الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE YAHIA FARES DE MEDEA

FACULTE DE LA TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



Mémoire de Fin d'Études

En vue de l'obtention du Diplôme De Master en Génie Mécanique
Option : *Mécatronique*

THEME

MODELISATION DYNAMIQUE D'UN ROBOT BIPEDE

Proposé et dirigé par :

- **Pr. ABUDURA Salam**
- **Dr. BELHADJ Abd-elmouneim**

Réalisé par :

- **KETTABI Walid**
- **BELKACEM Meftah**

Remerciements

*Au terme de ce Mémoire nous tenons à remercier tout naturellement en premier lieu **ALLAH** qui nous a donné la force, le courage et la patience de bien mener ce travail.*

*Ce travail a été réalisé sous la direction de Monsieur **ABUDURA Salam**, Professeur au Pôle Universitaire Yahia Fares de Médéa, qu'il trouve l'expression de notre profonde reconnaissance pour sa compétence, ses encouragements et ses précieux conseils durant le déroulement de ce travail.*

*Un hommage particulier au co-promoteur de cette étude Monsieur **BELHADJ Abd elmoneim** qu'il trouve ainsi l'expression de notre profonde reconnaissance pour sa compétence, ses encouragements et ses précieux conseils durant le déroulement de ce travail.*

*Nous remercions Monsieur **M. BACHENE**, qui a bien voulu assurer la Présidence de notre jury ainsi que Monsieur **M. ZERARI** et Monsieur **M. GUEMANA** pour avoir accepté de juger ce modeste travail.*

Nos sentiments vont également à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

***Mon père**, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutient permanent venu de toi.*

***Ma mère**, qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.*

***Mon frère** et **ma sœur** qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.*

*A tous les membres de **ma famille.***

*Mes **enseignants** à l'**UYFM** qui doivent voir dans ce travail la fierté d'un savoir bien acquis.*

*À mes **collègues** et **amis** à l'université de Yahia Farès et ma promotion génie mécaniques **(mécatronique)** (2016/2017).*

À tous qui m'ont encouragé et soutenu dans mes moments les plus difficiles.

WALID

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

***Mon père**, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutient permanent venu de toi.*

***Ma mère**, qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.*

***Mon frère** et **ma sœur** qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.*

*A tous les membres de **ma famille.***

*Mes **enseignants** à l'**UYFM** qui doivent voir dans ce travail la fierté d'un savoir bien acquis.*

*À mes **collègues** et **amis** à l'université de Yahia Farès et ma promotion génie mécaniques **(mécatronique)** (2016/2017).*

À tous qui m'ont encouragé et soutenu dans mes moments les plus difficiles.

MEFTAH

الملخص

هذا البحث المتواضع يهدف الى توضيح آلية مشي الروبوت. في البداية، مقاربة نظرية تهدف الى مبادئ المشي القدمي و أيضا تطرقنا الى بعض الأمثلة حول الروبوتات القدمية في العالم. في الأخير قمنا بعرض المعادلات الحركية و الديناميكية للقدمين اعتمادا على صياغة نيوتن-أولر

الكلمات المفتاحية : روبوت ذو قدمين، نقطة العزم الصفرية، نيوتن-أولر، مشكل هندسي معكوس، المشي بالقدمين.

Résumé

Modélisation dynamique d'un robot bipède

Cette petite recherche a faite l'objective de la démarche d'un robot bipède. Pour débuter, une approche théorique visant aux notions et principes de la marche bipède aussi nous avons présenté quelques exemples sur les robots bipèdes présentés dans le monde. Enfin nous avons présenté le développement des équations cinématiques et dynamiques du bipède selon la formulation de Newton-Euler.

Mots clés : robot bipède, ZMP, Newton-Euler, PGI, la marche bipède.

Abstract

Dynamic modeling of a biped robot

This little research made the objective of the approach of a biped robot. To begin, a theoretical approach aimed at the notions and principles of biped walking also we presented some examples on biped robots presented in the world. Finally, we have presented the development of the kinematic and dynamic equations of the biped according to the Newton-Euler formulation.

Key words: bipedal robot, ZMP, Newton-Euler, PGI, biped walking.

Tables des matières ……i

Liste des figures ……iii

Liste d'abréviations ……..iv

Introduction générale ……..1

Chapitre I : Notions sur la marche bipède

I.1. Introduction ……...3

I.2. Définition de système bio mécatronique …….....3

I.2.1 Exemple de système bio mécatronique : la prothèse active …….3

I.3 Définition de la marche ……..4

I.3.1. Examen de la marche ……5

I.4. Concepts généraux sur la marche ……6

I.4.1. Polygone de sustentation ……....6

I.4.2 Zéro-Moment Point (ZMP) …….....7

I.4.3. Types de marche bipède ……8

I.4.4. Degrés de liberté nécessaires à la Marche ……9

I.4.5. Plans de mouvement ……...9

I.5. Conclusion ……10

Chapitre II : Les robots bipèdes actifs et passifs

II.1. Introduction ……11
II.2.Présentation des robots bipèdes actifs existants ……11
II.2.1 ASIMO de HONDA ……..11
II.2.2. MELTRAN du MEL ……12
II.2.3. Rabbit du CNRS ……..13
II.3. Les robots bipèdes passifs ……14
II.4. Conclusion ……..17

Chapitre III : Modélisation géométrique, cinématique et dynamique

III.1. Introduction ……...19

III.2. modélisation géométrique …….....19

III.3. Modélisation cinématique ……..…21

III.3.1. positionnement dans l'espace ……21

III.3.2. mouvement du bipède ……22

III.3.3. problème géométrique inverse(PGI) ……22

III.3.4. Détermination des vitesses et accélérations articulaires ……26

III.3.5. Convention de description de chaines cinématiques ……..30

III.3.6. Application de la convention aux calculs cinématiques …….33

III.4. Détermination des forces et des couples sur chaque membre ……..……34

III.4.1. Résolution en simple support ……..……..39

III.4.2. Résolution en double support ……..……..39

III.5. Conclusion …….……..…….40

Conclusion générale et perspectives ……41

Références bibliographiques

Annexe

Chapitre I : Notions sur la marche bipède

Figure I.1. *Prothèse active de victhom* 4
Figure I.2. *Les phases de la marche* 4
Figure I.3. *Les trois phases du déroulé du pied au (Taligrade (1), plantigrade (2), digitigrade (3))* 5
Figure I.4. *Polygone de sustentation* 6
Figure I.5. *Forces agissantes sur pied (a) cas en 3D (b) cas plan* 7
Figure I.6. *(a) Marche statique. (b) Marche dynamiquement équilibrée* 9
Figure I.7. *Plans de mouvement* 10

Chapitre II : Les robots bipèdes actifs et passifs

Figure II.1. Le robot ASIMO de HONDA 12
Figure II.2. Le robot MELTRAN-2 du MEL 13
Figure II.3. Le robot Rabbit du CNRS 14
Figure II.4. (a) Roue idéale (b) Roue déjantée 15
Figure II.5. (a) Bipède passif (b) Bipède passif avec genou 16
Figure II.6. Marcheur passif 16

Chapitre III : Modélisation géométrique, cinématique et dynamique

Figure III.1. *Modèle géométrique du bipède* 20
Figure III.2. *Architecture du robot selon la convention définie : en rouge, les repères Correspondant à chacun des membres ; en bleu foncé, les vecteurs 4 liant l'origine des Repères consécutifs (décalés sur la figure pour améliorer la visibilité) ; en vert, les centres de masses de chacun des membres et en bleu, les vecteurs Si positionnant les CdM.* 31
Figure III.3. *Représentation des efforts sur le bipède* 36

ZMP	Zéro moment point
DDL	Degré de liberté
CDM	Centre de masse
PG	Problème géométrique
PGI	Problème géométrique inverse
F	Force
M	Moment
ω	Vitesse angulaire
C	Accélération
P_1	Position de pied 1
P_2	Position de pied 2
CM	Position de CDM
θ	Cordonnées articulaire
ASIMO	Advanced Step in Intonative Mobility
MEL	Mechanical Engineering Laboratory
CNRS	Centre National de la Recherche Scientifique

Introduction générale

Introduction générale

L'objective de ce travail est d'étudier la locomotion bipède dans le but de développer un robot marcheur anthropomorphe. Avant d'entrer dans le vif du sujet, tentons de réponse aux deux questions suivantes : pourquoi choisir un robot marcheur anthropomorphe ?

D'abord, à quoi sert l'étude de la locomotion bipède ? Une réponse simple à cette question serait pour mieux comprendre la marche humaine. Mais encore ? Nous y reviendrons plus trad.

Ensuite, pourquoi choisir un robot marcheur anthropomorphe ? Pour y répondre, demandons-nous d'abord à quoi sert un robot. Un robot permet d'effectuer des taches domestique ou industrielle, qui sont soit impossible à réaliser, difficile, dangereuses, trop rapides ou répétitive pour l'homme. En laissant de cote le débat philosophique sur la place de l'homme et du robot dans la société. Nous pouvant dire que le robot est un outil ou un partenaire de l'homme. Ensuite, pourquoi rechercher un robot mobile ? Simplement pour lui permettre d'effectuer des taches plus diversifiées ou d'être un meilleur outil. Cependant, le robot anthropomorphe désire est non seulement mobile, mais c'est aussi un robot marcheur, c'est-à-dire qu'il se déplace à l'aide de pattes. Jusqu'à maintenant la plupart des robots mobiles construire se déplacent avec des roues ou des chenilles. Alors, pourquoi vouloir construire un robot marcheur ? Est réponse devient évidente en regardant l'environnement qui nous entoure. Un robot marcheur est plus adapté à un environnement bonde d'obstacles. Par exemple, à l'extérieur, il peut passer par-dessus une roche ou un trou. Aussi, un robot destine à aider l'homme dans des taches domestique variées devrait être adapte à un environnement humain afin de pouvoir montrer un escalier ou éviter facilement des obstacles. Ainsi, un robot marcheur est beaucoup plus adaptable, donc plus mobile qu'un robot sur roue ou sur chenille.

Pourquoi mieux comprendre la marche ? En premier lieu, la marche est le moyen de locomotion le plus répandu chez l'homme et elle n'est pas encore totalement comprise. Une meilleure compréhension de la marche pourrait améliorer les techniques de réadaptions des accidentés ou la confection de prothèse pour les amputés. Aussi mieux comprendre la marche signifie mieux comprendre l'équilibre ce qui permettrait la création de dispositif capable d'éviter des chutes ou d'amoindrir leurs conséquences. Enfin, certaines techniques sportives pourraient être améliorées pour diminuer les possibilités de blessure ou simplement améliores leurs rendements. Bref, plusieurs raisons motivant l'étude de la marche et l'élaboration des

robots marcheurs bipèdes. Mieux comprendre l'un, c'est mieux comprendre l'autre et c'est pourquoi ce mémoire aborde le sujet de la marche pinède.

Comme il a été mentionné au début de cet introduction, l'objective de ce d'étudier la locomotion bipède dans le but de développer un robot anthropomorphe. Ce travail a aussi pour but jeté les bases de l'étude des robots marcheurs bipèdes.

CHAPITRE I :
Notions sur la marche bipède

I.1. Introduction

Il est important de comprendre le fonctionnement de la marche humaine avant de pouvoir l'appliquer à un robot bipède. Ce chapitre a pour but de définir le type de système étudié et les concepts permettant de décrire et de caractériser la marche bipède. Ainsi, la notion de système bio mécatronique sera d'abord présentée suivie d'une brève définition de la marche.

Ensuite, les concepts de polygone de sustentation et de < Zéro- Moment Point> seront exposés suivis d'une description des types de marche, des plans de mouvement et des degrés de liberté impliqués dans la marche. Enfin, quelques données anthropométriques seront présentées.

I.2. Définition de système bio mécatronique

Le système étudie est un robot bipède anthropomorphe. Ce robot est avant tout un système mécanique de lien rigides et d'articulation agences dans une structure humanoïde. Comme le robot est destiné à générer son propre mouvement, une source d'énergie doit y être intégrée. Généralement, l'énergie électrique est utilisée. Ainsi, le robot contient des systèmes électriques et électroniques. Mais le robot ne constitue pas interfaces de communication, des capteurs et une forme d'intelligence artificielle. Le système peut donc être qualifié de système mécanique. En plus, le robot vise à représenter un système biologique (l'homme) et à imiter ses mouvements. C'est pourquoi le système de robot bipède anthropomorphe peut être qualifié de système bio mécatronique.

I.2.1 *Exemple de système bio mécatronique : la prothèse active*

La prothèse active réalisée par la compagnie victhom (figure I.1) est un bon exemple de système bio mécatronique. Destinée aux personnes ayant une jambe amputée au-dessus du genou, cette prothèse active, motorisée au genou, vise à redonner la fonctionnalité du membre perdu à l'amputé. Pour ce faire, des données (entre autres des forces, des pressions et des positions provenant de la jambe saine et de la prothèse) sont recueillies et analysées par un microcontrôleur qui adapte les mouvements de la prothèse. Ainsi, outre les systèmes mécaniques et électriques complexes impliqués dans la prothèse, le système bio mécatronique est complété par la présence d'une intelligence artificielle qui doit traiter les informations provenant des capteurs biométriques. Aussi, afin d'améliorer le contrôle de la prothèse, des

capteurs neurologiques identifiant directement les signaux provenant du cerveau sont en cours de développement, [1].



Figure I.1. *Prothèse active de victhom*

I.3 Définition de la marche

D'abord, tentons de définir correctement le concept de la marche. Le petit robot 2006 définit le verbe < marcher > comme l'action de se déplacer par mouvements et appuis successifs des jambes et des pieds sans quitter le sol. Cette définition ne précise pas le nombre de membres nécessaires à la marche. Celle-ci peut donc être bipède, quadrupède, hexapode, octopode… L'objectif de ce mémoire étant d'étudier la marche humaine, le terme < marche > fera référence à la marche bipède, [2].

Bien que la définition contienne beaucoup d'informations, elle se doit d'être précisée et complétée. D'abord, la marche a pour but un déplacement. Elle est donc un moyen de locomotion et est habituellement attribuée aux êtres vivants. Comme elle très efficace en terrain accidenté et face à des obstacles, la marche a avantage à être étudiée pour pouvoir être appliquée à la locomotion d'objets. Ainsi, une machine marchante serait très avantagée pour se mouvoir dans un environnement adapté à l'homme, comme l'escalier par exemple, comparativement à une machine que utilisait le roulement ou les chenilles.

Ensuite, la se définit par des mouvements et des appuis successifs des jambes et des pieds au sol, ce qui réfère à la notion de cycles et de phases de la marche. La marche est donc

un phénomène cyclique ou chaque pied se balance à tour de rôle dans les airs et sert ensuite d'appui, seul ou avec l'autre pied. Un découplage du cycle de marche permet de visualiser deux phases distinctes soit le simple support et le double support. La phase de simple support est celle ou une seule jambe est en contact avec le sol, l'autre jambe se balançant vers l'avant. Dans cette phase, le mouvement d'une jambe peut être subdivisé en deux états, soit le balancement et le support. Ainsi, lors de la phase de simple support, chaque jambe est dans un état différent, une se balance et l'autre supporte la totalité du poids. La phase de double support débute lorsque la jambe en balancement entre en contact avec le sol. Dans cette phase, les deux jambes sont dans le même état et le poids est supporté par les deux jambes. Cette phase dure jusqu'à ce que la jambe arrière quitte le sol. La phase de simple support recommence alors. En régime stationnaire, c'est-à-dire lorsqu'une personne marche à vitesse constante sans perturbation, les cycles devraient être symétriques. Les différentes phases de la marche sont représentées à la figure I.2, [3].

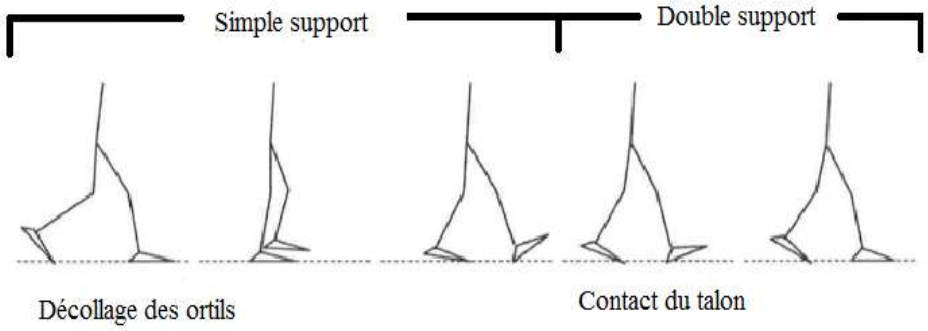


Figure I.2. *Les phases de la marche, [4]*

Enfin, la marche s'effectue sans quitter le sol, c'est-à-dire qu'en tout temps au moins un pied est en contact avec le sol. Ainsi, la marche se différencie de la course constituée d'une série de contacts et de sauts pendant lesquels il y a perte de contact avec le sol,

I.3.1. *Examen de la marche*

Les articulations du pied, de la cheville, du genou et de la hanche sont soumises à de fortes charges lors de la phase d'appui de la marche, car elles supportent le poids du corps en mouvement.

Le comportement du pied conditionne la transmission des contraintes dans la chaine osseuse au niveau des surfaces articulaires par l'intermédiaire des bras de levier.

L'articulation du pied et par conséquent son difficulté sont à l'origine des décomptes de la chaine articulaire du membre inférieur lors de la marche ou de la course (Figure I.3).

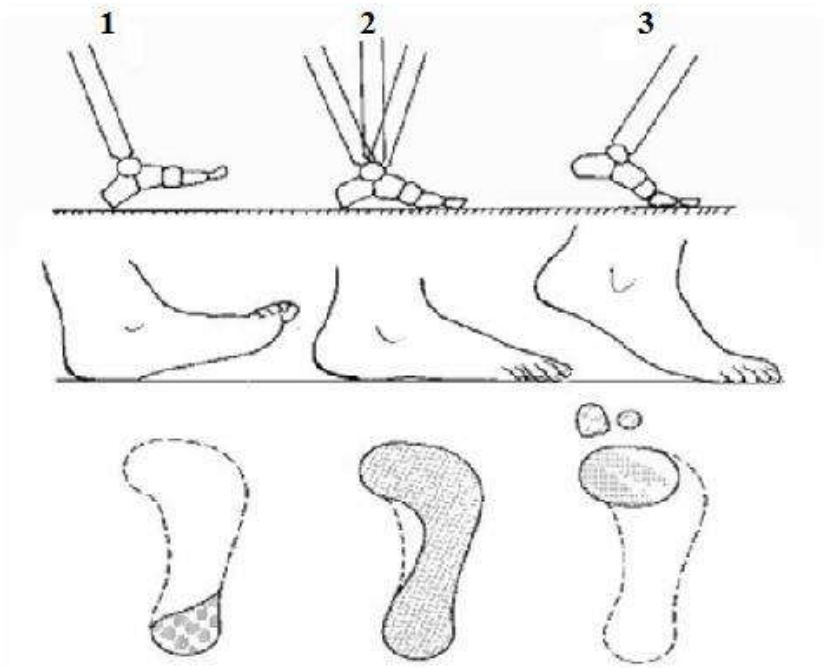


Figure I.3. *Les trois phases du déroulé du pied au (Taligrade (1), plantigrade (2), digitigrade (3)).*

I.4. Concepts généraux sur la marche

I.4.1. *Polygone de sustentation*

Le polygone de sustentation est le contour extérieur des points d'appui au sol. La figure I.4 présente un exemple de polygone de sustentation pour les phases de simple et double support. Le polygone de sustentation est un concept qui permet de caractériser la marche au niveau de la stabilité, [5].

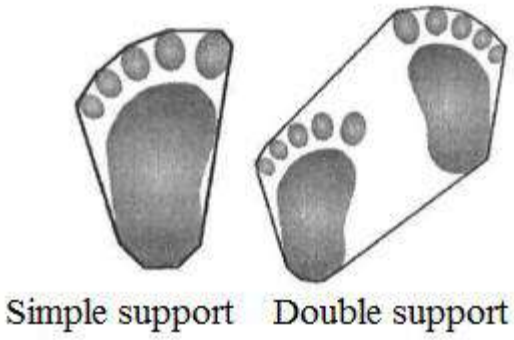


Figure I.4. *Polygone de sustentation*

I.4.2 *Zéro-Moment Point (ZMP)*

Il est important de définir le concept du ZMP car il est largement employé dans l'étude de la dynamique de la locomotion bipède. D'abord, le ZMP est définit comme le point au sol ou toutes les forces et les moments agissants sur le système peuvent être remplacés par une seule force. Afin d'illustrer le concept, considérons le pied d'un marcheur dans la phase du simple support. Il est possible de remplacer l'effet des parties supérieures au pied support par une force **F** (F_X, F_Y, F_Z) et un moment $\mathbf{M_A}$ (M_{AX}, M_{AY}, M_{AZ}) à la cheville Le poids du pied est appliqué à son centre de masse et les réactions au sol **R** (R_X, R_Y, R_Z) et **MS** (M_{SX}, M_{SY}, M_{SZ}) viennent équilibrer la dynamique du système au point **S**. La figure I.5 **(a)** illustre le cas général en trois dimensions. Comme le sol ne peut agir le pied que par friction et par une force normale, les moments horizontaux $\mathbf{M}_{SX}$ et $\mathbf{M}_{SY}$ seront nuls (d'où l'appellation < Zéro-Moment Point >). Le moment $\mathbf{M}_{AZ}$ est donc repris par le moment $\mathbf{M}_{SZ}$ dû à la friction et les moments $\mathbf{M}_{AX}$ et $\mathbf{M}_{AY}$ seront repris uniquement par les forces de friction $\mathbf{R}_X$ et $\mathbf{R}_Y$ et la force normale $\mathbf{R}_Z$. Ainsi, le ZMP est l'endroit sous le pied ou se retrouve la force **R** équilibrant les moments horizontaux ($\mathbf{M}_{AX}$ et $\mathbf{M}_{AY}$) appliqués à la cheville. La figure I.5 **(b)** illustre le concept pour un système plan ou le moment $\mathbf{M}_{AX}$ est équilibrée en déplaçant le point d'action de la force $\mathbf{R}_Z$. La distance Y représente la distance entre la cheville et le ZMP. Il est important de noter que pour conserver l'équilibre dynamique du système, le ZMP doit demeurer dans le polygone de sustentation (l'air couverte par le pied dans le cas précédent). Ainsi, si la zone couverte par le polygone de sustentation n'est pas suffisamment grande pour compenser les composantes horizontales du moment appliqué à la cheville, il y aura perte de l'équilibre dynamique du pied et la force résultante réelle se situera au bord du polygone de

sustentation. Par contre, le ZMP ne sera pas défini. Dans un tel ces, il est cependant possible de déterminer par calcul un ZMP fictif ou virtuel à partir des conditions $\mathbf{M}_{SX} = \mathbf{M}_{SY} = 0$, [6].

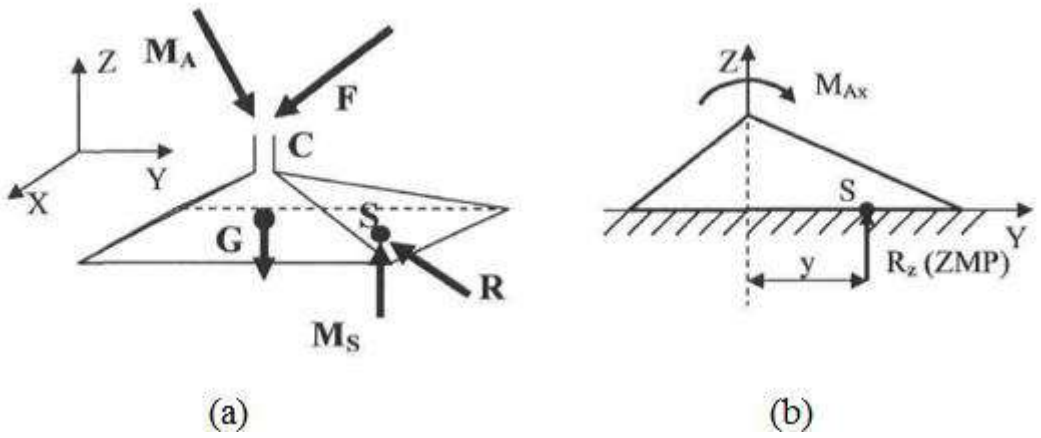


Figure I.5. *Forces agissantes sur pied (a) cas en 3D (b) cas plan*

I.4.3. *Types de marche bipède*

Il existe deux types de marche : la marche statique et la marche dynamique. Lors de la marche statique, la posture du marcheur est stable en tout temps, c'est-à-dire que son poids est en tout temps supporté directement par au moins un pied. Ainsi, ce marcheur peut être son mouvement à n'importe quel moment et demeurer en équilibre. Plus formellement, lors de la marche statique, la projection du centre de masse (CDM) du bipède sur le sol demeure en tout temps dans le polygone de sustentation. Cette condition assure l'équilibre à chaque instant. Cette démarche est employée par l'homme dans des situations difficiles telles que les montées ou descentes d'escalier ou les terrains instables ou glissants.

La marche dynamique est une succession de postures stables et instables. Une instabilité est délibérément créée vers l'avant lorsque la projection du CDM sur le sol sort du polygone de sustentation. Le déséquilibre survient et est rattrapé par le prochain pas du marcheur. La marche dynamique est la marche naturelle humaine. Le marcheur projette son corps vers l'avant sachant que le pied en balancement viendra le supporter dans quelques instants. Par contre, pendant ce déséquilibre, toute perturbation peut entrainer une chute du marcheur. Par exemple, si un obstacle bloque le pied qui aurait dû supporter le corps, ce dernier, toujours projeté vers l'avant, continuera dans la même direction entrainant la chute. Il est à noter qu'il n'est toujours pas question de course. La marche comporte aussi des périodes d'instabilité, bien qu'elles soient plus courtes que lors de la course. L'avantage d'une marche dynamique est qu'elle permet d'aller plus rapidement et qu'elle demande moins d'énergie. En laissant

tomber son corps vers l'avant, le marcheur utilise la gravité pour entrainer son mouvement à la manière d'un pendule inversé. Le balancement de la jambe est donc effectué avec un minimum d'effort. Un robot marchant dynamiquement aura une démarche plus naturelle en plus d'être plus rapide et plus efficace, mais sera plus complexe à produire. Aussi, la marche sera dynamiquement équilibrée si le ZMP demeure en tout temps dans le polygone de sustentation, [7].

Les figures I.6 (a) et (b) présentent une représentation de la marche statique et de la marche dynamiquement équilibrée.

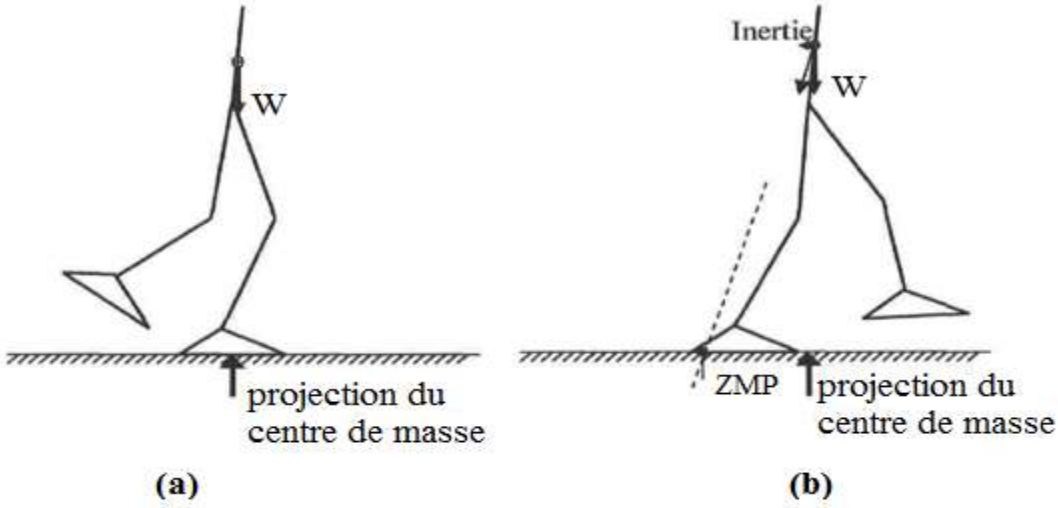


Figure I.6. *(a) Marche statique. (b) Marche dynamiquement équilibrée*

I.4.4. *Degrés de liberté nécessaires à la Marche*

Une notion importante dans l'analyse d'un système mécanique est celle du degré de liberté (DDL). Les DDL d'un système sont les paramètres indépendants qui permettent de définir complètement la position et l'orientation de chacun de ses corps dans l'espace. Ainsi, pour un système à **n** DDL, il faudra **n** coordonnés pour définir sa position. La marche humaine comporte naturellement des dizaines de DDL répartis dans les membres inférieurs et supérieurs du corps. Cependant, lors de l'étude de la marche, le nombre de DDL du membre de DDL est élevé, plus le modèle sera complexe et difficile à analyser, mais plus il aura de possibilités de mouvement.

I.4.5. *Plans de mouvement*

Les plans de mouvement permettent de décrire les mouvements associés à la marche. La (figure I.7) montre trois plans de mouvement. Le plan sagittal correspond à une vue de côté du marcheur, le plan horizontal à une vue de haut et le plan frontal à une vue de face. Le marcheur se déplace principalement dans le plan sagittal, mais des mouvements comme le déhanchement, le déplacement latéral et la rotation du bassin se produisent dans les deux autres plans augmentant la fluidité de la marche, [8].

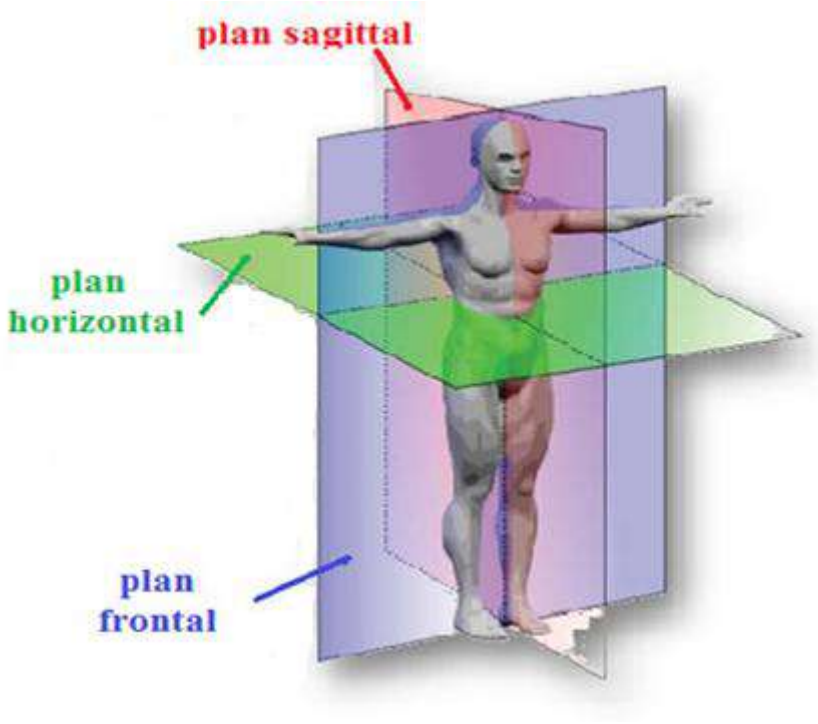


Figure I.7. *Plans de mouvement*

I.5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons expliqué brièvement les notions de la marche bipède ainsi que le principe de Zéro Moment Point (ZMP). On conclure que le montage d'un robot bipède est très difficile et complexe. Dans le chapitre suivant nous allons présenter quelque exemple sur les robots existant dans le monde.

CHAPITRE II :
Les robots bipèdes actifs et passifs

II.1. Introduction

Ce chapitre présente un survol des principaux projets de robots marcheurs existants dans le monde. Ces projets sont divises en deux catégories soit les robots actifs (dont le mouvement est génère par des moteurs) et les robots passifs (dont le mouvement n'est pas génère par des moteurs). Pour chaque projet, un bref historique, la méthode de modélisation et la méthode de contrôle seront exposés, de même que les objectifs futurs.

Enfin, on conclura sur les approches choisies par les différentes équipes de recherche.

II.2.Présentation des robots bipèdes actifs existants

II.2.1 *ASIMO de HONDA*

En 1986, les chercheurs de la compagnie Honda ont démarré un projet ayant pour but de développer un nouveau type de robot. Ce dernier devait être en mesure d'accomplir des taches générales répondant aux besoins des consommateurs. Cet objectif est résumé en deux mots : intelligence et mobilité. La première idée des chercheurs a été de concevoir un robot monté sur roues ayant deux bras et une caméra. Cependant, ce type de robot ne répondait pas à l'objectif original de mobilité. Les chercheurs conclurent que seul un robot marcheur bipède pouvait respecter le critère de mobilité dans une maison remplie d'objets et d'escaliers. Les chercheurs de Honda travaillèrent donc en secret sur des robots humanoïdes de 1986 à 1996, construisant plusieurs robots expérimentaux et prototypes, pour finalement dévoiler le robot P2 (Prototype-2). Celui-ci comportait 12 DDL dans les membres inférieurs (trois par hanche, un par genou et deux par cheville), sept par bras et deux par main, il pouvait marcher à une vitesse maximale de 2 Km/h et monter ou descendre des escaliers. Il fut rapidement rapidement remplacé en 1997 par P3, un robot ayant relativement les mêmes caractéristiques, mais étant plus petit, plus léger et plus indépendant. Enfin, depuis 2000, le projet ASIMO (**A**dvanced **S**tep in **I**ntonative **Mo**bility) (Figure II.1) a fait suite aux prototypes précédents. Il est encore plus petit et plus léger et son algorithme de marche est encore plus évolué lui donnant une marche d'allure plus humaine. Mais, l'évolution la plus importante dans le robot ASIMO est l'intelligence artificielle et les possibilités de manipulation avec ses membres supérieurs, [9].

Ce dernier peut reconnaitre des gestes, des visages, des sons et des objets dans son environnement ce qui en fait le robot le plus achevé présentement.



Figure II.1. *Le robot ASIMO de HONDA*

Les chercheurs de HONDA sont présentement en train d'améliorer le robot ASIMO. Il pourra bientôt agir comme réceptionniste et transporter des objets en poussant un chariot. Aussi, les chercheurs visent à améliorer l'algorithme de course pour lui permettre de courir à 6 Km/h, [10].

II.2.2. *MELTRAN du MEL*

Au début des années 90, les chercheurs du **M**echanical **E**ngineering **L**aboratory (MEL) au Japon ont développé le MELTRAN (Figure II.2), un robot plan à trois DDL par jambe. La dynamique étudiée se limite au plan sagittal dans la phase du simple support et a été modélisée en supposant des jambes sans masse. Afin de simplifier les équations dynamiques du mouvement, deux contraintes ont été imposées au **CDM** soit, une trajectoire en ligne droite et une orientation constante. Ces contraintes font en sorte que les équations de mouvement de la jambe supportant le corps soient réduites à un seul DDL. Ainsi, le mouvement dépend uniquement de la hauteur désirée du CDM et ne dépend pas de la structure de la jambe. Afin de contrôler la démarche, les chercheurs ont défini une quantité, nommée < orbital energy >, qui demeure constante un pas et qui est fonction de la vitesse, de la hauteur et de la position. Cette quantité détermine le positionnement du prochain échange de support d'une jambe à l'autre et doit être spécifiée pour chaque pas. Ensuite, la trajectoire

des articulations est déterminée. Le robot peut aussi parcourir un terrain accidenté. Il suffit de détecter modification du terrain, de déterminer d'abord le placement du prochain pas, de redéfinir une trajectoire pour le CDM et de recalculer la nouvelle valeur de < l'orbital energy >. Pour ce qui est du couple appliqué par la cheville, les chercheurs l'ont volontairement contraint à zéro dans le modèle afin de l'utiliser uniquement pour corriger les erreurs de modélisation. Cette approche est justifiée par le fait qu'afin d'éviter le glissement, le couple à la cheville est limité par la longueur du pied, [11].

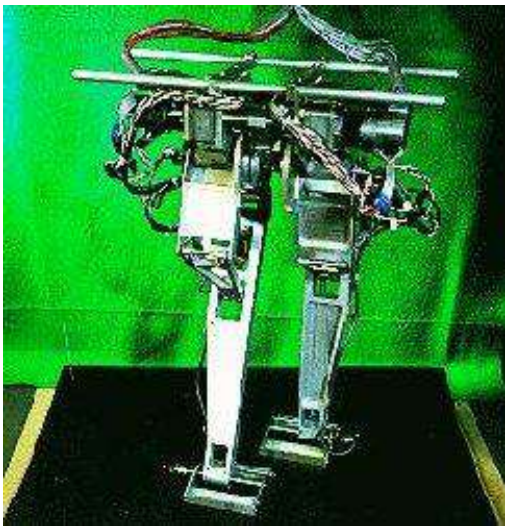


Figure II.2. *Le robot MELTRAN-2 du MEL,* [12]

II.2.3. *Rabbit du CNRS*

Le projet Rabbit du **C**entre **N**ational de la **R**echerche **S**cientifique (CNRS) **(**Figure II.3**)** a été réalisé de 1997 à 2004 par un groupe de huit laboratoires français (IRRCCYN , LAG, LGIPM, LIRMM, LMS, LRP, LVR, INRIA) dans le but de développer et valider expérimentalement des méthodes et des outils théoriques pour faire marcher et courir un robot bipède. La plateforme développée a été simplifiée au maximum : le robot n'a pas de pied et se déplace uniquement dans le plan sagittal ce qui lui donne uniquement cinq DDL (un par genou, un par hanche et un pour le tronc) dont seulement quatre sont actionnés dans la phase de simple support (le tronc est laissé libre). Cette structure simple (absence de pied, mouvement plan et sous actionnement) permet d'étudier la commutation des phases du robot, l'effet de la gravité et des impacts avec le sol en évitant les difficultés liées à la complexité d'analyse d'un modèle plus développé, [13]

Le robot peut marcher et courir en cercle en suivant des trajectoires de référence pour ses articulations motorisées.



Figure II.3. *Le robot Rabbit du CNRS*

II.3. Les robots bipèdes passifs

Il existe une catégorie de robot bipède, appelée marcheur passif, pour laquelle la marche est naturelle. « Tad McGeer, du Simon Fraser University », fut le premier à étudier ce type de robot au début des années 1990. Il a démontré qu'un simple mécanisme à quatre liens en deux dimensions ressemblant à des jambes humaines était capable de marcher avec une démarche comparable à l'humain sur un plan incliné, et ce, sans motorisation, sans système de contrôle et sans entrée d'énergie. Seules une impulsion initiale et la gravité font avancer le marcheur passif. L'étude d'un tel mécanisme permet de comprendre l'importance de la configuration et de la structure du robot dans la marche. Pour reprendre l'analogie de McGeer, il est primordial d'étudier comment vole un planeur pour ensuite, en lui ajoutant des moteurs, le faire voler comme un avion. En ajoutant des moteurs sur un marcheur passif capable de marche sur une pente, il sera possible de la faire marcher sur un terrain plat avec un minimum d'énergie.

Pour mieux comprendre le principe de la marche passive, il est nécessaire de faire un lien entre la roue et la marche bipède. Sur une surface plane, une roue idéale (Figure II.4 (a)), sans dissipation d'énergie, lancée à une certaine vitesse, roulera sans s'arrêter à cette même vitesse. Si la roue est déjantée (Figure II.4 (b)), elle ralentira et devra s'arrêter après un certain moment en raison des pertes d'énergies engendrées à chaque impact avec le sol. Cependant, si

cette même roue déjantée roule sur un plan incliné, les pertes d'énergies pourront être regagnées pas la gravité. Cette roue pourra ainsi avancer à vitesse constante sans s'arrêter, [14].

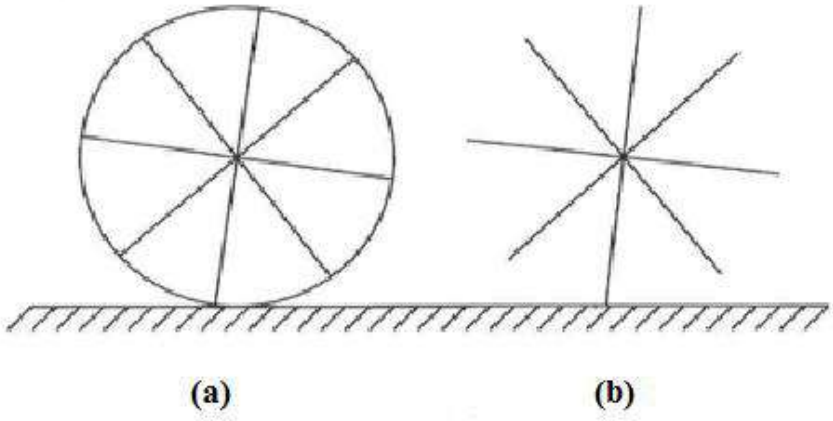


Figure II.4. *(a) Roue idéale (b) Roue déjantée*

Le principe de la marche passive est le même que celui de la roue déjantée. En considérant seulement deux branches consécutives de la roue déjantée (liées sans friction), il est possible de considérer le système comme un bipède si la branche en balancement revient se placer au bon endroit pour le prochain contact (Figure II.5(a)). McGeer a démontré que, pour un angle de départ entre les deux branches, une pente et une vitesse de départ donnée, la branche en balancement vient reprendre le contact avec le sol moment. Le système est ainsi semblable à deux pendules : le premier est un pendule inversé supportant la masse et le deuxième est le pendule balançant la jambe libre. Evidemment, si aucune modification n'est faite au modèle, la jambe en balancement entrera en contact avec le sol au milieu de son balancement. Pour résoudre ce problème, des genoux peuvent être ajoutés (Figure II.5(b)). Bien que plus complexe, le principe général de la marche passive reste le même et un mécanisme conçu correctement réussit à marche avec une allure humaine. Les genoux doivent cependant être bloqués en hyper extension afin de conserver le pendule inversé supportant la masse.

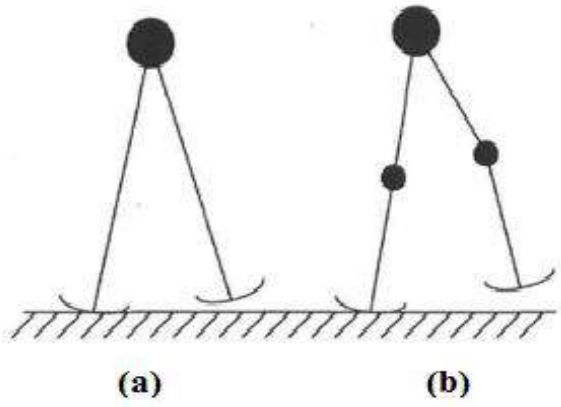


Figure II.5. *(a) Bipède passif (b) Bipède passif avec genou*

Les chercheurs de quelques laboratoires ont poursuivi et amélioré les travaux de McGeer et ont construit d'autres robots passifs capables de marcher sur un plan incliné de façon stable. La figure (2.6) présente celui fait au laboratoire de Andy Ruina à l'Université Cornel1. Le robot est double pour assurer sa stabilité, [15].



Figure II.6. *Marcheur passif*

II.4. Conclusion

Plusieurs différences existent dans la façon de définir le problème d'un robot marcheur bipède. La méthode choisie influence grandement l'efficacité et les capacités des robots.

Les principales différences se retrouvent au niveau de la conception mécanique et dans la conception de l'algorithme de marche.

- **Conception mécanique**

D'abord, plusieurs architectures différentes de robot ont été choisies. Le nombre de liens, de DDL et de plans de mouvement varie en fonction des capacités recherchées, des objectifs de construction du robot bipède et de l'avancement du projet. Plus les objectifs de mouvement sont grands, plus le robot aura besoin de liens et de DDL supplémentaires. Aussi, certains chercheurs ayant dès le départ l'objectif de construire un robot humanoïde ont, dès le départ, développé une version tridimensionnelle de leur robot. Cette façon de faire est plus complexe, car la stabilité doit être recherchée dans le plan sagittal et frontal simultanément. D'un autre côté, les chercheurs ayant comme premier objectif d'étudier la locomotion humaine ont d'abord construit des robots plans ce qui permet d'étudier la locomotion en simplifiant considérablement l'analyse du système. En négligeant le plan frontal, il est encore possible d'étudier les trajectoires et la dynamique dans le plan sagittal, soit le plan dans lequel se déroule la partie la plus importante de la marche. Cependant, une fois construits, ces robots ont le désavantage de nécessiter un support latéral.

- **Algorithme de marche**

Il y a trois façons de faire marcher un robot bipède. La plus populaire, utilisée par presque tous les chercheurs, consiste à faire exécuter des trajectoires définies aux articulations. Le robot, en phase de simple support, est considéré comme un manipulateur sériel et ses actionneurs sont asservis en position afin d'obtenir le mouvement stable souhaité. Cette façon de faire peut sembler plus simple, mais elle se bute à certaines difficultés majeures. D'abord, la détermination d'une trajectoire idéale et stable n'est pas simple et dépend grandement de la complexité de la géométrie utilisée. Aussi, cette stratégie permet difficilement l'adaptation aux perturbations extérieures. Comme la trajectoire doit être modifiée pour assurer la stabilité lors d'une perturbation, un autre système doit adapter la

trajectoire de référence selon les besoins. Malgré les difficultés pouvant être rencontré par l'utilisation de cette stratégie, la plupart des chercheurs l'ayant utilisée ont réussi à développer un algorithme permettant de modifier les trajectoires de référence et ont ainsi permis à leur robot de s'adapter à certaines perturbations. Différentes méthodes ont été utilisées par les laboratoires pour créer et altérer les trajectoires. De façon générale, on s'assure que la trajectoire du ZMP demeure dans le polygone de sustentation pour garantir la stabilité. Certains chercheurs tentent aussi d'optimiser les trajectoires à partir de simulateurs ou de critères d'efficacité.

La seconde façon de faire marcher un robot bipède, utilisée par le laboratoire du MIT, est d'obtenir un algorithme de contrôle en spécifiant certains critères de performance. Ainsi, au lieu de contrôler la position de chaque articulation, certaines distances et forces impliquées sont contrôlées. La définition de ces critères est plutôt empirique et intuitive. Cependant, une telle méthode s'adapte beaucoup plus facilement aux perturbations que la méthode de la trajectoire de référence.

Enfin, la dernière méthode consiste à concevoir un robot de manière à ce que sa dynamique naturelle engendre une démarche stable. Bien que cette méthode soit très prometteuse du point de vue de l'efficacité énergétique, elle devra être combinée avec une méthode active afin d'augmenter les capacités de mouvement des robots.

CHAPITRE III :

Modélisation géométrique, cinématique et dynamique

III.1. Introduction

Ce chapitre a pour but d'exposer la modélisation géométrique (nombre de segments et de DDL) représentent le robot bipède ainsi que la modélisation mathématique de sa cinématique et de sa dynamique.

III.2. modélisation géométrique

En premier lieu, il faut déterminer le nombre de DDL que le bipède doit posséder. Afin de réduire la difficulté d'analyse du modèle, il est nécessaire de diminuer au maximum le nombre de DDL du bipède. Cependant, le robot doit conserver une agilité minimale lui permettant de garder son équilibre et d'effectuer les tâches auxquelles il est destiné.

Sais et al, [16]. Décrivent très bien cette problématique pour un bipède général en trois dimensions. D'abord, deux DDL par jambe (à la cheville et à la hanche) sont nécessaire au mouvement dans le plan sagittal. Sans ces deux articulations, les mouvements de pondule seraient impossible, c'est-à-dire qu'il serait impossible de faire pivoter le corps autour du pied support ou de faire pivoter la jambe libre autour du corps, donc qu'il serait impossible d'avance. Ensuite, deux par jambe (toujours à cheville et à la hanche) sont nécessaire dans le plan frontal afin de déplacer latéralement le CdM du bipède et d'assurer sa stabilité si le terrain n'est pas plat latéralement. Pour avance, il est donc nécessaire d'voire un minimum de quatre DDL par jambe soit deux à la cheville et deux aux hanches afin de permettre un mouvement vers l'avant stable latéralement. Un cinquième DDL par jambe est nécessaire dans le cas où un obstacle ou un escalier doit être franchi. Ce dernier DDL peut être soit une longueur de jambe variable ou genou et sert à éviter le contact entre le sol et le pied libre lors de son balancement. Un modèle à cinq DDL par jambe peut avancer et éviter des obstacles, mais ne peut pas encore tourner. Ainsi, il est nécessaire d'ajouter un autre DDL à chaque hanche afin qu'elles puissent tourner autour de la verticale. Enfin, les auteurs suggèrent d'ajouter deux autres DDL par jambe pour augmenter l'agilité du bipède soit une rotation autour du troisième axe de la cheville et une articulation sur le pied pour simuler les orteils.

Comme un modèle plan est utilisé dans le cadre de ce travail, trois DDL par jambe sont nécessaire soit un par articulation (la cheville, le genou et la hanche). Il n'est pas possible de simplifier davantage le modèle plan car la marche n'aura plus l'allure humaine. Trois articulations par jambe donnent un total de six articulations, donc sept segment (un tronc deux

cuisses, deux tibias et deux pieds). Bien que les hanches soient superposées sur un modèle plan, un segment correspondant au tronc est nécessaire pour représenter le CdM du bipède au-dessus des jambes, [17]. La figure III.1 montre le schéma du bipède.

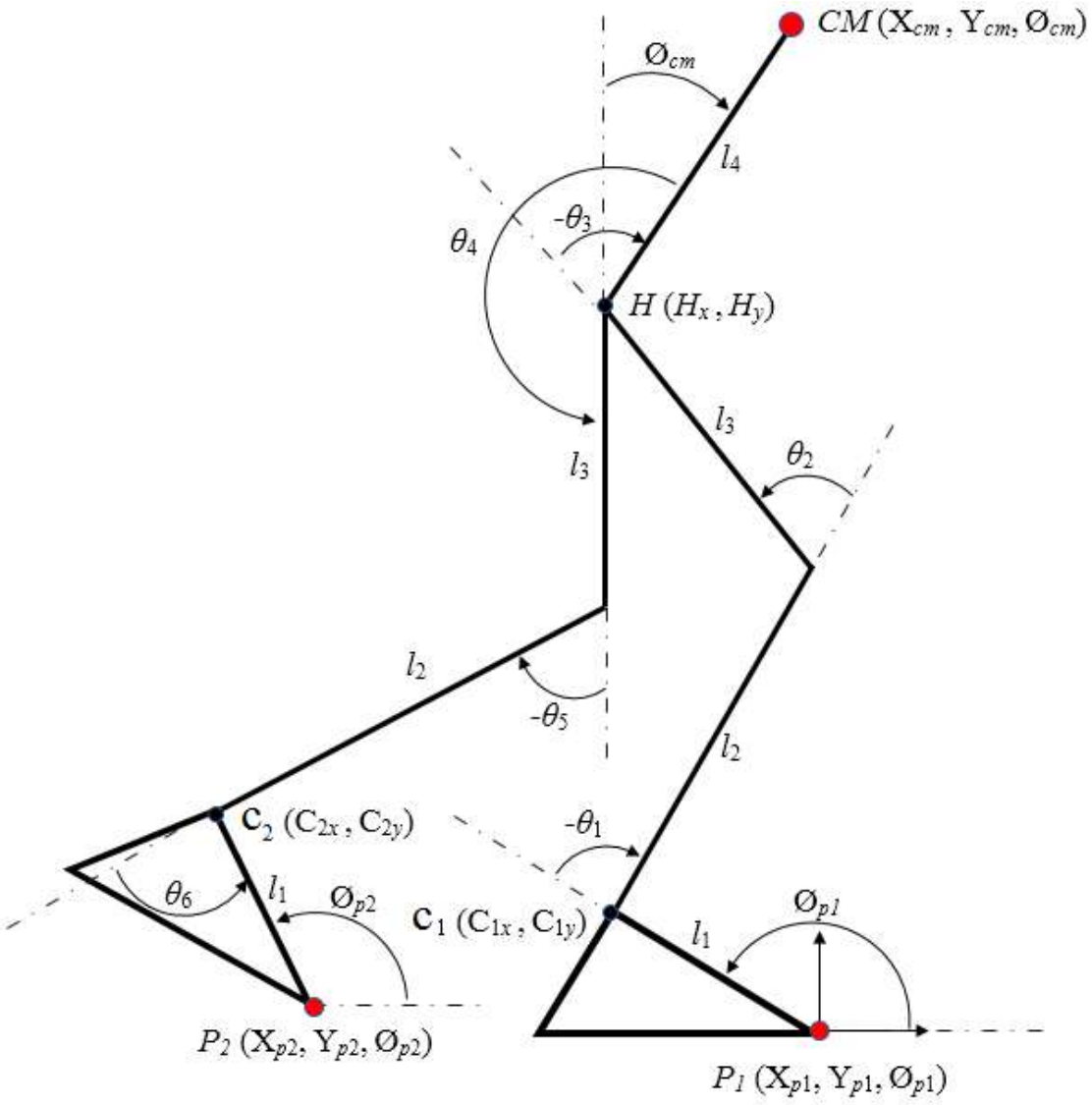


Figure III.1. *Modèle géométrique du bipède*

Cette configuration géométrique sera utilisée tout au long de ce mémoire. Les applications ((marcheur bipède)) ou ((robot)) feront référence à ce modèle. Aussi, le programme de simulation déterminé les efforts aux articulations et aux extrémités de ce modèle de bipède.

III.3. Modélisation cinématique

III.3.1. *positionnement dans l'espace*

Il important de définir les points utilisés pour positionner le bipède dans le plan. D'abord, il y a deux façons de définir la position du robot : selon les coordonnée cartésiennes (le plan *X-Y*) ou selon les coordonnées articulation (les angles des articulations). Pour définir le robot dans l'espace cartésien, trois points (en rouge sur la figure III.1) sont utilisés soit le bout des deux pieds et le CdM du bipède :

- P_1 (X_{p1}, Y_{p1}, $\emptyset_{p1}$) : position du pied 1 et orientation du pied 1 par rapport à horizontale.
- P_2 (X_{p2}, Y_{p2}, $\emptyset_{p2}$) : position du pied 2 et orientation du pied 2 par rapport à horizontale.
- CM (X_{cm}, Y_{cm}, $\emptyset_{cm}$) : position du CdM et orientation du tronc par rapport à la verticale.

Ces neuf coordonnées permettre de définir entièrement la position du robot dans le plan. Aussi, ce sont les trajectoires de ces trois points qui seront imposées au robot pour le faire avancer. Il a été mentionné précédemment que le robot possède trois DDL par jambe donc six DDL. Ces DDL sont associés aux articulations et font référence à l'espace articulaire.

Ainsi, il est aussi possible de définir la position du robot en fonction de ses coordonnées articulaires représentées par le vecteur suivant :

$$\vec{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{pmatrix} \qquad \text{(III.1)}$$

Cependant, ces coordonnées ne servent qu'à fixer la configuration du robot et ne donnent pas d'information sur son positionnement absolu dans le plan. Pour servir de référence aux coordonnées articulaires, le point P_1 (X_{p1}, Y_{p1}, $\emptyset_{p1}$) ou P_2 (X_{p2}, Y_{p2}, $\emptyset_{p2}$) sera utilisé comme donnée supplémentaire. Ainsi, si les six coordonnées articulaires et le point P_1 ou P_2 sont connus, la position du robot est entièrement définie dans le plan et le temps. Il est à noter que toutes les variables de position cartésiennes et articulaires sont fonction du temps (P_1 (t), P_2 (t), CM(t), $\vec{\theta}$(t)) et que la notation(t) est omise afin d'alléger l'écriture.

III.3.2. *mouvement du bipède*

Pour définir les mouvements du bipède, des trajectoires exprimées en coordonnées cartésiennes sont imposées au robot, car ces coordonnées sont directement liées à l'environnement et l'espace extérieur. Il est important de notre qu'imposer une trajectoire à un point signifie lui imposer sa position, sa vitesse et son accélération. Donc, pour la présente modélisation, les coordonnées cartésiennes du robot ainsi que leurs dérivées par rapport au temps sont connues en tout temps car elles sont imposées.

L'objectif principal de ce travail est de déterminer les efforts aux articulations. Pour les calculer, il est nécessaire de décrire les mouvements du robot en fonction de ses coordonnées articulaires, car la cinématique et la dynamique de chaque membre doivent être étudiée. À partie des trajectoires cartésiennes imposées (P_1, P_2, CM), il faudra d'abord déterminer les coordonnées articulaires pour ensuite calculer les paramètres cinématique et dynamique de chaque membre.

III.3.3. *problème géométrique inverse(PGI)*

Le PGI vise à déterminer les six coordonnées articulations à partir des neuf coordonnées cartésiennes imposées. En connaissant la position et l'orientation des pieds et du CdM du bipède (P_1, P_2, CM), le vecteur $\vec{\theta}$ peut être déterminé. Pour ce faire, il est nécessaire de déterminer les positions des chevilles et des hanches (symbolisées par les points C_1, C_2 et H référant à la figure (III.1) à partir de la position et de l'orientation des pieds et du CdM du bipède donné par les trajectoires cartésiennes :

$$C_{1x} = X_{p1} + l_1 \cos \emptyset_{p1} \quad \text{(III.2)}$$

$$C_{1y} = Y_{p1} + l_1 \sin \emptyset_{p1} \quad \text{(III.3)}$$

$$C_{2x} = X_{p2} + l_1 \cos \emptyset_{p2} \quad \text{(III.4)}$$

$$C_{2y} = Y_{p2} + l_1 \sin \emptyset_{p2} \quad \text{(III.5)}$$

$$H_x = X_{cm} - l_4 \sin \emptyset_{cm} \quad \text{(III.6)}$$

$$H_y = Y_{cm} - l_4 \cos \emptyset_{cm} \quad \text{(III.7)}$$

Si l'origine du système est définie par le bout du pied 1, les positions des hanches et de la cheville 2 peuvent être exprimées en coordonnées articulaires par les équations III.8, III.9, III.11, III.12. Aussi, les orientations du tronc et du pied 2 peuvent être exprimées en

coordonnées articulaires par les équations III.10, III.13. Le système de six équations indépendantes non linéaire a six inconnues suivant est obtenu (rappelons que l'on cherche à déterminer les éléments du vecteur $\vec{\theta}$) :

$$H_x = C_{1x} + l_2 \cos(\emptyset_{P1} + \theta_1) + l_3 \cos(\emptyset_{P1} + \theta_1 + \theta_2) \quad \text{(III.8)}$$

$$H_y = C_{1y} + l_2 \sin(\emptyset_{P1} + \theta_1) + l_3 \sin(\emptyset_{P1} + \theta_1 + \theta_2) \quad \text{(III.9)}$$

$$\frac{\pi}{2} - \emptyset_{cm} = \emptyset_{p1} + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \quad \text{(III.10)}$$

$$C_{2x} = H_x + l_3 \cos(\frac{\pi}{2} - \emptyset_{cm} + \theta_4) + l_2 \cos(\frac{\pi}{2} - \emptyset_{cm} + \theta_4 + \theta_5) \quad \text{(III.11)}$$

$$C_{2y} = H_y + l_3 \sin(\frac{\pi}{2} - \emptyset_{cm} + \theta_4) + l_2 \sin(\frac{\pi}{2} - \emptyset_{cm} + \theta_4 + \theta_5) \quad \text{(III.12)}$$

$$\emptyset_{p2} + \pi = \frac{\pi}{2} - \emptyset_{cm} + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 \quad \text{(III.13)}$$

Il s'agit maintenant de résoudre ce système. D'abord, les deux premières équations comportent seulement les deux mêmes inconnues soient θ_1 *et* θ_2.Ce système de deux équations à deux inconnues peut être résolu en premier.

En posant les équations suivantes pour simplifier l'écriture :

$$\Psi_1 = \emptyset_{p1} + \theta_1 \quad \text{(III.14)}$$

$$\Psi_2 = \emptyset_{p1} + \theta_1 + \theta_2 \quad \text{(III.15)}$$

$$D_{x1} = H_x - C_{1x} \quad \text{(III.16)}$$

$$D_{y1} = H_y - C_{1y} \quad \text{(III.17)}$$

Le système d'équations suivant est obtenu à partir des équations III.8, III.9 :

$$D_{x1} = l_2 \cos\Psi_1 + l_3 \cos\Psi_2 \quad \text{(III.18)}$$

$$D_{y1} = l_2 \sin\Psi_1 + l_3 \sin\Psi_2 \quad \text{(III.19)}$$

En insolent les termes en Ψ_2 et en élevant au carré les deux membres des équations :

$$(D_{x1} - l_2 \cos\Psi_1)^2 = (l_3 \cos\Psi_2)^2 \quad \text{(III.20)}$$

$$(D_{y1} - l_2 \sin\Psi_1)^2 = (l_3 \sin\Psi_2)^2 \quad \text{(III.21)}$$

En additionnant les deux équations membre à membre, le terme en Ψ_2 est éliminé et une équation du second degré en Ψ_1 est obtenue :

$$D_{x1}^2 + D_{y1}^2 - 2D_{x1}\, l_2 \cos\Psi_1 - 2\, D_{y1}\, l_2 \sin\Psi_1 + l_2^2 - l_3^2 = 0 \quad \text{(III.23)}$$

La résolution de cette équation passe d'abord par la substitution trigonométrique suivante :

$$T_1 = \tan\left(\frac{\Psi_1}{2}\right) \quad \text{(III.24)}$$

$$\cos(\Psi_1) = \frac{1-T_1^2}{1+T_1^2} \quad \text{(III.25)}$$

$$\sin(\Psi_1) = \frac{2T_1}{1+T_1^2} \quad \text{(III.26)}$$

En posant les équations suivantes représentant les valeurs connues :

$$U_1 = -2D_{x1}\, l_2 \quad \text{(III.26)}$$

$$V_1 = -2\, D_{y1}\, l_2 \quad \text{(III.27)}$$

$$W_1 = D_{x1}^2 + D_{y1}^2 + l_2^2 - l_3^2 \quad \text{(III.28)}$$

L'équation du second degré suivante est obtenu où T_1 est l'unique inconnu :

$$(W_1 - U_1)T_1^2 + 2V_1T_1 + U_1 + W_1 = 0 \quad \text{(III.29)}$$

Deux solutions de T_1 existent, ce qui donne deux solutions de Ψ_1 , donc deux solutions de θ_1. Pour chacune de ces solutions il y a une solution θ_2 correspondantes. La paire de solutions où θ_2 est positif est choisis afin de respecter les caractéristiques articulaires du genou.

Une fois θ_1 et θ_2 déterminées, θ_3 est trouvé par la relation suivante tirée du système de six équations (III.10) :

$$\theta_3 = \frac{\pi}{2} - \emptyset_{cm} - \emptyset_{p1} - \theta_1 - \theta_2 \quad \text{(III.30)}$$

Pour déterminer θ_4 et θ_5, une méthode similaire à celle utilisée pour déterminer θ_1 et θ_2 est utilisée. En posant :

$$\Psi_4 = \frac{\pi}{2} - \emptyset_{cm} + \theta_4 \quad \text{(III.31)}$$

$$\Psi_5 = \frac{\pi}{2} - \emptyset_{cm} + \theta_4 + \theta_5 \quad \text{(III.32)}$$

$$D_{x2} = C_{x2} - H_x \quad \text{(III.33)}$$

$$D_{y2} = C_{y2} - H_y \quad \text{(III.34)}$$

Le système d'équations simplifié suivant est obtenu à partir des équations III.11 et III.12 :

$$D_{x2} = l_3 \cos \Psi_4 + l_2 \cos \Psi_5 \quad \text{(III.35)}$$

$$D_{y2} = l_3 \sin \Psi_4 + l_2 \cos \Psi_5 \quad \text{(III.36)}$$

En insolent les termes en Ψ_5 et en élevant au carré les deux membres des équations :

$$(D_{x2} - l_3 \cos \Psi_4)^2 = (l_2 \cos \Psi_5)^2 \quad \text{(III.37)}$$

$$(D_{y2} - l_3 \sin \Psi_4)^2 = (l_2 \sin \Psi_5)^2 \quad \text{(III.38)}$$

En additionnant les deux équations membre à membre, le terme en Ψ_5 est éliminé et une équation du second degré en Ψ_4 est obtenue :

$$D_{x2}^2 + D_{y2}^2 - 2D_{x2}\, l_3 \cos \Psi_4 - 2\, D_{y2}\, l_3 \sin \Psi_4 + l_3^2 - l_2^2 = 0 \quad \text{(III.39)}$$

Avec la substitution trigonométrique suivante :

$$T_2 = \tan\left(\frac{\Psi_4}{2}\right) \quad \text{(III.40)}$$

$$cos\,(\Psi_4) = \frac{1-T_2^2}{1+T_2^2} \quad \text{(III.41)}$$

$$Sin\,(\Psi_4) = \frac{2T_2}{1+T_2^2} \quad \text{(III.42)}$$

En posant :

$$U_2 = -2D_{x2}\, l_3 \quad \text{(III.43)}$$

$$V_2 = -2\, D_{y2}\, l_3 \quad \text{(III.44)}$$

$$W_2 = D_{x2}^2 + D_{y2}^2 + l_3^2 - l_2^2 \quad \text{(III.45)}$$

L'équation du second degré en T_2 suivante est obtenue :

$$(W_2 - U_2)T_2^2 + 2V_2T_2^2 + U_2 + W_2 = 0 \quad \text{(III.46)}$$

Deux solutions de T_2 existent ce qui donne deux solutions deΨ_4, donc deux solutions de θ_4. Pour chacune de θ_5 correspondent et trouvée. La paire de solutions où θ_5 est négatif est choisis dans ce cas.

Une fois θ_4 et θ_5 déterminées, θ_6 est trouvé par la relation suivante tirée du système de six équation (III.13) :

$$\theta_6 = \frac{\pi}{2} + \emptyset_{p2} + \emptyset_{cm} - \theta_4 - \theta_5 \quad \text{(III.47)}$$

Le PGI est maintenant résolu, c'est-à-dire que les coordonnées articulaires du robot sont connues pour chaque posture décrite par les coordonnées cartésiennes. Pour chaque point des trajectoires cartésiennes du bipède, les coordonnées articulaires équivalentes sont connues. Ces coordonnées articulaires permettront de déterminer une expression analytique des vitesses et d'accélérations articulaires.

III.3.4. *Détermination des vitesses et accélérations articulaires*

Dans cette section, les vitesses et accélérations articulaires sont déterminées analytiquement. Il s'agit en premier lieu de calculer les six vitesses cartésiennes des trois points C_1, C_2 et H en dérivant par rapport au temps les expressions de leur positions respectives (III.2 - III.7). Sachant que les dérivées des trajectoires cartésiennes et les orientations des pieds et du tronc sont connues, les équations sont obtenues :

$$\dot{C}_{1x} = \dot{X}_{p1} - \dot{\emptyset}_{p1}\,(l_1 \sin \emptyset_{p1}) \quad \text{(III.48)}$$

$$\dot{C}_{1y} = \dot{X}_{p1} - \dot{\emptyset}_{p1}\,(l_1 \cos \emptyset_{p1}) \quad \text{(III.49)}$$

$$\dot{C}_{2x} = \dot{X}_{p2} - \dot{\emptyset}_{p2}\,(l_1 \sin \emptyset_{p2}) \quad \text{(III.50)}$$

$$\dot{C}_{2y} = \dot{Y}_{p2} + \dot{\emptyset}_{p2}\,(l_1 \sin \emptyset_{p2}) \quad \text{(III.51)}$$

$$\dot{H}_x = \dot{X}_{cm} - \dot{\emptyset}_{cm}\,(l_4 \cos \emptyset_{cm}) \quad \text{(III.52)}$$

$$\dot{H}_y = \dot{Y}_{cm} + \dot{\emptyset}_{cm}\,(l_4 \sin \emptyset_{cm}) \quad \text{(III.53)}$$

En dérivant par rapport au temps les six équations de positionnement des trois points C_1, C_2 et H exprimées en fonction des coordonnées articulaires (III.8 - III.13), Les expressions liant les vitesses articulaires aux vitesses cartésiennes sont obtenues. Ces expressions sont les suivantes :

$$\dot{H}_x - \dot{C}_{1x} = -(\dot{\emptyset}_{p1} + \dot{\theta}_1)\, l_2 \sin(\emptyset_{P1} + \theta_1) - (\dot{\emptyset}_{p1} + \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\, l_3 \sin(\emptyset_{P1} + \theta_1 + \theta_2) \quad \text{(III.54)}$$

$$\dot{H}_y - \dot{C}_{1y} = (\dot{\emptyset}_{p1} + \dot{\theta}_1)\, l_2 \cos(\emptyset_{P1} + \theta_1) + (\dot{\emptyset}_{p1} + \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\, l_3 \cos(\emptyset_{P1} + \theta_1 + \theta_2) \quad \text{(III.55)}$$

$$-\dot{\emptyset}_{cm} - \dot{\emptyset}_{p1} = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \quad \text{(III.56)}$$

$$\dot{C}_{2x} - \dot{H}_x = -(-\dot{\emptyset}_{cm} + \dot{\theta}_4)\, l_3 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \emptyset_{cm} + \theta_4\right) - (-\dot{\emptyset}_{cm} + \dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5)\, l_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \emptyset_{cm} + \theta_4 + \theta_5\right) \quad \text{(III.57)}$$

$$\dot{C}_{2y} - \dot{H}_y = (-\dot{\emptyset}_{cm} + \dot{\theta}_4)\, l_3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \emptyset_{cm} + \theta_4\right) + (-\dot{\emptyset}_{cm} + \dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5)\, l_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \emptyset_{cm} + \theta_4 + \theta_5\right) \quad \text{(III.58)}$$

$$\dot{\emptyset}_{p2} + \dot{\emptyset}_{cm} = \dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6 \quad \text{(III.59)}$$

Aussi, comme le PGI est résolu, seul les éléments du vecteur $\dot{\vec{\theta}}$ sont inconnus les six équations précédentes. Pour résoudre ce système d'équations, une expression de la forme suivante est recherchée :

Où

$$K\,\dot{\vec{t}} = J\,\dot{\vec{\theta}} \tag{III.60}$$

$$\dot{\vec{t}} = [\dot{X}_{p1}, \dot{Y}_{p1}, \dot{\emptyset}_{p1}, \dot{X}_{p2}, \dot{Y}_{p2}, \dot{\emptyset}_{p2}, \dot{X}_{cm}, \dot{Y}_{cm}, \dot{\emptyset}_{cm}]^T$$

$$\dot{\vec{\theta}} = [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \dot{\theta}_5, \dot{\theta}_6]^T$$

Le vecteur $\dot{\vec{t}}$ représente le vecteur des vitesses cartésiennes connues imposées par la trajectoire et le vecteur $\dot{\vec{\theta}}$ représente les vitesses articulaires recherchées. Les matrices *K* et *J* font le lien entre les vitesses cartésiennes $\dot{\vec{t}}$ et articulaires $\dot{\vec{\theta}}$. De ce frome, il est possible d'obtenir le vecteur $\dot{\vec{\theta}}$ par la relation :

$$\dot{\vec{\theta}} = J^{-1} K\,\dot{\vec{t}} \tag{III.61}$$

Il est important de préciser que cette relation, ainsi que la relation III.64, sont valides seulement si la matrice J n'est pas singulière en réorganisant les équations III.47 a III.58 les matrices K et J composées uniquement de valeurs connues sont obtenues :

$$K = \begin{pmatrix} -1 & 0 & K_{13} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & K_{19} \\ 0 & -1 & K_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & K_{29} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & K_{46} & -1 & 0 & K_{49} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & K_{56} & 0 & -1 & K_{59} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{III.62}$$

Avec :

$K_{13} = l_1 \sin(\emptyset_{p1}) + l_2 \sin(\emptyset_{p1} + \theta_1) + l_3 \sin(\emptyset_{p1} + \theta_1 + \theta_2)$

$K_{19} = -l_4 \cos(\emptyset_{cm})$

$K_{23} = -l_1 \cos(\emptyset_{p1}) - l_2 \cos(\emptyset_{p1} + \theta_1) - l_3 \cos(\emptyset_{p1} + \theta_1 + \theta_2)$

$K_{29} = l_4 \sin(\emptyset_{cm})$

$K_{46} = -l_1 \sin(\emptyset_{p2})$

$K_{49} = l_4 \cos(\emptyset_{cm}) - l_3 \sin(\pi/2 - \emptyset_{cm} + \theta_4) - l_2 \sin(\pi/2 - \emptyset_{cm} + \theta_4 + \theta_5)$

$K_{56} = l_1 \cos(\emptyset_{p2})$

$K_{59} = -l_4 \sin(\emptyset_{cm}) + l_3 \cos(\pi/2 - \emptyset_{cm} + \theta_4) + l_2 \cos(\pi/2 - \emptyset_{cm} + \theta_4 + \theta_5)$

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_{21} & J_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{45} & J_{46} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{54} & J_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(III.63)}$$

Avec :

$J_{11} = -l_1 \sin(\emptyset_{p1} + \theta_1) - l_3 \sin(\emptyset_{p1} + \theta_1 + \theta_2)$

$J_{12} = -l_3 \sin(\emptyset_{cm} + \theta_1 + \theta_2)$

$J_{21} = l_2 \cos(\emptyset_{p1} + \theta_1) + l_3 \cos(\emptyset_{p1} + \theta_1 + \theta_2)$

$J_{22} = l_3 \cos(\emptyset_{p1} + \theta_1 + \theta_2)$

$J_{44} = -l_3 \sin(\pi/2 - \emptyset_{cm} + \theta_4) - l_2 \sin(\pi/2 - \emptyset_{cm} + \theta_4 + \theta_5)$

$J_{45} = -l_3 \sin(\pi/2 - \emptyset_{cm} + \theta_4 + \theta_5)$

$J_{54} = l_3 \cos(\pi/2 - \emptyset_{cm} + \theta_4) + l_2 \cos(\pi/2 - \emptyset_{cm} + \theta_4 + \theta_5)$

$J_{55} = l_2 \cos(\pi/2 - \emptyset_{cm} + \theta_4 + \theta_5)$

En résolvant l'équation III.61, le vecteur des vitesses articulaires $\dot{\vec{\theta}}$ est obtenu.

Les accélérations articulaires sont obtenues en dérivant l'équation III.60 représentant les équations de vitesses.

$$\dot{k}\dot{\vec{t}} + k\ddot{\vec{t}} = \dot{J}\dot{\vec{\theta}} + J\ddot{\vec{\theta}} \quad \text{(III.64)}$$

$$\ddot{\vec{\theta}} = J^{-1}(\dot{k}\dot{\vec{t}} + k\ddot{\vec{t}} - \dot{J}\dot{\vec{\theta}}) \quad \text{(III.65)}$$

$$\dot{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{k}_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{k}_{19} \\ 0 & 0 & \dot{k}_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{k}_{29} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{k}_{46} & 0 & 0 & \dot{k}_{49} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{k}_{56} & 0 & 0 & \dot{k}_{59} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(III.66)}$$

Avec :

$$\dot{K}_{13}= l_1\dot{\phi}_{p1}\cos(\phi_{p1}) +l_2 (\dot{\phi}_{p1}+ \dot{\theta}_1) \cos (\phi_{p1}+ \theta_1) + l_3(\dot{\phi}_{p1}+ \dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2) \cos (\phi_{p1}+ \theta_1+\theta_2)$$

$$\dot{K}_{19}= l_4 \dot{\phi}_{cm} \sin(\phi_{cm})$$

$$\dot{K}_{23} = l_1 \dot{\phi}_{p1} \sin (\phi_{p1}) + l_2 (\dot{\phi}_{p1}+ \dot{\theta}_1) \sin (\phi_{p1}+ \theta_1) + l_3(\dot{\phi}_{p1}+ \dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2) \sin (\phi_{p1}+ \theta_1+\theta_2)$$

$$\dot{K}_{29} = l_4 \dot{\phi}_{cm} \cos (\phi_{cm})$$

$$\dot{K}_{46} = - l_1 \dot{\phi}_{p2} \cos (\phi_{p2})$$

$$\dot{K}_{49} = -l_4 \dot{\phi}_{cm} \sin(\phi_{cm}) - l_3 (-\dot{\phi}_{cm}+ \dot{\theta}_4) \cos (\pi/2 -\phi_{cm}+ \theta_4) - l_2 (- \dot{\phi}_{cm}+ \dot{\theta}_4+\dot{\theta}_5)\cos (\pi/2- \phi_{cm}+ \theta_4+\theta_5)$$

$$\dot{K}_{56}= - l_1 \dot{\phi}_{p2} \sin (\phi_{p2})$$

$$\dot{K}_{59}= - l_4 \dot{\phi}_{cm} \cos (\phi_{cm}) - l_3 (-\dot{\phi}_{cm}+ \dot{\theta}_4) \sin (\pi/2 -\phi_{cm}+ \theta_4) - l_2 (- \dot{\phi}_{cm}+ \dot{\theta}_4+\dot{\theta}_5)\sin (\pi/2- \phi_{cm}+ \theta_4+\theta_5)$$

Et où

$$j = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ j_{21} & j_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j_{44} & j_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j_{54} & j_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(III.67)}$$

Avec :

$$j_{11}= - l_2 (\dot{\phi}_{p1}+\dot{\theta}_1) \cos (\phi_{p1}+\theta_1) - l_3 (\dot{\phi}_{p1}+ \dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2) \cos (\phi_{p1}+ \theta_1+\theta_2)$$

$$j_{12}= - l_3 (\dot{\phi}_{p1}+ \dot{\theta}_1+ \dot{\theta}_2) \cos (\phi_{p1}+ \theta_1+ \theta_2)$$

$$j_{21}= - l_2 (\dot{\phi}_{p1}+ \dot{\theta}_1) \sin (\phi_{p1}+ \theta_1) - l_3 (\dot{\phi}_{p1}+ \dot{\theta}_1+ \dot{\theta}_2) \sin (\phi_{p1}+ \theta_1+ \theta_2)$$

$$j_{22}= - l_3 (\dot{\phi}_{p1}+ \dot{\theta}_1+ \dot{\theta}_2) \sin (\phi_{p1}+ \theta_1+ \theta_2)$$

$$j_{44} = - l_3 (-\dot{\phi}_{cm}+ \dot{\theta}_4) \cos (\pi/2 - \phi_{cm}+ \theta_4) - l_2 (- \dot{\phi}_{cm}+ \dot{\theta}_4+\dot{\theta}_5) \cos (\pi/2- \phi_{cm}+ \theta_4+\theta_5)$$

$$j_{45}= - l_2 (-\dot{\phi}_{cm}+ \dot{\theta}_4+ \dot{\theta}_5) \cos (\pi/2 - \phi_{cm}+ \theta_4+ \theta_5)$$

$$j_{54}= - l_3 (-\dot{\phi}_{cm}+ \dot{\theta}_4) \sin (\pi/2 - \phi_{cm}+ \theta_4) - l_2 (- \dot{\phi}_{cm}+ \dot{\theta}_4+\dot{\theta}_5) \sin (\pi/2- \phi_{cm}+ \theta_4+\theta_5)$$

$$j_{55}= - l_2 (- \dot{\phi}_{cm}+ \dot{\theta}_4+\dot{\theta}_5) \sin (\pi/2- \phi_{cm}+ \theta_4+\theta_5)$$

Ainsi, pour une trajectoire cartésienne donnée (P_1, P_2, CM, $\dot{P}_1$, $\dot{P}_2$, $\dot{CM}$,$\ddot{P}_1$, $\ddot{P}_2$, $\ddot{CM}$) la trajectoire articulaire correspondante $\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}}, \ddot{\vec{\theta}}$ est entièrement connue. Ces données permettront de déterminer la cinématique et la dynamique de chaque membre du bipède.

III.3.5. *Convention de description de chaines cinématiques*

Avant de déterminer les vitesses et accélération de chaque membre du bipède, nous allons définie une convention pour la description de ses chaines cinématique. La convention définie est une adaptation la notation de Hardenberg – Denavit, [18] et permettre de décrire de façon systématique la position et l'orientation relative des membres et des articulations du bipède en fonction des coordonnées articulaire. Pour définie cette convention, on choisira le bipède en phase de simple support avec le pied 1 comme support.

Cependant, la convention définie sera applicable pour toutes les phases du cycle de marche du bipède. Aussi, bien que le modèle de bipède présenté dans ce travail soit plan, la convention sera définie en trois dimension pour faciliter l'écriture des équations cinématiques et dynamiques. Voici la convention utilisée qui est illustrée à la figure III.2 :

En premier lieu, les sept membres du bipède sont numérotés. La numérotation est faite de 0 à 6 partir du pied 1(corps 0), en passant par le tronc (corps 3), jusqu'au pied 2 (corps 6). Ensuite un repère de référence est défini fixe par rapport aux mouvements du bipède. Ce repère est appelé repère 0 (X_0, Y_0, Z_0) et est positionné au bout du pied support (pied 1). Pour décrire les mouvements relatifs des corps entre eux, le mouvement de chaque corps doit être exprime relativement au mouvement du corps le précédent. Pour ce faire, des repères cartésiens (X_i, Y_i, Z_i) sont attribués à chacun des membres du bipède : le repère *i* est placé sur l'articulation liant le corps *i* au corps le précédent (*i*-1) et est fixe sur le corps *i*-1. De cette façon, le mouvement du corps *i* relatif au corps *i*-1 peut être exprimé dans le repère *i* car ce repère, étant fixé au corps *i*-1, demeure fixe par rapport au corps *i* en mouvement. Pour ce qui est de l'orientation des repères, les axes perpendiculaires au plan de bipède (Z_i) sont choisis sortants de la feuille pour tous les repères. Ensuite, les axes X_i sont définis dans la direction liant l'origine du repère *i*-1 au repère *i*. De cette façon, les angles entre X_i et X_{i+1} correspondent aux coordonnés articulaires θ_i. Enfin, la direction des axes Y_i est déterminée de manière implicite. La figure III.2 présente la position et l'orientation de ces repères en rouge.

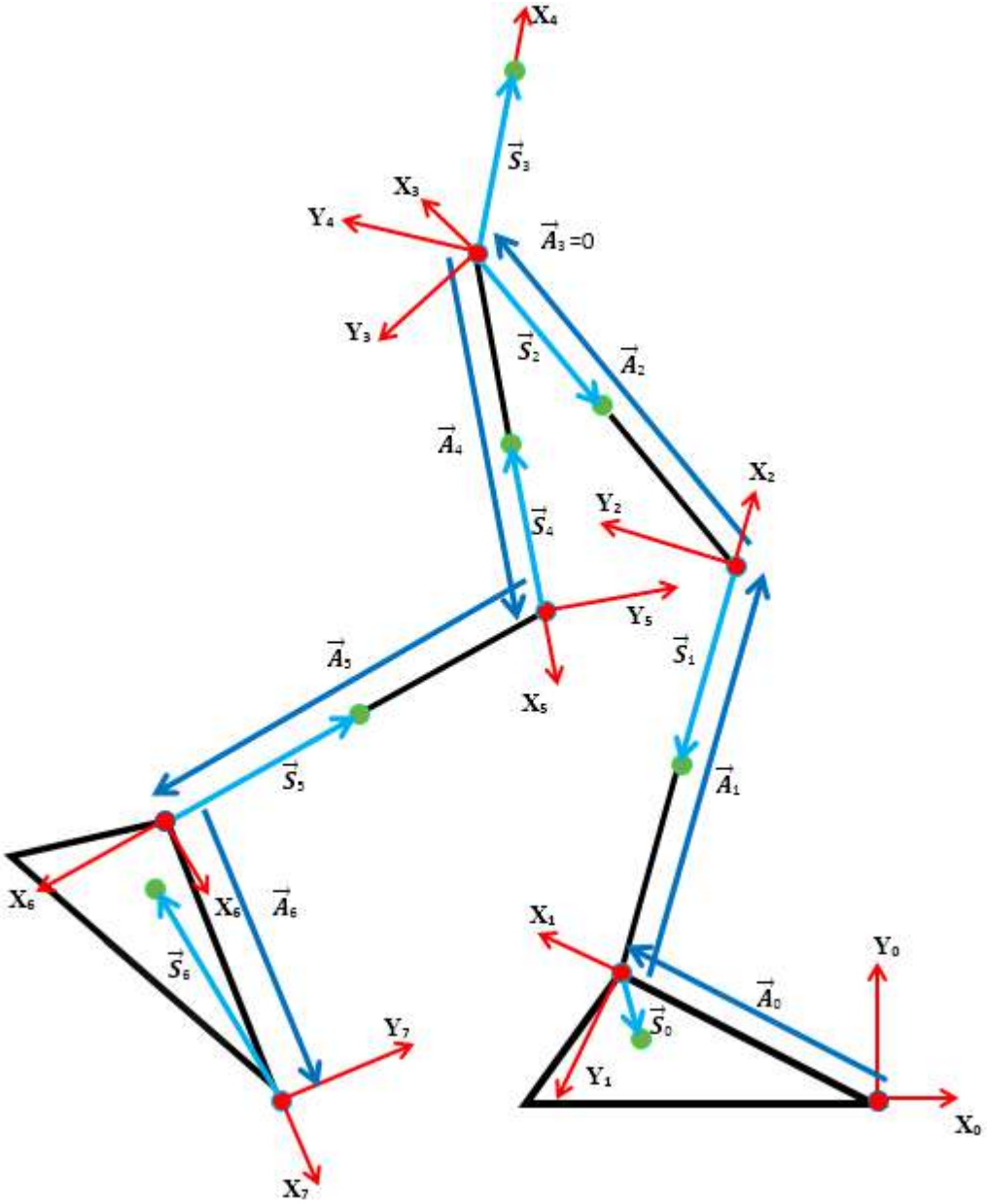


Figure III.2. *Architecture du robot selon la convention définie : en rouge, les repères Correspondant à chacun des membres ; en bleu foncé, les vecteurs 4 liant l'origine des Repères consécutifs (décalés sur la figure pour améliorer la visibilité) ; en vert, les centres de masses de chacun des membres et en bleu, les vecteurs Si positionnant les CdM.*

Grace aux repères précédemment définis, il est possible de décrire systématiquement les mouvements relatifs de chaque membre du bipède en fonction des coordonnés articulaire. Pour ce faire, sept matrices de rotation *Qi* exprimées dans le repère *i* et allant du repère *i* au repère *i+1* sont définis en fonction des coordonnés articulaire :

$$Q_i = \begin{pmatrix} cos\theta_i & -sin\theta_i & 0 \\ sin\theta_i & cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(III.68)}$$

Aussi, sept vecteurs $\vec{A}_i$ exprimés dans le repère *i* (en bleu foncé sur la figure 3.2) sont définis l'origine du repère *i* à celle du repère *i*+1 en fonction des coordonnés articulaire :

$$\vec{A}_i = \begin{pmatrix} a_i\, cos\theta_i \\ a_i\, sin\theta_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(III.69)}$$

Le paramètre a_i de l'équation III.69 correspond à la distance entre l'origine des deux repères. Aussi, le vecteur $\vec{A}_3$ est nul en raison de l'origine commune des repères 3 et 4. L'utilisation des vecteurs $\vec{A}_i$ et des matrices Q_i permet d'exprimer la position de chaque repère dans n'importe quel repère.

Comme l'objectif est déterminé la cinématique de chaque membre à son CdM en fonction des coordonnées articulaires, la position de chaque CdM doit exprimer de façon cohérente à la convention ci-dessus. Pour ce faire, des vecteurs $\vec{A}_i$ sont définie (en bleu sur la figure III.2) allant de l'origine des repères *i*+1 aux CdM des corps *i*. Ainsi, la position du CdM du corps *i* relativement à l'origine du repère *i* correspond la somme des vecteurs $\vec{A}_i$+$\vec{S}_i$ ou $\vec{A}_i$ représenté le vecteur reliant l'origine du repère *i* à celle du repère *i*+1 et $\vec{S}_i$ le vecteur reliant l'origine du repère *i*+1 au CdM du corps *i*. pour additionner ces deux vecteurs, ils doivent être exprimés dans le même repère. Comme il a été mentionné précédemment, le vecteur $\vec{A}_i$ est défini dans le repère *i*, pour le vecteur $\vec{A}_i$, il est plus facile de le définir dans le repère *i*+1 car il positionne un point fixe sur le membre *i*. de cette manière, le vecteur sera constant et indépendant de la configuration du robot. La notation $\vec{s}_i$ avec minuscule est donc utilisée pour désigner la position du CdM dans le repère *i*+1 et $\vec{S}_i$ avec une majuscule pour désigne la position du CdM dans le repère *i*. ainsi, il est nécessaire d'exprime le vecteur constant $\vec{s}_i$ dans le repère *i* pour l'additionner au vecteur $\vec{A}_i$. Pour ce faire, on utilise les matrices de rotation Q_i :

$$[\vec{S}_i]_i = Q_i\,[\vec{s}_i]_{i+1} \quad \text{(III.70)}$$

Cette convention permet de facilement exprimer la position du CdM d'un membre dans n'importe quel repère en fonction des coordonnées articulaire du robot. Par exemple, pour exprime la position du CdM du quatrième membre dans le repère de référence, il suffit d'additionner, à partir de la référence, les vecteurs $\vec{A}_i$ de chaque membre précédant le quatrième ainsi que le vecteur $\vec{S}_4$ en s'assurant de les exprimer respectivement dans le repère de référence

avec les matrices de rotations Q_i. Ainsi, la position du CdM du corps 4 exprimée dans le repère 0 serait :

$$[\vec{c}_4]_0=\vec{A}_0 + Q_0\vec{A}_1+Q_0Q_1\vec{A}_2 +Q_0\,Q_1\,Q_2\vec{A}_3 +Q_0Q_1Q_2Q_3(\vec{A}_4+\vec{S}_4)$$

III.3.6. *Application de la convention aux calculs cinématiques*

En ce qui concerne la cinématique, le fait de connaitre l'emplacement exact du CdM d'un membre en fonction des coordonnées articulaire nous permet de déterminer les vitesses et les accélérations misent en jeux dans la marche du robot par les équations classiques de la cinématique. Les vitesses, les accélérations, les vitesses angulaires ainsi que les accélérations angulaires des CdM des membres se calculent respectivement par les relations suivantes appliquées à chacun des segments :

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{i-1} + \dot{\theta}_i\vec{e}_i \quad \text{(III.71)}$$

$$\dot{\vec{c}}_i = \dot{\vec{c}}_{i-1}1 + \vec{\omega}_i \times \left(\vec{A}_i + \vec{S}_i\right) - \vec{\omega}_{i-1} \times \vec{S}_{i-1} \quad \text{(III.72)}$$

$$\dot{\vec{\omega}}_i = \dot{\vec{\omega}}_{i-1} + \ddot{\theta}_i\vec{e}_i + \dot{\theta}_i\vec{\omega}_{i-1} \times \vec{e}_i \quad \text{(III.73)}$$

$$\ddot{\vec{c}}_i = \ddot{\vec{c}}_{i-1} + \dot{\vec{\omega}}_i \times \left(\vec{A}_i + \vec{S}_i\right) + \vec{\omega}_i \times \left[\vec{\omega}_i \times \left(\vec{A}_i + \vec{S}_i\right)\right] - \dot{\vec{\omega}}_{i-1} \times \vec{S}_{i-1} - \vec{\omega}_{i-1} \times (\vec{\omega}_{i-1} \times \vec{S}_{i-1}) \quad \text{(III.74)}$$

Où :

$\vec{\omega}_i$: la vitesse angulaire du membre i

$\dot{\vec{c}}_i$: la vitesse du CdM du membre i

$\dot{\vec{\omega}}_i$: accélération angulaire du membre i

$\ddot{\vec{c}}_i$: accélération du CdM du membre i

$\vec{e}_i = [0 \quad 0 \quad 1]^T$ peu importe le repère (car le bipède est plan)

Évidemment, chacun des relations décrites ci- dessus doit être utilisé un repère de travail donné et les matrices de rotation Q_i doivent être utilisées pour effectuer les changements de repère appropriés. Comme le repère i+1 est fixe rapport au corps i, les calculs sont effectués dans le repère i+1.ainsi, les vitesses et accélérations $\vec{\omega}_i, \dot{\vec{c}}_i, \dot{\vec{\omega}}_i, \ddot{\vec{c}}_i$ seront exprimées dans le repère i+1 comme suit :

$$\vec{\omega} = Q_i^T\vec{\omega}_{i-1} + \dot{\theta}_i\vec{e}_i \quad \text{(III.75)}$$

$$\dot{\vec{c}}_i = Q_{ii}^T \dot{\vec{c}}_{i-1} + \vec{\omega}_i \times Q_i^T(\vec{A}_i + \vec{S}_i) - Q_{ii}^T(\vec{\omega}_{i-1} \times Q_i^T \vec{S}_{i-1}) \quad \text{(III.76)}$$

$$\dot{\vec{\omega}}_i = Q_{ii}^T \dot{\vec{\omega}}_{i-1} + \ddot{\theta}_i \vec{e}_i + \dot{\theta}_i (Q_i^T \vec{\omega}_{i-1}) \times \vec{e}_i \quad \text{(III.77)}$$

$$\ddot{\vec{c}}_i = Q_i^T \ddot{\vec{c}}_{i-1} + \dot{\vec{\omega}}_i \times Q_i^T(\vec{A}_i + \vec{S}_i) + \vec{\omega}_i \times [\vec{\omega}_i \times Q_i^T(\vec{A}_i + \vec{S}_i)] - Q_i^T(\dot{\vec{\omega}}_{i-1} \times Q_i^T \vec{S}_{i-1}) - Q_i^T \vec{\omega}_{i-1} \times (\vec{\omega}_{i-1} \times Q_i^T \vec{S}_{i-1}) \quad \text{(III.78)}$$

Pour effectuer ces calculs sur le membre 0 (le premier pied), il est notre les valeurs représentées par les symboles θ_0 , $\dot{\theta}_0$, $\ddot{\theta}_0$ correspondent en faire à $\emptyset_{p1}$, $\dot{\emptyset}_{p1}$, $\ddot{\emptyset}_{p1}$, Aussi, il est nécessaire de définir les vitesses et les accélérations du membre précédant le corps 0 dans le repère 0. Évidemment, ce membre n'existe pas et son mouvement correspond aux vitesses et accélérations absolues du repère 0. Ainsi, en rotation, le repère 0 est complétement fixe et les axes *X* et *Y* pointent toujours dans la même direction. Cependant, en translation, les vitesses et accélération de ce repère correspondent aux vitesses et accélérations du bout du pied, définies par la trajectoire cartésienne. Ainsi, le mouvement du repère de référence correspondant aux valeurs de $\vec{\omega}_{i-1}, \dot{\vec{c}}_{i-1}, \dot{\vec{\omega}}_{i-1}, et\ \ddot{\vec{c}}_{i-1}$ lorsque i=0 est décrit comme suit :

$\vec{\omega}_{ref}$ = [0 0 0]

$\dot{\vec{\omega}}_{ref}$ = [0 0 0]

$\dot{\vec{c}}_{ref}$ = [$\dot{\vec{X}}_{p1}$ $\dot{\vec{Y}}_{p1}$ 0]

$\ddot{\vec{c}}_{ref}$ = [$\ddot{\vec{X}}_{p1}$ $\ddot{\vec{Y}}_{p1} - g$ 0]

Dans ces dernières équations, une accélération de $-g$ représentant l'accélération gravitationnelle est appliquée au repère de référence du robot. Cette accélération sert à inclure les effets du poids des différents membres sans les faire apparaître directement dans chacune des équations dynamiques. La complexité des calculs est ainsi réduite et l'effet dynamique est le même.

III.4. Détermination des forces et des couples sur chaque membre

Comme les vitesses et accélérations des CdM des membres $\dot{\vec{c}}, \ddot{\vec{c}}, \vec{\omega}, \dot{\vec{\omega}}$ sont connues, les calculs dynamiques proprement dits peuvent être faits en utilisant la formulation de NEWTON-Euler. La figure III**.** 4 de la page suivante présente le bipède avec les efforts recherchés en bleu Afin de les déterminer, il faut appliquer les équations d'équilibre dynamique des forces et des moments sur chacun des membres du robot :

$$\sum \vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{c}}_i \quad \text{(III.79)}$$

$$\sum \vec{M}_i = I_i \dot{\vec{\omega}}_i + \vec{\omega}_i \times I_i \vec{\omega}_i \quad \text{(III.80)}$$

Ce système vectoriel tridimensionnel engendre 6 équations scalaires. Cependant, comme le bipède étudié est plan, seules 3 équations scalaires pourront être extraites du système d'équations soit celles correspondants aux forces en *X*, aux forces *Y* et aux moments en *Z*. comme le robot comporte sept membres numérotés de i=0…6, un système de vingt et une équation devra donc être résolue. Aussi, dans sa forme actuelle, le système comporte

24 inconnues scalaire (f_{ix} , f_{iy} , n_{iz}) soit trois inconnues pour les efforts internes des six articulations et trois inconnues supplémentaires par pied pour les réactions externes. Un tel système et dit sous-déterminé car il y a plus d'inconnue que d'équation. Afin de résoudre le système, nous l'écrirons sous la forme matricielle suivante :

$$L\vec{F} = \vec{R} \quad \text{(III.81)}$$

Où la matrice $L_{21\times 24}$ représente les coefficients des 21 équations scalaires des sommations des forces et de moments, le vecteur $\vec{F}_{24\times 1}$représente les 24 forces et moments inconnus et le vecteur $\vec{R}_{21\times 1}$ représente les termes inertiels connus. Le développement explicite menant aux 21 équations scalaires par la formulation de NEWTON- Euler est présenté à l'annexe.

En rappelant que :

$$S_i = \begin{bmatrix} S_{ix} \\ S_{iy} \\ 0 \end{bmatrix}, A_i = \begin{bmatrix} A_{ix} \\ A_{iy} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i \cos(\theta_i) \\ a_i \sin(\theta_i) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} q_{i_{11}} & q_{i_{12}} & 0 \\ q_{i_{21}} & q_{i_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On exprime le système matriciel représentant la dynamique du bipède par :

$$L\vec{F} = \vec{R}$$

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{22} & L_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{33} & L_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{44} & L_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_{55} & L_{56} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{66} & L_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{77} & L_{78} \end{bmatrix} \quad \text{(III.82)}$$

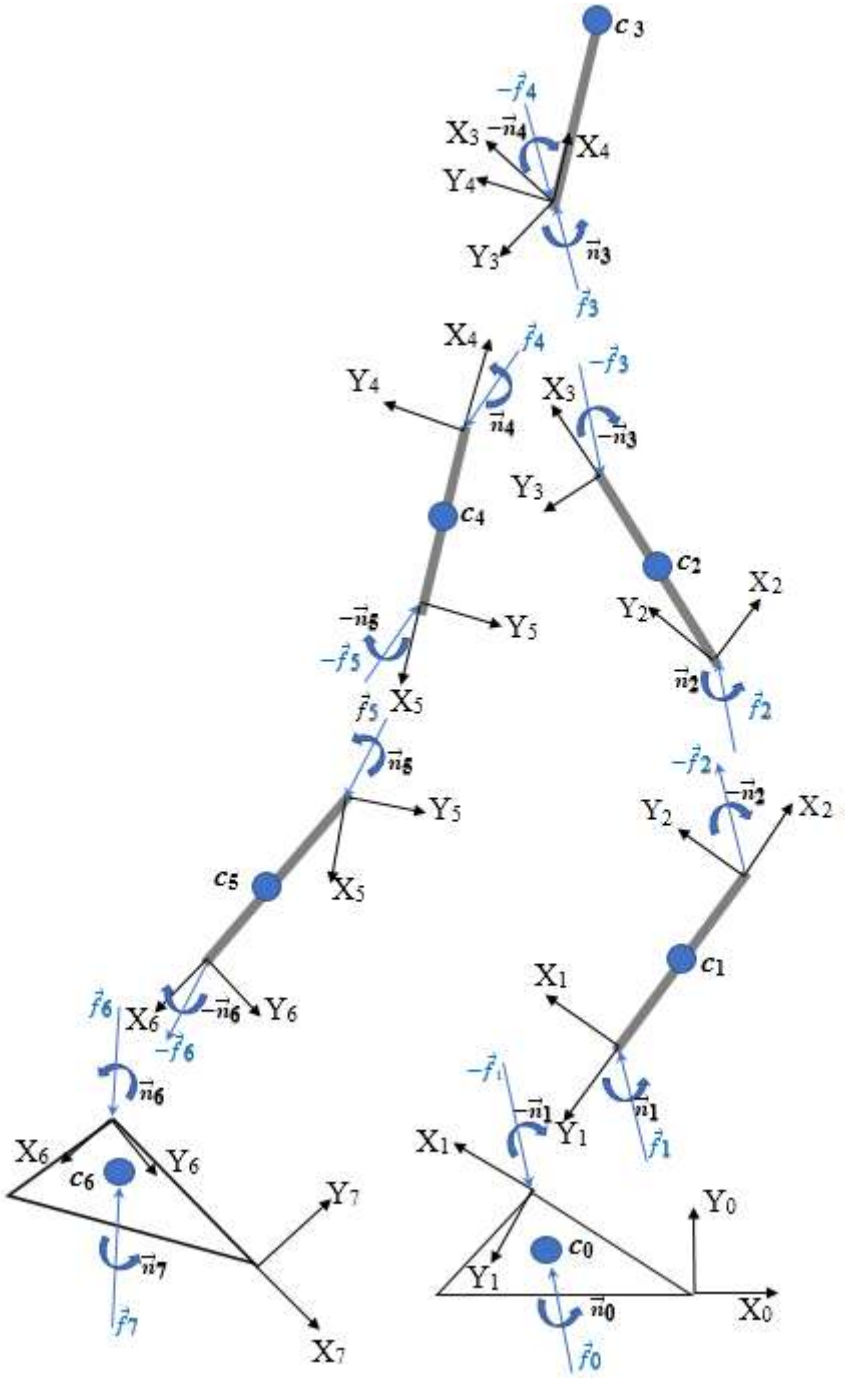


Figure III.3. *Représentation des efforts sur le bipède*

Avec 0 représentant une matrice nulle de dimension 3×3 et avec :

$$L_{11}=\begin{bmatrix} q_{0_{11}} & q_{0_{21}} & 0 \\ q_{0_{12}} & q_{0_{22}} & 0 \\ B_0 & C_0 & 1 \end{bmatrix}, L_{12}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ D_0 & E_0 & -1 \end{bmatrix}, L_{22}=\begin{bmatrix} q_{1_{11}} & q_{1_{21}} & 0 \\ q_{1_{12}} & q_{1_{22}} & 0 \\ B_1 & C_1 & 1 \end{bmatrix}, L_{23}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ D_1 & E_1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L_{33}=\begin{bmatrix} q_{2_{11}} & q_{2_{21}} & 0 \\ q_{2_{12}} & q_{2_{22}} & 0 \\ B_2 & C_2 & 1 \end{bmatrix}, L_{34}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ D_2 & E_2 & -1 \end{bmatrix}, L_{44}=\begin{bmatrix} q_{3_{11}} & q_{3_{21}} & 0 \\ q_{3_{12}} & q_{3_{22}} & 0 \\ B_3 & C_3 & 1 \end{bmatrix}, L_{45}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ D_3 & E_3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L_{55}=\begin{bmatrix} q_{4_{11}} & q_{4_{21}} & 0 \\ q_{4_{12}} & q_{4_{22}} & 0 \\ B_4 & C_4 & 1 \end{bmatrix}, L_{56}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ D_4 & E_4 & -1 \end{bmatrix}, L_{66}=\begin{bmatrix} q_{5_{11}} & q_{5_{21}} & 0 \\ q_{5_{12}} & q_{5_{22}} & 0 \\ B_5 & C_5 & 1 \end{bmatrix}, L_{67}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ D_5 & E_5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L_{77}=\begin{bmatrix} q_{6_{11}} & q_{6_{21}} & 0 \\ q_{6_{12}} & q_{6_{22}} & 0 \\ B_6 & C_6 & 1 \end{bmatrix}, L_{78}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ D_6 & E_6 & 1 \end{bmatrix},$$

Et Où

$$\vec{F}=\begin{bmatrix} f_{0x} \\ f_{0y} \\ n_0 \\ f_{1x} \\ f_{1y} \\ n_1 \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ n_2 \\ f_{3x} \\ f_{3y} \\ n_3 \\ f_{4x} \\ f_{4y} \\ n_4 \\ f_{5x} \\ f_{5y} \\ n_5 \\ f_{6x} \\ f_{6y} \\ n_6 \\ f_{7x} \\ f_{7y} \\ n_7 \end{bmatrix} \vec{R}=\begin{bmatrix} m_0\ddot{c}_{0x} \\ m_0\ddot{c}_{0y} \\ I_{0zz}\dot{\omega}_{0z} \\ m_1\ddot{c}_{1x} \\ m_1\ddot{c}_{1y} \\ I_{1zz}\dot{\omega}_{1z} \\ m_2\ddot{c}_{2x} \\ m_2\ddot{c}_{2y} \\ I_{2zz}\dot{\omega}_{2z} \\ m_3\ddot{c}_{3x} \\ m_3\ddot{c}_{3y} \\ I_{3zz}\dot{\omega}_{3z} \\ m_4\ddot{c}_{4x} \\ m_4\ddot{c}_{4y} \\ I_{4zz}\dot{\omega}_{4z} \\ m_5\ddot{c}_{5x} \\ m_5\ddot{c}_{5y} \\ I_{5zz}\dot{\omega}_{5z} \\ m_6\ddot{c}_{6x} \\ m_6\ddot{c}_{6y} \\ I_{6zz}\dot{\omega}_{6z} \end{bmatrix}$$

Les valeurs représentant par les symboles B_i , C_i , D_i , E_i dans la matrice L sont :

$$B_0 = 0$$

$$C_0 = 0$$

$$D_0 = -\left[q_{0_{21}} S_{0x} + q_{0_{22}} S_{0y}\right]$$

$$E_0 = \left[q_{0_{11}} S_{0x} + q_{0_{21}} S_{0y}\right]$$

$$B_1 = -\left[q_{1_{12}}\left(q_{1_{11}}\left(A_{1x} + S_{1x}\right) + \left(q_{1_{21}}\left(A_{1y} + S_{1y}\right)\right) - q_{1_{11}}\left(q_{1_{12}}\left(A_{1x} + S_{1x}\right) + q_{1_{22}}\left(A_{1y} + S_{1y}\right)\right)\right]$$

$$C_1 = -\left[q_{1_{22}}\left(q_{1_{11}}\left(A_{1x} + S_{1x}\right) + q_{1_{21}}\left(A_{1y} + S_{1y}\right)\right) - q_{1_{21}}\left(q_{6_{12}}\left(A_{1x} + S_{1x}\right) + q_{1_{22}}\left(A_{1y} + S_{1y}\right)\right)\right]$$

$$D_1 = -\left[q_{1_{21}} S_{1x} + q_{1_{22}} S_{1y}\right]$$

$$E_1 = \left[q_{1_{11}} S_{1x} + q_{1_{21}} S_{1y}\right]$$

$$B_2 = -\left[q_{2_{12}}\left(q_{2_{11}}\left(A_{2x} + S_{2x}\right) + \left(q_{2_{21}}\left(A_{2y} + S_{2y}\right)\right) - q_{2_{21}}\left(q_{2_{12}}\left(A_{2x} + S_{2x}\right) + q_{2_{22}}\left(A_{2y} + S_{2y}\right)\right)\right]$$

$$C_2 = -\left[q_{2_{22}}\left(q_{2_{11}}\left(A_{2x} + S_{2x}\right) + \left(q_{2_{21}}\left(A_{2y} + S_{2y}\right)\right) - q_{2_{21}}\left(q_{2_{12}}\left(A_{2x} + S_{2x}\right) + q_{2_{22}}\left(A_{2y} + S_{2y}\right)\right)\right]$$

$$D_2 = -\left[q_{2_{21}} S_{2x} + q_{2_{22}} S_{2y}\right]$$

$$E_2 = \left[q_{2_{11}} S_{2x} + q_{2_{21}} S_{2y}\right]$$

$$B_3 = -\left[q_{3_{12}}\left(q_{3_{11}} S_{3x} + q_{3_{21}} S_{3y}\right) - q_{3_{11}}\left(q_{3_{12}} S_{3x} + q_{3_{22}} S_{3y}\right)\right]$$

$$C_3 = -\left[q_{3_{22}}\left(q_{3_{11}} S_{3x} + q_{3_{21}} S_{3y}\right) - q_{3_{21}}\left(q_{3_{12}} S_{3x} + q_{3_{22}} S_{3y}\right)\right]$$

$$D_3 = -\left[q_{3_{21}} S_{3x} + q_{3_{22}} S_{3y}\right]$$

$$E_3 = \left[q_{3_{11}} S_{3x} + q_{3_{21}} S_{3y}\right]$$

$$B_4 = -\left[q_{4_{12}}\left(q_{4_{11}}\left(A_{4x} + S_{4x}\right) + \left(q_{4_{21}}\left(A_{4y} + S_{4y}\right)\right) - q_{4_{11}}\left(q_{4_{12}}\left(A_{4x} + S_{4x}\right) + \left(q_{4_{22}}\left(A_{4y} + S_{4y}\right)\right)\right]$$

$$C_4 = -\left[q_{4_{22}}\left(q_{4_{11}}\left(A_{4x} + S_{4x}\right) + \left(q_{4_{21}}\left(A_{4y} + S_{4y}\right)\right) - q_{4_{21}}\left(q_{4_{12}}\left(A_{4x} + S_{4x}\right) + \left(q_{4_{22}}\left(A_{4y} + S_{4y}\right)\right)\right]$$

$$D_4 = -\left[q_{4_{21}} S_{4x} + q_{4_{22}} S_{4y}\right]$$

$$E_4 = \left[q_{4_{11}} S_{4x} + q_{4_{21}} S_{4y}\right]$$

$$B_5 = -\left[q_{5_{12}}\left(q_{5_{11}}\left(A_{5x} + S_{5x}\right) + \left(q_{5_{21}}\left(A_{5y} + S_{5y}\right)\right) - q_{5_{11}}\left(q_{5_{12}}\left(A_{5x} + S_{5x}\right) + \left(q_{5_{22}}\left(A_{5y} + S_{5y}\right)\right)\right]$$

$$C_5 = -\left[q_{5_{22}}\left(q_{5_{11}}\left(A_{5x} + S_{5x}\right) + \left(q_{5_{21}}\left(A_{5y} + S_{5y}\right)\right) - q_{5_{21}}\left(q_{5_{12}}\left(A_{5x} + S_{5x}\right) + \left(q_{5_{22}}\left(A_{5y} + S_{5y}\right)\right)\right]$$

$$D_5 = -\left[q_{5_{21}} S_{5x} + q_{5_{22}} S_{5y}\right]$$

$$E_5 = [q_{5_{11}} S_{5x} + q_{5_{21}} S_{5y}]$$

$$B_6 = -[q_{6_{12}}(q_{6_{11}}(A_{6x} + S_{6x}) + (q_{6_{21}}(A_{6y} + S_{6y})) - q_{6_{11}}(q_{6_{12}}(A_{6x} + S_{6x}) + (q_{6_{22}}(A_{6y} + S_{6y}))]$$

$$C_6 = -[q_{6_{22}}(q_{6_{11}}(A_{6x} + S_{6x}) + (q_{6_{21}}(A_{6y} + S_{6y})) - q_{6_{21}}(q_{6_{12}}(A_{6x} + S_{6x}) + (q_{6_{22}}(A_{6y} + S_{6y}))]$$

$$D_6 = 0$$

$$E_6 = 0$$

La solution de ce système sous- déterminé selon la phase du cycle de marche car les forces exercées sur le pied libre sont différentes en simple et en double support.

III.4.1. *Résolution en simple support*

En simple support, le pied 2 est dans les airs et aucune force extérieure ne lui est appliquée. Ainsi, les forces f_{7x}, f_{7z} et le couple n_7 représentant les efforts externes appliqués au pied sont nuls. Cette situation permet de diminuer le vecteur $\vec{F}$ à 21 composantes et la matrice L à une matrice carrée 21×21 (les trois dernières colonnes sont supprimées car elles sont multipliées par 0 dans le vecteur$\vec{F}$). Le système à résoudre est donc considérablement simplifié et sa résolution se résume à effectuer l'opération suivante :

$$\vec{F} = L^{-1} \vec{R} \qquad \text{(III.83)}$$

Où L, est maintenant une matrice carrée de dimension 21×21 qui ne doivent pas être singulière pour que la relation soit valide.

III.4.2. *Résolution en double support*

Pour la résolution en double support, il est impossible de simplifier le système d'équations car les 24 inconnus sont présents. Ainsi, la matrice L demeure rectangulaire et l'équation suivant est à résoudre :

$$\vec{F} = L^{I} \vec{R} \qquad \text{(III.84)}$$

Le système étant sous-déterminé, une infinité de solutions existent. Cette propriété permet en quelque sorte de choisir la solution du système à l'aide de critères. Une des solutions existantes, appelée solution à norme minimale, consiste à minimiser la norme du vecteur solution $\vec{F}$. Pour l'obtenir, la matrice L^{I} suivante est utilisée pour résoudre le système :

$$L^{I} = L^{T}(LL^{T})^{-1} \qquad \text{(III.85)}$$

La solution obtenue sera celle où la norme du vecteur $\vec{F}$ est minimale. Cependant, comme le vecteur $\vec{F}$ contient des forces et des couples, minimiser la norme de ce vecteur n'a pas vraiment de sens physique et cette solution n'est pas nécessairement la solution désirée. Pour en obtenir d'autres, il est possible de déterminer une solution générale pour un système sous-déterminé. En ajoutant à la vectrice solution un vecteur quelconque contenu dans le noyau de la matrice *L*, une nouvelle vectrice solution qui satisfera le système est créée. Le vecteur ajouté étant quelconque, il est possible de représenter l'ensemble des solutions du système sous la forme suivante :

$$\vec{F} = L^I \vec{R} + (1 - L^I L)\vec{z} \qquad \text{(III.86)}$$

Où L^I est défini par la solution à norme minimale (équation III.84) et $\vec{z}$ est un vecteur réel quelconque. Cette solution générale permet de générer une infinité de solutions en variant les valeurs du vecteur$\vec{z}$.

III.5. Conclusion

Ce chapitre résume le principe de la modélisation géométrique, cinématique et dynamique d'un robot bipède. La modélisation géométrique permet de déterminer le degré de liberté, la cinématique permet d'identifier les positions des pieds et la dynamique nous permettant de connaitre les équations de la marche du robot qu'ils ont basées sur la formulation de NEWTON-Euler.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale

L'objectif de ce mémoire était d'étudier la locomotion bipède dans le but de développer un robot marcheur anthropomorphe. Pour ce faire, nous avons d'abord présenté une analyse de la marche bipède et définition certains concepts importants dans l'étude de la marche. Ensuite, une revue de littérature des différents robots marcheurs bipèdes existants a été réalisée. Puis, dans le cadre d'une approche théorique pour modéliser dynamiquement un bipède plan suivant une trajectoire de marche donnée, il a été décidé de développer la dynamique de la marche permettant de calculer les couples nécessaires aux articulations ainsi que les forces impliquées dans la marche. Ensuite, l'architecture du bipède choisie a été présentée. Pour optimiser l'agilité du bipède tout en conservant une complexité minimale d'analyse. Les équations décrivant la cinématique du bipède dans l'espace cartésien et articulaire ont par la suite été développées. Puis, afin d'effectuer les calculs dynamiques. une trajectoire empirique a été appliquée au bipède en phase de simple support et les calculs cinématiques et dynamiques effectués par le programme. Pour la phase de double support, seules des validations partielles étaient possibles en raison du système sous déterminer à résoudre. Ainsi, une trajectoire théorique a été appliquée au bipède dans une configuration ou le bout des deux pieds reste fixé au sol. En alternant les articulations actionnées.

Perspectives

Pour le futur du projet, il est essentiel d'effectuer les modifications mentionnées précédemment au sujet des trajectoires de marche et de l'algorithme de calcul dynamique en double support. Une fois ces éléments corrigés, il sera possible de juger si l'approche de modélisation utilisée donne des résultats satisfaisants. Ensuite, dans le cadre du développement d'un robot bipède, le programme pourra être utilisé afin d'analyser l'efficacité et la stabilité de différentes trajectoire de marche par l'analyse des efforts ou par la trajectoire du ZMP. Aussi, par le développement d'une base de données constituant une interface de comparaison pourront être utilisés comme outil de vérification ou comme outil prédictif dans la commande d'un robot bipède.

Enfin, une approche expérimentale devrait être envisagée en parallèle au développement théorique du projet afin de forcer la considération des problèmes pratiques d'application dans l'élaboration théorique du projet et afin de valider efficacement l'approche utilisée pour représenter le bipède.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

[1] http://www.victhom.com/fr/realisation-jambe-bionique-1 .htm

[2] Robert Paul & Rey-Debove Josette & Rey Alain, Petit Robert de la langue française 2006, Paris : Dictionnaires Le Robert, 2005, 2949p

[3] Lydoire Fabien, Génération de trajectoires pour la locomotion artificielle et commande à horizon fuyant avec l'arithmétique d'intervalles 1 oct. 2008

[4]https://www.google.com/search?q=Les+phases+de+la+marche&ie=utf-8&oe=utf-8&client

[5] https://www.google.com/search?q=Polygone+de+sustentation

[6] Vukobratovic Miomir & Borovac Branislav, «Zéro-Moment Point - Thirty five years of its life» 2nd Branislav Arso ... Available from: Branislav Arso Borovac, Jun 04, 2014

[7] Hirai Kazuo & Hirose Masato & Haikawa Yuji & Takenaka Toru, «The Development of Honda Humanoid Robot» 2011

[8] https://www.sci-sport.com/theorie/001-02.php par *A. Manolova* | 24 Avril 2012

[9] Hirai Kazuo & Hirose Masato & Haikawa Yuji & Takenaka Toru, «The Development of Honda Humanoid Robot», *IEEE International Conférence on Robotics and Automation,* may 1998, p. 1321-1326.

[10]http://www.futura-sciences.com/tech/dossiers/robotique-robots-humanoides-notre-service-283/page/3/

[11]https://pdfs.semanticscholar.org/c967/238ac80b5d0671d14ad96ebb4085663d916a.pdf. may 21-26 ,2011

[12] https://staff.aist.go.jp/s.kajita/biped-e.html

[13] http://www.gipsa-lab.grenoble-inp.fr/projet/Rabbit/index.php. Sep 19, 2008

[14] http://www.nature.com/news/2005/050214/full/news050214-13.html

[15]https://www.google.com/search?q=Collins+Steve+%26+Ruina+Andy+%26+Tedrake+Russ+%26+Wisse+Martijn%2C+%C2%AB+Efficient+BipedalRobots

[16] Sias Fred R. & Zheng Yuan F., « How many degrees-of-freedom does a biped need? », *IEEE International Workshop on Intelligent Robots and Systems,* 1990, p. 297-302.

[17]https://www.scribd.com/document/287504549/How-Many-DOF-Does-a-Biped-Need- Fred-Sias

[18]Gosselin Clément, *Eléments de Robotique GMC-17693,* Notes de cours, Département de Génie Mécanique, Université Laval, 2003, 186p

ANNEXE
Modélisation dynamique

Cette annexe a pour but de présenter la résolution du problème dynamique inverse par l'application de la formulation de Newton-Euler.

D'abord, les deux équations vectorielles suivantes seront appliquées sur chacun des sept membres du bipède :

$$\sum \vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{c}}_i$$

$$\sum \vec{M}_i = I_i \dot{\vec{\omega}}_i + \vec{\omega}_i \times I_i \vec{\omega}_i$$

De ces équations, 21 équations scalaires pourront être utilisées afin de représenter le système à résoudre sous la forme matricielle suivante :

$$L\vec{F} = \vec{R}$$

Avant de présenter l'application des équations dynamiques sur chaque membre, rappelons que :

$$S_i = \begin{bmatrix} S_{ix} \\ S_{iy} \\ 0 \end{bmatrix}, A_i = \begin{bmatrix} A_{ix} \\ A_{iy} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i \cos(\theta_i) \\ a_i \sin(\theta_i) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} q_{i_{11}} & q_{i_{12}} & 0 \\ q_{i_{21}} & q_{i_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les forces $\vec{f}_i$ et les vecteurs $\vec{A}_i$ et $\vec{S}_i$ sont exprimés dans le repère *i*. Les vitesses et accélérations $\dot{\vec{c}}, \ddot{\vec{c}}, \vec{\omega}, \dot{\vec{\omega}}$ ainsi que les matrices d'inertie I_i sont exprimées dans le repère *i+1*. Aussi, comme les axes Z ont tous été définis sortants de la feuille, les moments $\vec{n}_i$, sont indépendants du repère dans lequel ils sont exprimés.

Pied 1

Corps 0

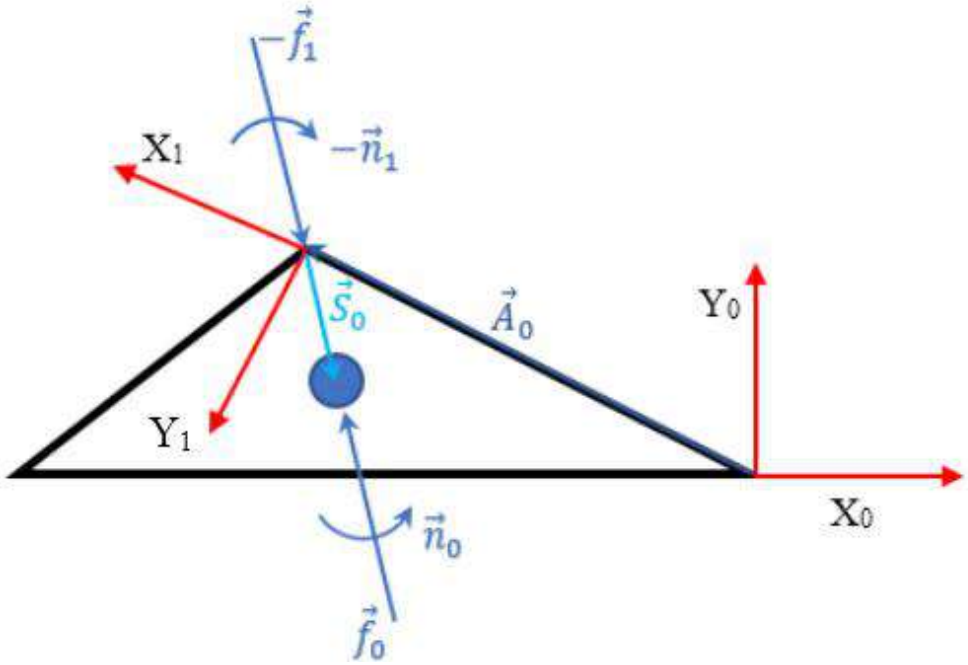


Figure -l. *DCL du pied 1 (Corps 0)*

D'abord, la sommation des forces :

$\sum \vec{F}$:

$$\vec{f}_0 - \vec{f}_1 = m_0 \ddot{\vec{c}}_0$$

Tous les éléments de l'équation doivent être exprimés dans le même repère. Ainsi, il est choisi de les exprimer dans le repère 1 :

$$Q_0^T \vec{f}_0 - \vec{f}_1 = m_0 \ddot{\vec{c}}_0$$

De cette équation vectorielle, seules les deux équations scalaires en X et Y sont obtenues car les composantes des forces et des accélérations en Z sont nulles :

$$q_{i_{11}} \vec{f}_{0x} + q_{i_{21}} \vec{f}_{0y} - \vec{f}_{1x} = m_0 \ddot{c}_{0x} \quad \text{(A-l)}$$

$$q_{i_{12}} \vec{f}_{0x} + q_{i_{22}} \vec{f}_{0y} - \vec{f}_{1y} = m_0 \ddot{c}_{0y} \quad \text{(A-2)}$$

Ensuite, la somme des moments :

$\sum M_{c0}$

$$\vec{S}_0 \times \vec{f}_1 + \vec{n}_0 - \vec{n}_1 = I_0\dot{\vec{\omega}}_0 + \vec{\omega}_0 \times I_0\vec{\omega}_0$$

Dans le repère 1 :

$$Q_0^T\vec{S}_0 \times \vec{f}_1 + \vec{n}_0 - \vec{n}_1 = I_0\dot{\vec{\omega}}_0 + \vec{\omega}_0 \times I_0\vec{\omega}_0$$

II est à noter qu'il n'est pas nécessaire de changer les moments $\vec{n}_i$ de repère car ils ont la même valeur dans tous les repères. De cette équation vectorielle, une seule équation scalaire en Z peut être tirée car les moments et les accélérations angulaires en X et Y sont nuls :

$$B_0 f_{0x} + B_0 f_{0y} + n_0 + C_0 f_{1x} + D_0 f_{1y} + n_1 = I_{0zz}\dot{\omega}_{0z} \qquad \text{(A-3)}$$

Où

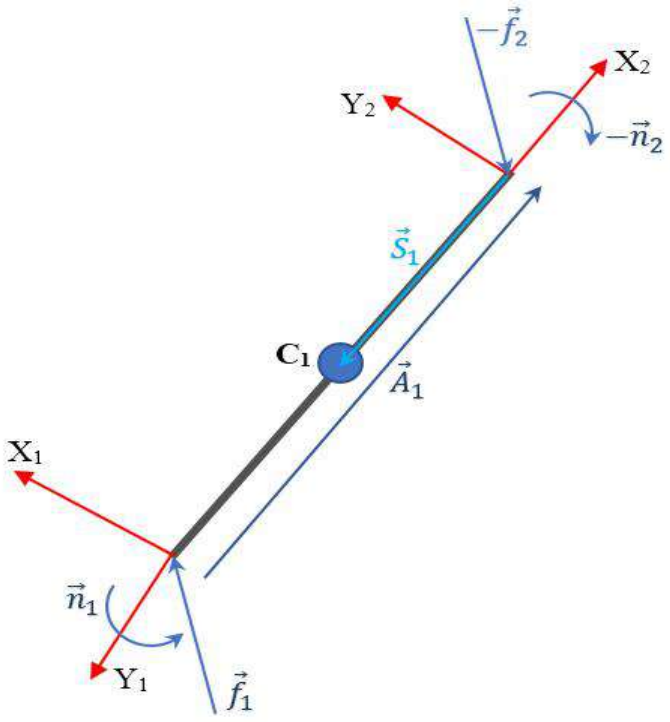
$$B_0 = 0$$

$$C_0 = 0$$

$$D_0 = -\left[q_{0_{21}} S_{0x} + q_{0_{22}} S_{0y}\right]$$

$$E_0 = \left[q_{0_{11}} S_{0x} + q_{0_{21}} S_{0y}\right]$$

Jambe 1



(Corps 1)

Figure -2. *DCL de la jambe 1 (Corps 1)*

$\sum \vec{F}$:

$$\vec{f_1} - \vec{f_2} = m_1 \ddot{\vec{c}}_1$$

Repère 2 :

$$Q_1^T \vec{f_1} - \vec{f_2} = m_1 \ddot{\vec{c}}_1$$

Deux équations scalaires sont obtenues :

$$q_{1_{11}} f_{1x} + q_{1_{21}} f_{1y} - f_{2x} = m_1 \ddot{c}_{1x} \quad \text{(A-4)}$$

$$q_{1_{12}} f_{1x} + q_{1_{22}} f_{1y} - f_{2y} = m_1 \ddot{c}_{1y} \quad \text{(A-5)}$$

$\sum M_{c1}$:

$$-(\vec{A_1} + \vec{S_1}) \times \vec{f_1} + \vec{S_1} \times \vec{f_2} + \vec{n}_1 - \vec{n}_2 = I_1 \dot{\vec{\omega}}_1 + \vec{\omega}_1 \times I_1 \vec{\omega}_1$$

Repère 2 :

$$-Q_1^T(\vec{A_1} + \vec{S_1}) \times Q_1^T \vec{f_1} + Q_1^T \vec{S_1} \times \vec{f_2} + \vec{n}_1 - \vec{n}_2 = I_1 \dot{\vec{\omega}}_1 + \vec{\omega}_1 \times I_1 \vec{\omega}_1$$

Ce qui donne l'équation scalaire :

$$B_1 f_{1x} + B_1 f_{1y} + n_1 + C_1 f_{2x} + D_1 f_{2y} + n_2 = I_{1zz} \dot{\omega}_{1z} \quad \text{(A-6)}$$

Où :

$$B_1 = -[q_{1_{12}}(q_{1_{11}}(A_{1x} + S_{1x}) + (q_{1_{21}}(A_{1y} + S_{1y})) - q_{1_{11}}(q_{1_{12}}(A_{1x} + S_{1x}) + q_{1_{22}}(A_{1y} + S_{1y}))]$$

$$C_1 = -[q_{1_{22}}(q_{1_{11}}(A_{1x} + S_{1x}) + q_{1_{21}}(A_{1y} + S_{1y})) - q_{1_{21}}(q_{1_{12}}(A_{1x} + S_{1x}) + q_{1_{22}}(A_{1y} + S_{1y}))]$$

$$D_1 = -[q_{1_{21}} S_{1x} + q_{1_{22}} S_{1y}]$$

$$E_1 = [q_{1_{11}} S_{1x} + q_{1_{21}} S_{1y}]$$

Cuisse 1

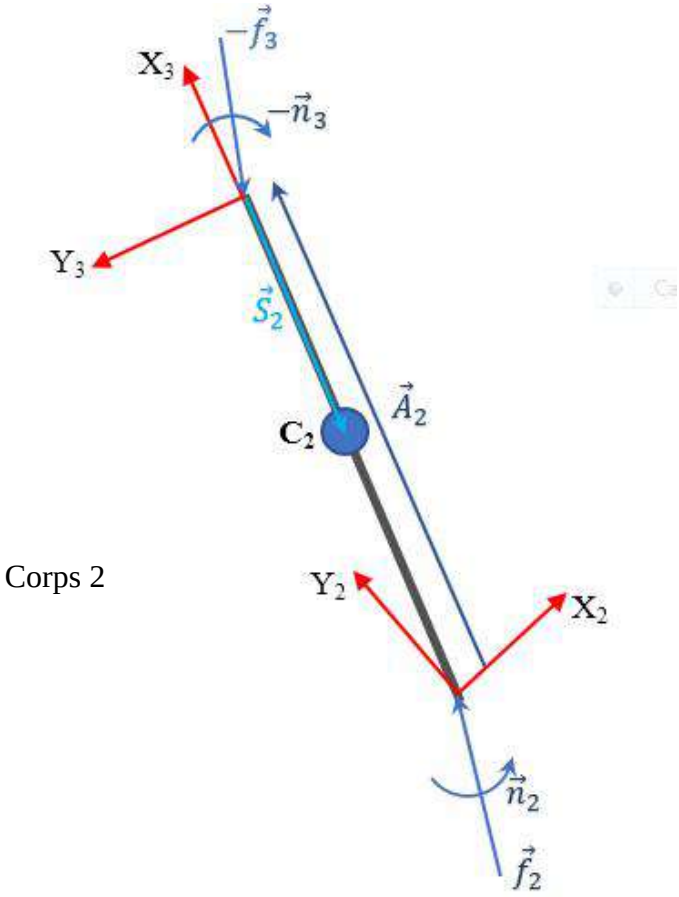


Figure -3. *DCL de la cuisse 1 (Corps 2)*

$\sum \vec{F}$:

$$\vec{f}_2 - \vec{f}_3 = m_2\, \ddot{\vec{c}}_2$$

Repère 3 :

$$Q_2^T\, \vec{f}_2 - \vec{f}_3 = m_2\, \ddot{\vec{c}}_2$$

Ce que donne :

$$q_{2_{11}} f_{2x} + q_{2_{21}} f_{2y} - f_{3x} = m_2\, \ddot{c}_{2x} \qquad \text{(A-7)}$$

$$q_{2_{12}} f_{2x} + q_{2_{22}} f_{2y} - f_{3y} = m_2\, \ddot{c}_{2y} \qquad \text{(A-8)}$$

$\sum M_{c2}$:

$$-(\vec{A}_2 + \vec{S}_2) \times \vec{f}_2 + \vec{S}_2 \times \vec{f}_3 + \vec{n}_2 - \vec{n}_3 = I_2\dot{\vec{\omega}}_2 + \vec{\omega}_2 \times I_2\vec{\omega}_2$$

Repère 3 :

$$-Q_2^T(\vec{A}_2 + \vec{S}_2) \times Q_2^T\vec{f}_2 + Q_2^T\vec{S}_2 \times \vec{f}_3 + \vec{n}_2 - \vec{n}_3 = I_2\dot{\vec{\omega}}_2 + \vec{\omega}_2 \times I_2\vec{\omega}_2 \qquad \text{(A-9)}$$

Ce que donne :

$$B_2 f_{2x} + C_2 f_{2y} + n_2 + C_2 f_{3x} + D_2 f_{3y} + n_3 = I_{2zz}\dot{\omega}_{2z}$$

Où :

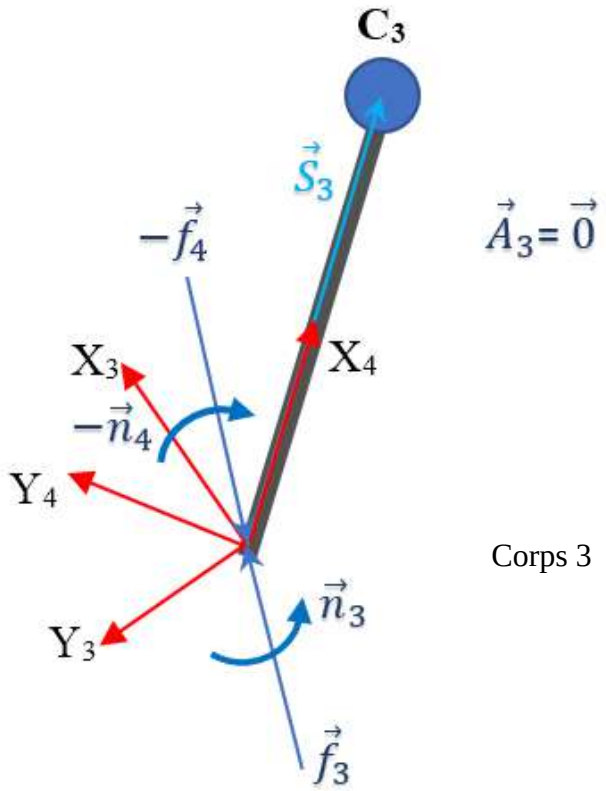
$$B_2 = -\left[q_{2_{12}}(q_{2_{11}}(A_{2x} + S_{2x}) + (q_{2_{21}}(A_{2y} + S_{2y})) - q_{2_{21}}(q_{2_{12}}(A_{2x} + S_{2x}) + q_{2_{22}}(A_{2y} + S_{2y}))\right]$$

$$C_2 = -\left[q_{2_{22}}(q_{2_{11}}(A_{2x} + S_{2x}) + (q_{2_{21}}(A_{2y} + S_{2y})) - q_{2_{21}}(q_{2_{12}}(A_{2x} + S_{2x}) + q_{2_{22}}(A_{2y} + S_{2y}))\right]$$

$$D_2 = -\left[q_{2_{21}} S_{2x} + q_{2_{22}} S_{2y}\right]$$

$$E_2 = \left[q_{2_{11}} S_{2x} + q_{2_{21}} S_{2y}\right]$$

Tronc



Corps 3

Figure -4. *DCL du Tronc (Corps 3)*

$\sum \vec{F}$:

$$\vec{f}_3 - \vec{f}_4 = m_3 \ddot{\vec{c}}_3$$

Repère 4 :

$$Q_3^T \vec{f}_3 - \vec{f}_4 = m_3 \ddot{\vec{c}}_3$$

Ce que donne :

$$q_{3_{11}} f_{3x} + q_{3_{21}} f_{3y} - f_{4x} = m_3 \ddot{c}_{3x} \quad \text{(A-10)}$$

$$q_{3_{12}} f_{3x} + q_{3_{22}} f_{3y} - f_{4y} = m_3 \ddot{c}_{3y} \quad \text{(A-11)}$$

$\sum M_{c3}$:

$$-\vec{S}_3 \times \vec{f}_3 + \vec{S}_3 \times \vec{f}_4 + \vec{n}_3 - \vec{n}_4 = I_3 \dot{\vec{\omega}}_3 + \vec{\omega}_3 \times I_3 \vec{\omega}_3$$

Repère 4 :

$$-Q_3^T \vec{S}_3 \times Q_3^T \vec{f}_3 + Q_3^T \vec{S}_3 \times \vec{f}_4 + \vec{n}_3 - \vec{n}_4 = I_3 \dot{\vec{\omega}}_3 + \vec{\omega}_3 \times I_3 \vec{\omega}_3$$

Ce que donne :

$$B_3 f_{3x} + C_3 f_{3y} + n_3 + C_3 f_{4x} + D_3 f_{4y} + n_4 = I_{3zz} \dot{\omega}_{3z} \quad \text{(A-12)}$$

Où :

$$B_3 = -\left[q_{3_{12}} \left(q_{3_{11}} S_{3x} + q_{3_{21}} S_{3y}\right) - q_{3_{11}} \left(q_{3_{12}} S_{3x} + q_{3_{22}} S_{3y}\right)\right]$$

$$C_3 = -\left[q_{3_{22}} \left(q_{3_{11}} S_{3x} + q_{3_{21}} S_{3y}\right) - q_{3_{21}} \left(q_{3_{12}} S_{3x} + q_{3_{22}} S_{3y}\right)\right]$$

$$D_3 = -\left[q_{3_{21}} S_{3x} + q_{3_{22}} S_{3y}\right]$$

$$E_3 = \left[q_{3_{11}} S_{3x} + q_{3_{21}} S_{3y}\right]$$

Cuisse 2

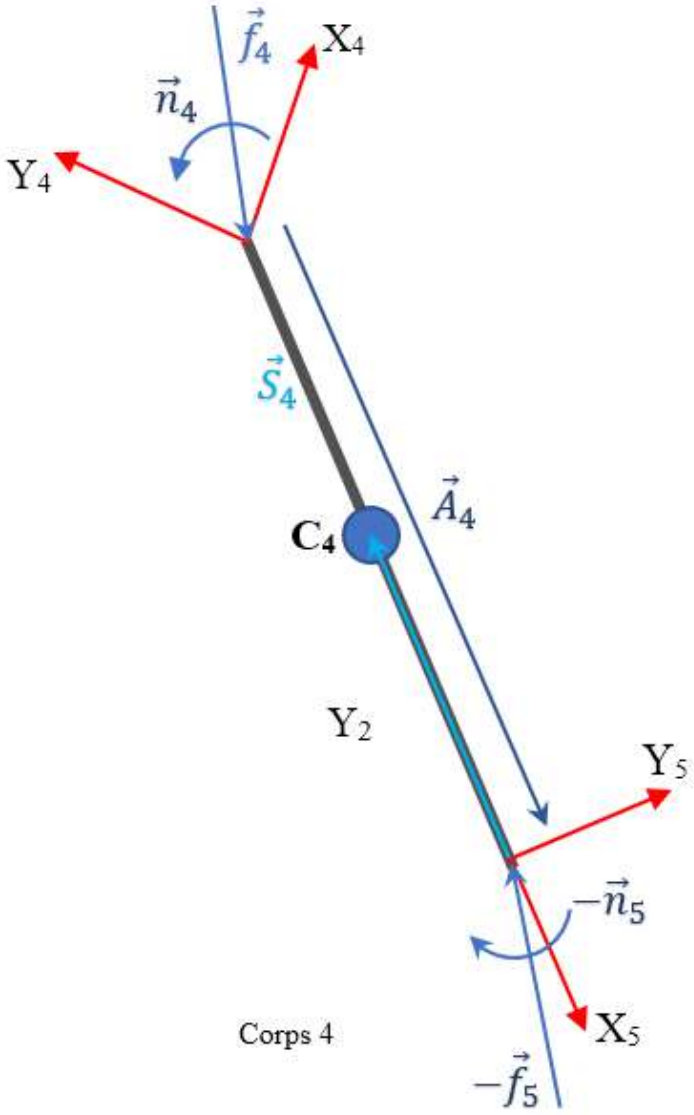


Figure -5. *DCL de la cuisse 2 (Corps 4)*

$\sum \vec{F}$::

$$\vec{f}_4 - \vec{f}_5 = m_4 \ddot{\vec{c}}_4$$

Repère 5 :

$$Q_4^T \vec{f}_4 - \vec{f}_5 = m_4 \ddot{\vec{c}}_4$$

Ce que donne :

$$q_{4_{11}} f_{4x} + q_{4_{21}} f_{4y} - f_{5x} = m_4 \ddot{c}_{4x} \qquad \text{(A-13)}$$

$$q_{4_{12}} f_{4x} + q_{4_{22}} f_{4y} - f_{3y} = m_4 \, \ddot{c}_{4y} \qquad \text{(A-14)}$$

$$-(\vec{A}_4 + \vec{S}_4) \times \vec{f}_4 + \vec{S}_4 \times \vec{f}_5 + \vec{n}_4 - \vec{n}_5 = I_4 \dot{\vec{\omega}}_4 + \vec{\omega}_4 \times I_4 \vec{\omega}_4$$

Repère 5 :

$$-Q_4^T(\vec{A}_4 + \vec{S}_4) \times Q_4^T \vec{f}_4 + Q_4^T \vec{S}_4 \times \vec{f}_5 + \vec{n}_4 - \vec{n}_5 = I_4 \dot{\vec{\omega}}_4 + \vec{\omega}_4 \times I_4 \vec{\omega}_4$$

Ce que donne :

$$B_4 f_{4x} + C_4 f_{4y} + n_4 + C_4 f_{5x} + D_4 f_{5y} + n_5 = I_{4zz} \dot{\omega}_{4z} \qquad \text{(A-15)}$$

Où :

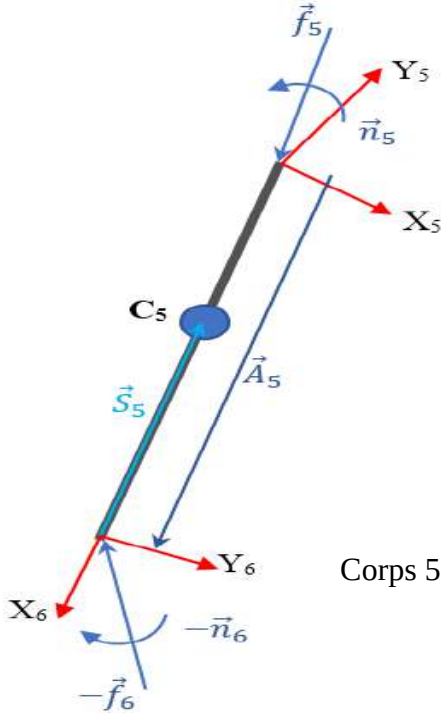
$$B_4 = -[q_{4_{12}} (q_{4_{11}} (A_{4x} + S_{4x}) + (q_{4_{21}} (A_{4y} + S_{4y})) - q_{4_{11}} (q_{4_{12}} (A_{4x} + S_{4x}) + (q_{4_{22}} (A_{4y} + S_{4y}))]$$

$$C_4 = -[q_{4_{22}} (q_{4_{11}} (A_{4x} + S_{4x}) + (q_{4_{21}} (A_{4y} + S_{4y})) - q_{4_{21}} (q_{4_{12}} (A_{4x} + S_{4x}) + (q_{4_{22}} (A_{4y} + S_{4y}))]$$

$$D_4 = -[q_{4_{21}} S_{4x} + q_{4_{22}} S_{4y}]$$

$$E_4 = [q_{4_{11}} S_{4x} + q_{4_{21}} S_{4y}]$$

<u>Jambe 2 :</u>



Corps 5

Figure -6. *DCL de la jambe 2 (Corps 5)*

$\sum \vec{F}$::

$$\vec{f}_5 - \vec{f}_6 = m_5\, \ddot{\vec{c}}_5$$

Repère 6 :

$$Q_5^T\, \vec{f}_5 - \vec{f}_6 = m_5\, \ddot{\vec{c}}_5$$

Ce qui donne :

$$q_{5_{11}} f_{5x} + q_{5_{21}} f_{5y} - f_{6x} = m_5\, \ddot{c}_{5x} \qquad \text{(A-16)}$$

$$q_{5_{12}} f_{5x} + q_{5_{22}} f_{5y} - f_{6y} = m_5\, \ddot{c}_{5y} \qquad \text{(A-17)}$$

$\sum M_{c5}$:

$$-(\vec{A}_5 + \vec{S}_5) \times \vec{f}_5 + \vec{S}_5 \times \vec{f}_6 + \vec{n}_5 - \vec{n}_6 = I_5 \dot{\vec{\omega}}_5 + \vec{\omega}_5 \times I_5 \vec{\omega}_5$$

Repère 6 :

$$-Q_5^T(\vec{A}_5 + \vec{S}_5) \times Q_5^T \vec{f}_5 + Q_5^T \vec{S}_5 \times \vec{f}_6 + \vec{n}_5 - \vec{n}_6 = I_5 \dot{\vec{\omega}}_5 + \vec{\omega}_5 \times I_5 \vec{\omega}_5$$

Ce qui donne :

$$B_5 f_{5x} + C_5 f_{5y} + n_5 + C_5 f_{6x} + D_5 f_{6y} + n_6 = I_{5zz} \dot{\omega}_{5z} \qquad \text{(A-18)}$$

Où :

$B_5 = -[q_{5_{12}}\,(q_{5_{11}}(\,A_{5x} + S_{5x}) + (q_{5_{21}}(A_{5y} + S_{5y})) - q_{5_{11}}(q_{5_{12}}(\,A_{5x} + S_{5x}) + (q_{5_{22}}(A_{5y} + \,S_{5y}))]$

$C_5 = -\,[q_{5_{22}}(q_{5_{11}}(A_{5x} + S_{5x}) + (q_{5_{21}}(A_{5y} + \,S_{5y})) - q_{5_{21}}(q_{5_{12}}(\,A_{5x} + \,S_{5x}) + (\,q_{5_{22}}(\,A_{5y} + S_{5y}))]$

$$D_5 = -[q_{5_{21}}\, S_{5x} + \, q_{5_{22}}\, S_{5y}]$$

$$E_5 = \,[q_{5_{11}}\, S_{5x} + \, q_{5_{21}}\, S_{5y}]$$

<u>Pied 2 :</u>

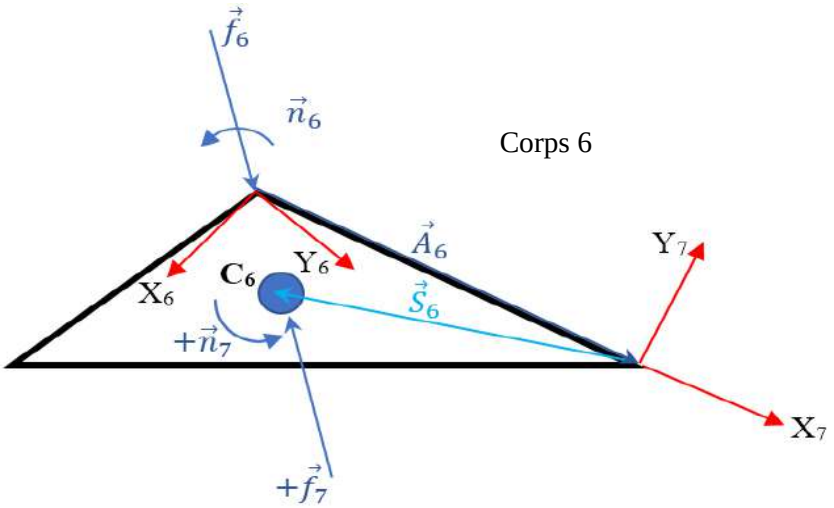


Figure -7. *DCL du pied 2 (Corps 6)*

$\sum \vec{F}$:

$$\vec{f}_6 + \vec{f}_7 = m_6\, \ddot{\vec{c}}_6$$

Repère 7 :

$$Q_6^T\, \vec{f}_6 + \vec{f}_7 = m_6\, \ddot{\vec{c}}_6$$

Ce qui donne :

$$q_{6_{11}} f_{6x} + q_{6_{21}} f_{6y} + f_{7x} = m_6\, \ddot{c}_{6x} \qquad \text{(A-19)}$$

$$q_{6_{12}} f_{6x} + q_{6_{22}} f_{6y} + f_{7y} = m_6\, \ddot{c}_{6y} \qquad \text{(A-20)}$$

$\sum M_{c6}$:

$$-\left(\vec{A}_6 + \vec{S}_6\right) \times \vec{f}_6 + \vec{n}_6 + \vec{n}_7 = I_6 \dot{\vec{\omega}}_6 + \vec{\omega}_6 \times I_6 \vec{\omega}_6$$

Repère 7 :

$$-Q_6^T (\vec{A}_6 + \vec{S}_6) \times Q_6^T \vec{f}_6 + Q_6^T \vec{S}_6 \times \vec{f}_6 + \vec{n}_6 + \vec{n}_7 = I_6 \dot{\vec{\omega}}_6 + \vec{\omega}_6 \times I_6 \vec{\omega}_6$$

Ce qui donne :

$$B_6 f_{6x} + C_6 f_{6y} + n_6 + C_6 f_{7x} + D_6 f_{7y} + n_7 = I_{6zz} \dot{\omega}_{6z} \qquad \text{(A-21)}$$

Où :

$B_6 = -[q_{6_{12}}(q_{6_{11}}(A_{6\mathrm{x}} + S_{6\mathrm{x}}) + (q_{6_{21}}(A_{6\mathrm{y}} + S_{6\mathrm{y}})) - q_{6_{11}}(q_{6_{12}}(A_{6\mathrm{x}} + S_{6\mathrm{x}}) + (q_{6_{22}}(A_{6\mathrm{y}} + S_{6\mathrm{y}}))]$

$C_6 = -[q_{6_{22}}(q_{6_{11}}(A_{6\mathrm{x}} + S_{6\mathrm{x}}) + (q_{6_{21}}(A_{6\mathrm{y}} + S_{6\mathrm{y}})) - q_{6_{21}}(q_{6_{12}}(A_{6\mathrm{x}} + S_{6\mathrm{x}}) + (q_{6_{22}}(A_{6\mathrm{y}} + S_{6\mathrm{y}}))]$

$$D_6 = 0$$

$$E_6 = 0$$

Avec les équations A-1 à A-21, on obtient le système matriciel suivant :

$$L\, \vec{F} = \vec{R}$$

Où :

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{22} & L_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{33} & L_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{44} & L_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_{55} & L_{56} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{66} & L_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{77} & L_{78} \end{bmatrix}$$

Avec 0 représentant une matrice nulle de dimension 3×3 et avec :

$$L_{11}=\begin{bmatrix} q_{0_{11}} & q_{0_{21}} & 0 \\ q_{0_{12}} & q_{0_{22}} & 0 \\ B_0 & C_0 & 1 \end{bmatrix}, L_{12}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ D_0 & E_0 & -1 \end{bmatrix}, L_{22}=\begin{bmatrix} q_{1_{11}} & q_{1_{21}} & 0 \\ q_{1_{12}} & q_{1_{22}} & 0 \\ B_1 & C_1 & 1 \end{bmatrix}, L_{23}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ D_1 & E_1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L_{33}=\begin{bmatrix} q_{2_{11}} & q_{2_{21}} & 0 \\ q_{2_{12}} & q_{2_{22}} & 0 \\ B_2 & C_2 & 1 \end{bmatrix}, L_{34}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ D_2 & E_2 & -1 \end{bmatrix}, L_{44}=\begin{bmatrix} q_{3_{11}} & q_{3_{21}} & 0 \\ q_{3_{12}} & q_{3_{22}} & 0 \\ B_3 & C_3 & 1 \end{bmatrix}, L_{45}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ D_3 & E_3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L_{55}=\begin{bmatrix} q_{4_{11}} & q_{4_{21}} & 0 \\ q_{4_{12}} & q_{4_{22}} & 0 \\ B_4 & C_4 & 1 \end{bmatrix}, L_{56}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ D_4 & E_4 & -1 \end{bmatrix}, L_{66}=\begin{bmatrix} q_{5_{11}} & q_{5_{21}} & 0 \\ q_{5_{12}} & q_{5_{22}} & 0 \\ B_5 & C_5 & 1 \end{bmatrix}, L_{67}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ D_5 & E_5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L_{77}=\begin{bmatrix} q_{6_{11}} & q_{6_{21}} & 0 \\ q_{6_{12}} & q_{6_{22}} & 0 \\ B_6 & C_6 & 1 \end{bmatrix}, L_{78}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ D_6 & E_6 & 1 \end{bmatrix},$$

Et où :

$$\vec{F}=\begin{bmatrix} f_{0x} \\ f_{0y} \\ n_0 \\ f_{1x} \\ f_{1y} \\ n_1 \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ n_2 \\ f_{3x} \\ f_{3y} \\ n_3 \\ f_{4x} \\ f_{4y} \\ n_4 \\ f_{5x} \\ f_{5y} \\ n_5 \\ f_{6x} \\ f_{6y} \\ n_6 \\ f_{7x} \\ f_{7y} \\ n_7 \end{bmatrix} \vec{R}=\begin{bmatrix} m_0\ddot{c}_{0x} \\ m_0\ddot{c}_{0y} \\ I_{0zz}\dot{\omega}_{0z} \\ m_1\ddot{c}_{1x} \\ m_1\ddot{c}_{1y} \\ I_{1zz}\dot{\omega}_{1z} \\ m_2\ddot{c}_{2x} \\ m_2\ddot{c}_{2y} \\ I_{2zz}\dot{\omega}_{2z} \\ m_3\ddot{c}_{3x} \\ m_3\ddot{c}_{3y} \\ I_{3zz}\dot{\omega}_{3z} \\ m_4\ddot{c}_{4x} \\ m_4\ddot{c}_{4y} \\ I_{4zz}\dot{\omega}_{4z} \\ m_5\ddot{c}_{5x} \\ m_5\ddot{c}_{5y} \\ I_{5zz}\dot{\omega}_{5z} \\ m_6\ddot{c}_{6x} \\ m_6\ddot{c}_{6y} \\ I_{6zz}\dot{\omega}_{6z} \end{bmatrix}$$