RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ YAHIA FARES DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du : DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématiques et Application

par

ZAROUAT Fadhila

SUR LES NOMBRES DE STIRLING GÉNÉRALISÉS

Soutenu publiquement le .... devant le jury composé de

Président :	RAHMANI MOURAD	$PROF$	USTHB
Examinatrice :	GUETTAI GHANIA	$M.C.B$	Université de Médéa
Examinateur :	SEBAOUI MADJID	$M.C.B$	Université de Médéa
Encadreur :	LAISSAOUI DIFFALAH	$M.C.A$	Université de Médéa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2020-2021

Table des matières

Introduction **i**

1 Définitions et simples propriétés **2**

1.1 Combinatoire élémentaire 2

1.2 Partition 2

1.3 Factorielle montante et factorielle descendante 3

1.4 Coefficients binomiaux 3

1.5 Généralisation des coefficients binomiaux 5

1.6 Fonction génératrice 6

1.7 Les nombres de Stirling de première espèce 7

1.8 Les nombres de Stirling de seconde espèce 11

1.9 Nombre de Bell 14

1.10 Polynôme de Bell 16

1.11 Nombre de Lah 17

1.12 Les nombres r-Stirling de première espèce et de seconde espèce 19

2 Les nombres de Stirling à poids et Stirling dégénérés **22**

2.1 Les nombres de Stirling à poids de première espèce 22

2.2 Les nombres de Stirling à poids de seconde espèce 24

2.3 Nombres de Stirling dégénérés 26

2.4 Les nombres de Stirling dégénérés de première espèce 27

2.5 Les nombres de Stirling dégénérés du seconde espèce 27

2.6 Polynôme de Bell complet 28

2.7 Les polynômes de Bell partiels (exponentiels) 28

3 Les nombres de Stirling généralisés **47**

3.1 Définition de base 47

3.2 Cas spéciaux 48

3.3 Relations d'orthogonalité 49

3.4 Fonction génératrice 49

3.5 Conséquences du théorème 54

3.6 Formules générales de type-Dobinski 55

3.7 Une sorte de développement asymptotique 57

Conclusion **60**

Dédicace

Je dédie ce travail :

A ma chère mère et à mon cher père qui n'ont jamais cessé
de me supporter, me soutenir et m'encourager durent mes années d'études.
Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma profonde gratitude et
reconnaissance.

A mes frères(Mohammed, Nassim et Hamza),
mes soeurs(Khadidja, Selma et Meriem)

et le petit Wassim et sa mamam
A tous ceux qui m'ont aidé-de près ou de loin
et ceux qui ont partagé avec moi les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail et qui m'ont
chaleureusement supporté et encouragé tout au long de mon parcours.

A tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de succès.

Merci !

Fadhila

Remerciements

Je remercie en premier lieu **ALLAH** pour la foi, la confiance et la volonté, il je a doté pour la réalisation de ce travail.

Ce travail est le fruit de la combinaison d'efforts de plusieurs personnes. Je remercie tout d'abord le tout puissant qui, par sa grâce m'a permis d'arriver au bout de mes efforts en me donnant la santé, la force, le courage et en me faisant entourer des merveilleuses personnes dont je tiens à remercier. Je remercie : mon directeur de mémoire :
Mr LAISSAOUI DIFFALAH pour son encadrement sans faille, son soutien moral, sa rigueur au travail, ses multiples conseils, ses orientations .
Je désire aussi remercier les professeurs de l'Université de YAHIA FARES de Médéa, qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaires.
C'est avec humilité que je tiens à remercier les honorables membres du jury, pour leurs présence, pour leur lecture attentive de ce mémoire.

Résumé

Ce mémoire de Master intitulé "**SUR LES NOMBRES DE STIRLING GÉNÉRALISES**" a pour but d'étudier les propriétés du nombres de Stirling de première espèce et de seconde espace, les nombres de Stirling à poids de première espèce et de seconde espèce, les nombres de Stirling dégénérés de première espèce et de seconde espèce, puis en termine par les nombres de Stirling généralisés ; plus précisément nous calculons les fonctions génératrices, les formes explicites, les relations de récurrences,$\cdots$ etc.

Abstract

This Master thesis entitled **"On GENERALIZED STIRLING NUMBERS"** aims to study the properties of the Stirling numbers of the first and second kind, the weighted Stirling numbers of the first and second kind, the numbers of degenerate Stirling of the first and second kind, then ending with the generalized Stirling numbers ; more carefully we calculate the generating functions, the explicit forms, the relations of recurrences,$\cdots$ect.

Notation

$\mathbb{C}$:= Corps des nombres complexes.

$\mathbb{R}$:=Corps des nombres réels .

$\mathbb{N}$:=L'ensemble des entiers naturels .

$\mathbb{N}^*$:=L'ensemble des entiers naturels non nuls .

$x^{\overline{n}}$:= La factorielle montante.

$x^{\underline{n}}$:= La factorielle descendante.

$s(n,k)$:= Nombres de Stirling (non-signé)de première espèce .

$s_r(n,k)$:= Nombres de r-Stirling (non-signé)de première espèce.

$S(n,k)$:= Nombres de Stirling de seconde espèce.

$(x|p)^{\overline{n}}$:= La factorielle montante généralisée .

$(x|p)^{\underline{n}}$:= La factorielle descendante généralisée .

$\binom{n}{k}$:= Le coefficient binomial .

ϕ_n := Nombre de Bell .

$\phi_n(x)$:= Polynôme de Bell .

$L(n,k)$:= Nombre de Lah .

$B_{n,k}$:= Polynôme de Bell dégénéré partielle.

$\phi_{n,\lambda}$:= Nombre de Bell dégénéré .

$S_\lambda(n,k)$:= Nombre de Stirling dégénéré de seconde espèce .

$s_\lambda(n,k)$:= Nombre de Stirling dégénéré de première espèce .

$\phi_{n,\lambda}(x)$:= Polynôme de Bell dégénéré.

INTRODUCTION

La combinatoire énumérative s'intéresse au dénombrement de certain objet combinatoire, de nombreux problèmes présents dans diverses applications ont des descriptions combinatoires plutôt simples. Un exemple de base d'un problème de combinatoire énumérative ; est la suite des nombres de Bell, qui compte le nombres de partition d'un ensemble à n éléments et forment une suite d'entiers 1, 1, 2, 5, 15,...

Plusieurs méthodes sont utilisés pour déterminer ces nombres à savoir ; la forme explicite, la relation de récurrence et la fonction génératrice. Ces méthodes sont un des moyens le plus puissant que l'on connaisse pour manipuler des suites infinies de nombres.

Dans cette mémoire intitule "**SUR LES NOMBRES DE STIRLING GÉNÉRALISÉS**", nous rassemblons plusieurs résultats récents sur des nouvelles classes des nombres et polynômes qui généralisent les nombres de Stirling de première espèce et de seconde espèce. Nous nous concentrons principalement sur les classes de nombres de Stirling dégénérées et la relation entre les nombres de Stirling dégénérés de première espèce et seconde espèce et les polynômes de Bell dégénérés.

Chapitre 1

Définitions et simples propriétés

Nous commençons par un chapitre Préliminaires et rappels introduisent les notions dont nous avons besoin. Nous rappelons les définitions des objets qu'on va manipuler tout au long de ce mémoire, à savoir : coefficients binomiaux, factorielle montante, factorielle descendante, partition des ensembles, fonctions génératrice exponentielle et ordinaire, nombres de Stirling du première et seconde espèce nous donnons leurs interprétations combinatoire et leurs propriétés combinatoires à savoir les relations de récurrences, leurs formules explicites ainsi leurs fonctions génératrices et nous donnons aussi la transformation de Stirling.
Ensuite, nous introduisons les nombres et polynômes de Bell, nombres de Lah et nous représentons quelques propriétés de ces nombres.

1.1 Combinatoire élémentaire

Commençons donc par les notions de bases de la combinatoire élémentaire.[8, 11, 12]

1.2 Partition

Définition 1.1 *Soit un ensemble E quelconque. Un ensemble $P = \{P_1, P_2, \cdots, P_i\}$ de sous-ensembles de E est une partition de E si :*

1. *Aucun élément de P n'est vide.*

2. *L'union des éléments de P est égale à E.*

3. *Les éléments de P sont deux à deux disjoints .*

Remarque *: Les éléments de P sont applés les parties de la partition.*

1.3 Factorielle montante et factorielle descendante

Soient x un nombre réel ou complexe et n un entier positif, on définit la factorielle montante de x d'ordre n, notée $x^{\overline{n}}$, par :

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)\cdots(x+n-1), \text{ si } n \geqslant 1 \text{ et } x^{\overline{0}} = 1$$

et la factorielle descendante de x d'ordre n, notée $x^{\underline{n}}$, par :

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)\cdots(x-n+1), \text{ si } n \geqslant 1 \text{et } x^{\underline{0}} = 1.$$

D'une manière équivalente, on appelle la factorielle montante généralisée de x d'ordre n et de coefficient p ($p \in \mathbb{N}$), le polynôme

$$(x|p)^{\overline{n}} = x(x+p)\cdots(x+(n-1)p), \quad n \geqslant 1 \text{ et } (x|p)^{\overline{0}} = 1.$$

et la factorielle descendante généralisée de x d'ordre n et de coefficient p ($p \in \mathbb{N}$), le polynôme

$$(x)_{n,p} = x(x-p)\cdots(x-(n-1)p), n \geqslant 1 \text{ et } (x)_{0,p} = 1.$$

La relation entre la factorielle montante et la factorielle descendante est donnée par :

$$x^{\overline{n}} = (-1)^n(-x)^{\underline{n}}.$$

Les deux polynômes $x^{\overline{n}}$ et $x^{\underline{n}}$, forment des bases du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, habituellement noté $\mathbb{R}[x]$.

1.4 Coefficients binomiaux

En combinatoire, le coefficient binomial noté $\binom{n}{k}$ est le nombre de façons de choisir un sous-ensemble à k éléments dans un ensemble à n éléments.

Exemple 1.1 Dans l'ensemble [4], il y a six façons de choisir deux éléments :

$$\{1,2\};\{1,3\};\{1,4\};\{2,3\};\{2,4\};\{3,4\}.$$

Par conséquent $\binom{4}{2} = 6$.

On peut aussi définir le coefficient binomial pour tous entier n et k par :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!},$$

avec $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$, et $\binom{n}{k} = 1$ pour $k = 0$ ou $k = n$.

Ces coefficients apparaissent dans le développement de la formule du binôme de Newton $(a+b)^n$, **(**dit binomial**)** où a et b sont des nombres réels ou complexes

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \tag{1.1}$$

et satisfont la relation de récurrence suivante :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, n \geqslant 1. \tag{1.2}$$

A partir de la relation de récurrence (1.2) nous pouvons construire le triangle de Pascal

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

TABLE 1.1-Les premier valeurs des nombres du triangle de Pascal

Propriétés : Les coefficients binomiaux satisfont pratiquement une infinité d'identités, on cite :

1. L'identité d'absorption

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}, k \neq 0.$$

2. La symétrie

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, n \geqslant k \geqslant 0.$$

3. La sommation du haut

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k}, \ \ avec \ n, k \geqslant 0.$$

4. La sommation parallèle

$$\binom{m+n+1}{n} = \sum_{n \geqslant j} \binom{m+j}{j}.$$

5. La transformation trinomiale

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.$$

6. La convolution de Vandermonde

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j}.$$

1.5 Généralisation des coefficients binomiaux

Une généralisation du coefficient binomial $\binom{n}{k}$ consiste à remplacer n par un nombre complexe x, et à définir $\binom{x}{k}$ en posant, $x \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$ par :

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!},$$

et ayant presque les même propriétés que $\binom{n}{k}$.

1.6 Fonction génératrice

Définition 1.2 *Les fonctions génératrices sont un outil algébriques qui permet de reformuler des problèmes de combinatoire afin de les transformer en problèmes de manipulation d'expressions algébriques.*
En particulier, en combinatoire, il s'agit souvent de déterminer le nombres d'objets de certains types qui sont de taille n ; ce qui donne lieu à une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ dont en cherche à déterminer le n-ième terme.

Fonction génératrice ordinaire

Soient n un entier naturel et $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes. On appelle fonction génératrice ordinaire de la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$, la fonction

$$A(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n.$$

L'addition et la multiplication de deux séries génératrices ordinaires sont définies par :

1) $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n + \sum_{n\geqslant 0} b_n x^n = \sum_{n\geqslant 0}(a_n + b_n)x^n.$

2) $\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n\right)\left(\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n\right) = \sum_{n\geqslant 0} c_n x^n,$

avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$

Fonction génératrice exponentielle

Soient n un entier naturel et $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes. On appelle fonction génératrice exponentielle de la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$la fonction

$$B(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

L'addition et la multiplication de deux séries génératrices exponentielles, sont définies par :

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geqslant 0} b_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0}(a_n + b_n)\frac{x^n}{n!}$$

et

$$\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geqslant 0} b_n \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n\geqslant 0} c_n \frac{x^n}{n!},$$

avec

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}.$$

1.7 Les nombres de Stirling de première espèce

Définition 1.3 *[20] Les nombres de Stirling de première espèce sont, par définition, les nombres entiers $s(n,k)$, $(n,k \in \mathbb{N},\ k \leqslant n)$ qui figurent dans le développement du $x^{\underline{n}}$.*
On a précisément pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k. \tag{1.3}$$

Exemple : On a $x^{\underline{3}}=x(x-1)(x-2)=x^3-3x^2+2x$; d'ou l'on tire :
$s(3,0)=0$, $s(3,1)=2$, $s(3,2)=-3$ et $s(3,3)=1$.
La première question qu'on se pose concerne le signe de $s(n,k)$ on a :

Proposition 1.4 *Pour tous $n,k \in \mathbb{N}$, avec $k \leqslant n$, le signe du nombre s(n,k) est $(-1)^{n+k}$.*

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$. En substituant dans (1.3), x par $-x$, on obtient :

$$-x^{\underline{n}} = \textstyle\sum_k^n s(n,k)(-x)^k.$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned}(-x)^{\underline{n}} &= -x(-x-1)(-x-2)...(-x-n+1)\\ &= (-1)^n x^{\overline{n}}.\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}(-1)^n x^{\overline{n}} &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k s(n,k)x^k\\ x^{\overline{n}} &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k} s(n,k)x^k.\end{aligned}$$

Comme les coefficients du polynôme $x^{\overline{n}}$ sont de toute évidence tous positifs, on en déduit que $(-1)^{n+k}s(n,k)x^k \geqslant 0$, $\forall\ n,k \in \mathbb{N}$, avec $k \leqslant n$.
Autrement dit, $|s(n,k)| = (-1)^{n-k}s(n,k)$. ∎

Propriétés

1. La relation de récurrence du nombres de Stirling de première espèce :

On a la proposition suivante :

Proposition 1.5 *Pour tous $n,k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leqslant n$, on a :*

$$s(n+1,k) = s(n,k-1) - ns(n,k). \tag{1.4}$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a d'une part :

$$\begin{aligned} x^{\underline{n+1}} &= \sum_{k=0}^{n+1} s(n+1,k)x^k \\ &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} s(n+1,k)x^k, \end{aligned}$$

car $s(n+1,0) = 0$ et $s(n+1,n+1) = 1$.

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} x^{\underline{n+1}} &= x(x-1)....(x-n+1)(x-n) \\ &= (x-n)x^{\underline{n}} \\ &= (x-n)\sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k \\ &= x\sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k - n\sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} ns(n,k)x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} s(n,k-1)x^k - \sum_{k=0}^{n} ns(n,k)x^k = x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(s(n,k-1) - ns(n,k))x^k. \end{aligned}$$

(car $s(n,0) = 0$ et $s(n,n) = 1$).

En identifiant les coefficients de x^k ($k \in \mathbb{N}^*$) des deux expressions que l'on a trouvé pour $x^{\underline{n+1}}$, on obtient :

$$s(n+1,k) = s(n,k-1) - ns(n,k).$$

On trouve le résultat souhaité. ■

Les premières valeurs de cette table s'obtiennent grâce à la récurrence (1.4)

n/k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1								
2	-1	1							
3	2	-3	1						
4	-6	11	-6	1					
5	24	-50	35	-10	1				
6	-120	274	-225	85	-15	1			
7	720	-1764	1624	-735	175	-21	1		
8	-5040	13068	-13132	6769	-1960	322	-28	1	
9	40320	-109584	118124	-67284	22449	-4536	546	-36	1

TABLE 1.2-Les premières valeurs des nombres de Stirling de première espèce (signés)

2. La fonction génératrice du nombres de Stirling de première espèce

Théorème 1.6 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\sum_{n=k}^{\infty} s(n,k)\frac{x^n}{n!} = \frac{\Big(ln(1+x)\Big)^k}{k!}. \tag{1.5}$$

Preuve. On détermine de deux façons différentes le développement (formel) de la fonction $f(x,y) = (1+x)^y$ en série de Taylor en y. D'une part, d'après la formule du binôme généralisée, on a :

$$\begin{aligned}(1+x)^y &= 1 + yx + \frac{y(y-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{y(y-1)(y-2)(y-3)...(y-n)}{n!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} y^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} s(n,k)y^k)\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} s(n,k)y^k\right]\frac{x^n}{n!}.\end{aligned}$$

soit

$$(1+x)^y = \sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{n=k}^{\infty} s(n,k)\frac{x^n}{n!})y^k, \tag{1.6}$$

d'autre part, d'après le développement de Taylor de la fonction exponentielle, on a :

$$(1+x)^y = exp(yln(1+x)) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(yln(1+x)^k)}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ln(1+x))^k}{k!}y^k. \tag{1.7}$$

L'identification des deux formules (1.6) et (1.7) entraîne (d'après l'unicité du développement de Taylor) que l'on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=k}^{\infty} s(n,k)\frac{x^n}{n!} = \frac{(ln(1+x))^k}{k!}.$$

■

3. Formule explicite pour les nombres de Stirling de première espèce

La formule(1.5) du théorème précédent permet d'en déduire une formule explicite très importante pour les nombres $s(n,k)$. On a le théorème suivant :

Théorème 1.7 *Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, on a :*

$$s(n,k) = (-1)^{n+k}\frac{n!}{k!}\sum_{n_1,n_2,\cdots,n_k\in\mathbb{N},n_1+\cdots+n_k=n}\left(\frac{1}{n_1 n_2\cdots n_k}\right).$$

Preuve. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\left(ln(1+x)\right)^k &= \left(\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{x^l}{l}\right)^k \\ &= \sum_{l1,\cdots,lk\in\mathbb{N}^*}(-1)^{(l1+1)+\cdots+(lk+1)}\left(\frac{x^{l1+\cdots+lk}}{l1\cdots lk}\right) \\ &= \sum_{n\geqslant k}\left(\sum_{l1\cdots lk\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{n+k}}{l1l2\cdots lk}\right)x^n.\end{aligned}$$

En comparant ceci avec (1.5), nous déduisons que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant k$:

$$s(n,k) = (-1)^{n+k}\frac{n!}{k!}\sum_{l_1\cdot l_k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{l_1\cdots l_k}.$$

■

1.8 Les nombres de Stirling de seconde espèce

Définition 1.8 *Les nombres de Stirling de seconde espèce sont, par définition, les nombres réels* $S(n,k)$ $(n,k \in \mathbb{N}, k \leqslant n)$ *qui figurent dans l'écriture de* x^n *comme combinison linéaire des polynôme* $x^{\underline{n}}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ *. On a précisément pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) x^{\underline{k}}.$$

Les nombres de Stirling de seconde espèce sont donc en quelque sorte les inverses des nombres de Stirling de première espèce .
Nous verrons plus loin que ces nombres de Stirling de seconde espèce sont tous des entiers positifs .

Exemple : On a :

$$x^3 = x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x = x^{\underline{1}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{3}}.$$

D'où l'on tire

$$S(3,0) = 0 \text{ , } S(3,1) = 1 \text{ , } S(3,2) = 3 \text{ et } S(3,3) = 1.$$

Proposition 1.9 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$
1. $S(n,0) = 0$ *et* $S(n,1) = S(n,n) = 1$.

Preuve. Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on a (par définition même) l'identité polynômiale :

$$x^n = S(n,0) + S(n,1)x + S(n,2)x(x-1) + \cdots + S(n,n)x(x-1)\cdots(x-n+1) \qquad (1.8)$$

1. En prenant $x = 0$ dans (1.8), on obtient immédiatement :

$$S(n,0) = 0.$$

Par suite, en substituant ceci dans, puis en divisant sur x, on obtient l'identité polynômiale :
$x^{n-1} = S(n,1) + S(n,2)(x-1) + S(n,3)(x-1)(x-2) + \cdots + S(n,n)(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$.
En prenant dans cette dernière x=1, on obtient :

$$S(n,1) = 1.$$

En fin, l'identification des coefficients dominants des polynômes du membre de gauche et du membre de droite de (1.8) donne directement :

$$S(n,n) = 1.$$

■

1. La relation de récurrence du nombres de Stirling de seconde espèce

Proposition 1.10 *Pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, avec $k \leqslant n-1$, on a :*

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k).$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on part de l'identité triviale :

$$x^n = x.x^{n-1}.$$

dans laquelle on substitue x^n et x^{n-1} par leurs expressions dans la base $(x^{\underline{k}})_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[x]$. On obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^{\underline{k}} &= x\sum_{k=0}^{n-1} S(n-1,k)x^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} S(n-1,k)(x.x^{\underline{k}}).\end{aligned}$$

Comme $x.x^{\underline{k}} = (x-k)x^{\underline{k}} + kx^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}$, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^{\underline{k}} &= \sum_{k=0}^{n-1} S(n-1,k)(x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} S(n-1,k)x^{\underline{k+1}} + \sum_{k=0}^{n-1} kS(n-1,k)x^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} S(n-1,k-1)x^{\underline{k}} + \sum_{k=1}^{n-1} kS(n-1,k)x^{\underline{k}};\end{aligned}$$

d'où

$\sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^{\underline{k}} = \sum_{k=1}^{n-1}(S(n-1,k-1)+kS(n-1,k))x^{\underline{k}} + S(n-1,n-1)x^{\underline{n}}$. En identifiant

les coefficients des $x^{\underline{k}}$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ dans les deux membres de cette dernière identité, on obtient la formule récurrente recherchée : pour tout $k \in \{1, \cdots, n-1\}$.

On a

$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$. ■

Remarque 1.11 *Les nombres réel $S(n,k)$ $(n,k \in \mathbb{N}, n \geqslant k)$, sont tous des entiers naturels .*

La relation de récurrence permet rapidement d'obtenir la table des premières valeurs de ces nombres.

n/k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	1								
3	1	3	1							
4	1	7	6	1						
5	1	15	25	10	1					
6	1	31	90	65	15	1				
7	1	63	301	350	140	21	1			
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
10	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

Table 1.3-Les premières valeurs des nombres de Stirling de seconde espèce

2. La fonction génératrice exponentielle du nombres de Stirling de seconde espèce

Définition 1.12 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :*

la fonction génératrice exponentielle de Stirling de seconde espèce défini par :

$$\sum_{n \geqslant k} S(n,k)\frac{x^n}{n!} = \frac{(exp(x)-1)^k}{k!}.$$

3. La formule explicite du nombres de Stirling de seconde espèce

Théorème 1.13 *Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, on a :*

$$S(n,k) = \frac{n!}{k!} \sum_{n_1, n_2, \cdots, n_k \in \mathbb{N}*} \frac{1}{n_1! n_2! \cdots n_k!}.$$

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n. \tag{1.9}$$

Preuve. Soit $(n,k)\in\mathbb{N}^2$, tel que $n\geqslant k$; d'aprés la formule de binôme de Newton on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}S(n,k)\frac{z^n}{n!}=\frac{1}{k!}(e^x-1)^k&=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i(e^x)^{k-i}\\
&=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i e^{(k-i)x}\\
&=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((k-i)x)^n}{n!}\\
&=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n\frac{x^n}{n!}\right)\\
&=\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\left((-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n\frac{x^n}{n!}\right)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n\right\}\frac{x^n}{n!},
\end{aligned}$$

en comparant les deux côtés on trouve :

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n.$$

On trouve le résultat souhaité . ■

1.9 Nombre de Bell

Définition 1.14 *Le nombre de Bell ϕ_n est le nombre de toutes les partitions d'un ensemble à n éléments et encore, ils sont définis comme étant la somme des nombres de Stirling de seconde espèce*

$$\phi_n=\sum_{k=0}^{n}S(n,k).$$

Exemple : *Soit* $A = \{a, b, c\}$.

L'ensemble A peut être partitionner de 5 manières distinctes :

$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$

$\{\{a\}, \{b, c\}\}$

$\{\{b\}, \{a, c\}\}$

$\{\{c\}, \{a, b\}\}$

$\{\{a, b, c\}\}$

Donc : $\phi_3 = 5$.

1.9.1 Fonction génératrice

Les fonctions génératrices ordinaire et exponentielle des nombres de Bell sont donnés respectivement par :

La fonction génératrice ordinaire :

$$\sum_{n\geqslant 0} \phi_n x^n = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(1-x)\cdots(1-nx)}.$$

La fonction génératrice exponentielle :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \frac{x^n}{n!} = exp(e^x - 1).$$

1.9.2 Formule de Dobinski

On a la formule Dobinski suivante : $\phi_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}, n \geqslant 0.$

1.9.3 Formule explicite

Les nombres de Bell ϕ_n *admettent la formule explicite suivante :*

$$\phi_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

1.9.4 La relation de récurrence

Les nombres de Bell admettent la relation de récurrence suivante :

$$\phi_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi_k, \;\; n \geqslant 0, \;\; \phi_0 = 1.$$

D'aprés la relation de récurrence on peut calculer les premières nombres de Bell :

ϕ_0	*1*
ϕ_1	*1*
ϕ_2	*2*
ϕ_3	*5*
ϕ_4	*15*
ϕ_5	*52*
ϕ_6	*203*
ϕ_7	*877*

TABLE 1.4 - Les premiers nombres de Bell

1.10 Polynôme de Bell

Définition 1.15 *Les polynômes de Bell $\phi_n(x)$, appelés aussi les polynômes exponentiels sont définis par :*

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) x^k.$$

Les premiers polynômes de Bell, sont :

$$\phi_0(x) = 1.$$
$$\phi_1(x) = x.$$
$$\phi_2(x) = x + x^2.$$
$$\phi_3(x) = x + 3x^2 + x^3.$$
$$\phi_4(x) = x + 7x^2 + 6x^3 + x^4.$$

Fonction génératrice : La fonction génératrice exponentielle pour ces polynômes est la suivante :

$$\sum_{n\geqslant 0} \phi_n(x) \frac{z^n}{n} = exp(x(e^z - 1)).$$

1.11 Nombre de Lah

Définition 1.16 *Les nombres de Lah comptent le nombre de façon dans un ensemble de n éléments peut être partitioné en k sous-ensembles ordonnés linéairement non vides, et notés souvent par L(n,k), nous adopterons la notation* $\left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor$.

Les nombres de Lah $\left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor$ permettent d'exprimer la factorielle montante en termes de factorielle descendante c'est-à-dire :

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor x^{\underline{k}}.$$

Nous pouvons déduire une relation entre les nombres de Lah et les nombres de Stirling :

$$\left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor = \sum_{i=k}^{n} s(n,i)S(i,k).$$

où s(n,k) et S(n,k) représentent, respectivement, les nombres de Stirling de première et seconde espèce :

On a :
$\left\lfloor \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\rfloor = n!$ et $\left\lfloor \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\rfloor = 1$.

Exemple : Soit $A = \{1, 2, 3\}$. Nous voulons calculer $L(3, 1)$ c'est-à-dire : nous cherchons le nombre de façons dont l'ensemble A peut-être partitionné en 1 sous ensembles ordonnés
$\{(1, 2, 3)\}; \{(1, 3, 2)\}; \{(2, 3, 1)\}; \{(3, 1, 2)\}; \{(3, 2, 1)\}$
donc :

$$L(3, 1) = 6 = 3!.$$

D'où :

$$L(n, 1) = n!.$$

Maintenant $L(3, 2)$ c'est-à-dire : nous cherchons le nombres de façons dont l'ensemble A peut-être partitionné en deux sous-ensembles ordonnés :
$\{(1)(2, 3)\}; \{(1), (3, 2)\}; \{(2), (1, 3)\}; \{(2), (3, 1)\}; \{(3), (2, 1)\}; \{(3), (1, 2)\}$
donc :

$$L(3, 2) = 6.$$

pour L(3,3) c'est à dire :

nous cherchons le nombres de façons dont l'ensemble A peut-être partitionné en trois sous-ensembles ordonnés : $\{(1),(2),(3)\}$

donc :

$$L(3,3) = 1.$$

D'où

$L(n,n) = 1.$

Fonction génératrice exponentielle : La fonction génératrice exponentielle associées aux nombres de Lah est donnée par :

$$\sum_{n \geqslant k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k.$$

Relation de récurrence : La forme de Lah ont une relation de récurrence triangulaire d'ordre deux :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n+k-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}.$$

Pour $k = 1, 2, \cdots, n;\ \ n = 1, 2, \cdots$

Les premiers nombres de Lah :

n/k	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	2	1				
3	6	6	1			
4	24	36	12	1		
5	120	240	120	20	1	
6	720	1800	1200	300	30	1

Table 1.5-les premiers nombres de Lah.

La forme Explicite

La forme explicite associés aux nombres de Lah est donnée par :

$$L(n,k) = \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}.$$

1.12 Les nombres r-Stirling de première espèce et de seconde espèce

Les nombres r-Stirling représentent une certaine généralisation des nombres de Stirling classiques.
Carlitz a étudie ces nombres sous le nom de ”Weighted Stirling numbers .” Koutras sous le nom de ”nom-central Stirling numbers ”et Broder les a aussi étudié aussi et leurs a donné le non ”r-Stirling numbers”[2].

1.12.1 Les nombres r-Stirling de première espèce

Les nombres r-Stirling de première espèce notés par : s(n+r, k+r) qui comptent le nombre de permutations de l'ensemble $[n]$ en k cycles(Un cycle de longueur k ($k \geqslant 2$)est une permutation $\gamma(\neq \varepsilon)$ dont les éléments mobiles(c'est-a-dire non fixés par γ), avec les r premiers éléments sont dans des cycles distincts. Analytiquement, ces nombres sont définis par la fonction génératrice exponentielle suivante :

$$\sum_{n\geqslant k} s(n+r,k+r)\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}\frac{(ln(1+x))^k}{(1+x)^r}$$

et algébriquement ce sont les coefficients dans le changement de base

$$(x+r)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n+r,k+r)x^k.$$

Pour r=0, on trouve les nombres de Stirling de première espèce s(n,k).

1.12.2 Les nombres r-Stirling de seconde espèce

Notée S(n+r, k+r), en combinatoire ces nombres sont les nombres de partitions de l'ensemble $[n]$ en k sous ensembles (k blocs) non vide, tels que les r premiers éléments sont dans sous-ensembles (blocs) distincts. Les nombres de r-Stirling de seconde espèce apparaisent aussi comme coefficients du monôme

$$(x+r)^n = \sum_{k=0}^{n} S(n+r,k+r)x^{\underline{k}}.$$

En particulier pour r=0 ou r=1, on retrouve les nombres de Stirling de seconde espèce classiques.

Exemple. L'ensemble $[4] = \{1, 2, 3, 4\}$ possède 5 partitions en trois blocs non vide ; tels que les deux premiers éléments 1 et 2, sont dans des blocs différents .

Les partitions sont

$$\{1\}\{2,3\}\{4\}; \{1\}\{3,4\}\{2\}; \{1\}\{2,4\}\{3\}; \{2\}\{1,3\}\{4\}; \{2\}\{1,4\}\{3\}.$$

Par conséquent, $S(4+2, 3+2) = 5$.

Propriétés

1. La relation de récurrence : Les nombres r-Stirling de seconde espèce vérifient la relation de récurrence suivante :

$$S(n,k)_r = kS(n-1,k)_r + S(n-1,k-1)_r, \; n > r.$$

On donne dans les tables suivants les premières valeurs de ces nombres pour $r = 2$ et $r = 3$:

n/k	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1							
3	2	1						
4	4	5	1					
5	8	19	9	1				
6	16	65	55	14	1			
7	32	211	285	125	20	1		
8	64	655	1351	910	245	27	1	
9	128	2059	6069	5901	2380	434	35	1

TABLE 1.4 - Les premières valeurs des nombres 2-Stirling de seconde espèce.

n/k	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1							
4	3	1						
5	9	7	1					
6	27	37	12	1				
7	81	175	97	18	1			
8	243	781	660	205	25	1		
9	729	3367	4081	1890	380	33	1	
10	2187	14197	23772	15421	4550	644	42	1

TABLE 1.5 - Les premières valeurs des nombres 3-Stirling de seconde espèce.

2. Formule explicite. La formule explicite pour les nombres r-Stirling est donnée par :

$$S(n+r,k+r) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(r+j)^n.$$

3. La fonction génératrices. Les fonctions génératrices ordinaire et exponentielle de la suite des nombres r-Stirling de seconde espèce sont données respectivement par :

La fonction génératrice ordinaire

$$\sum_{n\geqslant k} S(n+r,k+r)x^n = \frac{x^k}{(1-rx)(1-(r+1)x\cdots(1-(r+k)x)}, k \geqslant r \geqslant 0.$$

La fonction génératrice exponentielle

$$\sum_{n\geqslant k} S(n+r,k+r)\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}exp(rx)(exp(x)-1)^k.$$

La fonction génératrice double est donnée par :

$$\sum_{n\geqslant k} S(n+r,k+r)\frac{x^n}{n!}y^k = exp(y(exp(x)-1)+rx).$$

Chapitre 2

Les nombres de Stirling à poids et Stirling dégénérés

L'objet principal de ce chapitre est d'introduire les notions et les définitions fondamentales de nombres de Stirling à poids de première et de seconde espèce, puis les nombres de Stirling dégénérés de première et de seconde espèce et leurs propriétés, les nombres et les polynômes de Bell dégénérée. Ensuite en donne les relations entre eux.
Pour plus de détails sur cet chapitre consulter [13, 3, 22, 21, 17, 25].

2.1 Les nombres de Stirling à poids de première espèce

Définition 2.1 *Les nombres de Stirling à poids de première espèce notés $T_n^k(x)$, sont définis par la fonction génératrice suivante :*

$$\sum_{n=k}^{\infty} T_n^k(x)\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!}\frac{(ln(1+z))^k}{(1+z)^x}. \tag{2.1}$$

Théorème 2.2 *La forme explicite du nombres de Stirling à poids de première espèce donnée par :*

$$T_n^k(x) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}s(j,k)x^{\overline{n-j}}.$$

Preuve. On utilisons la fonction génératrice (2.1) pour trouver la forme explicite :
on a :

$\frac{(\ln(1+x))^k}{k!} = \sum_{n\geqslant k} s(n,k)\frac{z^n}{n!}$.
et on utilisons le fait que $\binom{-x}{n} = \frac{(-x)^{\underline{n}}}{n!}$, on obtient :

$$\begin{aligned}(1+z)^{-x} &= \sum_{n\geqslant 0}\binom{-x}{n}z^n \\ &= \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-x)^{\underline{n}}}{n!}z^n \\ &= \sum_{n\geqslant 0}(-x)^{\underline{n}}\frac{z^n}{n!},\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{k!}\frac{(ln(1+x))^k}{(1+z)^x} &= \sum_{n\geqslant k} s(n,k)\frac{z^n}{n!}\sum_{n\geqslant 0}(-x)^{\underline{n}}\frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n\geqslant 0} s(n,k)\frac{z^n}{n!}\sum_{n\geqslant 0}(-x)^{\underline{n}}\frac{z^n}{n!},\end{aligned}$$

d'autre part on a :
$\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geqslant 0} b_n\frac{z^n}{n!}\right) = \sum_{n\geqslant 0} c_n\frac{z^n}{n!}$,
avec :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k b_{n-k},$$

alors :
$\sum_{n\geqslant 0} s(n,k)\frac{z^n}{n!}\sum_{n\geqslant 0}(-x)^{\underline{n}}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}s(n,k)x^{\overline{n-k}}\frac{z^n}{n!}$,
alors :
$T_n^k(x) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{n-j}\binom{n}{k}s(n,k)x^{\overline{n-j}}$. ∎

2.1.1 La relation de récurrence de Stirling à poids de première espèce

Théorème 2.3 *La relation de récurrence de Stirling à poids de première espèce s'écrit sous la forme :*

$$T_{n+1}^{(k)}(x) = T_n^{(k-1)}(x+1) - xT_n^k(x+1).$$

Preuve. On utilisons la dérivée de la fonction génératrice exponentielle (2.1), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=k}^{\infty} T_n^k(x)\frac{z^n}{n!}\right) &= \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{k!}\frac{(ln(1+z))^k}{(1+z)^x}\right)\\ &= \frac{(ln(1+z))^{k-1}}{(k-1)!}\frac{1}{(1+z)^{x+1}} + \frac{(ln(1+z))^k}{k!}\left(\frac{-x}{(1+z)^{x+1}}\right)\\ &= \sum_{n\geqslant 0} T_{n-1}^{(k-1)}(x+1)\frac{z^n}{n!} - x\sum_{n\geqslant 0} T_n^{(k)}(x+1)\frac{z^n}{n!}.\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left(\sum_{n\geqslant k} T_n^k(x)\frac{z^n}{n!}\right) &= \sum_{n\geqslant k}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}T_n^k(x)\\ &= \sum_{n\geqslant k} T_{n+1}^k\frac{z^n}{n!}.\end{aligned}$$

Par comparaison on obtient le résultat. ∎

2.2 Les nombres de Stirling à poids de seconde espèce

Définition 2.4 *On définit les nombres de Stirling à poids de seconde espèce $S_n^k(x)$ par la fonction génératrice suivante :*

$$\sum_{n\geqslant k} S_n^k(x)\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!}exp(xz)(exp(z)-1)^k. \tag{2.2}$$

Théorème 2.5 *La forme explicite du nombres de Stirling de seconde espèce est donnée par :*

$$S_n^k(x) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(x+j)^n.$$

Preuve. On utilisons la fonction génératrice (2.2) pour trouver la forme explicite :

$$\sum_{n\geqslant k} S_n^k(x)\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!}exp(xz)(exp(z)-1)^k,$$

on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{k!}exp(xz)(exp(z)-1)^k &= \frac{1}{k!}e^{xz}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}e^{jz}\right)\\ &= \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}e^{xz}e^{jz}\\ &= \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}e^{(x+j)z}\\ &= \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\sum_{n\geqslant 0}(x+j)^n\frac{z^n}{n!}\\ &= \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}(x+j)^n\right)\frac{z^n}{n!}.\end{aligned}$$

d'ou :
$S_n^k(x) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(x+j)^n$. ■

2.2.1 La relation de récurrence de Stirling à poids de seconde espèce

Théorème 2.6 *La relation de récurrence de Stirling à poids de seconde espèce s'écrit sous la forme :*

$$S_{n+1}^k(x) = xS_n^k(x) + S_n^{k-1}(x+1). \tag{2.3}$$

Preuve. Soit :

$$\frac{d}{dz}\left(\sum_{n\geqslant 0}S_n^k(x)\frac{z^n}{n!}\right) = \frac{d}{dz}\left(exp(xz)\frac{(exp(z)-1)^k}{k!}\right),$$

d'une part on a :

$$\frac{d}{dz}\left(\sum_{n\geqslant 0}S_n^k(x)\frac{z^n}{n!}\right) = \sum_{n\geqslant 0}S_{n+1}^k(x)\frac{z^n}{n!},$$

d'autre part on a :

$$\frac{d}{dz}\left(e^{xz}\frac{(e^z-1)^k}{k!}\right) = xe^{xz}\frac{(e^z-1)^k}{k!} + e^{xz}\frac{(e^z-1)^{k-1}}{(k-1)!}e^z$$
$$= xe^{xz}\frac{(e^z-1)^k}{k!} + e^{z(x+1)}\frac{(e^z-1)^{k-1}}{(k-1)!},$$

d'où on obtient :
$\sum_{n\geqslant 0} S_{n+1}^k(x)\frac{z^n}{n!} = x\sum_{n\geqslant 0} S_n^k(x)\frac{z^n}{n!} + \sum_{n\geqslant 0} S_n^{k-1}(x+1)\frac{z^n}{n!}$,
donc : la relation de récurrence s'écrit sous la forme :

$$S_{n+1}^k(x) = xS_n^k(x) + S_n^{k-1}(x+1).$$

On trouve le résultat souhaité. ∎

2.3 Nombres de Stirling dégénérés

Factoriel dégénérée [13, 1] : La factorielle dégénérée est donnée par : $(x)_{n,\lambda} = x(x-\lambda)(x-2\lambda)\cdots(x-(n-1)\lambda)$, avec $(x)_{0,\lambda} = 1$.

La fonction génératrice exponentielle dégénérée : On définis la fonction génératrice exponentielle dégénéré par :

$$e_\lambda^x(z) = (1+\lambda z)^{\frac{x}{\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty}(x)_{n,\lambda}\frac{z^n}{n!} \tag{2.4}$$

Logarithme dégénéré :on définis logarithme dégénéré du nombres de Stirling par :

$$ln_\lambda(z) = \frac{z^\lambda - 1}{\lambda}, (\lambda \neq 0). \tag{2.5}$$

De (2.4) et (2.5) on note que :

$$e_\lambda(ln_\lambda(z) = z = ln_\lambda(e_\lambda(z)), \lim_{\lambda\to 0} ln_\lambda(z) = ln(z). \tag{2.6}$$

2.4 Les nombres de Stirling dégénérés de première espèce

Les Stirling dégénérés de premier espèce sont définis par :

$$(x)_{n,\lambda} = \sum_{k=0}^{n} s_\lambda(n,k)x^k$$

où :

$(x)_{n,\lambda}$ désigne la factorielle généralisé de x d'ordre k , avec $(x)_{0,\lambda} = 1$ et

$(x)_{k,\lambda} = x(x-\lambda)\cdots(x-(k-1)\lambda)$ pour $k \geqslant 1$

La fonction génératrice

Définition 2.7 *Pour tout $\lambda > 0$, on définis la fonction génératrice exponentielle dégénérée par :*

$$\frac{1}{k!}\Big(ln_\lambda(1+z)\Big)^k = \sum_{n=k}^{\infty} s_\lambda(n,k)\frac{z^n}{n!}.$$

2.5 Les nombres de Stirling dégénérés du seconde espèce

Les nombres de Stirling dégénérés du seconde espèce sont définis par :

$$(x)_{n,\lambda} = \sum_{k=0}^{n} S_\lambda(n,k)(x)_k.$$

avec la fonction génératrice exponentielle :

$$\frac{1}{k!}\Big(e_\lambda(z)-1\Big)^k = \frac{1}{k!}\Big((1+\lambda z)^{\frac{1}{\lambda}}-1\Big)^k = \sum_{n=k}^{\infty} S_\lambda(n,k)\frac{z^n}{n!}.$$

Théorème 2.8 *Les nombres de Stirling dégénérés du seconde espèce sont donnés explicitement par :*

$$S_\lambda(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(j)_{n,\lambda}.$$

2.6 Polynôme de Bell complet

Les polynômes de partition de Bell complets (exponentiels) sont définis par :

$$exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} x_m \frac{z^m}{m!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{z^n}{n!}, \tag{2.7}$$

Carlitz [3] a introduit les nombres dégénérés de Stirling et de nombreuses propriétés .

2.7 Les polynômes de Bell partiels (exponentiels)

Définition 2.9 *Les polynômes partiels (exponentiels) de partition de Bell $B_{n,k}(x_1, x_2, \cdots)$ dans un nombre infini de variables $x_j, (j \geqslant 1)$, ont été introduits par Bell comme un outil mathématique pour représenter la dérivée n-ieme de la fonction composite, Ils sont définis par leur fonction génératrice :*

$$\sum_{n=k}^{\infty} B_{n,k}(x_1, x_2, \cdots)\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\sum_{m=1}^{\infty} x_m \frac{z^m}{m!}\right)^k$$

et sont donnés explicitement par la formule :

$$B_{n,k}(x_1, x_2, \cdots) = \sum_{\pi(n,k)} \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!}(\frac{x_1}{1!})^{k_1}(\frac{x_2}{2!})^{k_2} \cdots (\frac{x_n}{n!})^{k_n},$$

où

$$\pi(n,k) = \left\{(k_1, \cdots, k_n) \in \mathbb{N}^{\kappa} : \sum_{i=1}^{n} k_i = k, \sum_{i=1}^{n} i k_i = n\right\}$$

Il est facile d'avoir les expressions suivantes :

$$B_{n,k}\Big(abx_1, ab^2x_2, \cdots, ab^n x_n\Big) = a^k b^n B_{n,k}\Big(x_1, x_2, \cdots, x_n\Big) \tag{2.8}$$

Il est bien connu que pour des choix appropriés des variables x_j , les polynômes de partition de Bell (exponentiels) partiels se réduisent à quelques séquences combinatoires spéciales [6]. Mentionnons les cas particuliers suivants :

$s(n,k) = B_{n,k}(0!, -1!, 2!, -3!, \cdots)$, *les nombres de Stirling de premier espèce (signé) ,*

$S(n,k) = B_{n,k}(1, 1, 1, \cdots)$, *les nombres de Stirling de seconde espèce ,*

$L(n,k) = B_{n,k}(1!, 2!, 3!, \cdots)$, *nombres de Lah (non signé).*

Lemme 2.10 *On a :*

$$B_{n,k}((\lambda)_1,(\lambda)_2,\cdots)=\lambda^n S_{\frac{1}{\lambda}}(n,k). \tag{2.9}$$

Preuve. On utilisons la fonction génératrice des nombres de Stirling dégénérés du seconde espèce on obtient :

$$\sum_{n=k}^{\infty} S_{\frac{1}{\lambda}}(n,k)\frac{z^n}{n!}=\frac{1}{k!}\bigg(\Big(1+\frac{1}{\lambda}z\Big)^{\lambda}-1\bigg)^k.$$

On utilisons le développement limites de $(1+\frac{1}{\lambda}z)^{\lambda}-1$ on obtient :

$$\begin{aligned}(1+\frac{1}{\lambda}z)^{\lambda}&=1+\lambda(\frac{1}{\lambda}z)+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}(\frac{1}{\lambda}z)^2+\cdots+\frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+1)}{m!}(\frac{1}{\lambda}z)^m\\&=1+\binom{\lambda}{1}(\frac{1}{\lambda}z)+\binom{\lambda}{2}(\frac{1}{\lambda}z)^2+\cdots+\binom{\lambda}{m}(\frac{1}{\lambda}z)^m\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{\lambda}{m}(\frac{1}{\lambda}z)^m.\end{aligned}$$

$(1+\frac{1}{\lambda}z)^{\lambda}-1=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{\lambda}{m}(\frac{1}{\lambda}z)^m-1=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^m}\binom{\lambda}{m}z^m$

Alors on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{\infty} S_{\frac{1}{\lambda}}(n,k)\frac{z^n}{n!}&=\frac{1}{k!}\bigg(\Big(1+\frac{1}{\lambda}z\Big)^{\lambda}-1\bigg)^k\\&=\frac{1}{k!}\bigg(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^m}\binom{\lambda}{m}z^m\bigg)^k\\&=\frac{1}{k!}\bigg(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\lambda)_m}{\lambda^m}\frac{z^m}{m!}\bigg)^k,\end{aligned}$$

avec : $\binom{\lambda}{m}=\dfrac{(\lambda)_m}{m!}$.

On utilisons les propriétés de $B_{n,k}$ et que : $\sum_{n=k}^{\infty}B_{n,k}(x_1,x_2,\cdots)\dfrac{z^n}{n!}=\dfrac{1}{k!}\bigg(\sum_{m=1}^{\infty}(x)_m\dfrac{z^m}{m!}\bigg)^k$, en obtient :

$$\begin{aligned}S_{\frac{1}{\lambda}}(n,k)&=B_{n,k}\bigg(\frac{(\lambda)_1}{\lambda},\frac{(\lambda)_2}{\lambda^2},\cdots,\frac{(\lambda)_n}{\lambda^n}\bigg)\\&=\frac{1}{\lambda^n}B_{n,k}\bigg((\lambda)_1,(\lambda)_2,\cdots,(\lambda)_n\bigg),\end{aligned}$$

donc :

$$\lambda^n S_{\frac{1}{\lambda}}(n,k) = B_{n,k}((\lambda)_1, (\lambda)_2, \cdots, (\lambda)_n), \tag{2.10}$$

alors on obtient le résultat. ∎

Comme conséquence de la lemme 2.10 , on a :

$$S_\lambda(n,k) = \lambda^n B_{n,k}\left(\left(\frac{1}{\lambda}\right)_1, \left(\frac{1}{\lambda}\right)_2, \cdots, \left(\frac{1}{\lambda}\right)_{n-k+1}\right)$$

et

$$L(n,k) = (-1)^n B_{n,k}\Big((-1)_1, (-1)_2, \cdots, (-1)_{n-k+1}\Big).$$

Lemme 2.11

$$B_n\left(\frac{x}{\lambda}(\lambda)_1, \frac{x}{\lambda}(\lambda)_2, \cdots, \frac{x}{\lambda}(\lambda)_n\right) = \lambda^n \phi_{n,\frac{1}{\lambda}}(\frac{x}{\lambda}).$$

Preuve. En utilisant le fait que : $B_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{k=0}^n B_{n,k}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-k+1})$ et $B_{n,k}(abx_1, ab^2x_2, \cdots, ab^n x^n) = a^k b^n B_{n,k}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, on a :

$$\begin{aligned} B_n\left(\frac{x}{\lambda}(\lambda)_1, \frac{x}{\lambda}(\lambda)_2, \cdots, \frac{x}{\lambda}(\lambda)_n\right) &= \sum_{k=0}^n B_{n,k}\left(\frac{x}{\lambda}(\lambda)_1, \frac{x}{\lambda}(\lambda)_2, \cdots, \frac{x}{\lambda}(\lambda)_n\right) \\ &= \sum_{k=0}^n B_{n,k}\Big((\lambda)_1, (\lambda)_2, \cdots, (\lambda)_n\Big)(\frac{x}{\lambda})^k. \end{aligned}$$

du lemme 2.10 nous obtenons :

$$\begin{aligned} B_n(\frac{x}{\lambda}(\lambda)_1, \frac{x}{\lambda}(\lambda)_2, \cdots, \frac{x}{\lambda}(\lambda)_n) &= \sum_{k=0}^n \lambda^n S_{\frac{1}{\lambda}}(n,k)(\frac{x}{\lambda})^k \\ &= \lambda^n \sum_{k=0}^n S_{\frac{1}{\lambda}}(n,k)(\frac{x}{\lambda})^k \end{aligned}$$

Maintenant , en utilisant $\phi_{n,\lambda}(x) = \sum_{k=0}^n S_\lambda(n,k)x^k$, nous obtenons le résultat. ∎

Théorème 2.12 *on a*

$$B_n(x(x)_1, x(x)_2, \cdots, x(x)_n) = \sum_{k=0}^n s(n,k)\phi_k(x)x^k.$$

Preuve. En utilisant les fonctions génératrices du nombres de Stirling du première espèce et du polynôme de Bell, on calculons la fonction génératrice du $\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\phi_k(x)x^k$ on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\phi_k(x)x^k\right)\frac{z^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{n}\phi_k(x)x^k\sum_{n=k}^{\infty}s(n,k)\frac{z^n}{n!}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\phi_k(x)\frac{1}{k!}(xln(1+z))^k\\ &= exp(x(e^{xln(1+z)}-1)\\ &= exp(x(e^{ln(1+z)^x}-1))\\ &= exp(x((1+z)^x-1)).\end{aligned}$$

Ainsi, en appliquant l'assertion (2.7), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\phi_k(x)x^k\right)\frac{z^n}{n!} = exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}x(x)_m\frac{z^m}{m!}\right).$$

La fonction génératrice de $B_n(x(x)_1, x(x)_2, \cdots, x(x)_n)$ est :

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x(x)_1, x(x)_2, \cdots, x(x)_n)\frac{z^n}{n!} = exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}x(x)_m\frac{z^m}{m!}\right).$$

D'où nous obtenons le résultat. ∎

Corollaire 1. Pour x non nul, on a

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\phi_k(x)x^k = x^n\phi_{n,\frac{1}{x}}(x).$$

Preuve. En posant $\lambda = x$ dans (2.10) et en multipliant les deux côtés par x^k, en additionnant l'expression résultante $k = 0, 1, \cdots, n$, nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{n}x^kB_{n,k}((x)_1,(x)_2,\cdots) = x^n\sum_{k=0}^{n}S_{\frac{1}{x}}(n,k)x^k,$$

d'une part on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} x^k B_{n,k}((x)_1,(x)_2,\cdots) &= \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x(x)_1,x(x)_2,\cdots)\\ &= B_n(x(x_1),x(x_2),\cdots)\\ &= \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\phi_k(x)x^k.\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$x^k \sum_{k=0}^{n} S_{\frac{1}{x}}(n,k)x^k = x^n \phi_{n,\frac{1}{x}},$$

d'où le résultat chercher. ■

Théorème 2.13 *On a*

$$S_\lambda(n,k) = B_{n,k}\Big((1)_{1,\lambda},(1)_{2,\lambda},\cdots,(1)_{n,\lambda}\Big)$$

et

$$\phi_{n,\lambda}(x) = B_n\Big(x(1)_{1,\lambda},x(1)_{2,\lambda},\cdots,x(1)_{n,\lambda}\Big).$$

Preuve. En utilisant la relation :

$$(1)_{n,\lambda} = \lambda^n \left(\frac{1}{\lambda}\right)_n.$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}(1)_{n,\lambda} &= 1(1-\lambda)(1-2\lambda)\cdots(1-(n-1)\lambda)\\ &= \Big(\lambda(\frac{1}{\lambda}-1)(\lambda(\frac{1}{\lambda}-2)\cdots(\lambda(\frac{1}{\lambda}-(n-1))\Big)\\ &= \lambda^{n-1}\Big((\frac{1}{\lambda}-1)(\frac{1}{\lambda}-2)\cdots(\frac{1}{\lambda}-(n-1)\Big)\\ &= \lambda^n(\frac{1}{\lambda})_n.\end{aligned}$$

On a

$$B_n\Big(x(1)_{1,\lambda},x(1)_{2,\lambda},\cdots,x(1)_{n,\lambda}\Big) = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}\left(x\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right)_1, x\lambda^2\left(\frac{1}{\lambda}\right)_2,\cdots,x\lambda^n\left(\frac{1}{\lambda}\right)_n\right).$$

Ainsi, d'après 2.10 et lemme 2.10, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
B_n\Big(x(1)_{1,\lambda}, x(1)_{2,\lambda}, \cdots, x(1)_{n,\lambda}\Big) &= \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}\Big(x\lambda\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)_1, x\lambda^2\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)_2, \cdots, x\lambda^n\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)_n\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} x^k B_{n,k}\Big(\lambda\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)_1, \lambda^2\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)_2, \cdots, \lambda^n\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)_n\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} x^k \lambda^n B_{n,k}((\frac{1}{\lambda})_1, (\frac{1}{\lambda})_2, \cdots, (\frac{1}{\lambda})_n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} x^k \lambda^n (\frac{1}{\lambda})^n S_\lambda(n,k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} x^k S_\lambda(n,k) \\
&= \phi_{n,\lambda}(x).
\end{aligned}$$

Alors :

$$B_n\Big(x(1)_{1,\lambda}, x(1)_{2,\lambda}, \cdots, x(1)_{n,\lambda}\Big) = \sum_{k=0}^{n} S_\lambda(n,k)x^k = \phi_{n,\lambda}(x).$$

On obtient le résultat. ∎

Corollaire 2. On a :

$$\textbf{1/}\ \ L(n,k) = B_{n,k}(\langle 1\rangle_1, \langle 1\rangle_2, \cdots)$$

et

$$\textbf{2/}\ \ L_n(x) = B_n(x\langle 1\rangle_1, x\langle 1\rangle_2, \cdots),$$

où $\langle x\rangle_n := (x)_{n,-1}$.

Preuve. 1/on a : $(x)_{n,\lambda} = x(x-\lambda)\cdots(x-(n-1)\lambda)$.

$$S_\lambda(n,k) = B_{n,k}((1)_{1,\lambda}, (1)_{2,\lambda}, \cdots, (1)_{n,\lambda}),$$

avec :

$$\begin{aligned}
(1)_{n,-1} &= 1(1-(-1))(1-2(-1))\cdots(1-(n-1)(-1)) \\
&= 1.2.3\cdots n \\
&= n!.
\end{aligned}$$

D'une part on a :

$$S_{-1}(n,k) = L(n,k).$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} S_{-1}(n,k) &= B_{n,k}((1)_{1,-1},(1)_{2,-1},\cdots,(1)_{n,-1}) \\ &= B_{n,k}((1)_{1,-1},(1)_{2,-1},\cdots,(1)_{n,-1}) \\ &= B_{n,k}(\langle 1\rangle_1,\langle 1\rangle_2,\cdots,\langle 1\rangle_n). \end{aligned}$$

Alors

$L(n,k) = B_{n,k}(\langle 1\rangle_1,\langle 1\rangle_2,\cdots,\langle 1\rangle_n).$

2/ on pose $\lambda = -1$, on a :

$$\begin{aligned} B_n(x(1)_{1,\lambda},x(1)_{2,\lambda},\cdots,x(1)_{n,\lambda}) &= B_n(x(1)_{1,-1},x(1)_{2,-1},\cdots,x(1)_{n,-1}) \\ &= B_n(x\langle 1\rangle_1,x\langle 1\rangle_2,\cdots,x\langle 1\rangle_n) \\ &= \phi_{n,-1} \\ &= L_n(x). \end{aligned}$$

Alors

$$L_n(x) = B_{n,k}(x\langle 1\rangle_1,x\langle 1\rangle_2,\cdots,x\langle 1\rangle_n).$$

On obtient le résultat. ■

Théorème 2.14 *[14] Les nombres de Stirling dégénérés du seconde espèce sont donnés explicitement par :*

$$S_\lambda(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(j)_{n,\lambda}.$$

Preuve. On a

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_\lambda(n,k)\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left((1+\lambda z)^{\frac{1}{\lambda}}-1\right)^k,$$

avec :

$$(1+\lambda z)^{\frac{1}{z}} = e_\lambda(z).$$

C'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_\lambda(n,k)\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e_\lambda(z)-1)^k.$$

On applique binôme de Newton on trouve :

$$\frac{1}{k!}(e_\lambda(z)-1)^k = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}(e_\lambda(z))^j,$$

avec :

$$(e_\lambda(z))^j = (1+\lambda z)^{\frac{j}{\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty}(j)_{n,\lambda}\frac{z^n}{n!}.$$

Alors on a trouve :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} S_\lambda(n,k)\frac{z^n}{n!} &= \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\sum_{n=0}^{\infty}(j)_{n,\lambda}\frac{z^n}{n!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{k!}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}(j)_{n,\lambda}\frac{z^n}{n!}.\end{aligned}$$

Donc :

$$S_\lambda(n,k) = \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{k!}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}(j)_{n,\lambda}.$$

D'où le résultat chercher. ■

La relation de récurrence de Stirling dégénérés de seconde espèce

Théorème 2.15 *Pour $n, k \geqslant 0$, les nombres de Stirling dégénérés du seconde espèce satisfont la relation de récurrence suivante :*

$$S_\lambda(n+1,k+1) = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i} (1)_{i+1,\lambda} S_\lambda(n-i,k)$$

et

$$S_\lambda(n+1,k+1) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n+1}{i+1} (1)_{i+1,\lambda} S_\lambda(n-i,k).$$

Preuve. D'aprés le Théorème 11.2 page 414 [25] on a :

$$B_{n+1,k+1} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i} x_{r+1} B_{n-i,k},$$

$$B_{n+1,k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n+1}{i+1} x_{i+1} B_{n-i,k},$$

d'autre part on a :

$$S_\lambda(n,k) = B_{n,k}\Big((1)_{1,\lambda}, (1)_{2,\lambda}, \cdots, (1)_{n,\lambda}\Big),$$

$$\begin{aligned} S_\lambda(n+1,k+1) &= B_{n+1,k+1}\Big((1)_{1,\lambda}, (1)_{2,\lambda}, \cdots, (1)_{n-i,\lambda}\Big) \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i} x_{i+1} B_{n-i,k}, \end{aligned}$$

on pose : $x_{i+1} = (1)_{i+1,\lambda}$ on obtient :

$$\begin{aligned} S_\lambda(n+1,k+1) &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i} (1)_{i+1,\lambda} B_{n-i,k} \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i} (1)_{i+1,\lambda} S_\lambda(n-i,k). \end{aligned}$$

Donc :

$$S_\lambda(n+1,k+1) = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i} (1)_{i+1,\lambda} S_\lambda(n-i,k),$$

maintenant on va montrer la deuxième relation de récurrence.

$$\begin{aligned} S_\lambda(n+1,k+1) &= B_{n+1,k+1}\Big((1)_{1,\lambda},(1)_{2,\lambda},\cdots,(1)_{n-i,\lambda}\Big),\\ &= \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n+1}{i+1}(1)_{i+1,\lambda}B_{n-i,k}\\ &= \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n+1}{i+1}(1)_{i+1,\lambda}S_\lambda(n-i,k). \end{aligned}$$

Donc :

$S_\lambda(n+1,k+1) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n+1}{i+1}(1)_{i+1,\lambda}S_\lambda(n-i,k)$. ■

En possant $\lambda=-1$, on obtient la relation de récurrence suivante pour les nombres de Lah

. **Corollaire :** On a

$$\textbf{1/}\ \ L(n+1,k+1) = \sum_{i=0}^{n-k}\binom{n}{i}(i+1)!L(n-i,k)$$

et

$$\textbf{2/}\ \ L(n+1,k+1) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n+1}{i+1}(i+1)!L(n-i,k).$$

Preuve. On a : $S_{-1}(n,k) = L(n,k)$.

1/

$$\begin{aligned} S_\lambda(n+1,k+1) &= \sum_{i=0}^{n-k}\binom{n}{i}(1)_{i+1,\lambda}S_\lambda(n-i,k).\\ S_{-1}(n+1,k+1) &= \sum_{i=0}^{n-k}\binom{n}{i}(1)_{i+1,-1}S_{-1}(n-i,k)\\ &= \sum_{i=0}^{n-k}\binom{n}{i}(i+1)!S_{-1}(n-i,k)\\ &= L(n+1,k+1), \end{aligned}$$

avec : $(1)_{i+1,-1} = (i+1)!$,

2/ On a

$$S_\lambda(n+1,k+1) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n+1}{i+1}(1)_{i+1,\lambda}S_\lambda(n-i,k),$$

$$S_{-1}(n+1,k+1) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n+1}{i+1}(1)_{i+1,-1}S_{-1}(n-i,k)$$

$$= \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n+1}{i+1}(i+1)!L_(n-i,k).$$

Alors :

$$L(n+1,k+1) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n+1}{i+1}(i+1)!L(n-i,k).$$

On obtient le résultat. ■

2.7.1 Les polynômes de Bell dégénérés

Les polynômes de Bell dégénérés $\phi_{n,\lambda}(x)$ sont définis par :

$$\phi_{n,\lambda}(x) = \sum_{k=0}^{n} S_\lambda(n,k)x^k.$$

La fonction génératrice : La fonction génératrice du polynôme dégénéré de Bell est définie par :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\phi_{n,\lambda}(x)\frac{z^n}{n!} = exp\left(x\left((1+\lambda z)^{\frac{1}{\lambda}}-1\right)\right). \tag{2.11}$$

La relation de récurrence :

Théorème 2.16 *Pour $n \geqslant 0$, les polynômes de Bell dégénérés sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\phi_{n+1,\lambda}(x) = x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1)_{k+1,\lambda}\phi_{n-k,\lambda}(x).$$

Preuve. On a :

$$\phi_{n,\lambda}(x) = B_n(x(1)_{1,\lambda}, x(1)_{2,\lambda}, \cdots, x(1)_{n,\lambda}),$$

d'après théorème 11.2 page 414[22] on trouve

$$\begin{aligned} B_{n+1}(x(1)_{1,\lambda}, x(1)_{2,\lambda}, \cdots, x(1)_{n+1,\lambda}) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x(1)_{k+1,\lambda} B_{n-k,k} \\ &= x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1)_{k+1,\lambda} B_{n-k,k} \\ &= x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1)_{k+1,\lambda} \phi_{n-k,\lambda}(x). \end{aligned}$$

Alors

$$\phi_{n+1,\lambda}(x) = x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1)_{k+1,\lambda} \phi_{n-k,\lambda}(x). \tag{2.12}$$

On obtient le résultat. ∎

Corollaire On a :

$$L_{n+1}(x) = x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k+1)! L_{n-k}(x).$$

Preuve. Pour $\lambda = -1$ dans (2.12) :

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \phi_{n,-1}(x), \\ L_{n+1}(x) &= \phi_{n+1,-1}(x) \\ &= x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1)_{k+1,-1} \phi_{n-k,-1}(x) \\ &= x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k+1)! L_{n-k}(x). \end{aligned}$$

Alors :

$$L_{n+1}(x) = x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k+1)! L_{n-k}(x).$$

On obtient le résultat souhaité. ∎

Maintenant on donne une formule de polynôme de Bell en fonction des nombres de Stirling de seconde espèce et les polynômes de Bell dégénérés.

Théorème 2.17 *Pour $n \geqslant 0$, on a :*

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) \phi_{k,\lambda}(x) \lambda^{n-k}.$$

Preuve. D'aprés la fonction génératrice des polynômes de Bell on remplace z par $\frac{z}{\lambda}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi_n(x)}{\lambda^n}\frac{z^n}{n!} &= exp\left(x(e^{\frac{z}{\lambda}}-1)\right)\\
&= exp\left(x\left(\left(1+\lambda(\frac{e^z-1}{\lambda})\right)^{\frac{1}{\lambda}}-1\right)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\phi_{k,\lambda}(x)\frac{1}{k!}\left(\frac{e^z-1}{\lambda}\right)^k\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\phi_{k,\lambda(x)}}{\lambda^k}\frac{1}{k!}(e^z-1)^k\\
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\phi_n(x)}{\lambda^n}\frac{z^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi_{k,\lambda}(x)}{\lambda^k}\sum_{n=k}^{\infty}S(n,k)\frac{z^n}{n!}\\
&= \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\phi_{k,\lambda}(x)}{\lambda^k}S(n,k)\right)\frac{z^n}{n!}.
\end{aligned}$$

En égalant les coefficients de $\frac{z^n}{n!}$ des deux côtés de l'équation ci-dessus. Nous obtenons le résultat souhaité .

■

Corollaire. On a

$$\phi_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}S(n,k)L_k(x).$$

Preuve. On a :

$$\phi_n(x)=\sum_{k=0}^{n}S(n,k)\phi_{k,\lambda}(x)\lambda^{n-k},$$

pour $\lambda=-1$, on a :

$$\begin{aligned}
\phi_n(x) &= \sum_{k=0}^{n}S(n,k)\phi_{k,-1}(x)(-1)^{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\phi_{k,-1}(x)S(n,k)\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}S(n,k)L_k(x).
\end{aligned}$$

Avec : $L_k(x)=\phi_{k,-1}$. ■

Maintenant, grâce à la transformée de Stirling [21], on obtient le théorème suivant :

Théorème 2.18 *Pour $n \geqslant 0$, on a :*

$$\phi_{n,\lambda}(x) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\phi_k(x)\lambda^{n-k}.$$

Preuve. En utilisant la fonction génératrice :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\phi_k(x)\right)\frac{z^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{\infty}\phi_k(x)\lambda^n\sum_{n=k}^{\infty}\frac{s(n,k)}{\lambda^k}\frac{z^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\phi_k(x)\frac{1}{k!}\left(\frac{ln(1+\lambda z)}{\lambda}\right)^k \\
&= exp\left(x(e^{\frac{ln(1+\lambda z)}{\lambda}}-1)\right) \\
&= exp\left(x(e^{(ln(1+\lambda z))^{\frac{1}{\lambda}}}-1)\right) \\
&= exp\left(x(1+\lambda z)^{\frac{1}{\lambda}}-1)\right) \\
&= exp\left(x(e_\lambda^z-1)\right)
\end{aligned}$$

et on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\phi_{n,\lambda}(x)\frac{z^n}{n!} = exp\left(x(e_\lambda^z-1)\right).$$

Alors $\phi_{n,\lambda}(x) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\phi_k(x)\lambda^{n-k}$.

On obtient le résultat souhaité. ∎

Notons que, Kargin et Corcino [17] ont obtenu la relation de récurrence pour les polynômes exponentiels généralisés, en particulier pour les polynômes dégénérés de Bell . Cependant, nous donnons ici une autre démonstration .

Corollaire 1. Pour $n \geqslant 0$, on a

$$\phi_{n+1,\lambda}(x) = (x-n\lambda)\phi_{n,\lambda}(x) + x\phi'_{n,\lambda}(x).$$

Preuve. Par la relation de récurrence pour les nombres de Stirling de première espèce

$$s(n+1,k) = s(n,k-1) - ns(n,k),$$

on a :

$$\begin{aligned}
\phi_{n,\lambda}(x) &= \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\phi_k(x)\lambda^{n-k} \\
\frac{\phi_{n,\lambda}(x)}{\lambda^n} &= \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\frac{\phi_k(x)}{\lambda^k} \\
\frac{\phi_{n+1,\lambda}(x)}{\lambda^{n+1}} &= \sum_{k=1}^{n+1} s(n+1,k)\frac{\phi_k(x)}{\lambda^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\frac{\phi_{k+1}(x)}{\lambda^{k+1}} - n\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\frac{\phi_k(x)}{\lambda^k}.
\end{aligned}$$

En utilisant la relation bien connue

$$\phi_{n+1}(x) = x\left(1+\frac{d}{dx}\right)\phi_n(x),$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\phi_{n+1,\lambda}(x)}{\lambda^{n+1}} &= x\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\frac{1}{\lambda^{k+1}}\left(1+\frac{d}{dx}\right)\phi_k(x) - n\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\frac{\phi_k(x)}{\lambda^k} \\
&= \frac{x}{\lambda}\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\frac{\phi_k(x)}{\lambda^k} + \frac{x}{\lambda}\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\frac{1}{\lambda^k}\phi_k(x)\right) - n\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\frac{\phi_k(x)}{\lambda^k} \\
&= \frac{x}{\lambda}\frac{\phi_{n,\lambda}(x)}{\lambda^n} + \frac{x}{\lambda}\frac{\phi'_{n,\lambda}(x)}{\lambda^n} - n\frac{\phi_{n,\lambda}(x)}{\lambda^n} \\
&= x\frac{\phi_{n,\lambda}(x)}{\lambda^{n+1}} + x\frac{\phi'_{n,\lambda}(x)}{\lambda^{n+1}} - n\frac{\phi_{n,\lambda}(x)}{\lambda^n} \\
&= \frac{(x-n\lambda)\phi_{n,\lambda}(x)}{\lambda^{n+1}} + x\frac{\phi'_{n,\lambda}(x)}{\lambda^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Alors $\phi_{n+1,\lambda}(x) = (x-n\lambda)\phi_{n,\lambda}(x) + x\phi'_{n,\lambda}(x)$. ∎

Corollaire 2. Pour $n \geqslant 0$, on a :

$$L_{n+1}(x) = (x+n)L_n(x) + xL'_n(x).$$

Preuve. On a :

$L_n(x) = \phi_{n,-1}(x)$, alors :

$$\begin{aligned}
L_{n+1}(x) &= \phi_{n+1,-1}(x) \\
&= (x-(-1)n)\phi_{n,-1}(x) + x\phi'_{n,-1}(x) \\
&= (x+n)\phi_{n,-1}(x) + x\phi'_{n,-1}(x) \\
&= (x+n)L_n(x) + xL'_n(x).
\end{aligned}$$

Nous obtenons le résultat. ■

Afin d'obtenir une formule explicite des polynômes dégénérés de Bell $\phi_{n,\lambda}(x)$ en termes de nombres de Stirling de seconde espèce $S(n,k)$, nous considérons la fonction génératrice exponentielle suivante :

$$(1+\lambda ln(1+z))^{\frac{1}{\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n,\lambda} \frac{z^n}{n!}.$$

Du théorème du binôme, on a :

$$\begin{aligned}(1+\lambda ln(1+z))^{\frac{1}{\lambda}} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda}\right) \frac{\lambda^m}{m!} (ln(1+z))^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (1)_{m,\lambda} \sum_{n=m}^{\infty} s(n,m) \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} (1)_{m,\lambda} s(n,m) \right) \frac{z^n}{n!}.\end{aligned}$$

Ensuite, on obtient :

$$\alpha_{n,\lambda} = \sum_{m=0}^{n} (1)_{m,\lambda} s(n,m)$$

et peut être calculé par la relation de récurrence suivante : si nous construisons une matrice infinie $(A_{n,m}(\lambda))_{n,m\geqslant 0}$ avec la séquence donnée par $A_{n,0}(\lambda) = (1)_{n,\lambda}$ et chaque entrée est donnée par :

$$A_{n,m+1}(\lambda) = A_{n+1,m}(\lambda) - mA_{n,m}(\lambda).$$

Alors la première ligne de la matrice est $A_{0,m}(\lambda) = \alpha_{m,\lambda}$.

Théorème 2.19 *Pour $n \geqslant 0$ on a :*

$$\phi_{n,\lambda}(x) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) B_k(x\alpha_{1,\lambda}, x\alpha_{2,\lambda}, ..., x\alpha_{k,\lambda}).$$

Preuve. En utilisant $\frac{1}{k!}(ln(1+z))^k = \sum_{n=k}^{\infty} s(n,k)\frac{z^n}{n!}$ et $exp\left(x\left((1+\lambda z)^{\frac{1}{\lambda}} - 1\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_{n,\lambda}(x)\frac{z^n}{n!}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}s(n,k)\phi_{k,\lambda}(x)\right)\frac{z^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\phi_{k,\lambda}(x)\left(\sum_{n=k}^{\infty}s(n,k)\right)\frac{z^n}{n!}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\phi_{k,\lambda}(x)\frac{1}{k!}(ln(1+z))^k$$
$$=exp\bigg(x\bigg((1+\lambda ln(1+z))^{\frac{1}{\lambda}}-1\bigg)\bigg).$$

Nous appliquons maintenant $(1+\lambda ln(1+z))^{\frac{1}{\lambda}}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{n,\lambda}\frac{z^n}{n!}$ et $exp\bigg(\sum_{m=1}^{\infty}x_m\frac{z^m}{m!}\bigg)=\sum_{n=0}^{\infty}B_{n,k}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{z^n}{n!}$, nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}s(n,k)\phi_{k,\lambda}(x)\right)\frac{z^n}{n!}=exp\bigg(x\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{m,\lambda}\frac{z^m}{m!}\bigg)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x\alpha_{1,\lambda},x\alpha_{2,\lambda},\cdots,x\alpha_{n,\lambda})\frac{z^n}{n!}.$$

En égalant les coefficients de $\frac{z^n}{n}$ des deux côtés de l'expression ci-dessus, nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{n}s(n,k)\phi_{k,\lambda}(x)=B_n(x\alpha_{1,\lambda},x\alpha_{2,\lambda},\cdots,x\alpha_{n,\lambda}).$$

Maintenant, au moyen de la transformée de Stirling, nous obtenons le résultat souhaité. ∎

Théorème 2.20 *Pour $n\geqslant 0$, on a :*

$$\phi_n(x)=\sum_{k=0}^{n}s_\lambda(n,k)B_k(x\phi_{1,\lambda},x\phi_{2,\lambda},\cdots,x\phi_{k,\lambda})$$

où $\phi_{n,\lambda}=\phi_{n,\lambda}(1)$ dénote les nombres de Bell dégénérés.

Preuve. En utilisant les fonctions génératrices des polynômes de Bell et des nombres de Stirling de seconde espèce dégénérés, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}S_\lambda(n,k)\phi_k(x)\right)\frac{z^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\phi_k(x)\sum_{n=k}^{\infty}S_\lambda(n,k)\frac{z^n}{n!}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\phi_k(x)\frac{1}{k!}((1+\lambda z)^{\frac{1}{\lambda}}-1)^k$$
$$=exp\bigg(x\bigg(e^{(1+\lambda z)^{\frac{1}{\lambda}-1}}-1\bigg)\bigg).$$

Ainsi, en appliquant l'assertion $exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} x_m \frac{z^m}{m!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{z^n}{n!}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} S_\lambda(n,k)\phi_k(x)\right)\frac{z^n}{n!} &= exp\left(x\sum_{m=1}^{\infty}\phi_{m,\lambda}\frac{z^m}{m!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x\phi_{1,\lambda}, x\phi_{2,\lambda}, \cdots, x\phi_{n,\lambda})\frac{z^n}{n!}.\end{aligned}$$

En comparant les coefficients de $\frac{z^n}{n!}$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} S_\lambda(n,k)\phi_k(x) = B_n(x\phi_{1,\lambda}, x\phi_{2,\lambda}, \cdots, x\phi_{n,\lambda}).$$

L'inversion de la dernière formule donne : $\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} s_\lambda(n,k)B_k(x\phi_{1,\lambda}, x\phi_{2,\lambda}, \cdots, x\phi_{k,\lambda})$. On obtient le résultat. ∎

Théorème 2.21 *Pour $n \geqslant 0$, on a :*

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S_\lambda(n,k)\lambda^k B_k\left(x\phi_{1,\frac{1}{\lambda}}\left(\frac{1}{\lambda}\right), x\phi_{2,\frac{1}{\lambda}}\left(\frac{1}{\lambda}\right), \cdots, x\phi_{n,\frac{1}{\lambda}}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right).$$

Preuve. En utilisant $exp(x(e^z-1)) = \sum_{n=0}^{\infty}\phi_n(x)\frac{z^n}{n!}$ et $\frac{1}{k!}\left(\frac{(1+z)^\lambda - 1}{\lambda}\right)^k = \sum_{n=k}^{\infty} s_\lambda(n,k)\frac{z^n}{n!}$, on trouve :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} s_\lambda(n,k)\phi_k(x)\right)\frac{z^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{\infty}\phi_k(x)\sum_{n=k}^{\infty} s_\lambda(n,k)\frac{z^n}{n!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\phi_k(x)\frac{1}{k!}\left(\frac{(1+z)^\lambda - 1}{\lambda}\right)^k\\ &= exp\left(x\left(e^{\frac{1}{\lambda}((1+z)^\lambda - 1)} - 1\right)\right).\end{aligned}$$

Nous utilisons le lemme 1.9, pour obtenir :

$$e^{\frac{1}{\lambda}((1+z)^\lambda - 1)} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\phi_{n,\frac{1}{\lambda}}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\frac{z^n}{n!}.$$

Maintenant, il est facile de voir que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}s_{\lambda}(n,k)\phi_{k}(x)\right)\frac{z^{n}}{n!} &= exp\left(x\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^{m}\phi_{m,\frac{1}{\lambda}}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\frac{z^{m}}{m!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}B_{n}\left(x\lambda\phi_{1,\frac{1}{\lambda}}\left(\frac{1}{\lambda}\right),x\lambda^{2}\phi_{2,\frac{1}{\lambda}}\left(\frac{1}{\lambda}\right),\cdots,x\lambda^{n}\phi_{n,\frac{1}{\lambda}}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)\frac{z^{n}}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n}B_{n}\left(x\phi_{1,\frac{1}{\lambda}}\left(\frac{1}{\lambda}\right),x\phi_{2,\frac{1}{\lambda}}\left(\frac{1}{\lambda}\right),\cdots,x\phi_{n,\frac{1}{\lambda}}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)\frac{z^{n}}{n!}.\end{aligned}$$

En comparant les coefficients $\frac{z^{n}}{n!}$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}s_{\lambda}(n,k)\phi_{k}(x)=\lambda^{n}B_{n}\left(x\phi_{1,\frac{1}{\lambda}}\left(\frac{1}{\lambda}\right),x\phi_{2,\frac{1}{\lambda}}\left(\frac{1}{\lambda}\right),\cdots,x\phi_{n,\frac{1}{\lambda}}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right).$$

Enfin, au moyen de la transformée de Stirling dégénérée, nous obtenons le résultat souhaité . ■

Chapitre 3

Les nombres de Stirling généralisés

L'objet principal de ce chapitre est d'introduire les notions et les définitions fondamentales de nombres de Stirling généralisés de première et de seconde espèce, leurs propriétés analytiques. Pour plus de détails sur cet chapitre consulter [16, 5, 15, 7, 9, 18, 19, 23, 22]

3.1 Définition de base

Notons $(z|\alpha)_n = z(z-\alpha)\cdots(z-n\alpha+\alpha)$ pour $n = 1, 2, \cdots$ et $(z|\alpha)_0 = 1$, où $(z|\alpha)_n$ est appelé la factorielle généralisée de z et en particulier on écrit :
$(z|1)_n = (z)_n$ avec $(z)_0 = 1$.
En généralisant l'idée impliquée dans les recherches précédentes dues à Carlitz, Haward, Tsylova et plusieurs autres, nous pouvons définir une paire de type Stirling $\{S^1, S^2\} = \{S^1(n,k), S^2(n,k)\} \equiv \{S(n,k;\alpha,\beta,r), S(n,k;\beta,\alpha,-r)\}$, par la relation inverse

$$(t|\alpha)_n = \sum_{k=0}^{n} S^1(n,k)(t-r|\beta)_k, \tag{3.1}$$

$$(t|\beta)_n = \sum_{k=0}^{n} S^2(n,k)(t+r|\alpha)_k, \tag{3.2}$$

où $n \in \mathbb{N}$ (ensemble d'entiers non négatifs) et les paramètres α, β et r sont des nombres réels ou complexes, avec $(\alpha,\beta,r) \neq (0,0,0)$.
Nous pouvons appeler $\{S^1, S^2\}$ une $\langle\alpha,\beta,r\rangle$-paire ou une $\langle\beta,\alpha,-r\rangle$-paire également, dans laquelle S^1 et S^2 peuvent être appelés le premier et le deuxième membre de la paire,

respectivement.

De toute évidence, la paire de nombres de Stirling classique $\{s(n,k), S(n,k)\}$ est la $\langle 1,0,0\rangle$ paire.

En effet, les deux types de nombres de Stirling peuvent être écrits sous la forme

$$s(n,k) = S(n,k;1,0,0),$$

$$S(n,k) = S(n,k;0,1,0).$$

En particulier, il est évident que les coefficients binomiaux sont donnés par

$$S(n,k;0,0,1) = \binom{n}{k}.$$

Notez que le nombre $\sigma(n,k)$ discuté et étendu par Doubilet et al.[12] et par Wagner [24] peut être écrit comme $k!S(n,k;0,1,0)$.

3.2 Cas spéciaux

Ici, plusieurs autres cas particuliers intéressants peuvent être brièvement mentionnés :

(i) Nombres de Lah

$$\frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}$$

et

$$(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1},$$

de la $\langle -1,1,0\rangle$ paire.

Le nombre de Stirling non signé $|s(n,k)|$ et $(-1)^{n-k}S(n,k)$ forment la $\langle -1,0,0\rangle$ paire.Voir une approche séthoérétique combinatoire donnée par Joni et al [16].

(ii) Les deux types de nombres de Stirling pondérés de Carlitz (ou les nombres de Stirling non centraux de Kontras) forment simplement la $\langle 1,0,-\lambda\rangle$ paire, où $\lambda \neq 0$ [5].

(iii) Les deux types de nombres de Stirling dégénérés de Carlitz forment la paire $\langle 1,\theta,0\rangle$, avec $\theta \neq 0$[7].

(iv) Les nombres de Stirling dégénérés de Haward forment le $\langle 1,\theta,-\lambda\rangle$ [15].

(v) Les nombres de Lah non centraux de Gould-Hopper sont essentiellement données par le premier membre de la $\langle 0,1,-a+b\rangle$ paire [9].

3.3 Relations d'orthogonalité

Il est clair que $\{(t|\alpha)_n\}$ et $\{(t-r|\beta)_n\}$ forment deux ensembles différents de bases pour l'espace linéaire des polynômes, de sorte qu'en substituant (3.1) en (3.2) (ou (3.2) en (3.1), on peut facilement obtenir les relations d'orthogonalité.

$$\sum_{k=n}^{m} S^1(m,k)S^2(k,n) = \sum_{k=n}^{m} S^2(m,k)S^1(k,n) = \delta_{m,n}, \tag{3.3}$$

$\delta_{m,n}$ étant le symbole de Kronecker, à savoir

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 \ \ si \ \ m = n, \\ 0 \ \ sinon. \end{cases}.$$

Par conséquent, à partir de (3.3) on obtient facilement les relations inverses pour $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} S^1(n,k)g_k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} S^2(n,k)f_k. \tag{3.4}$$

Bien que nous ayons défini deux sortes de nombres de type Stirling $S^1(n,k)$ et $S^2(n,k)$, généralement il suffit de considérer l'un d'eux, puisque les paramètres α, β et r sont entièrement arbitraires.

Nous étudierons les relations de récurrences. des fonctions génératrices, des formules de convolution et des propriétés de congruence, ainsi que des expansions asymptotiques pour les nombres $S(n,k;\alpha,\beta,r)$. De plus, la section 3.4 sera consacrée à l'établissement d'une sorte de formules de Dobinski étendues pour les polynômes exponentiels généralisés.

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k;\alpha,\beta,r)x^k, \tag{3.5}$$

ainsi que pour les nombres de Bell généralisés,

$$W_n = S_n(1) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k;\alpha,\beta,r). \tag{3.6}$$

3.4 Fonction génératrice

Par souci de concision, nous utiliserons toujours $S(n,k)$ pour désigner $S(n,k;\alpha,\beta,r)$, sauf s'il est nécessaire d'indiquer explicitement α, β et r.

En premier lieu, notez que la relation (3.1) implique ce qui suit :

$$S(0,0) = 1, S(n,n) = 1, S(1,0) = r.$$

De plus, entant que convention, nous supposons $S(n,k)=0$ pour $k>0$.

Théorème 3.1 *Pour les nombres S(n,k) défini par 3.1, nous avons la relation de récurrence suivant :*

$$S(n+1,k)=S(n,k-1)+(k\beta-n\alpha+r)S(n,k), \tag{3.7}$$

où $n\geqslant k\geqslant 1$. *En particulier, nous avons*

$$S(n,0)=(r|\alpha)_n. \tag{3.8}$$

Preuve. Conformément à (3.1), on peut écrire

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}S(n+1,k)(t-r|\beta)_k&=(t|\alpha)_n(t-n\alpha)\\&=\sum_{k=0}^{n}S(n,k)(t-r|\beta)_k\Big[(t-r-k\beta)+(k\beta-n\alpha+r)\Big]\\&=\sum_{k=0}^{n}S(n,k)(t-r|\beta)_{k+1}+\sum_{k=0}^{n}S(n,k)(k\beta-n\alpha+r)(t-r|\beta)_k\\&=\sum_{k=1}^{n+1}S(n,k-1)(t-r|\beta)_k+\sum_{k=0}^{n}S(n,k)(k\beta-n\alpha+r)(t-r|\beta)_k,\end{aligned}$$

ainsi, en identifiant les coefficients de $(t-r|\beta)_k\quad(k\geqslant 1)$ des première et dernière expression, on obtient (3.7), de plus, pour les termes correspondant à $k=0$ on trouve :

$$S(n+1,0)=S(n,0)(r-n\alpha), n=0,1,2,\cdots$$

par conséquent, nous obtenons :

$$S(n,0)=S(0,0)r(r-\alpha)\cdots(r-n\alpha+\alpha)=(r|\alpha)_n.$$

Pour trouver une fonction génératrice pour la suite $\mathbf{(}S(n,k)\mathbf{)}_n$ nous avons besoin de ce qui suit : ■

Lemme La fonction génératrice vectoriel de $\{S(n,k)\}$

$$y_k(t)=\sum_{n\geqslant 0}S(n,k)\frac{t^n}{n!}. \tag{3.9}$$

Satisfait l'équation différentielle :

$$(1+\alpha t)\frac{d}{dt}y_k(t)-(k\beta+r)y_k(t)=y_{k-1}(t), \tag{3.10}$$

où $k = 1, 2, 3, \cdots$ et $y_k(0) = 0$ pour $k \geqslant 0$ et

$$y_0(t) = (1 + \alpha t)^{\frac{r}{\alpha}}. \tag{3.11}$$

Preuve. La propriété $y_k(0) = 0, (k \geqslant 1)$ est évidente à partir de (3.9). Maintenant, en utilisant le théorème 3.1, nous avons :

$$\sum_{n\geqslant 0} S(n+1,k)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0}(k\beta - n\alpha + r)S(n,k)\frac{t^n}{n!} + \sum_{n\geqslant 0} S(n,k-1)\frac{t^n}{n!}.$$

Cela peut être réécrit sous la forme :

$$\sum_{n\geqslant 1} S(n,k)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \alpha\sum_{n\geqslant 1} S(n,k)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} - (k\beta + r)y_k(t) = y_{k-1}(t),$$

qui est identique à ce qui suit :

$$(1+\alpha t)\sum_{n\geqslant 1} S(n,k)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} - (k\beta + r)y_k(t) = y_{k-1}(t)$$

C'est exactement équivalent à l'équation (3.10).

De plus nous avons :

$$\begin{aligned} y_0(t) &= \sum_{n\geqslant 0} S(n,0)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0}(r|\alpha)_n\frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n\geqslant 0}\binom{\frac{r}{\alpha}}{n}(\alpha t)^n = (1+\alpha t)^{\frac{r}{\alpha}}. \end{aligned}$$

On obtient le résultat. ∎

Théorème 3.2 *Les nombres de Stirling généralisés* $S(n,k) \equiv S(n,k;\alpha,\beta,r)$ *avec* $\alpha, \beta \neq 0$, *définis par la fonction génératrice suivante :*

$$\frac{1}{k!}(1+\alpha t)^{\frac{r}{\alpha}}\left(\frac{(1+\alpha t)^{\frac{\beta}{\alpha}-1}}{\beta}\right)^k = \sum_{n\geqslant 0} S(n,k)\frac{t^n}{n!}. \tag{3.12}$$

Preuve. Soit la LHS de (3.2) désignée par $k!\phi_k(t)$. Notez que (3.10) a la solution unique $y_k(t)$ sous la condition $y_k(0) = 0\ (k \geqslant 1)$ et (3.11).

Il suffit donc de montrer que $\phi_k(t)$ est unique solution de (3.10) de sorte que $\phi_k(t) = y_k(t)$. Evidemment, $\phi_k(0) = 0$ pour $k \geqslant 1$ et $\phi_0(t) = (1+\alpha t)^{\frac{r}{\alpha}} = y_0(t)$ de plus en utilisant la différenciation et les calculs algébriques, on peut vérifier que :

$$(1+\alpha t)\frac{d}{dt}\phi_k(t) - (k\beta + r)\phi_k(t) = \phi_{k-1}, (k \geqslant 1).$$

On obtient le résultat. ■

Remarque 1. De même, il y a aussi une fonction génératrice pour le deuxième membre $S(n,k;\beta,\alpha,-r)$. On l'appelle une forme conjuguée de (3.12), qui peut être obtenue simplement en changeant (α,β,r) en $(\beta,\alpha;-r)$ savoir :

$$(1+\beta t)^{\frac{-r}{\beta}}\left(\frac{(1+\beta t)^{\frac{\alpha}{\beta}}-1}{\alpha}\right)^k = k!\sum_{n\geqslant 0} S(n,k;\alpha,\beta;-r)\frac{t^n}{n!}.$$

Remarque 2. La condition $\alpha\beta \neq 0$ est jugée nécessaire pour la LHS de (3.12) . Cependant, on peut encore laisser $\alpha \to 0+$ où $\beta \to 0+$ pour obtenir des limites appropriées. En fait, en prenant $r=0, \alpha=1$ et $\beta \to 0+$, nous trouvons facilement que (3.12)conduit à ce qui suit :

$$(ln(1+t))^k = k!\sum_{n\geqslant 0} S^1(n,k)\frac{t^n}{n!} \tag{3.13}$$

C'est précisément la fonction génératrice pour les nombres de Stirling classiques du première espèce . De même, en prenant $r=0$, $\beta=1$ et $\alpha \to 0+$, on voit que (3.12)donne la fonction génératrice pour les nombres de Stirling classiques du deuxième espèce :

$$(e^t-1)^k = k!\sum_{n\geqslant 0} S^2(n,k)\frac{t^n}{n!}. \tag{3.14}$$

Ainsi, en vue de la fonction génératrice de $S(n,k;\alpha,\beta,r)$ nombres, on peut aussi écrire la paire classique de nombres de Stirling sous la forme :

$$s(n,k) = S(n,k;1,0+,0).$$
$$S(n,k) = S(n,k;0+,1,0).$$

Brief, c'est la $\langle 1,0+,0\rangle$ paire.

Exemple 1. La paire de nombres de Stirling pondérés de Carlitz $\{S^1,S^2\} \equiv \{(-1)^{n+k}R_1(n,k,\lambda), R_2(n,k,\lambda)\}$ est la $\langle 1,0+,\lambda\rangle$ paire . Plus précisément, leurs fonctions génératrices sont donnés par :

$$\frac{1}{k!}(1+t)^{-\lambda}(ln(1+t))^k = \sum_{n\geqslant k}(-1)^{n+k}R_1(n,k,\lambda)\frac{t^n}{n!}. \tag{3.15}$$

$$\frac{1}{k!}e^{\lambda t}(e^t-1)^k = \sum_{n\geqslant k} R_2(n,k,\lambda)\frac{t^n}{n!}. \tag{3.16}$$

Comme on le voit facilement, (3.15) et (3.16) suivent de (12) en laissant $r = -\lambda, \alpha = 1, \beta \to 0+$; et en laissant $r = \lambda, \beta = 1, \alpha \to 0+$, respectivement .En d'autres termes, (3.15) et (3.16) sont impliqués par (3.12) et sa forme conjuguée, respectivement .

Exemple 2. La paire de nombres de Stirling dégénérés de Carlitz $\{(-1)^{k+1} \times S_1(n, k|\theta, S(n, k|\theta)\}$ est la $\langle 1, \theta, 0\rangle$ paire, leurs fonctions génératrices

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{(1+t)^\theta - 1}{\theta}\right)^k = \sum_{n\geqslant k}(-1)^{n+k}S_1(n, k|\theta)\frac{t^n}{n!} \tag{3.17}$$

$$\frac{1}{k!}((1+\theta t)^\mu - 1)^k = \sum_{n\geqslant k} S(n, k|\theta)\frac{t^n}{n!}, \tag{3.18}$$

avec $\theta\mu = 1$ sont également impliqués par (3.12) et sa forme conjuguée .

Exemples 3. La paire de nombres de Stirling dégénérés de Haward $\{S^1, S^2\} \equiv \{(-1)^{n+k}S_1(n, k, (\lambda+\theta)|\theta), S(n, k, \lambda|\theta)\}$ est précisément la $\langle 1, \theta, -\lambda\rangle$ paire.En fait, leurs fonction génératrice

$$(1+t)^{-\lambda}\left(\frac{(1+t)^\theta - 1}{\theta}\right)^k = k!\sum_{n\geqslant k}(-1)^{n+k}S_1(n, k, \lambda+\theta|\theta)\frac{t^n}{n!}. \tag{3.19}$$

$$(1+\theta t)^{\mu\lambda}((1+\theta t)^\mu - 1)^k = k!\sum_{n\geqslant k}(-1)^{n+k}S(n, k, \lambda|\theta)\frac{t^n}{n!}, \tag{3.20}$$

avec $\theta\mu = 1$ peut aussi se déduire de (3.12) et de sa forme conjuguée, avec $\alpha = 1, \beta = \theta$ et $r = -\lambda$,(cf).

Remarque 3. Selon (3.3), on voit que chaque paire de séquences de nombres données dans les exemples ci-dessus est orthogonale l'une à l'autre.Ils donnent aussi des relations en série inverse de la forme (3.4) .

Exemple 4. Les nombres C non centraux (également appelés nombres de Gould-Hopper)$C(n, k, s, r)$ sont définis par la relation(cf).

$$(st - sa)_n = \sum_{k=0}^{n} C(n, k, s, r)(t - b)_k, (r = b - a).$$

Remarquez que

$$(st - sa)_n = s^n\left(t - a\middle|\frac{1}{s}\right)_n,$$

de sorte que la relation ci-dessus est exactement équivalente à la suivante :

$$\left(t\middle|\frac{1}{s}\right)_n = \sum_{k=0}^{n} C(n, k, s, r)(t + a - b)_k \diagup s^n.$$

Cela montre que les nombres $C(n,k,s,r)/s^n$ appartiennent à la $\langle 1/s, 1, b-a\rangle$ paire. En fait, ils appartiennent au seconde type de nombres de Stirling dégénérés pondérés de Howard. Par conséquent, par le théorème (3.2) nous obtenons la fonction génératrice suivante :

$$(1+t/s)^{(a-b)s}((1+t/s)^s-1)^k = k!\sum_{n\geqslant 0} C(n,k,s,r)\frac{(t/s)^n}{n!}.$$

Cela peut être simplifié sous la forme

$$(1+t)^{rs}((1+t)^s-1)^k = k!\sum_{n\geqslant 0} C(n,k,s,r)\frac{t^n}{n!}. \tag{3.21}$$

En conséquence, il existe des nombres associés $C^*(n,k,s,r)$ appartenant au premier type de nombres de Stirling dégénérés pondérés de Howard, qui peuvent être générés par la forme conjuguée de (3.12).

$$(1+t)^{-r}[s(1+t)^{1/s}-s]^k = k!\sum_{n\geqslant 0} C^*-n,k,s,r)\frac{t^n}{n!}. \tag{3.22}$$

Certes, les deux types de nombres$C$ et C^* sont orthogonaux, et ils produisent les relations de série inverses

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k,s,r)g_k \Leftrightarrow g_n = \sum_{k=0}^{n} C^*(n,k,s,r)f_k.$$

3.5 Conséquences du théorème

Comme dans le cas classique, on obtient facilement la fonction génératrice double pour les nombres $S(n,k) \equiv S(n,k;\alpha,\beta,r)$ de (3.12) à savoir :

$$(1+\alpha t)^{r/\alpha} exp\left[((1+\alpha t)^{\beta/\alpha}-1)\frac{x}{\beta}\right] = \sum_{n,k\geqslant 0} S(n,k)\frac{t^n x^k}{n!}. \tag{3.23}$$

Notez que le RHS de (3.23) contient le polynôme exponentiel $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^k$ dans la somme. Nous pouvons reformuler (3.23) comme corollaire du théorème (3.21).

Corollaire 1. La séquence $\{S_n(x)\}$ est donnée par la fonction génératrice suivante :

$$(1+\alpha t)^{r/\alpha} exp\left[((1+\alpha t)^{\beta/\alpha}-1)\frac{x}{\beta}\right] = \sum_{n\geqslant 0} S_n(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{3.24}$$

En particulier, la fonction génératrice donne pour les nombres de Bell généralisés,

$$(1+\alpha t)^{r/\alpha} exp\Big[(1+\alpha t)^{\beta/\alpha}-1)/\beta\Big] = \sum_{n\geqslant 0} W_n \frac{t^n}{n!}, \tag{3.25}$$

où $W_n = S_n(1)$.

3.5.1 Formules de convolution

On note

$$S(n,k_i) = S(n,k;\alpha,\beta,r_i), (i=1,2).$$

Ensuite, en effectuant le produit des deux fonctions génératrices suivants :

$$(1+\alpha t)^{r_i/\alpha}\left[\frac{(1+\alpha t)^{\beta/\alpha}-1}{\beta}\right]_i^k = k_i! \sum_{n_i\geqslant 0} S(n_i,k_i)\frac{t_i^n}{n_i!}, (i=1,2),$$

et en identifiant les coefficients de t^m des deux côtés, on est facilement conduit à ce qui suit :

Corollaire 2. La formule de convolution

$$\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n} S(n,k_1,\alpha,\beta,r_1)S(m-n,k_2,\alpha,\beta,r_2) = \binom{k_1+k_2}{k_1} S(m,k_1+k_2;\alpha,\beta,r_1+r_2) \tag{3.26}$$

où k_1 et k_2 sont des nombres entiers non négatifs, et α,β, r_1 et r_2 peuvent être des nombres réels ou complexes.

A titre d'exemple simple, on peut prendre $k_1 = k_2 = 0$. Dans ce cas (3.26) implique la formule de Vandermonde,

$$\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}(r_1/\alpha)_n(r_2/\alpha)_{m-n} = (r_1+r_2/\alpha)_m. \tag{3.27}$$

3.6 Formules générales de type-Dobinski

Pour les nombres de Stirling de seconde espèce, $S(n,k) = S(n,k;0,1,0)$, les nombres de Bell attractifs et les polynômes exponentiels $\phi_n(x)$ sont définis, respectivement, par les

éléments suivants :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} S_2(n,k) \tag{3.28}$$

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S_2(n,k)x^k. \tag{3.29}$$

On a la formule de type-Dobinski suivant :

$$\phi_n(x) = e^{-x}\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^k k^n}{k!}. \tag{3.30}$$

Peut être obtenu presque immédiatement en utilisant la méthode de l'opérateur de Mullin-Rota [22].

Théorème 3.3 *Pour le polynôme* $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k;\alpha;\beta,r)x^k$, *on a la formule de type-Dobinski*

$$S_n(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^{x/\beta}\sum_{k\geqslant 0}\frac{(x/\beta)^k}{k!}(k\beta + r|\alpha)_n. \tag{3.31}$$

Preuve. En commençant par (3.5) nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0} S_n(x)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{1}{e}\right)^{x/\beta}(1+\alpha t)^{r/\alpha} exp\left\{(1+\alpha t)^{\beta/\alpha}(x/\beta)\right\}\\ &= \left(\frac{1}{e}\right)^{x/\beta}(1+\alpha t)^{r/\alpha}\sum_{k\geqslant 0}\frac{(x/\beta)^k}{k!}(1+\alpha t)^{k\beta/\alpha}\\ &= \left(\frac{1}{e}\right)^{x/\beta}\sum_{k\geqslant 0}\frac{(x/\beta)^k}{k!}\sum_{j,l\geqslant 0}\binom{r/\alpha}{j}\binom{k\beta/\alpha}{l}(\alpha t)^{j+1}.\end{aligned}$$

En identifiant le coefficient de $\frac{t^n}{n!}$ dans la première et la dernière expression, et en utilisant la formule de Vandermonde, on trouve

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \left(\frac{1}{e}\right)^{x/\beta}\sum_{k\geqslant 0}\frac{(x/\beta)^k}{k!}\binom{r/\alpha + k\beta/\alpha}{n}\alpha^n n!\\ &= \left(\frac{1}{e}\right)^{x/\beta}\sum_{k\geqslant 0}\frac{(x/\beta)^k}{k!}(k\beta + r|\alpha)_n.\end{aligned}$$

■

Corollaire. Pour les nombres de Bell généralisés, nous avons

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{\beta}}\sum_{k\geqslant 0}\frac{(1/\beta)^k}{k!}(k\beta + r|\alpha)_n. \tag{3.32}$$

Évidement, la formule Dobinski et

$$B_n = \frac{1}{e}\sum_{k\geqslant 0}\frac{k^n}{k!}, \tag{3.33}$$

sont des cas particuliers de (3.31) et (3.32), avec $(\alpha, \beta, r) = (0, 1, 0)$,respectivement.
Comme on peut l'observer, la formule(3.31) peut également être utilisée pour donner une formule de somme fermée pour le type suivant de série infinie.

$$\psi_n(x, t, s) = \sum_{k\geqslant 0}\frac{x^k}{k!}\binom{kt+s}{n}, \tag{3.34}$$

où x, t, s sont des nombres réels ou complexes, et $n \geqslant 0$.
En utilisant (3.31) et posant $\beta \mapsto \alpha t, r \mapsto s$, et $x \mapsto \alpha x t$, on obtient l'identité suivante :

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{x^k}{k!}\binom{kt+s}{n} = \frac{e^x}{n!\alpha^n}S_n(\alpha x t). \tag{3.35}$$

Pour $\alpha = 1$ on obtient :

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{x^k}{k!}\binom{kt+s}{n} = \frac{e^x}{n!}S_n(xt). \tag{3.36}$$

Où $S_n(xt)$ est donné par

$$S_n(xt) = \sum_{k=0}^{n} S(n, k; 1, t, s)(xt)^k. \tag{3.37}$$

Cela montre que la série $\psi_n(x, t, s)$ pourrait être sommée sous forme fermée en utilisant des nombres de Stirling généralisés, à savoir.

3.7 Une sorte de développement asymptotique

Ici nous allons développer une sorte de développement asymptotique pour les nombres de Stirling généralisés $S(\lambda+n, \lambda) \equiv S(\lambda+n, \lambda; \alpha, \beta, r)$ et $S(\lambda+n, \lambda, \lambda r) \equiv S(\lambda+n, \lambda; \alpha, \beta, \lambda r)$ pour les grands λ et n, avec la condition $n = o(\lambda^{1/2})(\lambda \to \infty)$.Une formule asymtotique de Tsylova, impliquant une généralisation d'un résultat de Moser et Wyman, est inclus comme cas particulier.

3.7.1 Préliminaires

Un outil principal à utiliser dans cette section est un résultat connu, à savoir une formule de développement asymptotique pour les coefficients des fonctions génératrices de type puissance impliquant de grands paramètres.Une telle formule de développement consiste en des factorielles décroissantes inverses de grands nombres de la forme $1/(\lambda + k)_k$, plutôt qu'en celles de puissances inverses $1/\lambda^k, (k = 1, 2, \cdots)$.Cela peut sembler tout à fait naturel pour exprimer une fonction combinatoire comme les nombres de Stirling. Notons par N_+ l'ensemble des entiers positives . Soit $\sigma(n)$l'ensemble des partitions de $n(n \in N_+)$, généralement représenté par $1_1^k 2_1^K \cdots n_n^k$ avec $1k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n, k_i \geqslant 0(i = 1, 2, \cdots, n)$, et avec $kk_1 + k_2 + \cdots + k_n$ expriment les nombres de parties du cloison . Pour donné $k(1 \leqslant k \leqslant n)$, nous utilisons $\sigma(n, k)$ pour désigner le sous-ensemble de $\sigma(n)$qui consiste en des partitions de n ayant k parties.

Soit $\phi(t) = \sum_0^n a_n t^n$être une série formelle sur le corps complexe C, avec $a_0 = \phi(0) = 1$.Pour tout $j(0 \leqslant j < n)$définir

$$W(n, j) = \sum_{\sigma(n,n-j)} \frac{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}}{k_1! k_2! \cdots k_n!}, \tag{3.38}$$

où la sommation est effectuée sur toutes ces partitions $1^{k_1} 2^{k_2} \cdots n^{k_n}$ de n qui ont $(n - j)$ des parties.Ce dont nous aurons besoin est le résultat connu suivant.

Soit $[t^n](\phi(t))^\lambda$ le coefficient de t^n dans le développement en séries entières de $(\phi(t))^\lambda$.Alors pour un fixe $s \in N_+$ et pour un grand λet n tel que $n = o(\lambda^{1/2})(\lambda \to \infty)$, on a la formule de développement asymptotique

$$\frac{1}{(\lambda)_n}[t^n](\phi(t))^\lambda = \sum_{j=0}^{s} \frac{W(n, j)}{(\lambda - n + j)_j} + o\left(\frac{W(n, s)}{(\lambda - n + s)_s}\right), \tag{3.39}$$

où les quantités $W(n, j)$ sont données par (3.38).En particulier, lorsque n est fixé, l'estimation du reste est donnée par $0(\lambda^{-s-1})$.

Asymptotique de $S(\lambda+n,\lambda;\alpha,\beta,\gamma)$ et $S(\lambda+n,\lambda;\alpha,\beta,\lambda\gamma)$

Pour appliquer (3.39) au $\langle\alpha,\beta,r\rangle$ paire avec $\alpha\beta\neq 0$,prenons

$$\phi(t)=(1+\alpha t)^{r/\alpha}\left(\frac{(1+\alpha t)^{\beta/\alpha}-1}{\beta t}\right)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{S(n+1,1)}{(n+1)!}t^n, \tag{3.40}$$

avec $\phi(0)=1$, où $S(n+1,1)\equiv S(n+1,1;\alpha,\beta,r)$. par conséquent, on a

$$(\phi(t))^{\lambda}=(1+\alpha t)^{\lambda r/\alpha}\left(\frac{(1+\alpha t)^{\beta/\alpha}-1}{\beta t}\right)^{\lambda}\quad=\lambda!\sum_{n\geqslant 0}\frac{S(\lambda+n,\lambda;\alpha,\beta,\lambda r)}{(\lambda+n)!}t^n. \tag{3.41}$$

Ainsi, en utilisant (3.39), on obtient

$$\frac{S(\lambda+n,\lambda;\alpha,\beta,\lambda r)}{(\lambda)_n(\lambda+n)_n}=\sum_{j=0}^{s}\frac{W(n,j)}{(\lambda-n+j)_j}+o\left(\frac{W(n,s)}{(\lambda-n+s)_s}\right), \tag{3.42}$$

où $n=o(\lambda^{1/2}(\lambda\to\infty$ et $W(n,j)(j=0,1,2,\cdots)$ sont donnés par (3.38), avec a_j étant déterminé par (3.40)

$$a_j=[t^j]\phi(t)=S(j+1,1)/(j+1)!. \tag{3.43}$$

Plus précisément, on calcule facilement a_j en utilisant la formule de Vandermoude comme suit

$$\begin{aligned}
a_j&=[t^j](1+\alpha t)^{r/\alpha}\sum_{k\geqslant 1}\binom{\beta/\alpha}{k}(\alpha t)^{k/(\beta t)}\\
&=[t^j](\frac{\alpha}{\beta})\sum_{i\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 1}\binom{r/\alpha}{k}\binom{\beta/\alpha}{k}(\alpha t)^{i+k-1}\\
&=(\frac{\alpha}{\beta})a_j\left\{\left(\binom{r/\alpha+\beta/\alpha}{j+1}-\binom{r/\alpha}{j+1}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{\beta(j+1)!}((\beta+r/\alpha)_{j+1}-(r/\alpha)_{j+1},j=1,2,\cdots,n.
\end{aligned}$$

Théorème 3.4 *Il y a la formule de développement asymptotique (3.39)pour $\lambda\to\infty$ avec $n=o(\lambda^{1/2})$, où $W(n,j)$est défini par (336)avec a_j étant donné par*

$$a_j=((\beta+r|\alpha)_{j+1}-(r|\alpha)_{j+1})/((j+1)!\beta). \tag{3.44}$$

En fait, ces expressions asymptotiques spéciales sont incluses dans les travaux plus élaborés de Moser et Wyman[18, 19]et plusieurs autres.Ce que nous avons montré ci-dessus est une manière unifiée de les atteindre.Pour complète des nombres de Stirling classique, voir l'article récent de Temme[23].

Conclusion

Dans ce mémoire, j'ai étudié la combinatoire des nombres de Stirling généralisés.
Dans le premier chapitre, j'ai donné les éléments de base pour la combinatoire élémentaire à savoir : partitions, permutation, coefficients binomiaux, fonction génératrice, les nombres de Stirling, nombre et polynôme de Bell, nombres de Lah, r-Stirling,..
Au deuxième chapitre, j'ai étudié les nombres de Stirling à poid, les Stirling dégénérés,les Bell complets et partielle, polynôme de Bell dégénérés.
Enfin, dans le dernier chapitre, je intreduise les nombres de Stirling généralisés avec quelque propriétés.

Bibliographie

[1] K. Albert, Degenerate Stirling numbers, Ann. Math. **35**(1934), 258-256.

[2] A. Z. Broder, The r-Stirling numbers, Discrete Math. **49**(1984)241-259.

[3] L. Carlitz. Degenerate Stirling, Bernoulli and Eulerian numbers, Utilitas Math. **15**(1979), 51-88.

[4] L. Carlitz, Single variable Bell polynomials, Collect. Math.**14**(1962), 13-25.

[5] L. Carlitz, Weighted Stirling numbers of the first and second kind-I, II, FIbonacci Quart. **18**(1980), 147-162, 242-257.

[6] L. Carlitz, Arithmetic properties of the Bell polynomials, J. Math. Anal. Appl. **15**(1966), 33-52.

[7] L. Carlitz, Degenerate Stirling, Bernoulli and Eulerian numbers, Utilitas Math. **15**(1979). 51-88.

[8] C. A. Charalambides, Enumerative combinatorics. CRC Press Series on Discrete Mathematics and its Application. Chapman and Hall

[9] C. A. Charalambides, On weighted Stirling and other related numbers and some combinatorial applications, Fibonacci Quart. **22**(1984), 296-309. bibitemhL. COMTET, Analyse combinatoire approfondie. Ed. Techniques Ingénieur, 2003.

[10] P. Doubilet, G. -C. Rota, and R. Stanley, On the foundations of combinatorial-theory(VI) : The idea of generating function, in ”Probability,”Vol. 2, Sixth Berkeley-Symposium on Mathematical Statistics and Probability, pp. 267-318, Univ. Of California, 1972.

[11] D. Foata and G-N. Han, Principe de combinatoire classique. Lecture, notes, Strasbourg, 2000.

[12] G. Guettai, Thèse Doctorat : Autour de certaines propriétès Analytique des polynômes classique. Univ USTHB 2021.

[13] G. GUETTAI, D. LAISSAOUI, M. RAHMANI and M. SEBAOUI, Degenerate Stirling numbers and Family of Bell polynômials. Univ Média .(soumis).

[14] Howard, F. T, Bell polynomials and degenerate Stirling numbers, Rend. Sem. Math. Univ. Padova **61**(1979), 203-219.

[15] F. T. Howard, Degenerate weighted Stirling numbers, Discrete, Math. **57**(1985), 45-58.

[16] S. A. Joni, G.-C. Rota and B. Sagan, From sets to functions : Three elementary examples, Discrete Math. **37**(1981), 193-2020.

[17] L. Kargin, R. B. Corcino, Generalization of Mellin derivative and its applications, Integral Transforms Spec. Funct. **27**(2016), 620-631.

[18] L. Moser and M. Wyman, Stirling numbers of the second Kind, Duke Math. J.**25**(1958), 29-43.

[19] L. Moser and M. Wyman, Asymptotic development of Stirling numbers of the first kind, J. London Math. Soc. 33(1958), 133-146.

[20] J. Quaince and H. W. Gould, Combinatorial identities for Stirling numbers. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Singapore,2016. The unpulished notes of H.W. Gould, with aforeword byGeorge E. Andrews.

[21] M. Rahmani. Generazed Stirling transform, Miskolc Math. Notes **15**(2014), 677-690.

[22] S. M. Roman and G. -C. Rota, The Umbral calculus, Adv. Math. **27**(1978), 95-188.

[23] N. M. Temme, Asymptotic estimates of Stirling numbers, Stud. Appl. Math. **89**(1993), 233-243.

[24] C. G. Wargner, Surjections, difference and binomial lattices, Stud. Appl. Math.**93**(1994), 15-27.

[25] General theory of partition polynomials p, 414, Theorem 11. 2.