1.

Dans cet exemple :

- $V = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $E = \{(1,2),(1,6),(2,3),(2,6),(3,4),(3,5),(5,6)\}$.
- Trois arêtes sont incidentes au sommet 2. Le sous-ensemble $\Gamma(2) = \{1,3,6\}$ représente les voisins du sommet 2, et $d(2) = |\Gamma(2)| = 3$.
- Le sommet 4 est pendant : $d(4) = 1$
- Le degré maximal et minimal sont, respectivement : $\Delta(G) = 3$ et $\delta(G) = 1$.

Propriétés : On donne ici, deux propriétés très utiles en théorie des graphes.

- La somme de degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois son nombre d'arêtes. $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.
- Le nombre de sommets de degré impair d'un graphe est pair.

1.2.1 Graphe partiel et sous-graphe

Beaucoup de problèmes d'optimisation consistent à chercher un graphe partiel ou un sous-graphe vérifiant certaine propriété, dans un graphe G.

- Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le graphe $G' = (V, E')$ est un graphe partiel de G, si E' est inclus dans E.
- Un sous-graphe de G est un graphe $H = (V', E(V'))$ tel que V' est un sous ensemble de V, et $E(V')$ sont les arêtes induites par E sur V'.

La FIGURE 1-2, présente un graphe partiel et un sous-graphe de G.

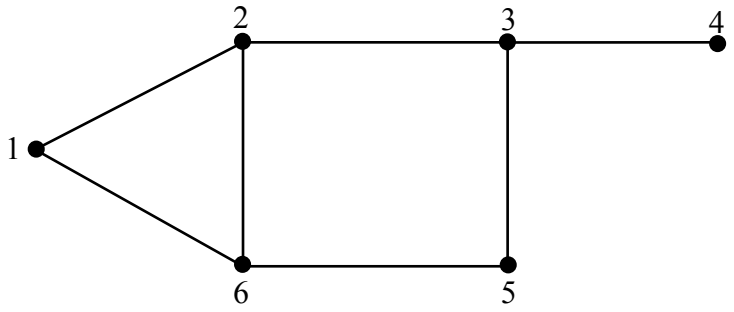
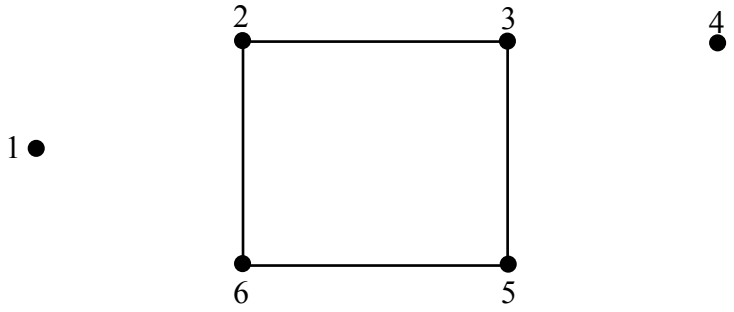
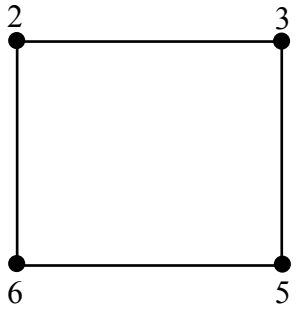


FIGURE 1-1 : Un graphe $G = (V, E)$ d'ordre 6 comportant 7 arêtes.



a) Graphe partiel $G' = (V, E')$ de G



b) Sous-graphe $H = (V', E(V'))$ de G

FIGURE 1-2 : Graphe partiel et Sous-graphe de *G*.

1.2.2 Matrice d'adjacence associée à un graphe

Parmi les matrices associées à un graphe donné, on cite la matrice d'adjacence. Elle joue un rôle déterminant pour la modélisation de problèmes d'optimisation.

Définition : Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, où $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. La matrice d'adjacence de G est la matrice carrée A dont les coefficients sont définis par :

$$A_{ij} := \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Propriétés : La matrice A est symétrique à diagonale nulle, en plus les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = d(v_i), \qquad i \in \{1, 2, \ldots, n\} \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ij} = d(v_j), \qquad j \in \{1, 2, \ldots, n\} \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} = 2|E| \tag{1.3}$$

La matrice d'adjacence associée à G (voir FIGURE 1-1) est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & & 1 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & 1 & & 0 & 1 \\ 1 & 1 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2.3 Différents types de graphe

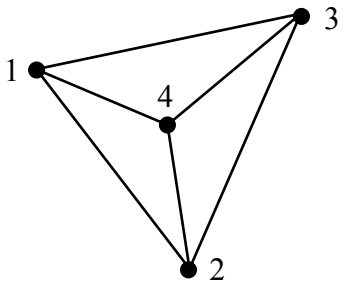
Dans cette section, nous présentons quelques types de graphes, à savoir le stable, la clique, le biparti et le biparti complet.

Graphe stable (ou indépendant) : Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un sous-ensemble S de V est dit stable s'il ne comprend que des sommets non adjacents deux à deux.

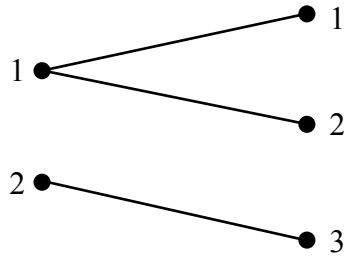
Graphe complet (ou clique) : Un graphe complet est un graphe où chaque sommet est relié à tous les autres. Le graphe complet d'ordre n est noté K_n. Dans ce graphe chaque sommet est de degré $n-1$.

Graphe biparti(te) : Un graphe $G = (V, E)$ est biparti ou bipartite si l'ensemble de ses sommets V peut être divisé en deux ensembles disjoints V_1 et V_2, de sorte que les arêtes relient uniquement des éléments de V_1 à des éléments de V_2.

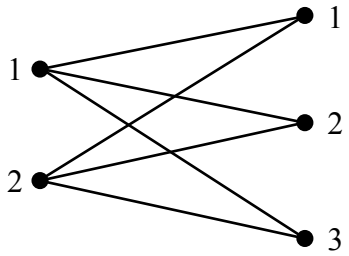
Graphe biparti(te) complet : Un graphe bipartite complet $G = (V_1, V_2, E)$, noté $K_{p,q}$ est un graphe bipartite où chaque sommet de V_1 est relié à tous les sommets de V_2 par une arête. Ici, $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$.



a) Graphe complet K_4



b) Graphe biparti



c) Graphe biparti complet $K_{2,3}$

FIGURE 1-3 : Différents types de graphe.

1.3 Programmation Linéaire en Nombres Entiers

Dans cette section, nous rappelons, brièvement, les outils de base de la programmation en nombres entiers. On se focalise sur la notion de la coupe valide.

Tout programme linéaire en nombres entiers (PLNE) peut s'écrire ainsi :

$$(\text{PLNE}) \equiv \begin{cases} \max cx \\ x \in X = P \cap \mathbb{Z}^n \end{cases} \tag{1.4}$$

où, $P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b \text{ et } x \geq 0 \right\}$ est un polytope (polyèdre borné et fermé).

Enveloppe convexe : L'enveloppe convexe de X, notée $\text{conv}(X)$, est le plus petit ensemble convexe contenant toutes solutions de X, et on note :

$$\text{conv}(X) = \left\{ x \in \mathbb{Z}^n : A'x \leq b' \text{ et } x \geq 0 \right\}$$

On considère les problèmes d'optimisation suivants :

Problème originaire : $Z_X = \max \left\{ cx : x \in X \right\}$ (1.5)

Problème équivalent : $Z_{\text{conv}(X)} = \max \left\{ cx : x \in \text{conv}(X) \right\}$ (1.6)

Problème relaxé : $Z_P = \max \left\{ cx : x \in P \right\}$ (1.7)

Propriétés :

i. La valeur Z_P est une borne supérieure de Z_X : $Z_X \leq Z_P$.

ii. Les points extrêmes de $\text{conv}(X)$ sont des solutions de X : $Z_X = Z_{\text{conv}(X)}$.

iii. Optimiser une fonction linéaire sur le domaine $\text{conv}(X)$ est la formulation idéale pour le problème d'optimisation (PLNE).

Remarque : Les propriétés (ii) et (iii) sont très importantes. Malheureusement, la détermination de l'enveloppe convexe pour l'ensemble X est un problème aussi difficile que le problème d'optimisation (PLNE) originaire.

1.3.1 Qualité de formulation algébrique (Large ou Serrée)

Un problème d'optimisation peut avoir plusieurs formulations différentes mais équivalentes. On pratique, il est judicieux d'adopter la bonne formulation possible servant à faciliter la résolution du problème. On parle sur la formulation serrée.

- Une «bonne» formulation est une formulation pour laquelle le polyèdre associé à la relaxation linéaire est proche de l'enveloppe convexe des solutions du problème, en particulier autour de la solution optimale.
- La relaxation linéaire d'une formulation serrée procure de meilleures bornes sur la solution optimale du problème.
- Une formulation serrée peut accélérer la convergence d'un algorithme de Séparation et Évaluation Progressive basé sur un programme linéaire relaxé.

1.3.2 Inégalité valide et coupe valide

Ici, on rappelle les définitions de base d'inégalité valide et de coupe valide. Le but est de déterminer une coupe valide associée un polyèdre P donné.

- Une inégalité : $\alpha x \leq \beta$ est dite valide pour le polytope P, si et seulement si, $P \cap \{x : \alpha x \leq \beta\} = P$.
- Une inégalité : $\alpha x \leq \beta$ est dite coupe pour le polytope P, si et seulement si, $P \cap \{x : \alpha x \leq \beta\} \subset P$ (inclusion stricte).
- Une inégalité : $\alpha x \leq \beta$ est dite coupe valide pour le polytope P si et seulement si, $\text{conv}(X) \subseteq P \cap \{x : \alpha x \leq \beta\} \subset P$.

Remarque : Dans la littérature, il existe plusieurs types de coupe valide, on cite, entre autre, les inégalités valides de Chvatal-Gomory, la coupe valide de recouvrement, … etc. Pour le plus ample d'informations sur ce sujet, nous invitons le lecteur à consulter les ouvrages spécialisés dans la matière ([1], [5] ,[9], [14]).

1.3.3 Exemple (Stable de taille maximum)

Le problème du stable de taille maximum ([1], [9], [14]), défini sur le graphe G peut se modéliser par le programme linéaire en nombres binaires suivant.

$$(S) \equiv \begin{cases} (\max) z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & 1 \\ 1 & 3 & 1 & & & 1 \\ & 1 & 3 & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & & 2 & 1 \\ 1 & 1 & & & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ x \in \{0;1\}^6 \end{cases}$$

La solution optimale $\hat{x}$ de (S) est le vecteur représentatif d'un stable de taille maximum. La valeur optimale $z(\hat{x})$ est la taille du stable obtenu. Ce paramètre est bien connu en théorie des graphes sous l'appellation « nombre de stabilité $\alpha(G)$ ».

En résolvant le problème relaxé de (S), on trouve :

$$\hat{x}_{RL} = \left(\tfrac{3}{5} \quad \tfrac{4}{5} \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0\right) \text{ et } z(\hat{x}_{RL}) = 3 + \tfrac{2}{5}$$

Inégalités valides : Le graphe G comporte, (voir FIGURE 1-1) .

- Une clique maximale d'ordre 3, alors : $x_1 + x_2 + x_6 \leq 1$ est une inégalité valide. On peut écrire : $z(\hat{x}) \leq 4$.
- Un cycle impair d'ordre 5, alors : $x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 \leq 2$ est une inégalité valide. On peut écrire : $z(\hat{x}) \leq 3$.

Ces deux inégalités, que nous venons de présenter, sont des coupes valides pour le domaine relaxé du problème (S).

Si, on ajoute la contrainte : $x_1 + x_2 + x_6 \leq 1$ à (S), la solution du problème relaxé devient : $\hat{x}_{RL'} = \left(0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0\right)$ et $z(\hat{x}_{RL'}) = 3$, qui est optimale.

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques définitions sur les graphes simples non orientés en particulier les graphes bipartis. Les principaux concepts de la Programmation Linéaire en Nombres Entiers (PLNE) ont été rappelés, ainsi que leur développement mathématique qui va nous être utile tout au long de ce mémoire.

2. Recouvrement optimal d'une région géographique

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions utilisées dans le domaine de la télécommunication. Les objectifs principaux et le but à atteindre d'un opérateur de téléphonie mobile sont cités. Au final, nous présentons la position de notre problème d'optimisation.

2.2 Opérateur de réseau mobile

Un opérateur de réseau mobile est une compagnie de télécommunication qui propose des services de téléphonie mobile ou d'accès mobile à Internet. L'opérateur fournit une carte SIM au client qui l'insère dans son téléphone mobile pour avoir accès au réseau cellulaire de l'opérateur. Il existe plusieurs normes internationales (GSM, CDMA, UMTS,… , etc.)

GSM (Global System for Mobile) est une norme numérique de seconde génération pour la téléphonie mobile. Le groupe de travail chargé de la définir, a été établi en 1982 par la Conférence Européenne des administrations des Postes et Télécommunications (CEPT).

2.2.1 Antenne de téléphonie mobile

Une antenne de téléphonie mobile (ou station de base) est un émetteur-récepteur de signaux radioélectriques pour les communications mobiles qui convertit des signaux électriques en ondes électromagnétiques et réciproquement.

2.2.2 Les opérateurs mobiles en Algérie

Dans notre pays, il existe trois opérateurs mobiles, on cite : Mobilis, Djezzy et Ooredoo.

Mobilis a lancé un vaste chantier de déploiement de son réseau GSM. Aujourd'hui, près de 80% de la population algérienne est couverte par le réseau. L'opérateur propose plusieurs offres à ses clients : offres post-payées et prépayée, messagerie vocale, consultation de la facture sur Internet, notification gratuite du solde après chaque appel, appel gratuit vers un ou plusieurs numéros favoris.

Ooredoo couvre 91% de la population à travers le territoire national, et ses services sont déployés dans les 45 wilayas du pays. L'opérateur procure une gamme riche de services à savoir, le prépayé, le post-payé, l'internet, ..., etc.

Djezzy couvre 95% de la population à travers le territoire algérien, et ses services sont déployés dans les 48 wilayas du pays. L'opérateur fournit une vaste gamme de services tels que le prépayé, le post-payé, Internet ainsi que les services à valeur ajoutée et le service universel de télécommunication (SUT).

2.3 Objectifs principaux d'un opérateur mobile

Parmi les objectifs d'un opérateur de téléphonie mobile, on cite

- L'augmentation de l'offre de services de communication et de faciliter l'accès de plus grand nombre possible d'utilisateurs.
- L'amélioration de la Qualité du Service (QoS).
- Le développement du réseau de communication national.

But à atteindre

Le but primordial d'un operateur de téléphonie mobile est d'améliorer la couverture du réseau pour atteindre 95% du territoire national.



a) Mobilis b) Ooredoo c) Djezzy

FIGURE 2-1 : Les différents logos des opérateurs mobiles en Algérie.

2.4 Problème de recouvrement optimal

Dans cette section, nous posons notre problème. Il s'agit d'un problème d'optimisation, que nous énonçons comme suit :

Un opérateur téléphonique décide de couvrir une région géographique divisée en n communes (villes), par des antennes de transmission GSM qui peuvent être placées dans m sites potentiels choisis et fixés à l'avance par des ingénieurs. À chaque site, on associe le coût d'installation d'une antenne. Un budget M (en million de dollar) est alloué à cet investissement.

Le problème est de déterminer, le nombre d'antennes à installer dans leurs sites appropriés afin de couvrir au mieux la région géographique, et ce tout en respectant les contraintes suivantes :

- Une antenne installée dans un site donné, ne peut couvrir qu'un nombre limité de communes.
- Une commune donnée, ne peut être couverte par qu'un nombre limité d'antennes.
- Un budget limité est alloué à ce projet.

Il s'agit d'un problème d'optimisation avec contraintes. Afin de le résoudre, il est judicieux de recourir à la mise en équations du problème, autrement dit, à la modélisation mathématique.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé quelques définitions utilisées dans le domaine de la télécommunication mobile. Les objectifs principaux et le but primordial à atteindre d'un opérateur de téléphonie ont été cités. Au final, nous avons présenté la position de notre problème d'optimisation, apparemment simple mais, il est très difficile à résoudre, (voir les chapitres ultérieurs).

3. Modélisation mathématique

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous exposons une formulation mathématique de base du problème. Il s'agit d'un programme linéaire en nombres bivalents (0/1). Pour le résoudre, nous utilisons le solveur CPLEX (voir chapitre 4). Nous présentons aussi des programmes mathématiques qui permettent de modéliser les préférences du décideur.

3.2 Modélisation en termes de graphe

Un graphe constitue une méthode de pensée qui permet de modéliser de problèmes d'optimisation en se ramenant à l'étude de sommets et d'arêtes.

Dans cette section, on cherche à représenter graphiquement notre problème.

Le problème de recouvrement optimal peut se modéliser par un graphe biparti de type $K_{m,n} = (V_1, V_2, E)$, dont les sommets de V_1 représentent les m sites, et les sommets de V_2 représentent les n communes. Lorsqu'une arête relie un site j avec une commune i, on dit que le site j couvre la commune i, ou bien, la commune i est couverte par le site j. La relation « couvre » est symétrique, et elle est représentée par l'ensemble d'arêtes E.

Ainsi, le problème se ramène à trouver un sous-ensemble de sites J, vérifiant la contrainte budgétaire, et qui assure un pourcentage de couverture, maximal de l'ensemble de communes I.

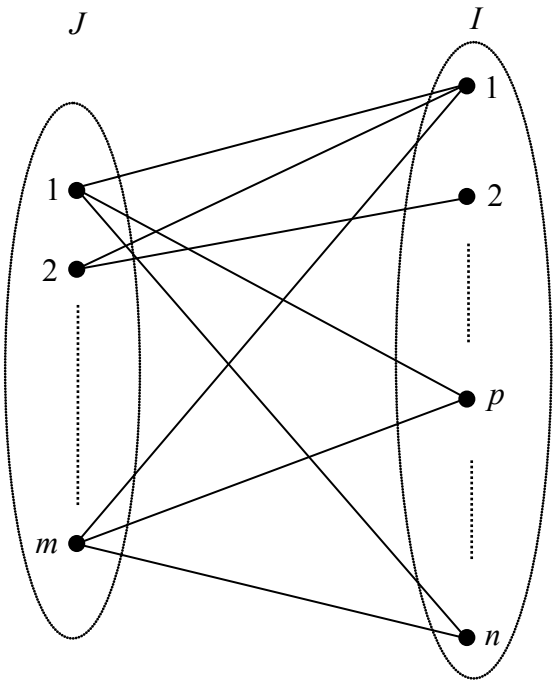


FIGURE 3-1 : Modélisation en termes de graphe, (graphe biparti de type $K_{m,n}$).

3.3 Programmes mathématiques

Dans cette section, nous exposons une formulation mathématique du problème, et nous présentons aussi, trois modèles mathématiques modélisant les préférences du décideur.

3.3.1 Notations et paramètres

Ici, nous présentons les paramètres qui caractérisent une instance (ou un exemple) du problème.

Un exemple se caractérise par le triplet (I, J, E), et on écrit : INSTANCE(I, J, E).

- Une région I est composée de n communes (villes), $I = \{1, \ldots, n\}$.
- Un ensemble J est composé de *m* sites, $J = \{1, \ldots, m\}$.
- Une relation (symétrique) de couverture qui est définie entre *I* et *J*.

Objectif :

On cherche à couvrir de manière optimale, la région *I* par des antennes d'émission qui peuvent être placées dans l'ensemble *J* des sites potentiels.

TABLEAU 3-1 : Notations des paramètres

Paramètre	Désignation
n	Nombre de communes
m	Nombre de sites
p_i	Population de la commune i, $(i = 1,\ldots,n)$.
f_j	Coût fixe d'installation d'une antenne de transmission dans le site j, $(j = 1,\ldots,m)$.
M	Montant alloué à l'installation des antennes (en million de dollar M$).

3.3.2 La mise en équations

La matrice d'adjacence

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si une antenne installée dans le site } j \text{ couvre la commune } i. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les variables de décision des communes

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si la commune } i \text{ est couverte.} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$x \in \{0,1\}^n$ est le vecteur représentatif de l'ensemble de communes *I*.

Les variables de décision des sites

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si une antenne est installée dans le site } j. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$y \in \{0,1\}^m$ est le vecteur représentatif de l'ensemble de sites *J*.

La fonction objective

La population totale à couvrir s'écrit ainsi :

$$Z = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$$

La relation de couverture

Si, la i^{eme} commune est couverte, elle doit être couverte par au moins d'une antenne. Cette contrainte peut se modéliser comme suit :

$$A_{i1}y_1 + A_{i2}y_2 + \cdots + A_{im}y_m \geq x_i \qquad (\forall i \in I)$$

ou encore :

$$\sum_{j\in\Gamma(i)} y_j \geq x_i \qquad (\forall i \in I)$$

ou, $\Gamma(i)$ est le sous-ensemble de sites voisins au sommet *i*.

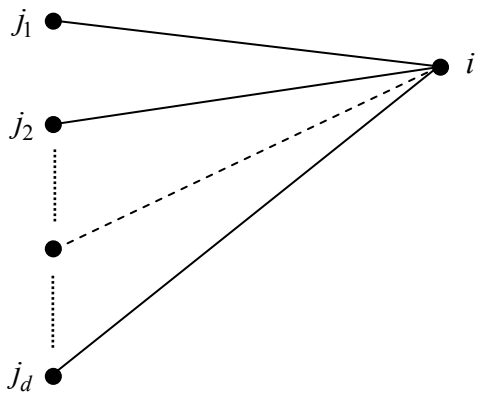


FIGURE 3-2 : Relation de couverture « l'ensemble $\Gamma(i)$ couvre la commune *i* »

La contrainte financière

Le coût total de construction des sites, doit être respecté. Cette contrainte peut s'écrire ainsi :

$$f_1y_1 + f_2y_2 + \cdots + f_my_m \leq M$$

3.3.3 Modèle mathématique de base

Le problème majeur du gestionnaire est de choisir un sous-ensemble de sites, respectant la contrainte budgétaire, afin de maximiser le pourcentage de couverture. Le problème peut s'écrire comme suit.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Z(\max) \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij} y_j \geq x_i \ , \qquad (i = 1,\ldots,n) \tag{3.2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} f_j y_j \leq M \tag{3.3}$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad (j = 1,\ldots,m) \tag{3.4}$$

$$x_i \in \{0,1\} \qquad (i = 1,\ldots,n) \tag{3.5}$$

Il s'agit d'un programme linéaire en nombres binaires. Pour le résoudre nous appliquons la composante logicielle CPLEX, (voir chapitre 4).

Description du modèle

Le critère (3.1) désigne le pourcentage de couverture à maximiser (c'est l'objectif). L'ensemble d'équations (3.2) désigne chaque commune doit être couverte par au moins une antenne. L'équation (3.3) désigne la contrainte budgétaire à respecter. Les variables de décision (3.4) et (3.5) indiquent, respectivement, l'emplacement des antennes à installer et les communes couvertes.

3.3.4 Modèle adjoint

En pratique, le problème peut se formuler autrement. Ici, on cherche à choisir un sous-ensemble de sites, qui assure un pourcentage de couverture acceptable, et le but est de minimiser le coût total d'installation des antennes. Le problème peut s'écrire comme suit.

$$\sum_{j=1}^{m} f_j y_j = Z(\min) \tag{3.6}$$

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij} y_j \geq x_i \ , \qquad (i = 1,\ldots,n) \tag{3.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geq P_{\min} \tag{3.8}$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad (j = 1,\ldots,m) \tag{3.9}$$

$$x_i \in \{0,1\} \qquad (i = 1,\ldots,n) \tag{3.10}$$

où, $P_{\min}$ est la population minimale à couvrir, imposée par le décideur.

3.3.5 Modèle d'agrégation

On agrège les deux critères (population - coût), et nous obtenons le modèle mathématique suivant :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - \lambda \sum_{j=1}^{m} f_j y_j = Z_\lambda(\max) \qquad (\lambda \geq 0) \tag{3.11}$$

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij} y_j \geq x_i \ , \qquad (i = 1,\ldots,n) \tag{3.12}$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad (j = 1,\ldots,m) \tag{3.13}$$

$$x_i \in \{0,1\} \qquad (i = 1,\ldots,n) \tag{3.14}$$

3.4 Processus de résolution

La résolution de notre problème passe par plusieurs étapes. Ces dernières peuvent être schématisées par le diagramme représenté dans la FIGURE 3-3.

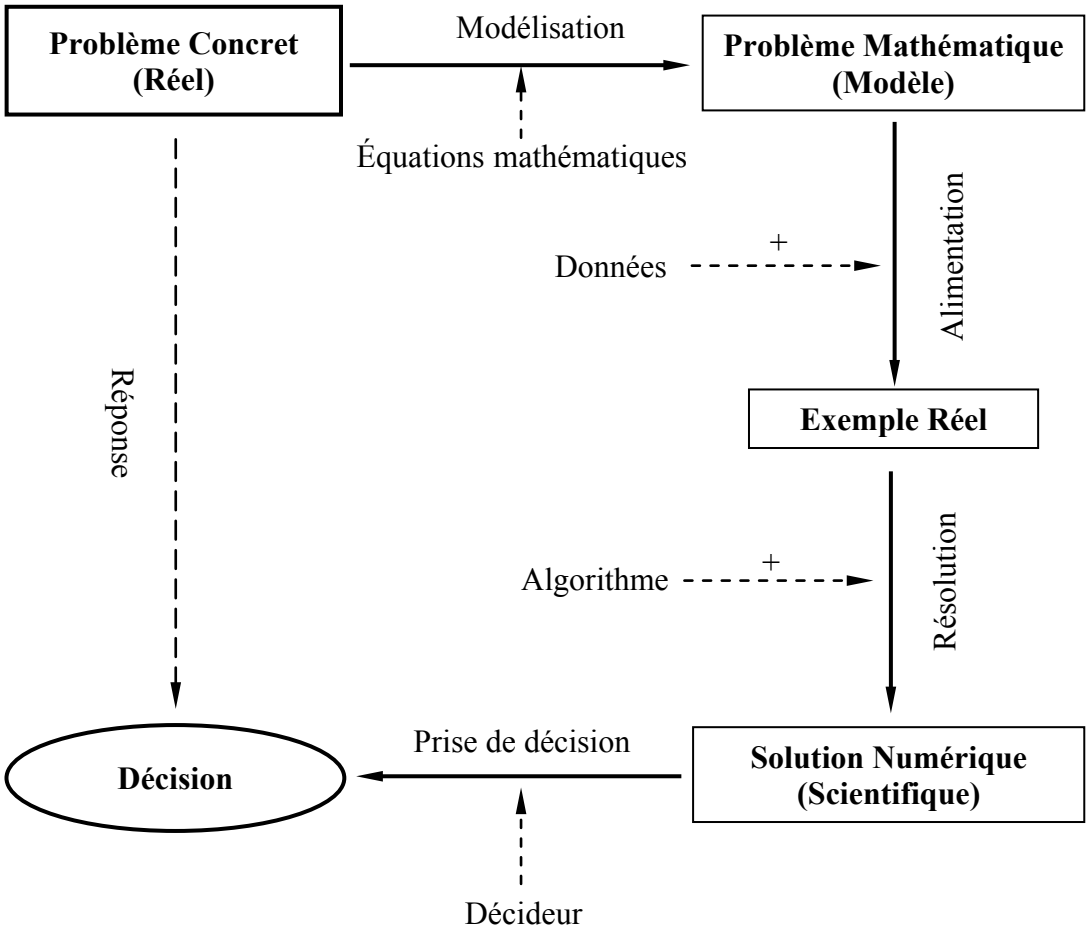


FIGURE 3-3 : Schéma conceptuel de résolution d'un problème réel.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé une formulation mathématique de base du problème. Il s'agit d'un programme linéaire en nombres bivalents (0/1). Pour le résoudre, nous allons utiliser le solveur CPLEX (voir chapitre 4). Des programmes mathématiques ont été présentés et interprétés afin de modéliser les préférences du décideur.

4. Implémentation et tests numériques

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons l'implémentation de notre approche de résolution. Nous reportons aussi des résultats numériques obtenus en testant notre programme AMPL ([8]) sur un exemple réel du problème, en utilisant la composante logicielle CPLEX.

4.2 Quelques mots sur le langage AMPL

Dans cette section, nous présentons brièvement, le langage de modélisation pour la programmation mathématique baptisé AMPL.

AMPL est l'abréviation de «A Mathematical Programming Language». C'est un langage de modélisation et de résolution de programmes d'optimisation. Son atout, est qu'il permet la séparation d'un problème d'optimisation en modèle mathématique, données et processus de résolution.

En pratique, un projet d'optimisation en vrai grandeur, se décompose en trois fichiers principaux :

- Fichier.mod : pour la description du modèle mathématique.
- Fichier.dat : pour la représentation et l'alimentation des paramètres du modèle (création d'une instance du problème).
- Fichier.run : pour l'exécution d'un script de résolution, et l'affichage des résultats obtenus sur un exemple de problème.

Algorithmes de résolution

Il existe toute une batterie d'algorithmes appelés solveurs qui sont implémentés sous le langage AMPL, on cite à titre d'exemple, CPLEX, GUROBI, LPSOLVE,…, etc. En anglais, on dit « Solvers » : des algorithmes conçus pour la résolution d'une classe de problèmes d'optimisation donnée, à savoir la programmation linéaire et non linéaire, ainsi que la programmation linéaire et quadratique en nombres entiers.

4.3 Exemple Test

Nous cherchons à couvrir une région géographique composée de $n = 15$ communes par des antennes de transmission qui peuvent être placées dans $m = 7$ sites possibles. Notre but est de maximiser le pourcentage de couverture, et ce tout en respectant le coût total d'installation des antennes M, (M = 12M$).

Dans la FIGURE 4-1, les numéros en gras désignent les sites potentiels (possibles), et ceux normales désignent les communes.

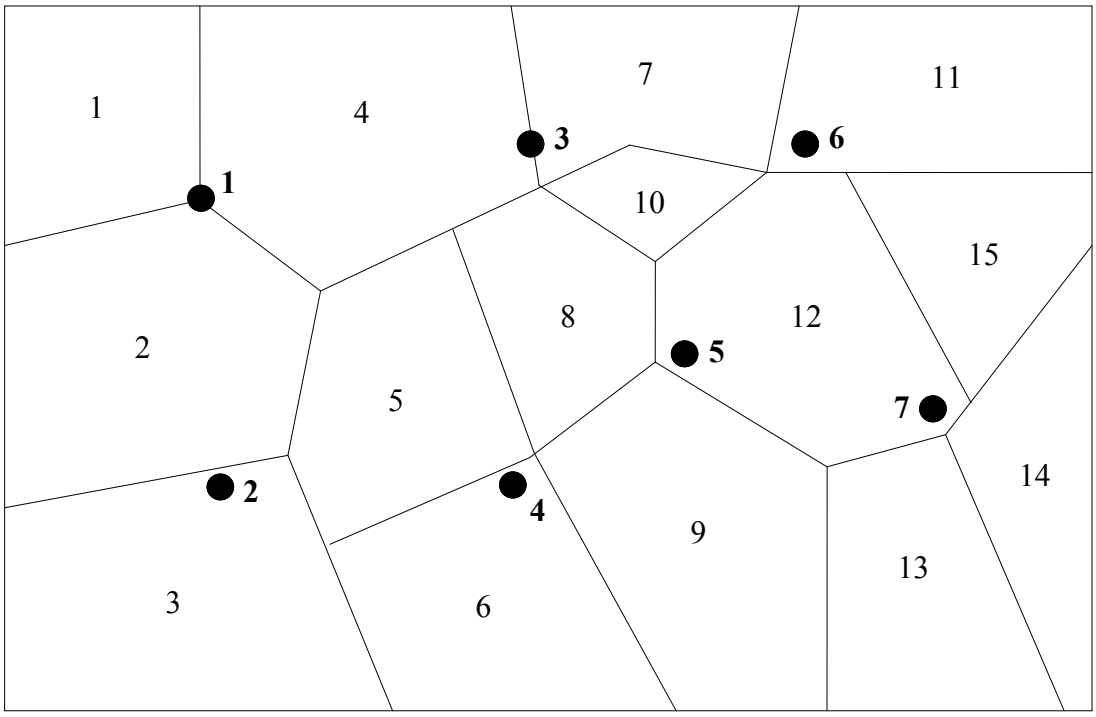


FIGURE 4-1 : Exemple test (15 communes et 7 sites potentiels).

Dans le tableau suivant, on donne la population de chaque commune.

TABLEAU 4-1 : Population (×1000) des communes.

Commune	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Population	2	4	13	6	9	4	8	12	10	11	6	14	9	3	6

Dans le tableau suivant, on donne le coût fixe, (en million de dollar), d'installation d'une antenne dans chaque site, ainsi que les communes couvertes par chaque site.

TABLEAU 4-2 : Coût fixe (en M$) et communes couvertes pour chaque antenne.

Antenne	1	2	3	4	5	6	7
Coût fixe	1.8	1.3	4.0	3.5	3.8	2.6	2.1
Communes	1 2 4	2 3 5	4 7 8 10	5 6 8 9	8 9 12	7 10 11 12 15	12 13 14 15

Graphe associé à notre exemple :

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments. Il constitue une approche permettant de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arêtes.

Notre problème peut être modélisé en termes de graphe. Il s'agit d'un graphe simple biparti non orienté. Pour faciliter la lecture de la relation de couverture, nous utilisons des flèches (voir FIGURE 4-2).

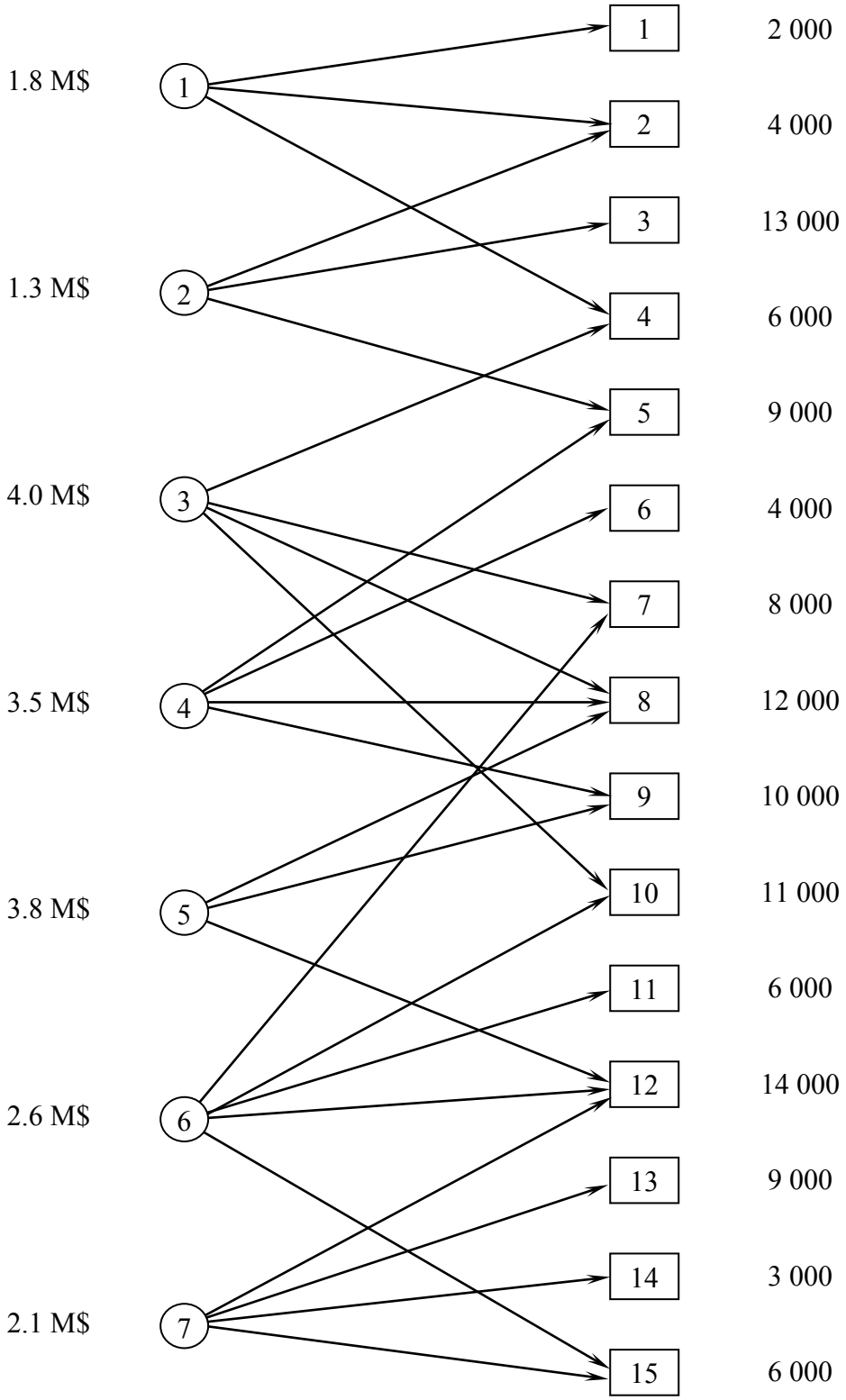


FIGURE 4-2 : Graphe biparti comportant 15 communes et 7 sites potentiels.

4.4 Résultats obtenus

Dans cette section, nous présentons les résultats numériques que nous avons obtenus sur notre exemple (voir FIGURE 4-1).

4.4.1 Qualité de couverture

Afin de quantifier et d'apprécier une couverture donné, nous avons besoin de définir une mesure ou un critère. Pour ce faire, nous adoptons le ratio suivant :

$$R(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \tag{4.1}$$

désignant la somme d'habitants couverte par apport à la somme d'habitants totale.

Objectif

Pour assurer une meilleure couverture, tout en respectant le montant M alloué à cet investissement, nous devons maximiser le ratio R.

Propriétés

- Le ratio R est une fonction linéaire en x.
- $0 \le R(x) \le 1, \quad \forall x \in \{0,1\}^n$.
- Si $R = 1$, on parle sur la couverture totale (voir FIGURE 4-5).

Par la suite, nous donnons trois représentations graphiques des solutions optimales en fonction du budget M, $M \in \{8,10,12\}$, et par la suite, nous allons généraliser cette procédure, en traçant la courbe du pourcentage $R(x)$ en fonction du budget M.

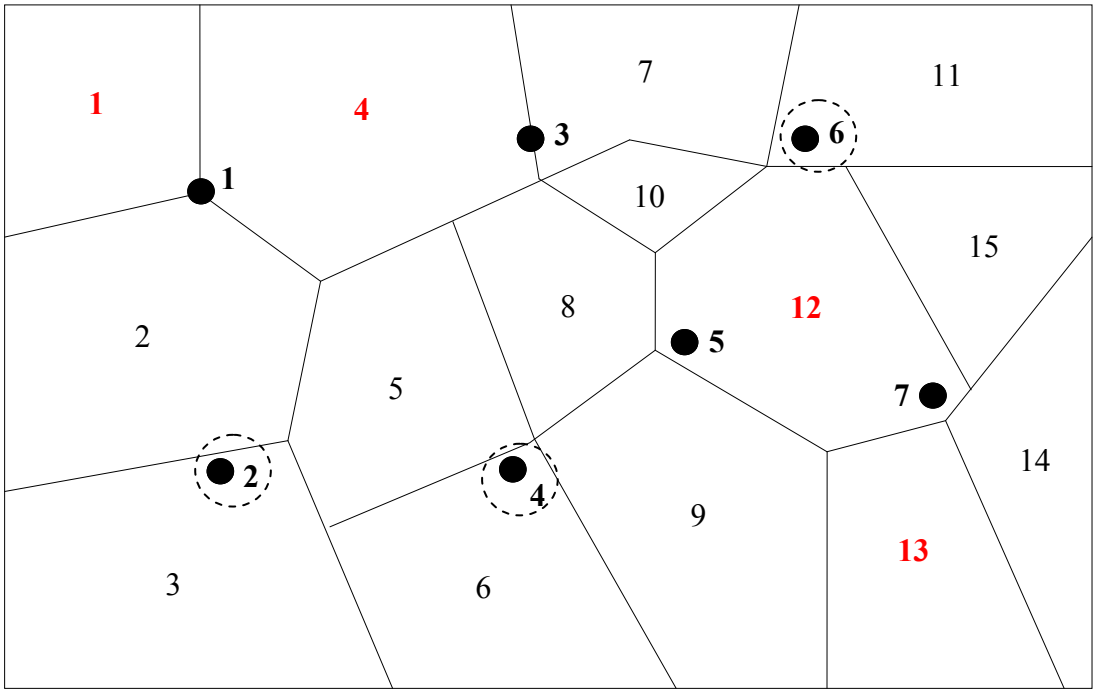


FIGURE 4-3 : Solution N°1, pourcentage de couverture est à 83%, avec $M = 8$.

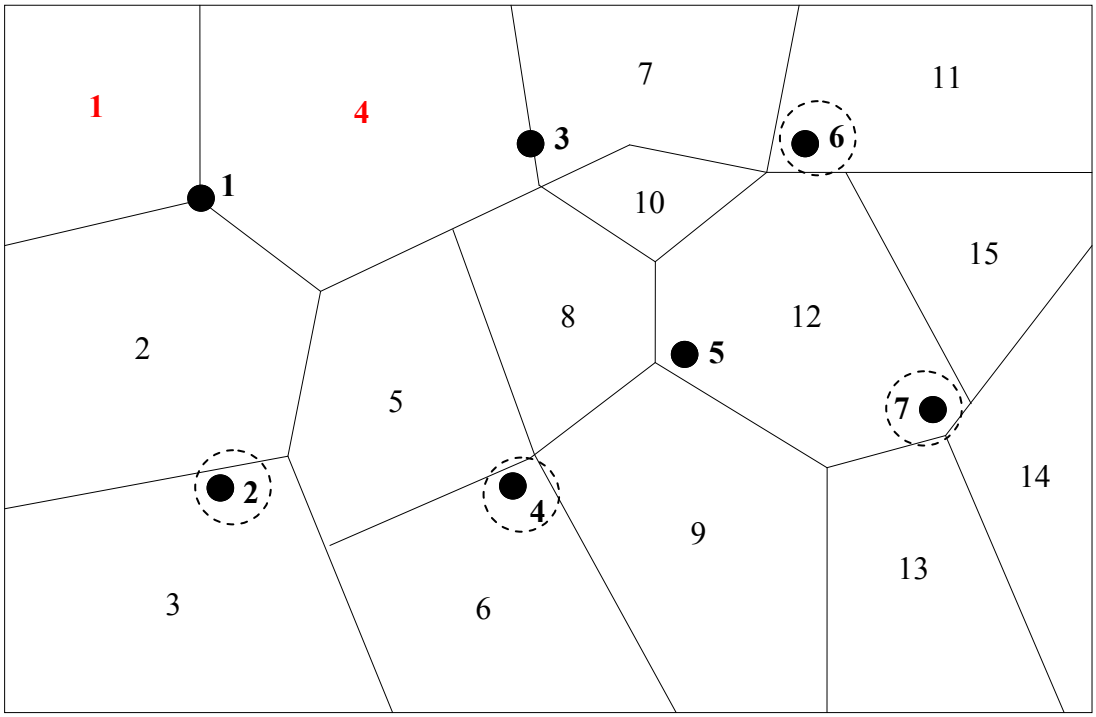


FIGURE 4-4 : Solution N°2, pourcentage de couverture est à 93%, avec $M = 10$.

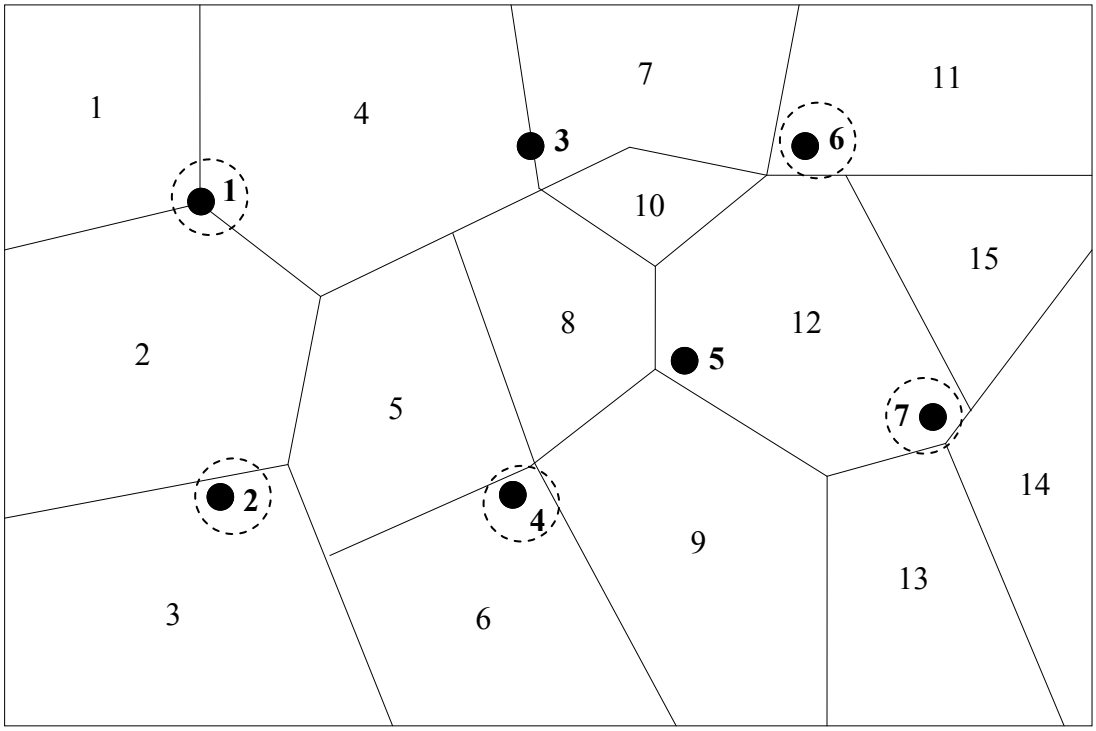


FIGURE 4-5 : Solution N°3, pourcentage de couverture est à 100%, avec $M = 12$.

4.4.2 Effet du budget *M* sur le pourcentage de couverture

Dans cette section, nous allons étudier l'effet du budget alloué au projet sur la qualité de couverture. Pour ce faire, nous résolvant la suite de programmes (3.1) – (3.5), indexés par *M*, où $M \in \{12,11.5,11,...,4.5,4\}$.

ALGORITHME 4-1 : Pourcentage de couverture, maximal.

```
1  M  = 12 ; Montan alloué à l'investissement.
   PT = 117000 ; Nombre d'habitants total.
2  Tant que (M > 0)
3  Résoudre : le programme d'optimisation (3.1)-(3.5)
4  Afficher :
                x , Communes couvertes ;
                y , Sites choisis ;
                R = Z/PT, le pourcentage de couverture ;
5  M := M - 0.5 ;
6  Fin (Tant que)
```

À l'issue de l'ALGORITHME 4-1, les résultats obtenus sont reportés dans le tableau suivant.

TABLEAU 4-3 : Effet du budget *M* sur la qualité de couverture.

Budget (en M$)	Qualité de couverture en %	Antennes installées	Communes non couvertes
12	100.00	1-2-4-6-7	aucune
11.5	**100.00**	**1-2-4-6-7**	**aucune**
11	93.16	2-4-6-7	1-4
10.5	93.16	2-4-6-7	1-4
10	93.16	2-4-6-7	1-4
9.5	**93.16**	**2-4-6-7**	**1-4**
9	82.91	2-4-6	1-4-12-13
8.5	82.91	2-4-6	1-4-12-13
8	82.91	2-4-6	1-4-12-13
7.5	**82.91**	**2-4-6**	**1-4-12-13**
7	71.79	2-4-7	1-4-7-10-11
6.5	70.94	2-6-7	1-4-6-8-9
6	70.94	2-6-7	1-4-6-8-9
5.5	60.68	2-6	1-4-6-8-9-13-14
5	60.68	2-6	1-4-6-8-9-13-14
4.5	60.68	2-6	1-4-6-8-9-13-14
4	60.68	2-6	1-4-6-8-9-13-14

Ce tableau peut être représenté par la FIGURE 4-6.

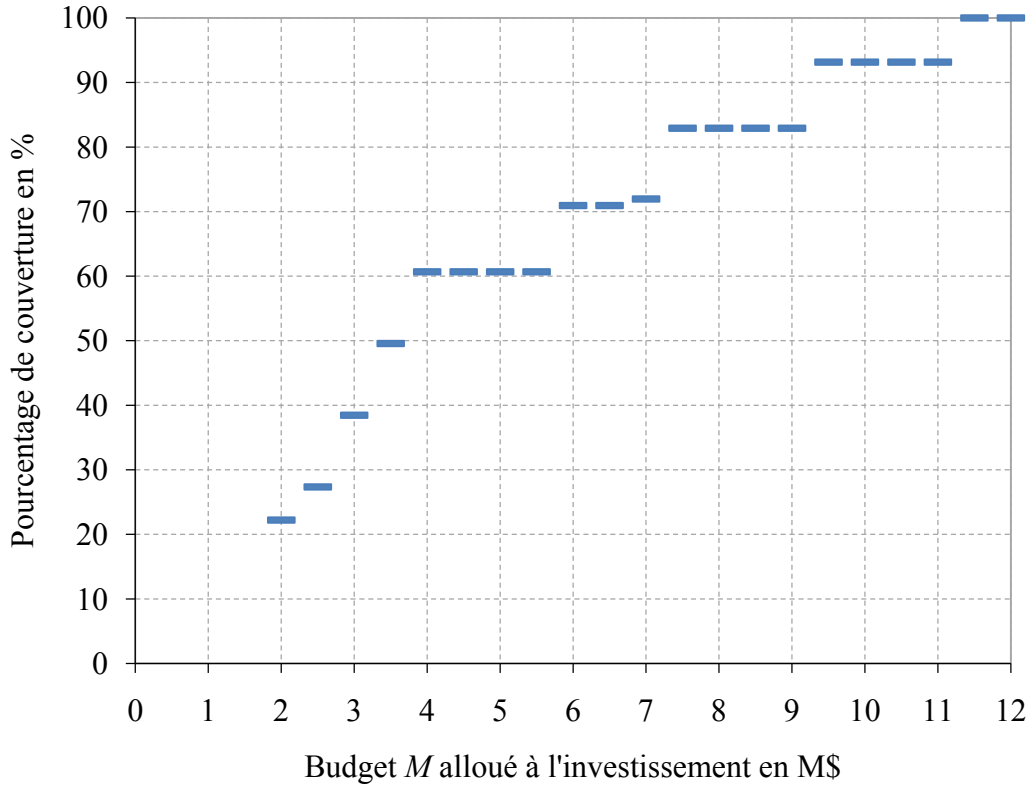


FIGURE 4-6 : Pourcentage de couverture en fonction du budget *M*.

4.4.3 Recouvrement total

Ce genre de recouvrement est un cas particulier du précédent. Dans ce cas, le décideur exige que toute commune doive être couverte. Ceci se traduit par : $x_i = 1$, pour tout $i \in I$, et par conséquent le modèle mathématique associé, peut s'écrire ainsi:

$$\sum_{j=1}^{m} f_j y_j = Z(\min) \tag{4.2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij} y_j \geq 1 , \qquad (i = 1,\ldots,n) \tag{4.3}$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad (j = 1,\ldots,m) \tag{4.4}$$

Il s'agit d'un programme de recouvrement classique, pour plus d'informations, veuillez consulter les ouvrages ([9], [14]).

4.4.4 La courbe de solutions efficaces

On fait varier le paramètre λ de 0 à 3,2 en résolvant le programme mathématique (3.11) – (3.14). Les résultats obtenus sont reportés dans le tableau suivant :

TABLEAU 4-4 : Budget et population couverte en fonction du paramètre λ .

Lambda	Budget	Population	Agrégation
0	11,3	117	117,00
0,1	11,3	117	110,08
0,2	11,3	117	103,17
0,3	11,3	117	96,25
0,4	11,3	117	89,34
0,5	11,3	117	82,42
0,6	11,3	117	75,51
0,7	11,3	117	68,59
0,8	9,5	109	62,49
0,9	9,5	109	56,67
1	7,4	97	51,71
1,1	7,4	97	47,18
1,2	7,4	97	42,65
1,3	3,9	71	39,97
1,4	3,9	71	37,58
1,5	3,9	71	35,20
1,6	3,9	71	32,81
1,7	3,9	71	30,42
1,8	3,9	71	28,04
1,9	3,9	71	25,65
2	3,9	71	23,26
2,1	3,9	71	20,88
2,2	3,9	71	18,49
2,3	3,9	71	16,10
2,4	3,9	71	13,72
2,5	3,9	71	11,33
2,6	3,9	71	8,94
2,7	3,9	71	6,56
2,8	3,9	71	4,17
2,9	1,3	26	2,93
3	1,3	26	2,13
3.1	1.3	26	1,34
3.2	1.3	26	0,54

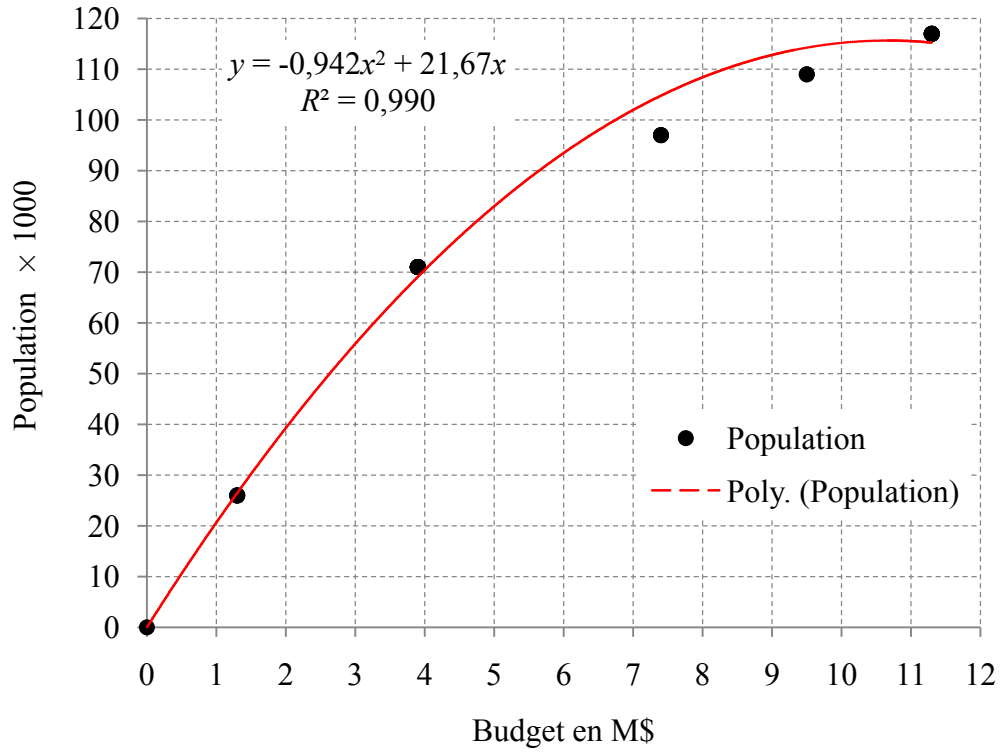


FIGURE 4-7 : La population $P(x)$ en fonction du Budget $F(y)$.

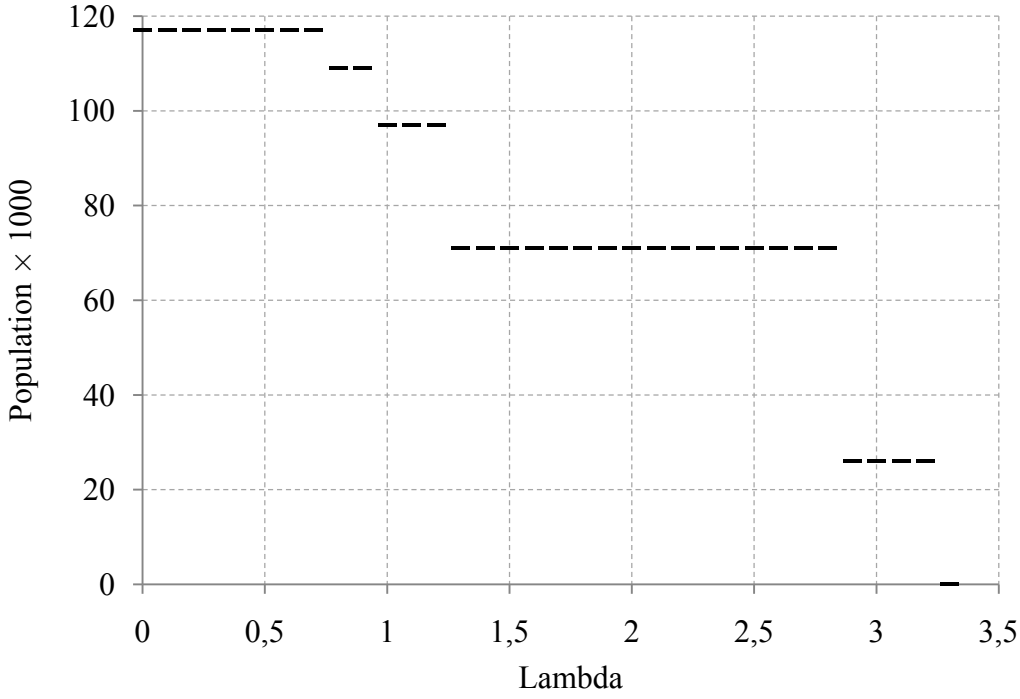


FIGURE 4-8 : La population couverte $P(x)$ en fonction de λ.

L'ALGORITHME 4-2 permet de déterminer la courbe de solutions efficaces.

ALGORITHME 4-2 : Courbe de solutions efficaces.

```
1  lambda = 0 ;
   PT = 117000 , Nombre d'habitants total.
   FT = 19.1   , Budget total en million de dollar;
2  Tant que (lambda < 3.2)
3  Résoudre : le programme d'optimisation (3.11) – (3.14)
4  Afficher :
                P(x) , Population couverte ;
                F(y) , Coût de couverture ;
                Z = P(x)-(lambda*PT/FT)*F(y), Critère d'agrégation;
5  lambda := lambda + 0.1 ;
6  Fin (Tant que)
```

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'implémentation de notre approche de résolution. Nous avons reporté aussi des résultats numériques obtenus en testant notre programme AMPL ([8]) sur un exemple réel du problème, en utilisant la composante logicielle CPLEX.

Durant notre étude, nous avons constaté que de nombreux tests numériques effectués, ont permis d'avérer les avantages de l'utilisation des coupes valides de type Chvatal-Gomory ([1], [14]) dans les différents programmes mathématiques pour la résolution de notre exemple. Les résultats numériques obtenus affirment l'efficacité de cette approche.

Conclusion

Dans la course à la performance exigée par le contexte économique actuel, la rapidité de la prise de décision peut s'avérer primordiale. C'est la raison pour laquelle les gestionnaires et les ingénieurs cherchent toujours à résoudre leurs problèmes par des méthodes efficaces et efficientes (précises et rapides).

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés au problème de recouvrement optimal d'une région géographique par des antennes d'émission GSM. Il s'agit de couvrir une région ou une population donnée par des antennes placées dans des sites potentiels choisis et fixés à l'avance par des ingénieurs. Le problème est de déterminer un sous-ensemble d'antennes ainsi que leurs emplacements dans des sites appropriés afin de couvrir au mieux la région initiale, et ce tout en respectant les contraintes technologiques, ainsi que la contrainte budgétaire allouée à ce projet.

Ce problème d'optimisation est formulé comme un programme linéaire en nombres binaires. Pour le résoudre, nous avons utilisé la composante logicielle CPLEX.

La démarche scientifique que nous avons adoptée, se résume comme suit.

En premier lieu, nous avons posé le problème de recouvrement des antennes de transmission GSM en vue de couvrir au mieux une région géographique ou une population donnée.

Ensuite, nous avons présenté des programmes mathématiques modélisant ce problème.

Au final, nous avons élaboré et implémenté un programme informatique codé en langage de modélisation AMPL qui utilise le solveur CPLEX pour la résolution d'une instance du problème. Les résultats numériques obtenus ont été apportés et commentés.

Durant notre étude, nous avons constaté que de nombreux tests numériques effectués pour la résolution de nos différents programmes mathématiques, ont permis d'avérer les avantages de l'utilisation des coupes planes de type Chvatal-Gomory ([1], [5], [9], [14]). Les résultats obtenus affirment l'efficacité de cette approche.

Ces résultats nous conduisent à envisager quelques perspectives. Ces idées s'articulent autour les points suivant :

- Proposer une formulation serrée au problème, en cherchant d'introduire d'autre type de coupes valides.
- Implémenter une heuristique ou une méthode approchée permettant de résoudre le problème en vrai grandeur (lorsque le nombre de communes ou le nombre de sites sont assez grands).

Nous espérons que notre but est atteint, et le travail que nous avons réalisé dans ce mémoire, nous a permis d'approfondir nos connaissances théoriques et pratiques dans le domaine de l'optimisation numérique et d'acquérir des connaissances dans le domaine de la logistique et de l'informatique.

A. Codes AMPL

A.1 Fichier des données (paramètres)

Ce fichier est conçu pour regrouper les données caractérisant un exemple du problème.

location.dat | location.mod | location.run

```
data;

param    : I:    P   :=
           1     2000
           2     4000
           3    13000
           4     6000
           5     9000
           6     4000
           7     8000
           8    12000
           9    10000
           10   11000
           11    6000
           12   14000
           13    9000
           14    3000
           15    6000  ;

param    : J:    F   :=
           1    18
           2    13
           3    40
           4    35
           5    38
           6    26
           7    21     ;

set   E   :=
        (1,*)   1   2   4
        (2,*)   2   3   5
        (3,*)   4   7   8   10
        (4,*)   5   6   8   9
        (5,*)   8   9   12
        (6,*)   7   10  11  12  15
        (7,*)   12  13  14  15      ;
```

FIGURE 4-9 : Données (Paramètres).

A.2 Fichier du modèle mathématique

Le fichier sert à écrire le modèle mathématique du problème.

location.dat | location.mod | location.run

```
#Modèle de Location des antennes GSM

set I; param n := card(I);      # communes (X)
set J; param m := card(J);      # antennes (Y)
set E within {J,I};             # communes couvertes (les arcs: E)

param P{I};                     # Populations des communes
param F{J};                     # cout fixe d'instalation des antennes (en M$)
param M default 100;            # Budjet(Montant) alloué à l'investisement

#check: sum{j in J,(j,i) in E}P[i] >= sum{i in I}P[i] ;   #vérification


var x{I} >=0,<=1;               # 1 si la commune i est couverte, 0 sinon
var y{J} binary;                # 1 si l'antenne j est instalée,  0 otherwise

var BUDGET  = sum{j in J}F[j]*y[j];
var POPULA  = sum{i in I}P[i]*x[i];

param PT := sum{i in I}P[i];
param BT := sum{j in J}F[j];
param lambda default 0;

maximize             FUNC :  POPULA - lambda *trunc(PT/BT)*BUDGET  ;

subject to COVCON{i in I}  :  sum{(j,i) in E} y[j]   >=  x[i]  ;
#subject to BUDCON         :  BUDGET <=  M ;
#subject to COUPE : sum{j in J,(j,i) in E}P[i] >= sum{i in I}P[i] ;
```

FIGURE 4-10 : Modèle mathématique.

A.3 Script de résolution et affichage des résultats

Ce fichier est conçu pour l'exécution d'un solveur (algorithme) donné, en affichant des résultats numériques relatifs à notre exemple.

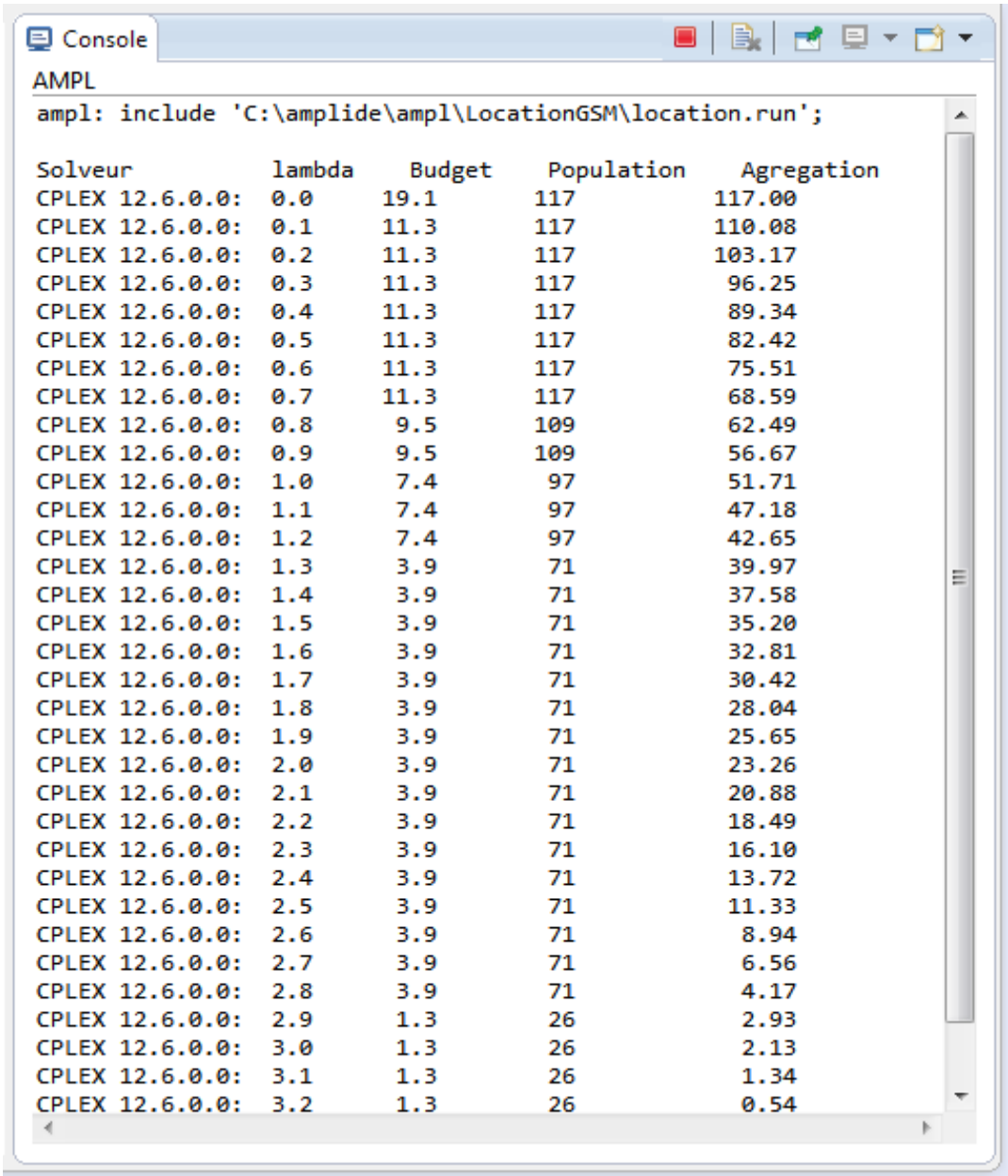


FIGURE 4-11 : Console AMPL.

Liste des symboles et des abréviations

$\mathbb{Z}$	L'ensemble des nombres entiers.
$\{0,1\}^n$	L'ensemble produit cartésien : $\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}}_{n\ fois}$.
$\lvert A \rvert$	Le nombre d'éléments de l'ensemble A.
$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$	Un ensemble de sommets.
$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$	Un ensemble d'arêtes.
$\Gamma(v)$	L'ensemble de voisins du sommet v.
$d(v) = \lvert \Gamma(v) \rvert$	Le degré du sommet v.
$E(V)$	L'ensemble d'arêtes induites par E sur l'ensemble V.
$e = (u, v)$	Une arête. Les sommets u et v sont les extrémités de l'arête e.
$G = (V, E)$	Un graphe simple non orienté.
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$	le vecteur représentatif d'un ensemble de taille n.
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	La somme : $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.
x^t	Le vecteur transposé de x.
$x^t y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$	Le produit scalaire du vecteur x et y.
$Z(\max)\,;\ Z(\min)$	Maximiser la valeur Z ; Minimiser la valeur Z.

Références

[1] V. Chvatal, Linear Programming. Freeman and Co, 1978.

[2] G. Cohen, Convexité et Optimisation. École Nationale des Ponts et Chaussées et INRIA, 2000.

[3] G. Cohen, Optimisation de grands systèmes. Cours de DEA. Cermics-École nationale des Ponts et Chaussées et INRIA, 2003.

[4] J.C. Culioli, Introduction à l'optimisation, École Nationale Supérieure des Mines de paris, Centre Automatique et Système, Fontainebleau, Ellipse, 1994.

[5] G.B. Dantzing, Linear Programming and Extensions. Princeton. University Press, 1964.

[6] Y. Dodge, S. Gonano-Weber et J.P. Renfer, Optimisation Appliquée, Springer-Verlag France, 2005.

[7] D. Dubois, Modèles mathématiques de l'imprécis et de l'incertain en vue d'application aux techniques d'aide à la décision. Thèse soutenue à l'Université de Grenoble I, 1983.

[8] R. Fourer, D. M. Gay and B. W. Kernigham : A Modeling language for Mathematical Programming. Second Edition, Thomson, USA, 2003.

[9] M. Gondran et M. Minoux, Graphes at algorithms. Eyrolles, 1979.

[10] G. Laporte, Y. Nobert Y and S. Taillefer. Solving a family of multi-depot vehicle routing and location-routing problems. Transportation Science, 22 : 172. 1988.

[11] M. Minoux, Programmation mathématique, Théorie et algorithmes, Collection Technique et Scientifique des Télécommunications, Dunod, Paris, 1983.

[12] J. Nocedal and S. J. Wright, Numerical Optimization, Springer-Verlag, New York, 1999.

[13] M. Sakarovitch, Graphes et Programmation linéaire : Méthodes Mathématiques et Algorithmiques, Programmation Discrète, Hermann, Paris, 1984.

[14] M. Sakarovitch, Optimisation Combinatoire : Méthodes Mathématiques et Algorithmiques, Programmation Discrète, Hermann, Paris, 1984.

[15] P. Toth, D. Vigo, The vehicle routing problem. SIAM, Philadelphia Monograph on Discrete Mathematics and Applications, 2000.