RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministére de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique



MÉMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour obtenir le diplôme de master en mathématiques

SPÉCIALITÉ : **ANALYSE MATHÉMATIQUE ET APPLICATIONS**

Intitulé :

COMPACITÉ DES OPÉRATEURS DE TOEPLITZ SUR L'ESPACE DE BERGMAN

Par : **LAROUCI DILMI djamel**

Devant le Jury composé de :

LEMDANI Rachid	M.C.A	Université de Médéa	Président
AYADI Hocine	M.C.A	Université de Médéa	Examinateur
TOUMACHE Kamel	M.C.B	Université de Medea	Encadreur

Année Universitaire : 2021 /2022

Remerciements

Au terme de ce mémoire je tiens à remercier tout naturellement en premier lieu ***ALLAH*** *le tout puissant qui nous a donné la force, le courage et la patience de bien terminer ce travail*

Je tiens à remercier aussi mes parents et toute ma famille qui m'ont soutenu de toutes les manières possibles depuis mes débuts jusqu'à maintenant.

Ce travail a été réalise sous la direction de monsieur TOUMACHE Kamel qu'il trouve ainsi l'expression de ma profonde reconnaissance pour sa patience, et surtout pour sa confiance, ses remarques et ses conseils, sa disponibilité et sa bienveillance.

Qu'il trouve ici le témoignage de ma profonde gratitude.

Je voudrais également remercier les membres du jury pour avoir accepter d'évaluer ce travail et pour toutes leurs remarques et critiques, ainsi que l'ensemble des enseignants de l'université Dr.YAHIA FARES de Médéa, en particulier les enseignants du département de Mathématiques et Informatique. et également à toutes les personnes qui nous ont aidés de près ou de loin.

LAROUCI DILMI djamel.

Table des matières

Notations **5**

Introduction **7**

1 Espaces de Hardy et de Bergman **8**
1.1 Espaces de Hardy 8
1.1.1 Espaces de Hardy 8
1.1.2 Limite radiale des fonctions de H^p, $0 < p \leq \infty$ 10
1.1.3 Projection orthogonale et noyau reproduisant 10
1.2 Espaces de Bergman 14
1.2.1 Espaces de Bergman 14
1.2.2 Noyau de Bergman 15
1.2.3 Projection de Bergman 18

2 Opérateurs de Toeplitz sur les espaces de Hardy et de Bergman **19**
2.1 Opérateur de Toeplitz sur l'espace de Hardy 19
2.1.1 Opérateurs bornés 19
2.1.2 Opérateurs Shift. 20
2.1.3 Matrices de Toeplitz. 21
2.1.4 Opérateurs de Toeplitz (sur l'espace de Hardy). 21
2.2 Opérateur de Toeplitz sur l'espace de Bergman 23
2.2.1 Opérateurs de Toeplitz (sur l'espace de Bergman). 23
2.2.2 Transformée de Berezin 27
2.2.3 Opérateur de Toeplitz à symboles quasihomogènes et radials 30

3 Compacité de l'opérateur de Toeplitz **35**
3.1 Mesure de Carleson 35
3.2 Opérateur de Toeplitz borné 37
3.3 Opérateur de Toeplitz compact 40
3.4 Classes de Schatten-von Neumann. 47

3.5 Quelques conditions suffisantes pour que l'opérateur de Toeplitz radial soit dans la classe de Schatten-von Neumann $\mathcal{S}_\varphi$, $0 < p < \infty$ 50

Bibliographie. **54**

Notations

$\mathbb{C}$	l'ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{T}$	le cercle unité.
D	le disque unité ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$.
$\overline{D}$	le disque unité fermé du plan complexe $\mathbb{C}$.
$L^2(\mathbb{T})$	l'espace de Lebesgue usuel.
$\widehat{\mathbb{C}}$	$= \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
$\langle , \rangle$	produit scalaire de $L^2(\mathbb{T})$.
$A(D)$	espace des fonctions Analytiques sur D.
$d\mu$	la mesure de lebesgue normalisée sur le cercle unité.
dA	la mesure de Lebesgue normalisée sur D .
$L(H)$	l'ensemble des opérateurs linéaires borné sur l'espace H.
$\widehat{f}(n)$	n-ème coefficient de Fourier de f.
f^*	la limite radiale de f sur $\mathbb{T}$. ll
P	projection orthogonale de L^2 sur H^2 .
k_λ	noyau reproduisant de H^2.
S	opérateur de shift sur H^2.
T_φ	opérateur de Toeplitz sur H^2 de symbole φ.
K_u^2	l'espace modèle.
P_u	projection ortogonale de L^2 sur K_u^2.
k_λ^u	noyau reproduisant de K_u^2.
C	opérateur de conjugaison sur un espace de Hilbert.
S_u	opérateur de shift sur K_u^2.
S_u^α	opérateur de shift généralisé sur K_u^2, pour $\alpha \in \overline{D}$.
$\mathcal{S}_p(H_1, H_2)$	la classe de Schatten-von Neumann.
$\mathcal{L}(H_1, H_2)$	l'espace des opérateurs linéaires bornés de H_1 dans H_2.

Résumé

On définit l'espace de Bergman $L^2_a(D)$ comme étant l'ensemble des fonctions analytiques sur D qui sont de carré intégrable par rapport à la mesure $dA(z)$.

$$L^2_a(D) = A(D) \cap L^2(D).$$

Soit φ une fonction bornée sur D, on définit l'opérateur de Toeplitz à symbole φ par

$$\begin{aligned} T_\varphi : L^2_a(D) &\to L^2_a(D) \\ f &\mapsto P(\varphi f). \end{aligned}$$

où P est la projection Bergman de $L^2(D, dA)$ vers $L^2_a(D)$.

Le but de ce mémoire est l'étude de la compacité de l'opérateur de Toeplitz à symbole φ et à symboles quasihomogènes et radials sur l'espace de Bergman , nous exposons les différentes traveaux concernant ces propriétés.

Mots clés :
Espace de Hardy, Espace de Bergman, Opérateur de Toeplitz, classe de Schatten-von Neumann, symbole quasihomogene

Introduction

La théorie des opérateurs de Toeplitz c'est apparue dans le début du ventème siècle dans l'article d'Otto Toeplitz de 1911 "Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlichvie-len Veriinderlichen. J. Teil : Theorie des L- Formen 5 (Math. Annalen, 70 (1911),351-376), qui contient une théorie spectrale des formes de Toeplitz (Tp, p) et des opérateurs de Laurent $L = (t_{i-j})_{i,j\in Z}$ dans l'espace $l^2(\mathbb{Z})$ =: $\{x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}} : x_j \in \mathbb{C}, \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|x_j\right|^2 = \|x\|^2 < +\infty\}$, (et en fait, aussi des formes quadratiques de Laurent).

L'étude des opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman (l'espace des fonctions holomorphes, p-intégrables sur le disque du plan complexe) a commencé dans les années 1980, des résultats sur le produit des opérateurs, la caractérisation des opérateurs bornés, les opérateurs compacts ainsi que la classe de Schatten(classe des operateurs p-compact) ont étés obtenus.

Ce mémoire est consacré à l'étude de compacité des opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman (en particulier la compacité des opérateurs de Toeplitz à symbole quasihomogène ou radial), en passant à quelques propriétés des opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Hardy, et expose les résultats de [24] en premier lieu, les travaux de [6], [15], [4], [14], [4] et quelques résultats de [28].

Le premier chapitre est consacré aux notions préliminaires sur les deux espaces de Hardy et de Bergman, le deuxième sur la définition de l'opérateur de Toeplitz et quelques propriétés sur les deux espaces.

En fin, et dans le troisième chapitre, nous étudions la compacité des opérateurs des Toeplitz sur l'espace de Bergman, suivant le symbole de l'opérateur en exposons les résultats des références cités en haut.

Chapitre 1

Espaces de Hardy et de Bergman

1.1 Espaces de Hardy

1.1.1 Espaces de Hardy

Soient $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ le disque unité du plan complexe $\mathbb{C}$
et $\partial D = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ le cercle unité du plan complexe $\mathbb{C}$ et $d\mu$ la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle $\mathbb{T}$ tel que : $d\mu(\theta) = \frac{d\theta}{2\pi}$ de sorte que $\mu(\mathbb{T}) = 1$.

On note par $A(D)$ l'ensemble des fonctions analytiques et $L^2(\mathbb{T})$ est l'espace de lebesgue usuel sur $\mathbb{T}$ muni de produit scalaire définie par :

$$< f, g >= \int_{\mathbb{T}} f\overline{g} d\mu.$$

L'espace de Hardy H^2 est l'ensemble des fonctions $f \in L^2(\mathbb{T})$.
Où les coefficients de Fourier $\widehat{f}(n)$ sont nulles lorsque n est négative,

$$\widehat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})(e^{-in\theta})\frac{d\theta}{2\pi}.$$

On ecrit :

$$H^2 = \{f \in L^2(\mathbb{T}), \widehat{f}(n) = 0 \quad n < 0\}.$$

On identifie H^2 sur $\mathbb{T}$ sous l'espace des fonctions analytiques $f \in A(D)$ sur D par :

$$H^2 = \Big\{ f \in A(D) : \|f\|^2 = \sup_{0\le r\le 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} < \infty \Big\},$$

et

$$H^2 = \Big\{ f \in A(D)\ ,\ \sup_{z\in D} |f(z)| < \infty \Big\}.$$

L'identité classique de Littlewood-Paley [12], donné par

$$\|f - f(0)\|^2_{H^2} = 2 \int_D |f'(z)|^2 log \frac{1}{z} dA(z) < \infty.$$

Un espace de Hilbert H des fonctions analytiques sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, est un espace de Hilbert à noyau reproduisant si pour chaque$\lambda \in \Omega$, il existe une fonction $k_\lambda \in H$ tel que $f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle_H$pour tout $f \in H$.
Touts les espaces classiques de Hilbert des fonctions analytiques sur le disque (par exemple Hardy, Bergman...) admettent le noyau reproduisant (voir [11, 17, 27] pour plus de détails).

L'espace de Hardy H^2 admet le noyau reproduisant donné par la formule :

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1 - \overline{\lambda} z}, \quad \lambda, z \in \overline{D},$$

et

$$f(z) = \langle f, k_z \rangle \quad f \in H^2,$$

donc la projection orthogonale P de L^2 sur H^2 est donnée par :

$$Pf = \langle f, k_\lambda \rangle, \qquad f \in L^2(\mathbb{T}), \qquad \lambda \in D,$$

où l'opérateur P est donné par l'intégrale de Cauchy :

$$(Pf)(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(k)}{1 - \overline{k}_z} dm(k), \quad z \in D \quad f \in L^2(\mathbb{T}).$$

De plus $P(\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\theta}) = \sum_0^{+\infty} a_n e^{in\theta}$ clairement $\|Pf\| \le \|f\|$ pour l'opérateur de shift sur H^2 est défini par :

$$S[f](z) = zf(z), \quad f \in H^2,$$

avec son adjoint $S^* : H^2 \longrightarrow H^2$ défini par :

$$S^*[f](z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}, \quad f \in H^2.$$

1.1.2 Limite radiale des fonctions de H^p, $0 < p \leq \infty$

Théorème 1.1 *Pour $p \in]0,\infty]$, supposons que la fonction f non identiquement nulle appartienne à $H^p(D)$, alors $f^*(e^{i\theta}) \neq 0$, μ-presque partout.*

Par conséquent, si $f, g \in H^p(D)$, telles que $f^*(e^{i\theta}) = g^*(e^{i\theta})$ sur un sous-ensemble de $\mathbb{T}$ de mesure de Lebesgue strictement positive, nécessairement $f = g$.

Proposition 1.1 *Pour $p \in]0,\infty]$, supposons que la fonction f non identiquement nulle appartienne à $H^p(D)$, alors la limite radiale $f^* \in L^p(\mathbb{T})$ telle que* $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$.

D'aprés les travaux de Fatou et de Riesz [20, 16], on peut donner le lemme suivant qu'il définit bien la limite radiale.

Lemme 1.1 *Soit $f \in H^p(D)$ l'ensemble des fonctions analytiques bornées sur D muni de la norme essentielle $\|.\|_\infty$, alors, $f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\longmapsto 1^-} f(re^{i\theta})$ existe μ-pp et appartient à $L^\infty(\mathbb{T})$.*

Et d'aprés aussi le théorème de Fatou : $f \in H^2$ admet une unique limite radiale :

$$f^*(k) = \lim_{r\longrightarrow 1^-} f(rk) \quad \text{m-p.p}, \quad k \in \mathbb{T}.$$

Aussi puisque $f \in H^2$, on a $f^* \in L^2(\mathbb{T})$ et $\widehat{f^*}(n) = 0, \forall n < 0$ et $log|f^{ast}| \in L^1(\mathbb{T})$ (voir [22]).

Corollaire 1.1 *Si $f \in H^1(D)$ alors* $\lim_{r\longmapsto 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})|d\theta = 0.$

Théorème 1.2 *Pour $p \in]0,\infty]$, soit $f \in H^p(D)$, alors $\|f^*\|_p = \|f\|_p$.*

1.1.3 Projection orthogonale et noyau reproduisant

Proposition 1.2 *Soit $\lambda \in D$.*
L'application $\Phi_\lambda : f \longmapsto f(\lambda)$, est une forme linéaire bornée sur H^2.

Démonstration . La linéarité est claire, on vérifie la bornitude :
Soit $f \in H^2$, $f = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, on a

$$\begin{aligned} |f(\lambda)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||\lambda|^n \\ &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} \textit{(cauchy-Schwarz)} \\ &= \frac{\|f\|}{\sqrt{1-|\lambda|^2}}. \end{aligned}$$

D'aprés le théorème de représentation de Riesz [16], on a le théorème suivant.

Théorème 1.3 *Pour $\lambda \in D$, il existe une fonction unique $K_\lambda \in H^2$ telle que*

$$\Phi_\lambda(f) = \langle f, K_\lambda \rangle,$$

nous allons donner la formule explicite de K_λ.

Proposition 1.3 *Soit $\lambda \in D$,*

$$K_\lambda(z) = \frac{1}{1-\overline{\lambda}z}, \quad z \in D,$$

et

$$\|K_\lambda\| = \frac{1}{\sqrt{1-|\lambda|^2}}.$$

Démonstration . Soit $\lambda \in D$, la fonction $z \longmapsto (1-\overline{\lambda}z)^{-1}$ est dans H^2 puisque

$$\frac{1}{1-\overline{\lambda}z} = \sum_{n\geq 0} (\overline{\lambda})^n z^n,$$

et

$$\begin{aligned} \| \sum_{n\geq 0} (\lambda)^n z^n \|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} |\overline{\lambda}|^{2n} \\ &= \frac{1}{1-|\lambda|^2} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Soit $f \in H^2$ telle que $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, on a

$$\begin{aligned} < f, \frac{1}{1-\overline{\lambda}z} > &= \sum_{n\geq 0} a_n \overline{(\overline{\lambda})^n} \\ &= \sum_{n\geq 0} a_n \lambda^n \\ &= f(\lambda). \end{aligned}$$

D'aprés le théorème précédent (1.1.3) K_λ est unique, donc $K_\lambda(z) = \frac{1}{1-\overline{\lambda}z}$ pour tout $z \in D$, de plus :

$$\begin{aligned}\|K_\lambda\|^2 &= \langle K_\lambda, K_\lambda\rangle \\ &= \sum_{n\geq 0} (\overline{\lambda})^n \overline{(\overline{\lambda})^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{2n} \\ &= \frac{1}{1-|\lambda|^2}.\end{aligned}$$

On dit que K_λ est le noyau de Cauchy-Szego ou on l'appelle souvent le noyau reproduisant pour H^2.
On peut encore retrouver K_λ à partir de n'importe quelle base hilbertienne

$$K_\lambda(z) = \sum_{n\geq 0} e_n(z)\overline{e_n(\lambda)}.$$

Proposition 1.4 (Formule de l'intégrale de Cauchy) .
Soit $\lambda \in D$, pour $f \in H^2$

$$f(\lambda) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\xi)}{1-\lambda\overline{\xi}} d\mu(\xi),$$

et pour $n \geq 0$

$$\frac{d^n f}{dz^n}(\lambda) = < f, \frac{d^n K_\lambda}{dz^n} >,$$

où $\frac{d^n K_\lambda}{dz^n}(z) = \frac{n!\overline{\lambda}^n}{(1-\overline{\lambda}z)^{n+1}}$ la dérivée n-ième de K_λ.

Démonstration .
On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \Phi_\lambda(f) \\ &= < f, K_\lambda > \\ &= \int_{\mathbb{T}} f(\xi)\overline{K_\lambda(\xi)} d\mu(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\xi)}{1-\lambda\overline{\xi}} d\mu(\xi).\end{aligned}$$

Comme K_λ est analytique sur D, elle est développable en série entière sur D avec :

$$K_\lambda(z) = \frac{1}{1-\overline{\lambda}z}, \quad (z \in D)$$
$$= \sum_{n\geq 0} (\overline{\lambda}z)^n, \quad (z \in D).$$

Il est facile de vérifier que $\frac{d^n K_\lambda}{dz^n}(z) = \frac{n!\overline{\lambda}^n}{(1-\overline{\lambda}z)^{n+1}}$, donc :

$$< f, \frac{d^n K_\lambda}{dz^n} >= n! \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\xi)}{(1-\lambda\overline{\xi})^{n+1}} d\mu(\xi).$$

Rappelons que pour chaque fonction f dans H^2, la limite radiale f^* de f existe presque partout et est un élément de L^2, donc la projection P de L^2 sur H^2 peut être exprimée en terme de noyau de Cauchy.
Autrement dit, on a :

$$p[f](z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\xi)}{1-z\overline{\xi}} du(\xi).$$

Proposition 1.5 *La famille $\{K_\lambda : \lambda \in D\}$ est linéairement indépendant.*

Démonstration . Soient $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \subset D$, deux à deux distincts et on suppose que :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i K_{\lambda_i} = 0, \quad où \quad (\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \subset C.$$

Soit $f \in H^2$,

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_i f(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_i \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\xi)}{1-\lambda_i\overline{\xi}} d\mu(\xi)$$
$$= \int_{\mathbb{T}} f(\xi) \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{\alpha}_i}{1-\lambda_i\overline{\xi}} du(\xi)$$
$$= \int_{\mathbb{T}} f(\xi) \sum_{i=0}^{n} \alpha_i K_{\lambda_i}(\xi) d\mu(\xi)$$
$$= 0.$$

D'après le théorème d'interpolation de lagrange, il existe un polynome $\mathcal{P}$ tel que $\mathcal{P}(\lambda_i) = \alpha_i$ pour tout $0 < i < n$, donc

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_i \mathcal{P}(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2$$
$$= 0.$$

d'où $\alpha_i = 0$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$.

1.2 Espaces de Bergman

1.2.1 Espaces de Bergman

Définition 1.1 *On définit l'espace de Bergman $L^2_a(D)$ comme étant l'ensemble des fonctions analytiques sur D qui sont de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue normalisée sur D,*

$$dA(z) = \frac{1}{\pi} dxdy = \frac{1}{\pi} r dr d\theta.$$

Et on ecrit

$$L^2_a(D) = A(D) \cap L^2(D).$$

Avec :
- $A(D)$: l'ensemble des fonctions analytiques sur D,
- L^2_a : l'ensemble de carrée integrable sur D.

On considère sur L^2_a la norme $\|.\|_2$ associée au produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_D f(z)\overline{g(z)}\, dA(z), \quad \text{pour tous } f, g \in L^2_a.$$

Lemme 1.2 *Soit $\mathcal{C}(D)$ l'espace des fonctions continues sur D, pour tout compact K de D, l'application restriction définie par :*

$$\begin{array}{rcl} (L^2_a(D), \|.\|_2) & \to & (\mathcal{C}(D), \sup_{z \in K} |.|) \\ f & \to & f_K \end{array}$$

est continue.

Lemme 1.3 *Soit $f \in L^2_a$ alors pour tout $z \in D$, on a*

$$f(z) \leq \frac{1}{(1-|z|)^2} \|f\|_2.$$

Démonstration . Pour $z \in D$, on pose $r_z = 1 - |z|$, en utilisant la propriété de la moyenne, on a

$$f(z) = \frac{1}{{r_z}^2} \int_{|z-w| \leq r_z} f(w)\, dA(w)$$

d'où

$$|f(z)| \leq \frac{1}{{r_z}^2} \int_{|z-w| \leq r_z} f(w)\, dA(w) \leq \frac{\|f\|_2}{{r_z}^2} = \frac{\|f\|_2}{(1-|z|)^2}.$$

Proposition 1.6 *L_a^2 est un sous espace fermé de $L^2(D, dA)$.*

Démonstration . Soit $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_2$ dans $L_a^2(D)$, donc, la suite $(f_n)_n$ est aussi de Cauchy pour la topologie de $A(D)$, soit K un compact de D, alors par le lemme précédent, on a

$$\sup_{z \in K} |f_n(z) - f_m(z)| \leq \sup_{z \in K} \frac{\|f_n(z) - f_m\|_2}{(1-|z|)^2}.$$

Comme $A(D)$ est complet pour la convergence uniforme, il existe donc f analytique sur D, telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| = 0, \forall K \text{ compact de } D.$$

De même $L^2(D, dA)$ est complet comme espace de Hilbert, donc il existe une fonction $g \in L^2(D, dA)$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n - g\|_2 = 0.$$

Ainsi il existe une sous-suite de $\left(f_{n_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge presque par tout vers g.
Finalemet, par la premiére inégalité $f = g$ presque partout et donc $f \in L_a^2(D)$, on conclut que l'espace L_a^2 est un espace de Hilbert.

1.2.2 Noyau de Bergman

Théorème 1.4 *[3] Soit H un espace de Hilbert des fonctions définies sur D et à valeurs dans $\mathbb{C}$ muni du produit scalaire usuel et de la norme associée, on dit qu'une application K de $D \times D$ est un noyau reproduisant de H si :*

1. *Pour tout $z, w \in D$, $K_z(w) = K(z, w)$ est une fonction de w qui appartient à H,*
2. *Pour tout $z \in D$ et tout $f \in H$*

$$f(z) = \langle f, K_z \rangle,$$

en particulier pour tous $z, w \in D$,

$$K_z(w) = \langle K_z, K_w \rangle \text{ et } \|K_z\| = \langle K_z, K_z \rangle^{\frac{1}{2}} = K(z, z)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.5 *[3] Soit H un espace de Hilbert de fonctions sur D, alors H admet un noyau reproduisant si et seulement si l'évaluation ponctuelle $f \longmapsto f(z)$ est continue sur H pour tout $z \in D$.*

Démonstration . Si H admet un noyau reproduisant K alors

$$|f(z)| = |\langle f, K_z\rangle| \leq \|f\| \times \|K_z\|,$$

réciproquement, si $f \longmapsto f(z)$ est linéaire continue sur H pour tout $z \in D$, alors par le théoréme de représentation de Riesz, pour chaque $z \in D$, il existe $g_z \in H$ tel que

$$f(z) = \langle f, g_z\rangle$$

et g_z vérifie (1) et (2) du théorème précédent.

Proposition 1.7 *Soit H un espace de Hilbert des fonctions analytiques sur D admettant un noyau reproduisant K, alors :*

1. *K est unique,*
2. *Pour tout $z, w \in D$, $K(z,w) = \overline{K(w,z)}$,*
3. *Soit $z \in D$, $K(z,z) = 0 \Longleftrightarrow f(z) = 0$ pour tout $f \in H$,*
4. *Pour tous $z, w \in D$, $|K(z,w)| \leq K(z,z)^{\frac{1}{2}} \times K(w,w)^{\frac{1}{2}}$, pour tout $z \in D$, l'application $K_z = K(z,.)$ est bornée sur tout compact de D et K est bornée sur tout compact de $D \times D$.*

Démonstration .

1. Si K et K' sont deux noyaux reproduisants pour H alors

$$\begin{aligned} \|K_z - K'_z\|^2 &= \langle K_z - K'_z, K_z - K'_z\rangle \\ &= \langle K_z - K'_z, K_z\rangle - \langle K_z - K'_z, K'_z\rangle \\ &= (K_z - K'_z)(z) - (K_z - K'_z)(z) = 0. \end{aligned}$$

   Ainsi $\|K_z - K'_z\| = 0$ et $K_z = K'_z$ pour tout $z \in D$, donc $K = K'$,
2. $K(z,w) = \langle K_z, K_w\rangle = \overline{\langle K_w, K_z\rangle} = \overline{K(w,z)}$,
3. $\Longleftarrow$ est évident car $K_z \in H$,
   $\Longrightarrow$ on remarque que $0 = K(z,z) = \langle K_z, K_z\rangle = \|K_z\|^2$ donc $K_z = 0$,
   ainsi $|f(z)| = |\langle f, K_z\rangle| = 0$ pour tout $z \in D$,
4. L'inégalité est immédiate par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, comme $H \subset A(D)$, K_z est analytique sur D donc borné sur les compacts de D, alors il est claire que K est borné sur les compacts de $D \times D$.

Proposition 1.8
Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne de H, alors pour tout $(z,w)\in D\times D$

$$K_z(w)=\sum_{n\geq 0} e_n(w)\overline{e_n(z)},$$

où cette série converge absolument et uniformément sur tout compact de $D\times D$.

Lemme 1.4 *Les fonctions* $e_n(z)=\sqrt{n+1}z^n \quad (n\in\mathbb{N})$ *constituent une base orthonormale de L^2_a.*

Démonstration . Pour $n,m\in\mathbb{N}$ et $z\in D$, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle e_n,e_m\rangle &= \int_D \left(\sqrt{n+1}z^n\right)\overline{\left(\sqrt{m+1}z^m\right)}\,dA\\
&= \sqrt{n+1}\sqrt{m+1}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^n e^{in\theta} r^m e^{-im\theta}\frac{1}{\pi} r\,dr d\theta\\
&= \sqrt{\frac{(n+1)(m+1)}{\pi^2}}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^{n+m+1}e^{i(n-m)\theta}\,dr d\theta\\
&= \sqrt{\frac{(n+1)(m+1)}{\pi^2}}\frac{1}{n+m+2}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\,d\theta\\
&= \sqrt{\frac{(m+1)^2}{\pi^2}}\frac{2\pi}{2m+2}\,\delta_{n,m}\\
&= \delta_{n,m}.
\end{aligned}$$

où

$$\delta_{n,m}=\begin{cases}0 & \text{si } n\neq m\\ 1 & \text{si } n=m\end{cases}$$

Définition 1.2 *L'application d'évaluation de L^2_a dans $\mathbb{C}$ qui à toute fonction f lui assosie sa valeur au point z, est continue pour tout $z\in D$.*
D'aprés le théoréme (1.5), $L^2_a(D)$ admet un noyau reproduisant K également appelé noyau de Bergman.
D'aprés le lemme (1.4) La famille $e_n(z)$ est une base hilbertienne orthonormée de L^2_a.
Ainsi par la proposition (1.8) on a pour tout $z,w\in D$,

$$\begin{aligned}
K_z(w) &= \sum_{n\geq 0}(n+1)\overline{z}^n w^n\\
&= \frac{1}{(1-\overline{z}w)^2},
\end{aligned}$$

le noyau normalisé est alors :

$$k_z(w) = \frac{K_z(w)}{\|K_z\|} = \frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}, \forall z, w \in D.$$

ce noyau reproduisant a une propriété qui nous sera utile par la suite.

Lemme 1.5 *k_z converge faiblement vers 0 quand z tend vers le bord du disque.*

Démonstration . Soit $\mathcal{P}$ un polynôme en z sur D, on a

$$\langle k_z, \mathcal{P}\rangle = (1-|z|^2)\langle \mathcal{P}, K_z\rangle = (1-|z|^2)\mathcal{P}(z).$$

cette expression tend clairement vers 0 quand $|z|$ tend vers 1.
Enfin, comme l'ensemble des polynômes est dense dans L^2_a alors k_z tend faiblement vers 0 quand z tend vers le bord de D.

Corollaire 1.2

$$\int_D \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z\overline{w}|^4}\, d\mathcal{A}(w) = 1 \quad \textit{pour chaque} \quad z \in D.$$

Démonstration . Pour tout $z \in D$ on a

$$\int_D \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z\overline{w}|^4}\, d\mathcal{A}(w) = (1-|z|^2)^2 \langle K_z, K_z\rangle = (1-|z|^2)^2 K(z,z) = 1.$$

1.2.3 Projection de Bergman

Rappelons que l'espace de Bergman $L^2_a(D)$ est un sous-espace fermé de $L^2(D, dA)$ et donc la projection orthogonale dite aussi projection de Bergman de $L^2(D, dA)$ dans $L^2_a(D)$ est bien définie, notons par P cette projection.

Proposition 1.9 *Pour toute fonction $f \in L^2(D, dA)$ et tout $z \in D$,*

$$Pf(z) = \int_D K(z,w) f(w)\, dA(w).$$

Démonstration . Par la propriété reproduisante de $K(z,w) = \overline{K_z(w)}$, on a

$$\begin{aligned} Pf(z) &= \langle Pf, K_z\rangle = \langle f, PK_z\rangle = \langle f, K_z\rangle \\ &= \int_D f(w)\overline{K_z(w)}\, dA(w) \\ &= \int_D K(z,w) f(w)\, dA(w). \end{aligned}$$

Remarque 1 *La projection de Bergman satisfait les propriétés suivantes :*

1. *P est une projection bornée de $L^2(D, dA)$ sur $L^2_a(D, dA)$,*
2. *$P^* = P$, et $P^2 = P$,*
3. *$\|P\| = 1$, où $\|.\|$ est la norme de l'opérateur.*

Chapitre 2

Opérateurs de Toeplitz sur les espaces de Hardy et de Bergman

2.1 Opérateur de Toeplitz sur l'espace de Hardy

Les opérateurs de Toeplitz sont les plus étudiés et les mieux connus dans la théorie des opérateurs sur l'espace de Hardy H^2, les opérateurs Shift et Backward Shift sont des exemples simples.
Généralement, les opérateurs de Toeplitz sont ceux dont les coefficients de la matrice relativement à la base standard de H^2 sont constants le long de chaque diagonale. (Voir entre autre [25, 5, 13, 21, 1] pour les détails sur le sujet).

2.1.1 Opérateurs bornés

Définition 2.1 *Soient H et H' deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{C}$, toute application linéaire $T : H \longrightarrow H'$ s'appelle un opérateur, l'espace vectoriel $\mathcal{L}(H, H')$ des applications linéaires de H dans H' est l'espace des opérateurs de H dans H', l'image d'un vecteur $x \in H$ par l'opérateur $T \in \mathcal{L}(H, H')$ sera généralement notée T_x.*

Définition 2.2 *Soit H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire noté $\langle . \rangle$:*

$$\begin{aligned} T : H &\longrightarrow H' \\ x &\longrightarrow T(x) \end{aligned}$$

un opérateur linéaire borné (continu) c'est-à-dire, il existe $C > 0$ tel que :

$$\|T(x)\|_H \leq C \|x\|_H.$$

Théorème 2.1 *Soit H un espace de Hilbert et B_H sa boule unité, alors B_H est compact si et seulement si H est de dimension finie.*

Définition 2.3 *Un opérateur $T \in B(H)$ est compact quand l'image par T de la boule unité de H est compact au sens de la topologie de la norme .*

2.1.2 Opérateurs Shift.

Les opérateurs Shift tiennent une place importante dans le monde des opérateurs sur la théorie des fonctions.

Définition 2.4 *L'opérateur Shift est une application $S : H^2 \longmapsto H^2$ défini par :*

$$[Sf](z) = zf(z)$$

ou en terme de coefficients de Taylor de $f = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in H^2$, par

$$S(a_0, a_1, ...) = (0, a_0, a_1, ...).$$

Proposition 2.1 *L'opérateure Shift est une isométrie.*

Démonstration . Soit $f \in H^2$, on a

$$\begin{aligned} \|Sf\|^2 &= \int_{\mathbb{T}} |\xi f(\xi)|^2 d\mu(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{T}} |f(\xi)|^2 d\mu(\xi) \\ &= \|f\|^2. \end{aligned}$$

Définition 2.5 *L'opérateur adjoint S^* du Shift S qui est par définition satifait*

$$\langle Sf, g\rangle = \langle f, S^*g\rangle, \quad f, g \in H^2,$$

est appelé Backward Shift.

Proposition 2.2 *L'opérateur $S^* : H^2 \longmapsto H^2$ est donné par*

$$[S^*f] = \frac{f(z) - f(0)}{z}$$

ou en terme des coefficients de Taylor de $f = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in H^2$, par

$$S^*(a_0, a_1, a_2, ...) = (a_1, a_2, ...).$$

Démonstration . On remarque que si $f \in H^2, Sf = zf$ est orthogonal à toute fonction constante. Soit $g \in H^2$

$$\begin{aligned} \langle f, S^*g\rangle &= \langle Sf, g\rangle \\ &= \langle zf, g\rangle \\ &= \langle zf, g - g(0)\rangle \\ &= \langle f, \overline{z}(g - g(0))\rangle \\ &= \langle f, \frac{g - g(0)}{z}\rangle. \end{aligned}$$

2.1.3 Matrices de Toeplitz.

Une matrice de Toeplitz est une matrice dont les composantes de chaque diagonale sont égeaux, c'est à dire est une matrice de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Définition 2.6 *La matrice de l'opérateur de Toeplitz T_φ définit dans la base orthonormée $\{1, z, z^2, z^3 ...\}$ de H^2 par une suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$:*

$$a_{ij} = \langle T_\varphi z^j, z^i \rangle = \langle P(\varphi z^j), z^i \rangle = \langle \varphi z^j, P z^i \rangle = \langle \varphi, z^{i-j} \rangle = \widehat{\varphi}(j-i)$$

c'est-à-dire :

$$A = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \widehat{\varphi}(-2) & \dots \\ \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \dots \\ \widehat{\varphi}(2) & \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Théorème 2.2 *Une matrice de Toeplitz $A = (\widehat{\varphi})_{n\in\mathbb{Z}}$ définit un opérateur borné si et seulement s'il existe une fonction bornée φ sur $\mathbb{T}$ telle que les nombres $\widehat{\varphi}_n (n \in \mathbb{Z})$ sont ses coefficients de Fourier, c'est à dire :*

$$\widehat{\varphi}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Théorème 2.3 *[3] Tout opérateur borné sur $H^2(\mathbb{T})$. dont la matrice dans la base orthonormée de $H^2(\mathbb{T})$ est une matrice de Toeplitz, est un opérateur de toeplitz.*

Ce théorème montre que si la matrice d'un opérateur borné sur H^2 est une matrice de Toeplitz alors necessairement cet opérateur est un opérateur de Toeplitz.

2.1.4 Opérateurs de Toeplitz (sur l'espace de Hardy).

Définition 2.7 *Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, l'opérateur de Toeplitz de symbole φ est $T_\varphi : H^2 \longmapsto H^2$ défini par*

$$T_\varphi f = P(\varphi f)$$

où $P : L^2(\mathbb{T}) \longmapsto H^2$. la projection de Riesz.

Le théorème suivant donne une caractérisation des opérateurs de Toeplitz à l'aide de l'opérateur Shift.

Théorème 2.4 *[1] Soit T un opérateur borné sur H^2, alors T est un opérateur de Toeplitz si et seulement si $S^*TS = T$.*

On donne quelque propriétés générales des opérateurs de Toeplitz.

Proposition 2.3 *Soient φ et ψ deux fonctions bornées sur $\mathbb{T}$.*

1. *Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a :$T_{\alpha\varphi+\beta\psi} = \alpha T_\varphi + \beta T_\psi$,*
2. *$T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi = T_{\varphi\psi}$,*
3. *$T_\varphi = T_\psi$ si et seulement si $\varphi = \psi$,*
4. *L'opérateur identité I de H^2 est l'opérateur de toeplitz de symbole $\varphi = 1$ où 1 est la fonction constante qui vaut 1 pour tout $z \in \mathbb{T}$, et l'opérateur nul est l'opérateur de Toeplitz de symbole $\varphi = 0$.*

Proposition 2.4
Pour $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$.

Démonstration . Soient $f, g \in H^2$, on a :

$$\begin{aligned}\langle T_\varphi f, g\rangle &= \langle P(\varphi f), g\rangle \\ &= \langle \varphi f, Pg\rangle \\ &= \langle \varphi f, g\rangle \\ &= \langle f, \overline{\varphi} g\rangle \\ &= \langle f, P(\overline{\varphi} g)\rangle \\ &= \langle f, T_{\overline{\varphi}}^* g\rangle.\end{aligned}$$

Corollaire 2.1 $S = T_z$ *et* $S^* = T_{\overline{z}}$.

Démonstration . Soit $f \in H^2$

$$\begin{aligned}Sf &= zf \\ &= P(zf) \\ &= T_z f.\end{aligned}$$

d'après la proposition précédents $S^* = T_{\overline{z}}$.

Proposition 2.5 *L'application qui à toute fonction bornée φ associe l'opérateur de Toeplitz T_φ est injective, autrement dit, si $T_\varphi = 0, \varphi = 0$.*

Démonstration . Si $T_\varphi = 0, T_\varphi(e^n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où e^n désigne le n-ème élément de la base orthonormée de H^2, soit maintenant $\varphi \sim \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j e^j$ le développement en série de Fourier de φ où $a_j = \langle \varphi, e^j \rangle$, alors le développement en série de Fourier de φe^n est $\varphi e^n \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{k+n}$ pour tout entier positif n avec $k = j - n$, ainsi, $T_\varphi(e^n) = P(\varphi e^n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ veut dire $a_k = 0$ pour $k+n \geq 0$, c'est-à-dire encore $a_k = 0$ pour tous les $k \geq -n$ donc $a_k = 0$ pour $k \in \mathbb{Z}$ donc $\varphi = 0$.

Proposition 2.6 *Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, on a $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$, c'est-à-dire,*

$$\sup\left\{\|T_\varphi f\|_2 : f \in H^2, \|f\|_2 = 1\right\} = \|\varphi\|_\infty.$$

Théorème 2.5 *L'opérateur de Toeplitz sur $H^2(\mathbb{T})$ est compact, si et seulement si son symbole est nul. (voir [7] Théorème 12.28)*

2.2 Opérateur de Toeplitz sur l'espace de Bergman

2.2.1 Opérateurs de Toeplitz (sur l'espace de Bergman).

Définition 2.8 *Soit φ une fonction bornée sur D, on définit l'opérateur de Toeplitz à symbole φ par*

$$\begin{aligned} T_\varphi : L^2_a(D) &\to L^2_a(D) \\ f &\mapsto P(\varphi f) \end{aligned}$$

en utilisant la représentation intégrale de P, nous pouvons voir T_φ comme un opérateur intégrale donné par :

$$T_\varphi f(z) = P(\varphi f)(z) = \langle \varphi f, K_z \rangle = \int_D \frac{\varphi(w) f(w)}{(1 - z\overline{w})^2}\, dA(w), \forall z \in D.$$

Proposition 2.7 *Soit $\varphi \in L^\infty(D)$*

1. $\left\|T_\varphi\right\| \leq \|\varphi\|_\infty$,
2. $T_1 = Id$ *tel que Id est l'identité de $L^2_a(D)$,*
3. $T_{\overline{\varphi}}$ *est l'adjoint de T_φ,*
4. *Pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$, $f, g \in L^\infty(D)$, $T_{\lambda f+g} = \lambda T_f + T_g$ (c'est à dire. T_φ sur L^2_a est linéairement dépondant de son symbole),*
5. $T_\varphi = 0$ *si et seulement si $\varphi = 0$.*

Démonstration . On a pour $f \in L^2_a(D)$

$$\left\|T_\varphi(f)\right\| = \|P(\varphi f)\| \leq \|P\| \|\varphi f\| \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|$$

car P est de norme 1 il s'ensuit que $\left\|T_\varphi\right\| \leq \|\varphi\|_\infty$ et (1) est vérifié.
(2), (3) et (4) découlent immédiatement de la définition de l'opérateur de Toeplitz.
(5) si T_φ est nul alors pour tous m et n dans $\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\left\langle T_\varphi z^n, z^m \right\rangle &= \langle P(\varphi z^n), z^m \rangle \\ &= \langle \varphi z^n, z^m \rangle \\ &= \langle \varphi, \overline{z}^n z^m \rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

mais la famille $z^{-n}z^m$ est dense dans $L^2_a(D, dA)$ donc φ est nulle.

Remarque 2 *1. On peut aussi définir cet opérateur de Toeplitz sur l'espace de Bergman à partir des symboles non bornés sur D si le produit φf existe, $\forall f \in L^2_a(D)$ c'est à dire T_φ est bien définie,*

2. L'opérateur de Toeplitz T_ϕ sur $L^2_a(D)$ est borné si le symbole ϕ est borné, mais T_ϕ peut être borné sur $L^2_a(D)$ sans que son symbole le soit.

Dans la suite, nous allons présenter la notion de fonction Möbius sur le disque D.

Définition 2.9 *Une fonction Möbius sur le disque D est une fonction de la forme*

$$\varphi_z(w) = \frac{z - w}{1 - \overline{z}w},\ w \in D$$

qui transforme z à 0 et 0 à z ($z \in D$).

Proposition 2.8 *Une fonction Möbius φ_z a les propriétés suivantes :*

1. $\varphi_z^{-1} = \varphi_z$,
2. *Le déterminant réel du Jacobienne de φ_z en w est*

$$|J_{\varphi_z}(w)| = |\grave{\varphi}_z(w)|^2 = \frac{(1 - |z|^2)^2}{|1 - \overline{z}w|^4},$$

3. $1 - |\varphi_z(w)|^2 = \dfrac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{|1 - \overline{z}w|^2}$.

Démonstration .
Pour (1) on trouve facilement que

$$\begin{aligned}(\varphi_z \circ \varphi_z)(w) &= \frac{z-\varphi_z(w)}{1-\overline{z}\varphi_z(w)} \\ &= \frac{z-\dfrac{z-w}{1-\overline{z}w}}{1-\overline{z}\dfrac{z-w}{1-\overline{z}w}} \\ &= w.\end{aligned}$$

Pour (2) on a

$$\begin{aligned}\grave{\varphi}_z(w) &= \frac{-(1-\overline{z}w)+\overline{z}(z-w)}{(1-\overline{z}w)^2} \\ &= \frac{-1+\overline{z}w+|z|^2-\overline{z}w}{(1-\overline{z}w)^2} \\ &= -\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2},\end{aligned}$$

et donc

$$|\grave{\varphi}_z(w)|^2 = \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4}.$$

De plus si on pose $\varphi_z(w) = P(x,y) + iQ(x,y)$ on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_z}{\partial y}(w) &= \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = -i\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}, \\ \frac{\partial \varphi_z}{\partial x}(w) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}.\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\partial \varphi_z}{\partial x}(w) = i\frac{\partial \varphi_z}{\partial y}(w),$$

les conditions de Cauchy-Rieman sont satisfaisantes, alors la matrice réelle Jacobienne de φ_z donnée par :

$$J_{\varphi_z}(w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & -\frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial x} \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{aligned}
|J_{\varphi_z}(w)| &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\overline{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)} \\
&= \left(-\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}\right)\overline{\left(-\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}\right)} \\
&= \left|\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}\right|^2 = \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4}.
\end{aligned}$$

Et pour (3) on a :

$$\begin{aligned}
1 - \frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\overline{z}w|^2} &= \frac{|1-\overline{z}w|^2 - (1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\overline{z}w|^2} \\
&= \frac{(1-\overline{z}w)(1-z\overline{w}) - (1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\overline{z}w|^2} \\
&= \frac{|w|^2 + |z|^2 - \overline{z}w - z\overline{w}}{|1-\overline{z}w|^2} \\
&= |\varphi_z(w)|^2.
\end{aligned}$$

On rappelle qu'un automorphisme de D est une application bijective bi-analytique de D dans D.
Tout automorphisme φ de D peut s'écrire comme $\varphi(w) = \varphi_z(\epsilon w)$, où $z = \varphi(0) \in D$, $|\epsilon| = 1$.

Notation 1 *L'ensemble des automorphismes du disque D appelé aussi groupe de Möbius, est noté $Aut(D)$.*

Corollaire 2.2 *Si $\varphi \in Aut(D)$, alors*

$$K(z,w) = \varphi'(z)K(\varphi(z),\varphi(w))\overline{\varphi'(w)}$$

où

$$\frac{1}{(1-z\overline{w})^2} = \frac{\varphi'(z)\overline{\varphi'(w)}}{(1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)})^2}$$

pour toutes $z, w \in D$.

Démonstration . Soit $\{e_n : n \geq 0\}$ une base orthonormée de L^2_a.
On pose

$$\sigma_n(z) = e_n(\varphi(z))\varphi'(z),\ n \geq 0,$$

ainsi

$$\begin{aligned} K(z,w) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_n(z)\overline{\sigma_n(w)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e_n(\varphi(z))\overline{e_n(\varphi(w))}\varphi'(z)\overline{\varphi'(w)} \\ &= \varphi'(z)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e_n(\varphi(z))\overline{e_n(\varphi(w))}\right)\overline{\varphi'(w)} \\ &= \varphi'(z)K(\varphi(z),\varphi(w))\overline{\varphi'(w)}. \end{aligned}$$

La proposition suivante qui donne la formule de l'images de noyau reproduisant $k_z\,(z \in D)$ par un opérateur T_f.

Proposition 2.9 *[14] Soit $f \in L^\infty(D, dA)$, pour tout $z \in D$ alors*

$$T_f(k_z) = (P(f \circ \varphi_z) \circ \varphi_z)k_z.$$

Pour presenter quellque situations où nous pouvons les faire affirmer que l'opérateur de Toeplitz est borné , nous avons besoin d'introduire d'abord la transformation de Berezin qui joue un rôle essentiel dans la théorie des opérateurs de Toeplitz.

2.2.2 Transformée de Berezin

Définition 2.10 *Soit $f \in L^1(D)$, la transformée de Berezin $\tilde{f}$ de f est donnée par*

$$\tilde{f}(z) = \langle f k_z, k_z \rangle = \int_D f(w)\frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4}\, dA(w), \forall z \in D.$$

De plus, soient $f \in L^2_a(D)$ et $\varphi_z(w) \in Aut(D)$, pour $z, w \in D$, Ddonc f vérifie la propriété de la moyenne :

$$f(0) = \int_D f(w)\, d\mathcal{A}(w),$$

donc, on a

$$z = \varphi_z(0)$$

on obtient

$$f(z) = f(\varphi_z(0)) = \int_D f(\varphi_z(w))\, dA(w)$$

le changement de variable $y = \varphi_z(w)$ *donne*

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_D f(y)|J_{\varphi_z}(y)|\,dA(y) \\ &= \int_D f(y)\frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}y|^4}\,dA(y). \end{aligned}$$

En fait, on peut définir plus généralement la transformée de Berezin d'un opérateur T borné sur un espace de Hilbert des fonctions sur D, possédant un noyau reproduisant normalisé k_z, la transformée de Berezin (symbole de Berezin) de T est la fonction $\tilde{T}$ de D dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\tilde{T}(z) = \langle Tk_z, k_z\rangle, \forall z \in D.$$

On a alors pour tout $z \in D$,

$$\tilde{T}_f(z) = \left\langle T_f k_z, k_z\right\rangle = \langle f k_z, k_z\rangle = \tilde{f}(z),$$

ainsi la transformée de Berezin de f et de T_f coïncident.

Proposition 2.10 *Soit* $\varphi \in L^\infty(D, dA)$

$$\limsup_{z\to\partial D} |\widetilde{\varphi}(z)| \le \limsup_{z\to\partial D} \left\|T_\varphi k_z\right\|_2 \le \left\|T_\varphi\right\|_e \le \left\|T_\varphi\right\| \le \|\varphi\|_\infty,$$

avec $\left\|T_\varphi\right\|_e = \inf_{K\in D}\left\|T_\varphi - K\right\|$.

Démonstration . $\left\|T_\varphi\right\|_e \le \left\|T_\varphi\right\| \le \|\varphi\|_\infty$ est claire, il reste donc à montrer les deux premières inégalités.
Soit $z \in D$ alors

$$|\widetilde{\varphi}(z)| = |\langle \varphi k_z, k_z\rangle| = \left|\left\langle T_\varphi k_z, k_z\right\rangle\right| \le \left\|T_\varphi k_z\right\|_2.$$

Soit K un opérateur compact sur $L^2_a(D)$ alors k_z converge vers 0 quand $|z|$ tend vers 1 car k_z tend faiblement vers 0, ainsi pour tout K compact on a

$$\limsup_{z\to\partial D} \left\|T_\varphi k_z\right\|_2 = \limsup_{z\to\partial D} \left\|(T_\varphi - K)k_z\right\|_2 \le \left\|T_\varphi - K\right\|.$$

donc

$$\limsup_{z\to\partial D} \left\|T_\varphi k_z\right\|_2 \le \inf_{K\in D}\left\|T_\varphi - K\right\| = \left\|T_\varphi\right\|_e.$$

Maintenant on va prouver que la transformation de Berezin est Möbius invariante effectivement.

Proposition 2.11 *Pour tout $\varphi \in Aut(D)$ et toute fonction $f \in L^1(D, dA)$*

$$\widetilde{f \circ \varphi} = \tilde{f} \circ \varphi.$$

Démonstration . Soit $\sigma \in Aut(D)$ et $z \in D$, on pose

$$\varphi_z(w) = \frac{z - w}{1 - \bar{z}w} \text{ et donc } \varphi_{\sigma(z)}(w) = \frac{\sigma(z) - w}{1 - \overline{\sigma(z)}w}.$$

il vient que

$$\begin{aligned} \varphi_{\sigma(z)} \circ \sigma \circ \varphi_z(0) &= \varphi_{\sigma(z)}(\sigma(z)) = 0 \\ \varphi_{\sigma(z)} \circ \sigma \circ \varphi_z &\in \mathcal{A}(D) \\ \varphi_{\sigma(z)} \circ \sigma \circ \varphi_z(D) &= D, \text{ et } \varphi_{\sigma(z)} \circ \sigma \circ \varphi_z \text{ est bijection.} \end{aligned}$$

D'où d'après le lemme de Schwarz, il existe une constante complexe c de module 1 telle que pour tout $w \in D$

$$\varphi_{\sigma(z)} \circ \sigma \circ \varphi_z(w) = cw$$

pour $f \in L^1(D, dA)$, on a

$$\widetilde{f \circ \sigma} = \int_D (f \circ \sigma)(y) \frac{(1 - |z|^2)^2}{|1 - \bar{z}y|^4} \, dA(y).$$

en effectuant le changement de variable $y = \varphi_z(w)$, on obtient

$$\begin{aligned} \widetilde{f \circ \sigma}(z) &= \int_D (f \circ \sigma \circ \varphi_z)(w) \, dA(w) \\ &= \int_D (f \circ \varphi_{\sigma(z)} \circ \varphi_{\sigma(z)} \circ \sigma \circ \varphi_z)(w) \, dA(w) \\ &= \int_D (f \circ \varphi_{\sigma(z)})(cw) \, dA(w) \\ &= \int_D (f \circ \varphi_{\sigma(z)})(u) \, dA(u) \\ &= \tilde{f}(\sigma(z)) \\ &= \tilde{f} \circ \sigma(z). \end{aligned}$$

Nous allons énoncer une propriété fondamentale qui lie les fonctions harmoniques et la transformée de Berezin.

Lemme 2.1 *Si $f \in L^1(D, dA)$ est harmonique, alors*

$$\widetilde{f} = f.$$

Démonstration . Si $f \in L^1(D, dA)$ est une fonction harmonique sur D alors $f \circ \varphi$ est aussi harmonique pour tout $\varphi \in Aut(D)$, d'après la propriété de la valeur moyenne, pour tout $\varphi \in Aut(D)$ tel que $\varphi(0) = z$, on a

$$f(z) = f \circ \varphi_z(0) = \int_D f \circ \varphi_z(w)\, dA(w) = \tilde{f}(z).$$

2.2.3 Opérateur de Toeplitz à symboles quasihomogènes et radials

Définition 2.11 *$F \in L^1$ est dite radiale si pour tout $z \in D$*

$$F(z) = F(|z|).$$

Définition 2.12 *Soit $m \in \mathbb{Z}$, une fonction $F \in L^\infty(D, dA)$ est dite m-quasihomogène s'il existe $f \in L^\infty([0,1])$ tel que pour tout $z = re^{i\theta} \in D$, $0 \leq r < 1$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, on a*

$$F(re^{i\theta}) = e^{im\theta} f(r).$$

On appelle f la partie radiale de F et m le coefficient de quasihomogènéité de F, on note $F \sim (f, m)$.
Si $m = 0$ alors F est radiale , on distingue le cas radial du cas quasihomogène qui est le cas le plus simple à écrire.
Si une fonction F est le symbole d'un opérateur de Toeplitz alors nous dirons que T_F est quasihomogène de degré m.

Lemme 2.2 *Soit F un symbole m-quasihomogène (ou radial) borné alors*

$$T_F e_n = \begin{cases} 0 & si\ n + m < 0 \\ c_n(F) e_{n+m} & sinon \end{cases}$$

où

$$c_n(F) = 2\sqrt{n+1}\sqrt{n+m+1} \int_0^1 f(r) r^{2n+m+1} dr.$$

Démonstration . Il suffit de calculer $\left\langle T_F e_n, e_p \right\rangle = \left\langle F e_n, e_p \right\rangle$ pour tout $p, n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\left\langle T_F e_n, e_p \right\rangle &= \sqrt{n+1}\sqrt{p+1} \int_D F(z) z^n \bar{z}^p\, dA(z) \\
&= \frac{1}{\pi}\sqrt{n+1}\sqrt{p+1} \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{im\theta} f(r) r^n e^{in\theta} r^p e^{-ip\theta} r\, dr d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\sqrt{n+1}\sqrt{p+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+n-p)\theta} d\theta \int_0^1 f(r) r^{n+p+1}\, dr \\
&= 2\sqrt{n+1}\sqrt{n+m+1} \left(\int_0^1 f(r) r^{2n+m+1}\, dr \right) \delta_{m+n,p}.
\end{aligned}$$

Car $\int_0^{2\pi} e^{i(m+n-p)\theta}\, d\theta = 2\pi\, \delta_{m+n,p}$. où $\delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$

La transformée de Mellin est très utilisée dans l'étude des opérateurs de Toeplitz à symbole quasihomogène.

Définition 2.13 *On définit la transformée de Mellin de $f \in L^\infty[0,1]$ par*

$$\hat{f} : z \longrightarrow \int_0^1 f(r) r^{z-1} dr.$$

On appelle l'intégrale $\int_0^1 f(r) r^{n-1} dr$ le coefficient de Mellin d'ordre n de f.

Définition 2.14 *Soit f une fonction intégrable sur D, on définit la radialisation de f noté $rad(f)$, par :*

$$rad(f(z)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta} z) d\theta.$$

l'intégrale existe et finie presque partout car $f \in L^1(D, dA)$.
Il découle directement de cette définition qu'une fonction f est radiale si et seulement si $f = rad(f)$.

Définition 2.15 *Pour $f \in L^\infty[0,1]$, la transformée de Berezin de f est celle de $F \sim (0,1)$, selon la définition (2.10), on a $\forall z \in D$*

$$\tilde{f}(z) = \tilde{F}(z) = \int_D f(|w|) \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\bar{z}w|^4} dA(w).$$

Lemme 2.3 *[2] On suppose que $\lambda \geq 0$ et $\lim_{t\to 1^-}(1-t)^\lambda \sum_{n=0}^\infty a_n t^n = 0$ si $a_n \geq -C(n+1)^{\lambda-1}$ pour $C > 0$ et pour tout $n \geq 0$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^n a_k}{(n+1)^\lambda} = 0.$$

Théorème 2.6 *[4] On suppose que $f \in L^\infty[0,1)$ et $a_n(f) = (n+1)\int_0^1 f(r) r^n\, dr$, avec $n \geq 0$ alors $a_n(f) \to 0$ quand $n \to +\infty$ si et seulement si*

$$\lim_{t\to 1^-} (1-t)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_n(f) t^n = 0.$$

Démonstration . Comme

$$(1-t)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) t^n = 1$$

pour tout $t \in [0,1]$, et $a_n(f) \to 0$ quand $(n \to +\infty)$ alors

$$\lim_{t\to 1^-}(1-t)^2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_n(f)t^n = 0.$$

Pour montrer l'autre implication, on utilise le lemme (2.3), on suppose que

$$\lim_{t\to 1^-}(1-t)^2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_n(f)t^n = 0.$$

avec un changement de variable, on trouve

$$\lim_{t\to 1^-}\left[a_0(f)+\sum_{n=1}^{+\infty}[(n+1)a_n(f)-na_{n-1}(f)]t^n\right] = 0.$$

par la définition de $a_n(f)$, on obtient

$$\begin{aligned}(n+1)a_n(f)-na_{n-1}(f) &= (n+1)^2\int_0^1 f(r)r^n\,dr - n^2\int_0^1 f(r)r^{n-1}\,dr\\ &= (2n+1)\int_0^1 f(r)r^n\,dr + n^2\int_0^1 f(r)(r-1)r^{n-1}\,dr.\end{aligned}$$

Par un calcul élémentaire on trouve que, la formule au-dessus est bornée en n, si f est bornée, utilisant le lemme (2.3) pour terminer la démonstration.

Lemme 2.4 *[4] (avec $\lambda = 1$)*
Si $\lim_{t\to 1^-}(1-t)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n(f)t^n = 0$ *alors*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_0(f)+\sum_{k=0}^{n}[(k+1)a_k(f)-ka_{k-1}(f)]}{n+1} = 0,$$

où $\lim_{n\to+\infty} a_n(f) = 0.$

Lemme 2.5 *[18] Soit $K_1, K_2 \in L^1[0,+\infty)$, si*

$$\int_0^{+\infty} K_j(t)t^{ix}\,dt \neq 0$$

pour $j = 1,\ 2$ les deux conditions suivantes sont équivalent

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{+\infty} K_1(t)g(\varepsilon t)\,dt = 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{+\infty} K_2(t)g(\varepsilon t)\,dt = 0$$

pour $g \in L^\infty[0,+\infty)$.

Théorème 2.7 *[4] On supppose que $f \in L^\infty[0,1)$, alors*

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x}\int_x^1 f(t)\,dt = 0$$

si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1)\int_0^1 f(t)t^n\,dt = 0.$$

Démonstration . Soit

$$h(x) = \frac{1}{1-x}\int_x^1 f(t)\,dt,\ x \in [0,1).$$

on applique le théorème de Fubini, on obtient

$$(n+2)(n+1)\int_0^1 h(x)x^n(1-x)\,dx = (n+2)\int_0^1 f(t)t^{n+1}\,dt$$

pour tout $n \geq 0$.
Pour montrer l'équivalence, on utilise le lemme (2.5).
comme f est bornée, alors

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1)\int_0^1 f(t)t^n\,dt = 0$$

est équivalent à (compare t^s et t^n pour $n < s \leq n+1$) :

$$\lim_{n\to+\infty} s\int_0^1 f(t)t^s\,dt = 0$$

on fait changement de variable, on trouve

$$\begin{aligned} s\int_0^1 f(t)t^s\,dt &= s\int_0^1 f(1-t)(1-t)^s\,dt \\ &= \int_0^s f(1-\frac{t}{s})(1-\frac{t}{s})^s\,dt = \int_0^{+\infty} K_\epsilon(t)g(\epsilon t)\,dt, \end{aligned}$$

où $\epsilon = \frac{1}{s}$

$$g(t) = \begin{cases} f(1-t), & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \quad\quad , & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

et

$$K_\epsilon(t) = \begin{cases} (1-\epsilon t)^{\frac{1}{\epsilon}}, & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{\epsilon} \\ 0 \quad\quad\quad , & \text{si } t > \frac{1}{\epsilon}. \end{cases}$$

comme $0 \leq K_\epsilon(t) \leq e^{-t}$ alors $K_\epsilon(t) \to e^{-t}$ sur $L^1[0,+\infty)$ quand $\epsilon \to 0^+$.
donc (et d'aprés le lemme (2.5)) :

$$\lim_{s\to+\infty} s\int_0^1 f(t)t^s\,dt = 0$$

est équivalent à

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{+\infty} e^{-t}g(\epsilon t)\,dt = 0.$$

de même

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1-x}\int_x^1 f(t)\,dt = 0$$

est équivalent à

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{+\infty} X_{[0,1]}g(\epsilon t)\,dt = 0.$$

Chapitre 3

Compacité de l'opérateur de Toeplitz

3.1 Mesure de Carleson

On peut définir l'opérateur de Toeplitz sur l'espace de Bergman à partir des mesures finies sur D.
Soit μ une mesure de Borel finie sur D, on définit l'opérateur T_μ sur $L^2_a(D, dA)$ par :

$$T_\mu f(z) = \int_D K(z,w) f(w) d\mu(w) \quad , f \in L^2_a(D, dA).$$

Quand $d\mu(z) = \varphi(z)\, dA(z)$, on a $T_\mu = T_\varphi$.
dans ce cas, c'est facile de vérifier cela $T_\varphi f = \mathcal{P}(\varphi f)$ pour tous les polynômes f (lesquels sont denses dans $L^2_a(D, dA)$).
Notre problème dans ce chapitre est de trouver des conditions sur μ ou φ qui nous assureraient la compacité de l'opérateur de Toeplitz T_μ ou T_φ, quand μ ou φ soit positif, les conditions que nous obtenons sont nécessaires et suffisantes.

Proposition 3.1 *Soient $f, g \in L^2_a(D, dA)$, alors*

$$\left\langle T_\mu f, g \right\rangle = \int_D f(w)\overline{g(w)} d\mu(w), w \in D,$$

où μ une mesure de Borel positive et finie sur D.

Démonstration . Soient $f, g \in L^2_a(D, dA)$, et μ une mesure de Borel positive

et finie sur D alors :

$$\begin{aligned}
\left\langle T_\mu f, g\right\rangle &= \int_D T_\mu f(z)\overline{g(z)}dA(z)\\
&= \int_D \left[\int_D f(w)K(z,w)d\mu(w)\right]\overline{g(z)}dA(z)\\
&= \int_D\int_D K(z,w)f(w)\overline{g(z)}d\mu(w)dA(z) \quad (\textit{ d'après le théorème de Fubini})\\
&= \int_D \left[\int_D \overline{g(z)}K(z,w)dA(z)\right]f(w)d\mu(w)\\
&= \int_D \overline{\left[\int_D g(z)\overline{K(w,z)}dA(z)\right]}f(w)d\mu(w), \qquad car \qquad K(z,w)=\overline{K(w,z)}\\
&= \int_D f(w)\overline{g(w)}d\mu(w).
\end{aligned}$$

Proposition 3.2 *Soient $f \in L^2_a(D,dA)$ et μ une mesure de Borel positive et finie sur D alors*

$$\left\|T_\mu f\right\| = \sup\left\{\left|\left\langle T_\mu f, g\right\rangle\right| : \|g\| = 1 \textit{ dans } L^2_a(D,dA)\right\}.$$

Nous avons besoin de présenter le concept de la transformation de Berezin et la fonction moyenne au cas d'espace de Bergman.
Soit μ une mesure de Borel finie sur D, on note $\tilde{\mu}$ la transformée de Berezin de l'opérateur de Toeplitz T_μ sur $L^2_a(D,dA)$ définie par :

$$\tilde{\mu}(z) = \left\langle T_\mu k_z, k_z\right\rangle, z \in D,$$

où $\langle .,. \rangle$ est le produit scalaire sur $L^2_a(D,A)$ et k_z est le nayau reproduisant normalisé de $L^2_a(D,dA)$, donc d'après la proposition (3.1) on a :

$$\tilde{\mu}(z) = \int_D |k_z|^2 d\mu(w)\ ,\ z \in D.$$

si $r > 0$, on définit la fonction moyenne $\widehat{\mu_r}(z)$ sur D par :

$$\widehat{\mu_r}(z) = \frac{\mu(D(z,r))}{|D(z,r)|}, z \in D.$$

on a $|D(z,r)| = A(D(z,r))$, $\widehat{\mu_r}(z) = \dfrac{\mu(D(z,r))}{\mathcal{A}(D(z,r))}$, laquelle est la moyenne sur $D(z,r)$ de la fonction φ en ce qui concerne à dA quand $d\mu(z) = \varphi(z)dA$. donc nous pouvons penser à $\widehat{\mu_r}(z)$ comme une fonction moyenne μ en ce qui

concerne à dA.
Pour toute $\varphi \in L^1(D, dA)$ et $r > 0$, on définit la fonction moyenne $\widehat{\varphi_r}$ de φ sur D par

$$\widehat{\varphi_r}(z) = \frac{1}{|D(z,r)|} \int_{D(z,r)} \varphi(w) dA(w), z \in D.$$

Définition 3.1 *Soient μ une mesure de Borel positive finie sur D, on dit que μ est une mesure de Carleson sur l'espace de Bergman $L^2_a(D, dA)$ s'il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\int_D |f(z)|^2 d\mu(z) \leq c \int_D |f(z)|^2 dA(z) \text{ pour tout } f \in L^2_a(D, dA).$$

Remarque 3 .

1. *On dit que μ est une mesure de Carleson sur $L^2_a(D, dA)$ si et seulement si $L^2_a(D, dA) \subset L^2(D, d\mu)$ et que l'injection canonique*

$$i_2 : L^2_a(D, dA) \to L^2(D, d\mu)$$

   est bornée.

2. *La mesure de Carleson μ sur $L^2_a(D, dA)$ est dit une mesure de Carleson nulle à l'infini si l'application i_2 est de plus compact.*

Théorème 3.1 *[15] Soit μ une mesure de Borel positive finie sur D, $r > 0$ alors μ est une mesure de Carleson sur $L^2_a(D, dA)$ si et seulement si*

$$\sup \left\{ \frac{\mu(D(z,r))}{(1-|z|^2)^2}, z \in D \right\} < \infty.$$

Théorème 3.2 *[15] Soit μ une mesure de Borel positive finie sur D, $r > 0$ alors on a : μ est une mesure de Carleson nulle à l'infini dans $L^2_a(D, dA)$ si et seulement si*

$$\lim_{|z| \to 1^-} \frac{\mu(D(z,r))}{|D(z,r)|} = 0.$$

3.2 Opérateur de Toeplitz borné

Corollaire 3.1 *Soit $\varphi \in L^1(D, dA)$ une fonction harmonique alors T_φ est borné si et seulement si φ est bornée,*

Démonstration . Soit $\varphi \in L^1(D, dA)$ harmonique, supposons que φ soit bornée, dans ce cas il existe $M > 0$ tel que

$$\left\| T_\varphi f \right\| \leq M \|f\|, \quad f \in L^2_a(D)$$

par conséquent T_φ est borné,
réciproquement, supposons que T_φ soit borné alors on a :

$$|\tilde{\varphi}(z)| = |\left\langle T_\varphi k_z, k_z \right\rangle| \leq \left\| T_\varphi \right\| \|k_z\|^2 = \left\| T_\varphi \right\| \ car \|k_z\| = 1$$

dans $L^2_a(D)$, par conséquence, en utilisant le lemme (2.1) $\tilde{\varphi} = \varphi$ est borné et la corollaire est ainsi démontré.

Lemme 3.1 *Soit F un symbole quasihomogène ou radial borné, on a :*

1. $\|T_F\| = \sup_{n\geq 0} |c_n(F)|$,
2. $\|T_F\|_e = \limsup_{n\longrightarrow\infty} |c_n(F)|$.

Démonstration . Supposons que F est m-quasihomogène.

1. Soit $v = \sum_{i\geq 0} a_i e_i \in L^2_a(D)$ en utilisant le lemme (2.2), on voit que :

$$T_F v = \sum_{n\geq \max(0,-m)} a_n c_n(F) e_{n+m}$$

   et ainsi l'assertion (1), est évidente.

2. On note $T_{F,n}$ la compression de T_F à $\mathrm{Vect}(e_0, ..., e_{n-1})$, il est clair que

$$\|T_F - T_{F,n}\| = \sup_{k\geq n} |c_k(F)|.$$

   comme $T_{F,n}$ est compact, ceci implique que

$$\|T_F\|_e = \inf_{K\in D} \|T_F - K\| \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \|T_F - T_{F,n}\| = \limsup_{n\longrightarrow\infty} |c_n(F)|.$$

Lemme 3.2 *Soit F une fonction m-quasihomogène bornée non nulle alors*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |c_n(F)| < \|F\|_\infty.$$

la méme conclusion reste vraie si F est radiale, non constante et bornée.

Démonstration . Si $F \sim (f, m)$ est m-quasihomogène alors pour $n > -m$

$$c_n(F) = 2\sqrt{n+1}\sqrt{n+m+1} \int_0^1 f(r) r^{2n+m+1} dr$$

et

$$|c_n(F)| \leq \|f\|_\infty \frac{2\sqrt{n+1}\sqrt{n+m+1}}{2n+m+2} < \|F\|_\infty$$

Si F est radiale, bornée et non constante, il existe $\varepsilon > 0$ et $E \subset L^\infty([0,1])$ tel que $|E| > 0$ et $f(E) \subset [0, \|f\|_\infty - \varepsilon]$, on peut écrire

$$\begin{aligned} c_n(F) &= (2n+2)\int_0^1 f(r)r^{2n+1}dr \\ &= (2n+2)\int_E f(r)r^{2n+1}dr + (2n+2)\int_{(0,1)\setminus E} f(r)r^{2n+1}dr \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |c_n(F)| &\leq (\|f\|_\infty - \varepsilon)(2n+2)\int_E r^{2n+1}dr + \|f\|_\infty(2n+2)\int_{(0,1)\setminus E} r^{2n+1}dr \\ &\leq \|f\|_\infty - \varepsilon(2n+2)\int_E r^{2n+1}dr < \|F\|_\infty. \end{aligned}$$

Théorème 3.3 *[15] On suppose que μ une mesure de Borel positive finie sur D. alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T_μ est borné sur $L^2_a(D, dA)$,*
2. *Le symbole de Berezin $\tilde{\mu}(z)$ est borné sur D,*
3. *μ est une mesure de Carleson sur $L^2_a(D, dA)$.*

Démonstration . Montrons que (1) implique (2) :
supposons donc que (1) est vérifiée, on a :

$$|\tilde{\mu}(z)| = \left|\left\langle T_\mu k_z, k_z \right\rangle\right| \leq c\|k_z\|^2 = c$$

où $c > 0$ existe car T_μ est borné sur $L^2_a(D, dA)$, et on obtient (2).
supposons cette fois-ci que (2) soit vérifié et montrons (3), On a pour $r > 0$:

$$\frac{\mu(D(z,r))}{|D(z,r)|} \leq \frac{\int_D |k_z|^2 d\mu(w)}{(r^2(1-r)^4)} = \frac{|\tilde{\mu}(z)|}{(r^2(1-r)^4)} \leq M$$

car $\tilde{\mu}$ est borné sur D.
d'où :

$$\sup_{z\in D} \frac{\mu(D(z,r))}{|D(z,r)|} \leq M < \infty,$$

d'après le théorème (3.1) on conclut que μ est une mesure de Carleson sur l'espace de Bergman.
montrons maintenant que (3) implique (1) :

supposons que μ est une mesure de Carleson sur l'espace de Bergman, alors il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\int_D |f(z)|d\mu(z) \leq c \int_D |f(z)|dA(z) \quad \textit{pour tout} \quad f \in L^1_a(D, dA).$$

ainsi, si $f, g \in L^2_a(D, dA)$ alors $f, g \in L^1_a(D, dA)$ et

$$\begin{aligned} \left|\left\langle T_\mu f, g\right\rangle\right| &= \left|\int_D f(z)\overline{g(z)}d\mu(z)\right| \leq \int_D |f(z)g(z)|\, d\mu(z) \\ &\leq c\int_D |f(z)g(z)|\, dA(z) \leq c\|f\|\|g\| \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Hölder , par conséquent en utilisant la proposition (3.2) on obtient T_μ est borné sur D

Corollaire 3.2 *On suppose que $r > 0$, et $\varphi \in L^1(D, dA)$ est une fonction positive sur D, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T_φ est borné sur $L^2_a(D, dA)$,*
2. *$\widetilde{\varphi}$ est bornée sur D,*
3. *$\widehat{\varphi}_r(z)$ est bornée sur D.*

Démonstration . Soient $\varphi \in L^1(D, dA)$, $\varphi \geq 0$ et $r > 0$, d'après le théorème de Radon-Nikodym, on peut définir la mesure de Borel positive, finie sur D

$$\mu(D(z, r)) = \int_{D(z,r)} \varphi(w)dA(w), z \in D.$$

et $\widehat{\varphi}_r(z) = \dfrac{\mu(D(z, r))}{|D(z, r)|} = \widehat{\mu}_r(z)$; de plus $T_\varphi = T_\mu$ et $\widetilde{\mu} = \widetilde{\varphi}$.
ainsi en appliquant le théorème (3.3) on obtient le corollaire.

3.3 Opérateur de Toeplitz compact

Proposition 3.3 *Si ϕ est une fonction intégrable à support compact dans D alors T_ϕ sur $L^2_a(D)$ est compact.*

Démonstration . Soit (f_n) une suite bornée dans $L^2_a(D)$. pour $z \in D$, on définie $\varphi_z \in Aut(D)$ par

$$\varphi_z(w) = \frac{z - w}{1 - \bar{z}w}, \quad \forall w \in D,$$

comme les fonctions f_n sont analytiques donc harmoniques sur D alors en particulier elles vérifient la propriété de la valeur moyenne invariante suivante :

$$f_n(0) = \int_D f_n(w)\, dA(w),$$

donc on obtient

$$f_n(z) = f_n(\varphi_z(0)) = \int_D f_n(\varphi_z(w))\, dA(w).$$

le changement de variable $y = \varphi_z(w)$ donne

$$f_n(z) = \int_D f_n(y) \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\bar{z}y|^4}\, dA(y).$$

or

$$\frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\bar{z}y|^4} \leq \frac{(1-|z|^2)}{(1-|z|)^4} \leq \frac{1}{(1-|z|)^4}.$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|f_n(z)| \leq \int_D |f_n(y)| \frac{1}{(1-|z|)^4}\, dA(y).$$

pour tout compact K de D, $\exists r_K \in]0,1[$, tel que $K \subset \overline{D(0,r_K)}$, alors on a :

$$\frac{1}{(1-|z|)^4} \leq \frac{1}{(1-r_K)^4}, \quad \forall z \in K.$$

par la suite pour tout entier n et tout compact K de D, $\exists r_K \in]0,1[$ tel que

$$\sup_{z\in K} |f_n(z)| \leq \frac{1}{(1-r_K)^4} \|f_n(y)\|_2.$$

d'où pour tout compact K de D, on a :

$$\sup_n (\sup_{z\in K} |f_n(z)|) \leq \frac{1}{(1-r_K)^4} \sup_n \|f_n(y)\|_2.$$

donc la suite (f_n) admet une sous suite (f_{n_i}) qui converge uniformément sur touts les compacts K de D vers une fonction f analytique sur D.
Soit K_ϕ le support compact de la fonction ϕ, il vient que

$$\begin{aligned} \|\phi f_{n_i} - \phi f\|_2 &= \left(\int_{K_\phi} |\phi(z)|^2 |f_{n_i}(z) - f(z)|^2 dA(w) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\phi(z)\|_2 \sup_{z\in K_\phi} |f_{n_i}(z) - f(z)|. \end{aligned}$$

comme $\sup_{z\in K_\phi}|f_{n_i}(z)-f(z)|\to 0$ quand $n_i\to+\infty$, alors $\phi f_{n_i}\to\phi f$ en norme $\|.\|_2$.
d'autre part la projection de Bergman P est continue sur $L^2_a(D)$, donc $P(\phi f_{n_i})$ converge vers $P(\phi f)$ en norme $\|.\|_2$ quand $n_i\to+\infty$. $T_{\phi f_{n_i}}$ converge vers $T_{\phi f}$ dans $L^2_a(D)$, donc T_ϕ est bien un opérateur compact.

Corollaire 3.3 *Soit $\varphi\in L^1(D,dA)$ une fonction harmonique alors T_φ est compact si et seulement si φ est nulle sur ∂D.*

Démonstration . Soit $\varphi\in L^1(D,dA)$ harmonique, supposons que T_φ est compact, alors

$$\tilde{\varphi}(z)=\varphi(z)=\left\langle T_\varphi k_z,k_z\right\rangle\xrightarrow[|z|\to1^-]{}0\quad car\quad k_z\xrightarrow[|z|\to1^-]{}0$$

faiblement dans $L^2_a(D)$, ainsi $\varphi\equiv 0$ sur ∂D.
réciproquement, $\varphi\in L^1(D,dA)$ harmonique et nulle sur ∂D alors il existe une suite (φ_n) des fonctions continues à support compact sur D telle que

$$\|\varphi-\varphi_n\|_\infty\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

or

$$\|T_\varphi-T_{\varphi_n}\|=\|T_{\varphi-\varphi_n}\|\le\|\varphi-\varphi_n\|_\infty.$$

d'où la suite des opérateurs (T_{φ_n}) tend fortement vers T_φ quand $n\to+\infty$, puisque les opérateurs T_{φ_n} sont compacts, donc T_φ est compact.

Théorème 3.4 *[15] On suppose que μ est une mesure de Borel positive sur D, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T_μ est compacte sur $L^2_a(D,dA)$,*
2. *$\tilde{\mu}(z)\to 0$ quand $|z|\to 1^-$,*
3. *μ est une mesure de Carleson nulle à l'infini sur les espaces de Bergman $L^2_a(D,dA)$.*

Démonstration . Montrons que (1) implique (2) , supposons donc que T_μ est compact sur $L^2_a(D,dA)$ avec μ une mesure de Borel positive et finie sur D, comme $k_z\xrightarrow[|z|\to1^-]{}0$ faiblement alors on déduit que

$$\tilde{\mu}(z)=\left\langle T_\mu k_z,k_z\right\rangle\xrightarrow[|z|\to1^-]{}0.$$

et on obtient (2).
Montrons que (2) implique (3) c'est à dire supposons que $\tilde{\mu}(z)\xrightarrow[|z|\to1^-]{}0$ et

montrons que μ est une mesure de Carleson nulle à l'infini sur l'espace de Bergman, soit $r > 0$ et considérons

$$\int_{D(z,r)} |k_z(w)|^2 \, d\mu(w) \leq \int_D |k_z(w)|^2 \, d\mu(w),$$

comme $|D(z,r)|$ est comparable à $\inf\left\{|k_z(w)|^2, w \in D(z,r)\right\}$ alors

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu(D(z,r))}{|D(z,r)|} = 0$$

et d'après le théorème (3.2), on obtient le résultat.
Supposons maintenant que μ est une mesure de Carleson nulle à l'infini sur l'espace de Bergman et montrons que T_μ est compact sur $L^2_a(D,dA)$.
Soit $f \in L^2_a(D,dA)$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\|T_\mu f\right\| &= \sup\left\{\left|\left\langle T_\mu f, g\right\rangle\right| : \|g\| = 1 \text{ dans } L^2_a(D,dA)\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\int_D f(z)\overline{g(z)} d\mu(z)\right| : \|g\| = 1 \text{ dans } L^2_a(D,dA)\right\} \\
&\leq \|f\|_{L^2(D,d\mu)} \sup\left\{\|g\|_{L^2(D,d\mu)} : \|g\| = 1 \text{ dans } L^2_a(D,dA)\right\}.
\end{aligned}$$

Comme μ est une mesure de Carleson nulle à l'infini sur $L^2_a(D,dA)$, alors il existe une constante $c > 0$, telle que

$$\|g\|_{L^2(D,d\mu)} \leq c\|g\| \quad \text{pour tout } g \in L^2_a(D,dA),$$

d'où $\left\|T_\mu f\right\| \leq c\|f\|_{L^2(D,d\mu)}$ pour tout $f \in L^2_a(D,dA)$, si on a $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ faiblement dans $L^2_a(D,dA)$, comme $i_2 : L^2_a(D,dA) \to L^2(D,d\mu)$ est compact alors

$$\|f_n\|_{L^2(D,d\mu)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

il s'ensuit que $\left\|T_\mu f_n\right\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et par conséquent T_μ est compact et le théorème est entièrement prouvé.

Corollaire 3.4 *On suppose que $r > 0$, et $\varphi \in L^1(D,dA)$ est une fonction positive sur D, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T_φ est compact sur $L^2_a(D,dA)$,*
2. *$\widetilde{\varphi}(z) \to 0$ quand $|z| \to 1^-$,*
3. *$\widehat{\varphi}_r(z) \to 0$ quand $|z| \to 1^-$.*

Démonstration . Comme $\varphi \geq 0$ dans $L^1(D,dA)$ et $d\mu(z) = \varphi(z)dA(z)$ est une mesure de Borel positive et finie sur D, ainsi $T_\varphi = T_\mu$, $\widetilde{\mu} = \widetilde{\varphi}$, $\widehat{\varphi}_r = \widehat{\mu}_r$, et $r > 0$ et en appliquant le théorème précédent et le théorème (3.2) on obtient le corollaire.

Théorème 3.5 *Soit $f \in L^\infty(D, dA)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T_f est compact,*
2. *$\|P(f \circ \varphi_z)\| \to 0$ quand $z \to \partial D$.*

Démonstration . On fixe la fonction $f \in L^\infty(D, dA)$.
soit $M_f : L^2(D) \to L^2_a(D, dA)$ définie par $M_f(g) = fg$ pour $g \in L^2_a(D)$, P est la projection orthogonal de $L^2(D, dA)$ dans $L^2_a(D)$, on note que T_f est de la forme $PM_f = T_f g$, on montre que : $(1) \Rightarrow (2)$, supposons que PM_f est compact, par les propriétés de noyau reproduisant on obtient $\|k_z\|_2^2 = k_z(z)$, si g est une fonction analytique bornée sur D, alors $\left\langle g, \frac{k_z}{\|k_z\|_2} \right\rangle = k_z(z)^{\frac{-1}{2}} g(z) \to 0$ quand $z \to \partial D$ (car $k_z(z) \to 0$ quand $z \to \partial D$).
Comme les fonctions analytiques bornées sur D densent dans L^2_a,
alors $\frac{k_z}{\|k_z\|_2} \to 0$ faiblement dans L^2_a quand $z \to \partial D$,
ainsi

$$\left\| PM_f \left(\frac{k_z}{\|k_z\|_2} \right) \right\|_2 \to 0 \quad \text{quand } z \to \partial D,$$

par la proposition (3.5), $PM_f(k_z) = (P(f \circ \varphi_z) \circ \varphi_z) k_z$. on a

$$\left\| PM_f \left(\frac{k_z}{\|k_z\|_2} \right) \right\|_2 = \|P(f \circ \varphi_z)\|_2$$

alors $\|P(f \circ \varphi_z)\|_2 \to 0$ quand $z \to \partial D$.
On montre que : $(2) \Rightarrow (1)$:
on suppose que $\|P(f \circ \varphi_z)\| \to 0$ quand $z \to \partial D$, et on montre que l'opérateur $(PM_f)^*$ est compact.
Soit $g \in P(L^2(D, dA))$, alors $(PM_f)^* g \in L^2_a$, pour $z \in D$ on a :

$$\begin{aligned} ((PM_f)^* g)(z) &= \left\langle (PM_f)^* g, k_z \right\rangle = \langle g, (P(f \circ \varphi_z) \circ \varphi_z) k_z \rangle \\ &= \int_D g(w) \overline{P(f \circ \varphi_z)(\varphi_z(w)) k_z(w)} \, dA(w). \end{aligned}$$

c'est pour ça on définie pour $r \in]0, 1[$ l'opérateur $S_r : P(L^2(D, dA)) \to L^2_a$ par

$$(S_r g)(z) = X_{rD}(z) \int_D g(w) \overline{P(f \circ \varphi_z)(\varphi_z(w)) k_z(w)} \, dA(w),$$

pour $g \in P(L^2(D, dA))$ *et* $z \in D$, alors d'aprés le théoréme de Fubini et par changement de variable on obtient

$$\begin{aligned} &\int_D \left(\int_D X_{rD}(z) |P(f \circ \varphi_z)(\varphi_z(w))|^2 |k_z(w)|^2 \, dA(w) \right) dA(w) \\ = &\int_{rD} k_z(z) \|P(f \circ \varphi_z)\|_2^2 \, dA(z) < \infty. \end{aligned}$$

D'aprés le théorème (3.5) et la définition de S_r nous trouvons que pour $z \in D$:

$$(((PM_f)^* - S_r)g)(z) = \int_D K(z,w)g(w)dA(w)$$

où $K(w,z) = X_{rD}(z)\overline{P(f\circ\varphi_z)(\varphi_z(w))k_z(w)}$, on voit que $\|(PM_f)^* - S_r\| \xrightarrow[r\to 1^-]{} 0$ comme $\|P(f\circ\varphi_z)\| \to 0 \quad$ quand $\quad z \to \partial D$ alors $S_r \to (PM_f)^* \quad$ quand $r \to 1^-$, et comme S_r est compact alors $(PM_f)^*$ est compact, donc PM_f est compact.

Corollaire 3.5 *Soit $f \in L^\infty(D)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *M_f est compact,*
2. *$|\tilde{f}|^2(z) \to 0$ quand $z \to \partial D$.*

Démonstration . On montre que (2) $\Rightarrow$ (1), pour $f \in L^2(D,dA)$ on définie $\tilde{f}$ par

$$\begin{aligned}\tilde{f}(z) &= \left\langle f\frac{k_z}{\|k_z\|_2}, \frac{k_z}{\|k_z\|_2}\right\rangle \\ &= \frac{1}{k_z(z)}\int_D f(w)|k_z(w)|^2\,dA(w),\ z\in D \\ &= \int_D f\circ\varphi_z\,dA.\end{aligned}$$

donc pour $z \in D$:

$$|\tilde{f}|^2(z) = \|f\circ\varphi_z\|_2^2 = \|P(f\circ\varphi_z)\|_2^2 + \|f\circ\varphi_z - P(f\circ\varphi_z)\|_2^2.$$

alors si $|\tilde{f}|^2(z) \to 0 \quad$ quand $\quad z \to \partial D$, ainsi

$$\|P(f\circ\varphi_z)\|_2 \to 0 \quad et \quad \|f\circ\varphi_z - P(f\circ\varphi_z)\|_2 \to 0 \quad quand \quad z \to \partial D,$$

d'après le théorème précédent T_f est compact, donc M_f est compact.
On montre que (1) $\Rightarrow$ (2), on a :

$$|\tilde{f}|^2(z) = \left\| M_f\left(\frac{k_z}{\|k_z\|_2}\right)\right\|_2^2,$$

on remarque que $\dfrac{k_z}{\|k_z\|_2} \to 0$ faiblement dans L^2_a quand $z \to \partial D$.
alors si M_f est compact alors $|\tilde{f}|^2(z) \to 0$ quand $z \to \partial D$.

Corollaire 3.6 *Soit $f \in L^\infty(D)$ est à support compact de D, alors T_f est compact.*

Démonstration . Si $f \in L^\infty(D)$ à support compact, alors $|\tilde{f}|^2(z) \to 0$ quand $z \to \partial D$.

Lemme 3.3 *Soit f une fonction quasihomogène ou radial borné sur D, T_f est compact si et seulement si*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} c_n(f) = 0.$$

Démonstration . Soient K un opérateur compact sur $L^2_a(D)$ et $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers telle que $\lim_{n\longrightarrow\infty}|c_{\eta_n}(f)| = \limsup_{n\longrightarrow\infty}|c_n(f)|$, comme (e_{η_n}) converge faiblement vers 0, on a $\lim_{n\longrightarrow\infty}\|Ke_{\eta_n}\| = 0$,
d'aprés le lemme (3.1)

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\|(T_f - K)e_{\eta_n}\| = \lim_{n\longrightarrow\infty}\|T_f e_{\eta_n}\| = \lim_{n\longrightarrow\infty}|c_{\eta_n}(f)|,$$

et donc

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}|c_n(f)| \leq \|T_f - K\|$$

ce qui démontre le lemme.

Théorème 3.6 *[4] Soit f une fonction radial bornée sur D, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$T_f : L^2_a(D) \to L^2_a(D)$ est compact,*
2. *$\tilde{f}(z) \to 0$ quand $|z| \to 1^-$,*
3. *$\frac{1}{1-x}\int_x^1 f(t)\,dt \to 0$ quand$z \to 1^-$.*

Démonstration . On montre que (1) $\Leftrightarrow$ (2), on sait que si f est radial alors la transformée de Berezin $\tilde{f}$ de f est

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(z) &= (1-|z|^2)^2\int_D \frac{f(w)\,dA(w)}{|1-z\overline{w}|^4}\\
&= (1-|z|^2)^2\int_D f(w)\left|\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\overline{w}^n\right|^2 dA(w)\\
&= 2(1-|z|^2)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2|z|^{2n}\int_0^1 f(r)r^{2n+1}\,dr\\
&= (1-|z|^2)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2|z|^{2n}\int_0^1 f(\sqrt{r})r^n\,dr.
\end{aligned}$$

soit $f^*(r) = f(\sqrt{r}), 0 \leq r < 1$, d'aprés le théoréme (2.6), alors $\tilde{f}(z) \to 0$ quand $|z| \to 1^-$ si et seulement si $a_n(f^*) \to 0$ quand $n \to +\infty$, tel que

$$a_n(f^*) = (n+1)\int_0^1 f^*(r)r^n\,dr,\ n \geq 0.$$

D'autre part, les fonctions suivantes constituent une base orthonormale de $L^2_a(D)$.

$$e_n(z) = \sqrt{n+1}z^n,\ n = 0, 1, 2, ...$$

lorsque f est une fonction radial , et T_f dans la base $\{e_n\}$ alors

$$\langle T_f e_n, e_n\rangle = (n+1)\int_0^1 f(\sqrt{r})r^n\, dr = a_n(f^*).$$

donc, pour une fonction radial f l'opérateur T_f est compact sur $L^2_a(D)$ si et seulement si $a_n(f^*) \to 0$ quand $n \to +\infty$.
Finalement, on montre que (1) $\Leftrightarrow$ (3),
d'aprés le théoréme (2.7) on déduire que T_f est compact si et seulement si

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x}\int_x^1 f^*(t)\, dt = 0. \tag{3.1}$$

comme f est bornée et

$$\frac{1}{1-x}\int_x^1 f^*(t)\, dt = \frac{2}{1+\sqrt{x}}\left[\frac{1}{1-\sqrt{x}}\int_{\sqrt{x}}^1 f(t)(t-1)\, dt + \frac{1}{1-\sqrt{x}}\int_{\sqrt{x}}^1 f(t)\, dt\right].$$

on trouve que (3.1) est équivalent à

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x}\int_x^1 f(t)\, dt = 0.$$

et le théorème est entièrement prouvé.

3.4 Classes de Schatten-von Neumann.

Soit A un opérateur d'un espace de Hilbert H_1 dans un espace de Hilbert H_2, et soit le module de A défini par

$$|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}} : H_1 \to H_1.$$

Soit $s_n(A)$, $n = 0, 1, 2, ...$les valeurs propres de l'opérateur $|A|$.

Définition 3.2 *[28] Les nombres $s_n(A)$, $n = 0, 1, 2, ...$ sont appelés les nombres singuliers de A.*
On défini les classes de Schatten-von Neumann $\mathcal{S}_p(H_1, H_2)$ par

$$\mathcal{S}_p(H_1, H_2) = \{A \in \mathcal{S}_\infty(H_1, H_2) : \|A\|^p_{\mathcal{S}_p} = \sum_k s_k(A)^p < \infty\},\ 0 < p < \infty, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{S}_\infty(H_1, H_2) = \textit{la classe des opérateurs compacts.}$$

avec

$$\|A\|_\infty = \max_{n\geq 0} s_n(A).$$

On note par $\mathcal{S}_0(H_1, H_2)$ l'ensemble des opérateurs de rang fini de H_1 dans H_2.

Il est clair que si A est compact, alors $|A|$ est également compact et donc son spectre est donné par une suite tendant vers 0 (s'il est infini).
autrement dit

$$\mathcal{S}_\infty(H_1, H_2) = \left\{ A \in \mathcal{L}_\infty(H_1, H_2), \lim_{n\to\infty} s_n(A) = 0 \right\},$$

où $\mathcal{L}_\infty(H_1, H_2)$ est l'espace des opérateurs linéaires bornés de H_1 dans H_2.
voici quelques propriétés des classes $\mathcal{S}_p(H_1, H_2)$:

1. $\mathcal{S}_p(H_1, H_2)$ pour $1 \le p \le \infty$ est un espace Banach muni de la norme

$$\|A\|_{\mathcal{S}_p} = \left(\sum_k s_k(A)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

   et pour $1 \le r < s \le \infty$, $\mathcal{S}_r(H_1, H_2) \subset \mathcal{S}_s(H_1, H_2)$, et $\mathcal{S}_0(H_1, H_2)$ est dense dans $\mathcal{S}_p(H_1, H_2)$ pour tout $1 \le p \le \infty$.
2. Si $1 \le p \le \infty$, $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, $K \in \mathcal{S}_p(H_2, H_3)$ et $B \in \mathcal{L}(H_3, H_4)$ alors $BKA \in \mathcal{S}_p(H_1, H_4)$.
3. Soit $(B_n)_n \subset \mathcal{L}(H_3, H_4)$ convergent fortement vers $B \in \mathcal{L}(H_3, H_4)$ et soit $(C_n)_n \subset \mathcal{L}^*(H_2^*, H_1^*)$ convergent fortement vers $C \in \mathcal{L}^*(H_2^*, H_1^*)$, alors si $K \in \mathcal{S}_p(H_2, H_3)$ $(1 \le p \le \infty)$,

$$\|B_n K C_n - BKC\|_p \to 0, \text{ qaund } n \to \infty.$$

   Si $K \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur auto-adjoint positif et si $\{e_n\}_n$ est une base orthonormale de $\mathcal{L}(H)$, alors $\sum_n (Ke_n, e_n)$ ne dépend pas du choix de la base orthonormale $\{e_n\}_n$, cette somme est appelée trace de K, et notée trK.
4. Soit $1 \le p \le \infty$, alors $K \in \mathcal{S}_p(H)$ si et seulement si $tr(|K|^p) < \infty$, dans ce cas

$$\|K\|_{\mathcal{S}_p}^p = \sum_k s_k(K)^p = tr(|K|^p).$$

la classe de Schatten-von Neumann $\mathcal{S}_p(H)$ sera notée par $\mathcal{S}_p$.

Théorème 3.7 *[15]*

1. *Soit $\varphi \in C(\bar{\mathbb{D}})$ (i.e., φ est continu sur $\bar{\mathbb{D}}$), alors T_φ est compact (i.e, $T_\varphi \in \mathcal{S}_\infty$) si et seulement si*

$$\lim_{|z|\to 1-} \varphi(z) = 0.$$

2. *Soit $\varphi(z) \geq 0$ sur $\mathbb{D}$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
   — $T_\varphi \in \mathcal{S}_\infty$,
   — $\lim_{|z|\to 1-} \tilde{\varphi}(z) = 0$,
   — *Pour tout $r > 0$ fixe,* $\lim_{|z|\to 1-} \hat{\varphi}_r(z) = 0$.

Mettons aussi $d\lambda(z) = dA(z)/(1-|z|^2)^2$.

Théorème 3.8 *[15] Soit $\varphi(z) \geq 0$ et $p \geq 1$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
— $T_\varphi \in \mathcal{S}_p$,
— $\tilde{\varphi} \in L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$,
— *Pour tout $r > 0$ fixe,* $\hat{\varphi}_r \in L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$.

A partir de maintenant, nous supposons le symbole φ radial, alors, la matrice de l'opérateur de Toeplitz T_φ est simple à calculer, en prenant la base canonique $e_n(z) = \sqrt{n+1}\, z^n$ de $L^2_a(\mathbb{D})$, on a

$$(T_\varphi)_{nm} = \frac{(n+1)^{1/2}(m+1)^{1/2}}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)}\, d\theta \int_0^1 r^{n+m+1} \varphi(r)\, dr.$$

donc

$$(T_\varphi)_{nm} = \begin{cases} 2(n+1)\int_0^1 r^{2n+1}\varphi(r)\, dr, & m = n, \\ 0, & n \neq m, \end{cases} \tag{3.3}$$

et la matrice de l'opérateur est diagonale.

Il est convenable de poser

$$c_n(\varphi) := (T_\varphi)_{nn} = 2(n+1)\int_0^1 r^{2n+1}\varphi(r)\, dr. \tag{3.4}$$

Pour un symbole radial φ, sa transformée de Berezin est également radiale et elle est calculée comme suit

$$\tilde{\varphi}(z) = (1-|z|^2)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_n(\varphi) |z|^{2n},$$

(voir Zorboska [19]).

Théorème 3.9 (Korenblum-Zhu [4]) *Soit T_φ un opérateur de Toeplitz à symbole radial borné φ , alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $T_\varphi \in \mathcal{S}_\infty$,
2. $\lim_{n\to+\infty} 2(n+1)\int_0^1 \varphi(x) x^{2n+1}\, dx = 0$,
3. $\lim_{t\to 1-} \frac{1}{1-t}\int_t^1 \varphi(x)\, dx = 0$.

3.5 Quelques conditions suffisantes pour que l'opérateur de Toeplitz radial soit dans la classe de Schatten-von Neumann $\mathcal{S}_\varphi$, $0 < p < \infty$

Soit la fonction φ définie sur $I = [0,1]$, le théorème (3.9) affirme que si le symbole φ est continu dans un voisinage (à gauche) du point $x = 1$ et $\varphi(1) = 0$, alors évidemment $\lim_{n\to+\infty} c_n(\varphi) = 0$.

Supposons maintenant que φ est l fois continument différentiables sur $I, l \in \mathbb{N}$, on voit facilement que les conditions $\varphi^{(k)}(1) = 0,\ k = 0,\dots,l-1$, impliquent une décroissance plus rapide de $c_n(\varphi)$ quand $n \to +\infty$.

Pour formuler la proposition suivante, notons $W^{l,p}(I)$ l'espace de Sobolev sur l'intervalle I, *i.e.*, $f \in W^{l,p}(I)$ si et seulement si

$$\|f\|_{W^{l,p}} = \sum_{j=0}^{l} \|f^{(j)}\|_p < \infty,$$

où les dérivés $f^{(j)}$ sont au sens distributions, et $\|.\|_p$ sont les normes sur $L^p(I), p \geq 1$. (voir [23] pour plus de détails).

La proposition est tout à fait élémontaire , et nous la donnons par souci d'exhaustivité.

Proposition 3.4 *Soit $l \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$. Soit $\varphi \in W^{l,p}(I)$ et $\varphi^{(k)}(1) = 0, k = 0,\dots,l-1$, alors*

$$|c_n(\varphi)| \leq \frac{C}{n^{l-1/p}} \|\varphi\|_{W^{l,p}},$$

où $C = C(l,p)$.

Démonstration . Pour $p \geq 1$, nous fixons $q = \frac{p}{(p-1)}, q \geq 1$, en commençant par $l = 1$, on voit que :

$$\begin{aligned} c_n(\varphi) &= 2(n+1)\int_0^1 \varphi(x)x^{2n+1}dx = \int_0^1 \varphi(x)d(x^{2(n+1)}) \\ &= -\int_0^1 \varphi'(x)x^{2(n+1)}dx. \end{aligned}$$

Par l'énigalité de Hölder

$$|c_n(\varphi)| \leq \|\varphi'\|_p \|x^{2(n+1)}\|_q \leq C\|\varphi\|_{W^{1,p}} \frac{1}{n^{\frac{1}{q}}},$$

où $C = C(l,p)$, pour $l = 1$, on a $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = l - \frac{1}{p}$

Pour le cas général de l, l'intégration par parties appliquées $(l-1)$ fois à l'intégrale ci-dessus donne :

$$c_n(\varphi) = \frac{(-1)^l}{(2n+3)(2n+4)...(2n+1+l)} \int_0^1 \varphi^{(l)}(x) x^{2n+1+l} dx.$$

par conséquent, nous obtenons par l'inégalité de Hölder

$$|c_n(\varphi)| \leq \frac{C}{n^{l-1+1/q}} \|\varphi^{(l)}\|_p \leq C\|\varphi\|_{W^{1,p}} \frac{1}{n^{l-1/p}},$$

où $C = C(l,p)$.

Supposons que $l - \frac{1}{p} > 0$, il en résulte immédiatement que $T_\varphi \in \mathcal{S}_\alpha, \alpha > \frac{1}{(l-\frac{1}{p})}$, pour les symboles φ de la proposition ci-dessus, et aussi,

$$\|T_\varphi\|_{\mathcal{S}_\alpha} \leq C\|\varphi\|_{W^{l,p}}.$$

Notons aussi que la proposition (3.4) donne une condition suffisante pour que $\{c_n(\varphi)\}$ soit proche de 0 , mais la condition n'est pas nécessaire.
Par exemple, elle explique comment les coefficients $\{c_n(\varphi)\}$ s'annulent quand $\varphi \geq 0$ alors qu'aucune annulation dans l'intégrale (3.4) définissant $c_n(\varphi)$ n'est pas possible.
Quand φ est complexe (ou réel de signe indéfinie), l'intégrale qui donne $c_n(\varphi)$ devient plus petite au voisinage (à gauche) de $x = 1$, à cause des oscillations très rapides de φ, (voir Proposition 3.5).

Le lemme suivant est un calcul simple basé sur des propriétés bien connues de la fonction Γ.

Lemme 3.4 *[28]* *Soit $\delta > -1$, alors*

$$I_\delta(n) = \int_0^1 s^n (1-s)^\delta ds \leq \frac{C\Gamma(\delta+1)}{n^{\delta+1}},$$

où C est une constante.

Démonstration . Nous donnons un bref aperçu de la preuve, on pose $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, en faisant le changement de variable $s = e^{-t}$ sur $I_\delta(n)$ et on réécrire l'intégrale sur $[0, a_n[$ et $[a_n, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 s^n (1-s)^\delta ds &= \int_0^{+\infty} e^{-nt}(1-e^{-t})^\delta dt = I_1 + I_2 \\ &= \int_0^{a_n} e^{-nt}(1-e^{-t})^\delta dt + \int_{a_n}^{+\infty} e^{-nt}(1-e^{-t})^\delta dt. \end{aligned}$$

on voit facilement que

$$I_2 \leq \frac{C}{\sqrt{n+1}} e^{-(n+1)a_n}.$$

pour tout $\epsilon > 0$ et t assez petit, nous avons $(1 - e^{-t}) \leq (1+\epsilon)t$, et donc

$$I_1 \leq (1+\epsilon)^{\delta} \int_0^{a_n} e^{-nt} t^{\delta} dt = \frac{(1+\epsilon)^{\delta}}{(n+1)^{\delta}} \int_0^{(n+1)a_n} e^{-u} u^{\delta} dt$$

où $u = (n+1)^t$ et $n \to +\infty$. le lemme est prouvé.

Les deux premiers points de la proposition suivante sont des résultats de Grudsky-Vasilevski [26, Théorème 3.3], le troisième point concerne le fait que l'opérateur Toeplitz T_φ est dans $\mathcal{S}_p$, $\quad 0 < p < \infty$, et il est obtenu à l'aide de techniques similaires à celles de [26], notons que la continuité et la bornitude du symbole φ au voisinage de $x = 1$ ne sont pas obligatoires.

On pose $\Phi(x) = \int_x^1 \varphi(s) ds$, nous avons la proposition suivante.

Proposition 3.5 *[28]*
Supposons que $\varphi \in L^1[0,1]$,
nous avons les implications suivantes (quand $s \to 1 - 0$*) :*

1. *Si* $|\Phi(s)| \leq C(1-s)$, *alors* $\sup_n |c_n(\varphi)| < +\infty$ *(i.e, l'opérateur* T_φ *est borné),*
2. *Si*
$$\lim_{s \to 1-0} \frac{|\Phi(s)|}{(1-s)} = 0,$$
alors $\lim_{n \to +\infty} |c_n(\varphi)| = 0$ *(i.e, l'opérateur* T_φ *est compact),*
3. *Soit*
$$|\Phi(s)| \leq C(1-s)^{\delta}, \tag{3.5}$$
pour $\delta > 1$, *alors*
$$|c_n(\varphi)| \leq \frac{C}{n^{(\delta-1)}}, \tag{3.6}$$
(c'est à dire l'opérateur T_φ *est dans la classe de Schatten-von Neumann* $\mathcal{S}_{p+\epsilon}$, $p = \frac{1}{(\delta-1)}$, *pour tout* $\epsilon > 0$*).*

Démonstration . Pour (1), (2), voir Grudsky-Vasilevski [26] [Théorème 3.3]. Passant à (3), nous faisons l'intégration par parties dans (3.4)

$$c_n(\varphi) = (2n+2)(2n+1) \int_0^1 \Phi(x) x^{2n} dx.$$

par l'hypothèse de (3), il existe $\delta_0 > 0$ tel que $|\Phi(x)| \leq C(1-x)^{\delta}$ pour $1-\delta_0 \leq x < 1$, nous réécrivons cette dernière intégrale comme

$$\begin{aligned} c_n(\varphi) &= (2n+2)(2n+1)\int_0^1 \Phi(x)x^{2n}dx \\ &= (2n+2)(2n+1)\left(\int_0^{1-\delta_0} \Phi(x)x^{2n}dx + \int_{1-\delta_0}^1 \Phi(x)x^{2n}dx\right) \\ &= : I_1 + I_2, \end{aligned}$$

le facteur $(2n+2)(2n+1)$ étant absorbé dans les intégrales, puisque $\varphi \in L^1[0,1]$ et Φ est borné, I_1 ainsi décroît avec un taux exponentiel, *i.e.*,

$$I_1 \leq C(2n+2)(2n+1)(1-\delta_0)^{2n}.$$

passant à I_2, on voit que

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C(2n+2)(2n+1)\int_{1-\delta_0}^1 (1-x)^{\delta}x^{2n}dx \\ &\leq C(2n+2)(2n+1)\int_0^1 (1-x)^{\delta}x^{2n}dx \\ &\leq \frac{C\Gamma(\delta+1)n^2}{n^{\delta+1}} \\ &\leq \frac{C}{n^{\delta-1}}, \end{aligned}$$

où à la dernière étape, nous avons utilisé le lemme ci-dessus.

Nous considérons maintenant comme exemple, le cas à symbole particulier :

$$\varphi(x) = \varphi_{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^{-\beta}sin(1-x)^{-\alpha}, \tag{3.7}$$

où $\alpha > 0$ et $\beta < 1$. Évidemment, la condition sur β garantit que $\varphi \in L^1[0,1]$. Les calculs de [26], (p. 23 voir l'équation (3.3)) donne

$$\Phi(x) = \frac{1}{\alpha}(1-x)^{\alpha-\beta+1}cos(1-x)^{-\alpha} + O((1-x)^{2\alpha-\beta+1}),$$

donc la condition (3.6) est satisfaite avec $\delta = \alpha - \beta + 1 > 0$, et, par conséquent, le point (3) de la proposition (3.5) est prouvé.

Corollaire 3.7 *[28] Il existe un symbole $\varphi = \varphi_{\alpha,\beta}$ (3.7) avec un choix de paramètres α, β ayant les propriétés suivantes :*

1. $\varphi \in L^1[0,1]$,
2. *L'opérateur T_φ est compact,*
3. *Pour tout $\delta_0 > 0$, $\sup_{[1-\delta_0,1[}|\varphi(x)| = +\infty$,*
4. *De plus, pour tout $p > 0$, $\exists \alpha > 0$ et $\beta < 1$, tels que $T_{\varphi_{\alpha,\beta}} \in \mathcal{S}_p$.*

Bibliographie

[1] A. Brown and P. R. Halmos. Algebraic properties of Toeplitz operators. J. Reine Angew. Math., 213 :89-102, 1963/1964.

[2] A. G. Postnikov. Tauberian theory and its applications.1979.

[3] B. Barusseau. Propriétés spectrales des opérateurs de Toeplitz. Thèse présentée à l'Université Bordeaux 1. Spécialité mathématiques pures. Mai. 2010.

[4] B. Korenblum ; Zhu, K. An application of Tauberian theorems to Toeplitz operators. J. Operator Theory 33 (1995), no. 2, 353-361.

[5] C. Gu, Products of several Toeplitz operators. J. Funct. Anal., 171 :483 ?587, 2000.

[6] D. Luecking Trace ideal criteria for Toeplitz operators. J. Funct. Anal. 73 (1987), no. 2, 345-368.

[7] E. Fricain and Javad Mashreghi. The theory of H(b) spaces. Vol. 1, volume 20 of New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[8] H. Hedenmalm ; Korenblum, B. ; Zhu, K. Theory of Bergman spaces. Graduate Texts in Mathematics, 199. Springer-Verlag, New York, 2000.

[9] I. Louhichi ; Strouse, E. ; Zakariasy, L. Products of Toeplitz operators on the Bergman space. Integr. Eq. Oper. Theory 54 (2006), no. 4, 525-539.

[10] I. Louhichi ; Zakariasy, L. On Toeplitz operators with quasi-homogeneous symbols. Arch. Math. (Basel) 85 (2005), no. 3, 248-257.

[11] J. Agler, E. McCarthy, Pick interpolation and Hilbert function spaces, Graduate Studies in Mathematics, vol. 44, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002

[12] J. H. Shapiro, Composition operators and classical function theory, Springer Verlag, New York 1993.

[13] K. Guo, et D. Zheng, Toeplitz algebra and Hankel algebra on the harmonic Bergman space. J. Math. Anal.Appl., 276 :213 ?230, 2002.

[14] K. Stroethoff and D. Zheng. Toeplitz and Hankel operators on Bergman spaces. transactions of the american mathematical society. 1992.

[15] K. Zhu . Operator Theory in Function Spaces. The American Mathematical, Rhode Island , Second Edition , 2007.

[16] L. Senge (auth.), Real and Functional Analysis, Springer-Verlag New York, Graduate Texts in Mathematics 142, 1993.

[17] N. Aronszajn, Theory of reproducing kernels, Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950), 337U404.

[18] N. Wiener. Tauberian theorems, 1932.

[19] N. Zorboska The Berezin transform and radial operators. Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 3, 793-800 (electronic).

[20] P. Duren : Theory of Hp -spaces. A series of Monographs and Textbooks.Academic press, London,1970.

[21] P. Halmos, A Hilbert space problem book. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, second édition, 1982.

[22] P. L. Duren, Theory of Hp spaces,Pure Appl. Math. Academic Press, New York-London, 1970.

[23] R. Adams, Sobolev spaces. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65. Academic Press, New York-London, 1975; exists also as : Adams, R.; Fournier, J. Sobolev spaces. Second edition. Pure and Applied Mathematics, Vol. 140. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.

[24] S. Axler, Bergman spaces and their operators, Surveys of some recent results in operator theory, I, Pitman Res. Not. Math. Ser. Vol. 171, 1988, p. 1-50.

[25] S. Axler, S. Chang, et D. Sarason, Products of Toeplitz operators. Int. Equa.Op. Th., 1 :285?309, 1978.

[26] S. Grudsky; V. Vasilevski Bergman-Toeplitz operators : radial component influence. Integr. Eq. Oper. Theory 40 (2001), 16-33.

[27] V. Paulsen, An introduction to the theory of reproducing kernel Hilbert spaces, Cambridge studies in advanced mathematics, 152, 2016.

[28] Z. Bendaoud, S. Kupin, K. Toumache, B. Touré, and R. Zarouf. Toeplitz Operators with Radial Symbols on Bergman Space and Schatten-von Neumann Classes. Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2020, Vol. 16, No. 1, pp. 3-26.