RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr. Yahia Fares, Médéa

Département de Mathématiques



PROJÉT DE SINETESE

SPÉCIALITÉ : **ANALYSE ET MODÉLISATION MATHÉMATIQUES**

Présenté par :**CHAOUANE SEDDIK**

Intitulé :

Etude d'un problème élliptique unilatéral

Soutenu publiquement le Septembre 2020 :

Le jury composé de :

BENCHAA Mohamed	**M.A.A**	**U.Y.F.M.**	**Directrice de thèse**
AYADI Hocine	**M.A.A**	**U.Y.F.M.**	**Examinatrice**
BENAICHOUCHE.Noureddine	**M.A.A**	**U.Y.F.M.**	**Examinatrice**

ANNÉE UNIVERCITAIRE :2019/2020

Remerciements

Avant toute chose, je tiens à remercier **« Allah »** le tous puisant, pour j'avoir donné la force et la patience.

J'exprime ma profonde gratitude et mes remerciements :

À mon encadreur de mémoire **BENCHAA.MOHAMED** pour son enseignement, son support, ses encouragements, sa patience .

Les membres du jury d'avoir accepter d'evaluer ce travail et pour toutes leurs remarques et critiques.

Un remerciement spécial et sincère au monsieur **HOCINE AYADI**, pour son aide, son humour, et son soutien moral aux moments

Un grand merci aussi à mes amis Boukra.A et Mebarki.D pour leur aide et leur sympathie.

Mes sentiments de reconnaissance et mes remerciements chaleureux vont également au mes camarades de la promotion 2020 de Mathématiques.

Toute ma chère famille ma mère et mon père et mes frères pour leur aide et leur soutien.

Finalement je réserve une mention particulière à toutes les personnes qui j'ai apporté le soutien et l'aide attendu.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

A mes trés chers, respectueux et magnifiques parents mon père et ma mère qui m'ont soutenus tout au long de ma vie.

Par leur patience, leur amours et leur encouragement.

A mes frères.

A mes soeurs.

A toute ma famille.

A tout mes amis.

A tout les étudiants de $2^{ième}$ année Master Math 2020.

A tout.

NOTATION

$\mathbb{R}$	espace ecludien de dimension N,N un nombre naturel
non nul.	
x	vecteur de $\mathbb{R}^n$,$x=(x_1,x_2,...,x_N)$,$x_i\in\mathbb{R}$,$1\leq i\leq N$.
dx	mesure de Lebesgue N-dimensionnelle.
Ω	ouvert de $\mathbb{R}$,$N\in\mathbb{N}^*$.
$\partial\Omega$	frontière topologie de Ω.
$\overline{\Omega}$	l'adhérence topologique de de Ω.
E'	le dual topologique.
$u\|_{\partial\Omega}$	la resriction de u sur $\partial\Omega$.
$\langle .,. \rangle_{E',E}$	le crochet de dualité entre l'espace E et son dual topologique.
$dx=dx_1dx_2...dx_N$	mesure de Lebesgue sur Ω.
$\nabla=(\frac{\partial}{\partial x_i})_{1\leq i\leq N}$	le gradient.
∂^α	la dérivée d'ordre α.
$div=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}$	la divergence.
$\Delta f=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$	le laplacien.
$\int_\Omega f(x)dx$	intégrale de f sur Ω par rapport à la mesure de Lebesgue.
$p.p.$	presque partout.
$L^p(\Omega)$	$=\{u:\Omega\to\mathbb{R}$ mesurable $(\int_\Omega \|u(x)\|^p)\,dx<+\infty : 1\leq p<\infty\}$,
l'espace de Lebesgue.	
$L^\infty(\Omega)$	$=\{u:\Omega\to\mathbb{R}$ mesurable,$\exists\ M>0$ tel que $\|u(x)\|\leq$ p.p. $\}$.
$W^{k,p}(\Omega)$	l'espace de Sobolev.

$W^{1,p}(\Omega)$	$= \{u \in L^p(\Omega) \vert \nabla u \in L^p(\Omega)\}$.
$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions α-höldérienne.
$\hookrightarrow$	l'injection.
$\mu(E)$	ou $mes(E)$ mesure de Lebesgue d'un ensemble d'un ensemble E.
$f_n \to f$	dénote que la suite f_n converge vers f.
$f_n \rightharpoonup f$	dénote que la suite f_n converge faiblement vers f.

Résumé : Dans ce mémoire, on a essayé d'étudier un problème elliptique unilatéral, après un bref exposé des quelques définitions et théorèmes nécessaires concernants à notre travail, on consiste dans le deuxième chapitre à la méthode de pénalization pour étudier l'existance et la régularité d'un notre problème.

Mots clés : Problème unilatéral nonlinéaire, régularité.

Table des matières

Introduction générale **9**

1 Rappels et Définitions **11**

1.1 Notions préliminaires 11

Espace de Sobolev 11

Opérateur de Nemytskii 15

Théories de mesure 20

2 Problème élliptique unilatéral **24**

2.1 Introduction 24

2.2 Régularité du problème elliptique unilatéral 25

Exposé des principaux résulats 26

Estimations à priori 27

Preuve des principaux résultats 35

Conclusion **40**

Bibliographie **42**

Introduction générale

Les equations aux dérivées partielles (EDPs) est un sujet presque ancien que le calcul clasique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent au cours du 17ème siècle, l'époque où Newton et Leibniz et des autres ont dévloppé les fondements de ce calcul, les equations aux dérivées partielles (EDPs) est utilisé dans plusieurs domaines de la vie pour résoudre des problémes de la physique (mécanique, thermodynamique, électromagnétisme, etc.), encore elles interviennent dans autres beaucoup domaines : en chimie pour modéliser les réactions, en économie pour étudier le comportement des machés, en finance pour étudier les produits dérivés et en traitement d'images pour restaurer les dégrations.

Le catalogue des EDPs s'est enrichi au fur et à mesure du développement des sciences et en particulier de la physique.

S'il ne faut retenir que quelques noms, on se doit citer celui d'Euler, puis ceux de Navier et Stokes, pour les équations de la mécaniques des fluides,ceux de Fourier pour l'équation de la chaleur, de Maxwell pour celle de l'électromagnétisme, de Schrödinger et Heisenberg pour les équations de la mécanique quantique, et bien sûr de Einstein pour les EDPs de la théorie de la relativité.

L'étude systématique des EDPs est récente au cours du 20ème siécle que les mathématiciens ont commencé à développer l'arsenal nécessaire, un pas de geant a été accompli par Schwartz lorsqu'il a fait naître la théorie des distributions autour des années 1950. Il est certainement bon d'avoir à l'esprit que l'etude des EDPs reste un domaine de recherche trés actif en ce début de 21ème siècle.

L'analyse mathématique de ces equations aux dérivées partielles nécessite un choix approprié des espaces fonctionnels et une définition claire de la notion de solution : existance et unicité.

Dans ce travail nous nous intéressons aux problème elliptiques unilatéraux. En fait nos recherches sur les solutions peuvent être divisées en catégories : existance, unicité, régularité.

Il ya plusieurs méthodes de résolution ce type des problèmes comme la méthode d'approximation et la méthode de pénalization. Ou bien la méthode d'approximation homografique, donc on va étudier un problème elliptique unilatéral par la méthode de pénalization pour l'existance et la régularité des solutions du problème.

Dans nos recherche nous considérons le problème d'obstacle avec des données associées à des opérateurs rentiels A de type monotone et nous posons des résultats classiques et on va les prouver qu'elles sont vrais en prouvant des théorèmes de la régularité.

L'objectif de ce mémoire est l'étude de l'éxistence et la régularité de solution pour un problème élliptique unilatéral.

Ce mémoire se compose de deux chapitres partagés de manière suivante :

Premier chapitre : dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions fondamentaux et outils nécessaires utiles tout au long de ce mémoire à savoir(l'injection canonique de Sobolev, l'operateur de Nemytskii, et quelques théories de mésure).

Deuxième chapitre : nous étudions l'existence et la régularité de la solution du problème elliptique unilatéral, suivi de la méthode de pénalization.

Chapitre 1

Rappels et Définitions

1.1 Notions préliminaires

Espace de Sobolev

Une bonne partie de l'analyse des équations aux dérivées partielles se déroule dans les espaces de Sobolev.Une autre partie se déroule dans les espaces de Hölder ,ainsi que dans plusieures autres espaces fonctionnels plus sophistiqués dont nous ne parlerons par ici.

Espaces de fonctions Höldériennes

Nous aurons besoin plus tard les définitions des espaces Höldériennes. Pour $0 < \alpha < 1$, on dit que u est Höldérienne d'exposant α (lipschitzienne pour $\alpha = 1$) s'il existe une constant C telle que, pour tout couple de points (x, y) dans $\overline{\Omega}$

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}.$$

On note que u est continue et l'on pose

$$|u|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega} \\ x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\alpha}}$$

et,dans le cas où $\overline{\Omega}$ est borné,

$$\| u \|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = \| u \|_{C^{0}(\overline{\Omega})} + |u|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Cette dernière quantité est une norme sur l'espace des fonctions α-höldérienne. $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ qui en fait un espace de Banach.

L'espace $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ est constitué des fonctions de classe C^k dont toutes les dérivées partielles d'ordre k sont dans $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

On munit de la norme

$$\| u \|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \| u \|_{C^k(\overline{\Omega})} + \max_{|\gamma|=k} |\partial^\gamma u|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$$

Espaces de Sobolev

Venons-en maintenant aux espaces de Sobolev. Il en existe plusieurs caractérisations.

Dans le cas des espaces de Sobolev d'ordre entier positif $k \in \mathbb{N}$, on retiendra que

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \ \textit{pour tout} \ \text{multi-indice} \ \alpha \ \textit{tel que} \ |\alpha| \leq k\}$$

muni de la norme

$$\| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \| \partial^\alpha u \|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

pour $p \in [1, +\infty[$

et

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

pour $p = +\infty$.

On utilise parfois la notation $|.|_{k,p,\Omega}$ pour désigner ces normes.

Les dérivées partielles écrites ci-dessus sont naturellement pris au sens des distributions.

Ouvert lipschitzien

Définition 1.1 *On dit qu'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ est lipschitzien s'il est borné et si l'on peut recouvrir sa frontière $\partial\Omega$ par un nombre fini d'hypercubes ouverts C_j,, chacun associé à un système de coordonnées cartésiennes orthonormées, $y^j = (y^j_1, y^j_2, ..., y^j_N)$, de telle sorte que*

$$C_j = \left\{ y \in \mathbb{R}^N; |y^j_i| < a_j \ \textit{pour} \ i = 1, ..., N \right\},$$

et qu'il existe une fonction $\varphi_j : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ *lipschitziennetelle que l'on ait*

$$\Omega \cap C_j = \left\{ y \in C_j ; y_N^j < \varphi_j((y^j)') \right\},$$

avec la notation $\mathbb{R}^{N-1} \ni (y^j)' = (y_1^j, y_2^j, ..., y_{N-1}^j)$. *Mentionnons maintenant un résultat de premiére importance : les injections de Sobolev pour* $\Omega = \mathbb{R}$ *ou bien* Ω *ouvert régulier.*

Théorème 1.1 *Soient* $k \geq 1$ *et* $p \in [1, +\infty[$

. Alors :

i) Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} > 0$, on a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{k}{N}$

ii) Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} = 0$, on a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [p, +\infty[$ (mais pas pour $r = +\infty$ si $p > 1$),

iii) Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} < 0$,on a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.
Dans ce dernier cas, si $k - \frac{N}{p} > 0$ n'est un entier, alors $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\beta}(\overline{\Omega})$ où $l = [k - \frac{N}{p}]$ et $\beta = k - \frac{N}{p} - l$ sont respectivement la partie entière de la partie fractionnaire de $k - \frac{N}{p}$.

Toutes ces injections sont continues.

La partie *iii*) du théorème est aussi connus sous le nom de théorème de Morrey.

Sans hypothèse de régularité sur Ω, les injections de Sobolev restent vraies localement, i.e.dans tout ouvert compactement inclus dans Ω.

En d'autres termes, on a $W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r_{loc}(\Omega)$, etc.

Elles restent vraies globalement si l'on remplace $W^{k,p}(\Omega)$ par $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Il est utile de réécrire ce théorème dans le cas $k = 1$ et Ω borné, régulier.

Théorème 1.2 *Soit* $p \in [1, +\infty[$

Alors :

i) Si $1 \leq p < N$, on a $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$, ou encore $p^* = \frac{Np}{N-p}$

ii) Si $p = N$, on a $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [1, +\infty[$

iii) Si $p > N$, on a $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ où $\beta = 1 - \frac{N}{p}$.

Le nombre p^* s'appelle l'exposant (critique) de Sobolev.

Notons que si Ω borné régulier, alors $W^{1,\infty}(\Omega)$ s'identifie algébriquement et topologiquement à

l'espace $C^{0,1}(\overline{\Omega})$ des fonctions lipschitzienne sur $\overline{\Omega}$.

On peut également exploiter les injections de Sobolev ci-dessus pour obtenir par exemple que pour $p < N$, $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p^*}(\Omega)$, et ainsi de suite.

L'intérêt bien sûr, est que $p^* > p$.

Une autre résultat de première importance est un résultat de compacité que l'on regroupe sous le terme générique de théorème de Rellich-Kondrašov.

Théorème 1.3 *Soient Ω ouvert borné, régulier de $\mathbb{R}^N$, et $p \in [1, +\infty[$*

. Alors les injections :

i) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ avec $1 \leq r < p^*$, si $1 \leq p < N$,

ii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ avec $1 \leq r < +\infty$, si $p = N$,

iii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ avec $0 \leq \gamma < 1 - \frac{N}{p}$, si $p > N$,

sont des injections compactes.

Théorème 1.4 (Application trace) *soient Ω un ouvert lipschitzien et $p \in [1, \infty]$*

. Il existe une unique application linéaire continue $\gamma_0 : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ appelée application trace, qui prolonge l'application de restriction $u \to u|_{\partial\Omega}$ définit sur le sous-espace $C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ qui est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.5 *Soit Ω un ouvert borné lipschitzien, et soit $p \in (1, \infty)$ L'application trace est continue de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^{(N-1)p/(N-p)}(\partial\Omega)$ si $p < N$, dans $L^r(\partial\Omega)$ pour tout $r < \infty$ si $p = N$, et dans $C^{\partial\Omega}$ si $p > N$*

L'application est compacte dans les deux derniers cas.pour $p < N$, l'application est compacte de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^r(\partial\Omega)$ pour tout $r < \frac{(N-1)p}{N-p}$.

Lemme 1.1 *Soit X un espace de Banach réflixif, soient Y et Z deux espaces de Banach tels que X s'injecte continument dans Z.*

De plus, soit $T : X \to Y$ une application linéaire compacte.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $c_\varepsilon > 0$ tel que

$$\|Tx\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X + c_\varepsilon \|x\|_Z$$

pour tout $x \in X$.

Preuve: Supposons par contradiction qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout n on peut trouver $x_n \in X$ satisfaisant

$$\|Tx_n\|_Y > \varepsilon_0 \|x_n\|_X + n\|x_n\|_Z \tag{1.1}$$

Redimentionnement x_n on peut sans perte de généralité supposer que $\|x_n\|_X = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par réflixivité, après passage à une sous-suite on peut supposer que $x_n \rightharpoonup x$ dans Z.
Alors par compacité de T on obtient que $Tx_n \to Tx$dans Y, et en particulier que (Tx_n) est borné en Y.
Donc par(1.1) on obtient

$$\| x_n \|_Z < \frac{1}{N} \| Tx_n \|_Y \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Comme $x_n \rightharpoonup x$ dans Z, cela implique que $x = 0$. Par conséquent $Tx_n \to 0$ dans Y, contredisant le fait que par (1.1) on a $\liminf_{n\to\infty} \|Tx_n\|_Y \geq \varepsilon_0 > 0$. ■ Nous aurons besoins du cas spécial suivant du lemme 1.1.

Exemple 1.1 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert lipschitzien, $m \in (1,\infty)$,et $r \in (1,\infty)$.Si $m < N$, supposons de plus que $1 < r < \frac{(N-1)m}{N-m}$.*
Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $c_\varepsilon > 0$ tel que

$$\|u|_{\partial\Omega}\|_{L^r(\partial\Omega)} \leq \varepsilon \|\nabla u\|_{L^m(\Omega)} + c_\varepsilon \|u\|_{L^m(\Omega)}$$

pour tout $u \in W^{1,m}(\Omega)$.

Opérateur de Nemytskii

Dans cette section nous définissons l'opérateur de Nemytskii(opérateur de composition)dans l'espace L^p.
Cet opérateur est intimement lié à la fonction de Carathédory.
Ce résultat établit la continuité d'un opérateur défini entre deux espaces de Lebesgue, à travers la composition à fonction réelle.
Nous avons besoin des conceptsuivant pour prouver le théorème de Nemytskii, dans toute la suite Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$.
Le théorème suivant nous donne quelque conditions suffisantes pour la convergence dans $\mathbb{L}^p$.

Théorème 1.6 (Vitali) *Soient $(f_n)_n \subset \mathbb{L}^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$, on suppose que*

1) $f_n \to f$ *presque partout dans* Ω.

2) $\lim\limits_{\mu(E)\to 0} \int_E |f_n|^p = 0$, *uniformément par rapport à n ;Si E est une partie mésurable de* Ω. *Alors* $f_n \to f$ *dans* $L^p(\Omega)$

Preuve:

On fixe $\varepsilon > 0$, soit $E \subset \Omega$ une partie mesurable, on a :

$$\int_\Omega |f_n - f|^p \leq \int_{\Omega\setminus E} |f_n - f|^p + 2^{p-1} \int_E [|f_n|^p + |f|^p]. \tag{1.2}$$

En utilisant l'hypothèse (2), il existe $\delta_1(\varepsilon) > 0$ tel que si $\mu(E) < \delta_1(\varepsilon)$, alors

$$\int_E |f_n|^p < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme $f \in L^p(\Omega)$ il existe $\delta_2(\varepsilon) > 0$ tel que si $\mu(E) < \delta_2(\varepsilon)$, alors

$$\int_E |f_n|^p < \varepsilon.$$

On conclut donc que $2^{p-1} \int_E [|f_n|^p + |f|^p] < 2^p \varepsilon$.On pose $\delta = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$ et en utilisant le théorème de Egorov, il existe $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et une partie mésurable E_0 de Ω tels que $\mu(E_0) < \delta$ et

$$\int_{\Omega\setminus E_0} |f_n - f|^p < \varepsilon,$$

Pour tout $n > \nu_\varepsilon$.

On prend $E = E_0$dans (1.2), on obtient le résultat.

Le résultat suivant est corollaire du théorème de Vitali. ■

Théorème 1.7 *Soient* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions et* f *une fonction de* $L^p(\Omega), p \geq 1$.

Alors

$f_n \to f$ *dans* $L^p(\Omega)$ *si et seulement si*

1) $f_n \to f$ *en mésure ;*

2) $\lim\limits_{\mu_E\to 0} \int_E |f_n|^p = 0$ *uniformément par rapport à n, tels que E est une partie mésurable de* ω.

Preuve:

Nous diviserons la preuve en deux étapes.

Étape1 : supposons que $f_n \to f$ dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$.

Il est clair que $f_n \to f$ en mésure.

De plus, si E est une partie mésurable de Ω, on a

$$\int_E |f_n|^p = \int_E |f_n - f + f|^p \leq 2^{p-1} \int_E |f_n - f|^p + 2^{p-1} \int_E |f|^p.$$

Fixons $\varepsilon > 0$; comme $f \in L^p(\Omega)$ il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que, si $\mu(E) < \delta(\varepsilon)$ ∎ alors

$$\left[\int_E |f|^p\right]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \tag{1.3}$$

D'autre part, comme $f_n \to f$dans $L^p(\Omega)$, il existe $\nu \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left(\int_E |f_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f_n - f|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \quad \forall n > \nu_\varepsilon. \tag{1.4}$$

Cela implique que $\forall n > \nu_\varepsilon$, si $\mu(E) < \delta(\varepsilon)$ alors

$$\left(\int_E |f_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon + \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2\varepsilon$$

Par(1.3).

comme $f_1, ..., f_{\nu_\varepsilon} \in \mathbb{L}^p(\Omega)$, il existe $\delta_1(\varepsilon)$ tel que si $\mu(E) < \delta_1(\varepsilon)$ alors

$$\int_E |f_j|^p < \varepsilon, \quad \forall j = 1, ..., \nu_\varepsilon$$

Cela preuve le résultat.

Preuve: Étape2 : prouvons que les hypothèses (1) et (2)implique que $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$.

Comme $f_n \to f$ en mésure, on peut extraire une sous-suite telle que $f_{n_k} \to f$ p.p. dans Ω.

Le théorème de Vitali implique que $f_{n_k} \to f$ dans $L^p(\Omega)$.

En effet, toute la suite f_n converge vers f dans $L^p(\Omega)$. s'il existe une sous- suite f_{n_j} et$\varepsilon_0 > 0$ tels que

$$\|f_{n_j} - f\|_{L^p(\Omega)} \geq 0, \tag{1.5}$$

en utilisant l'argument précédent, nous pourions extraire de f_{n_j} une sous-suite convergeant vers f dans $L^p(\Omega)$.

Ceci est en contradiction avec (1.5). ∎

Définition 1.2 (Fonction de Carathédory) *Une fonction $g = g(x, \xi) : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathédory si :*

1) *g est continue par rapport à ξ, pour presque tout x dans ω.*

2) *g est mesurable par rapport à x pour $\forall \xi \in \mathbb{R}^m$.*

Lemme 1.2 *Soit $f(x,t) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de carathédory, soient $(u_n)_n$une suite de fonctions et u_0 une fonction mesurable telle que $u_n \to u_0$ en mesure.Alors $f(x,u_n) \to f(x,u_0)$ en mesure.*

Preuve:

Soit $\varepsilon > 0$ et soit u une fonction mesurable quelconque.

On pose pour $k > 0$

$$\Omega_k = \left\{ x \in \Omega : |u_0(x) - u(x)| < \frac{1}{k} \Rightarrow |f(x,u_0(x)) - f(x,u(x))| < \varepsilon \right\}.$$

Comme f est continue par rapport à la deuxième variable, on a $\cup_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k = \Omega$.

De plus on a $\lim_{k\to\infty} \mu(\Omega_k) = \mu(\Omega)$, comme $\Omega_i \subset \Omega_j$ avec $i < j$.Donc, pour tout $\eta > 0$ fixe, il existe k_0 tel que

$$\mu(\Omega) - \mu(\Omega_{k_0}) < \frac{\eta}{2}.$$

posons

$$A_n = \left\{ x \in \Omega : |u_n(x) - u_0(x)| < \frac{1}{k_0} \right\};$$

comme $u_n \to u_0$ en mesure, il existe n_0 tel que

$$\mu(\Omega) - \mu(A_n) < \frac{\eta}{2}$$

pour tout $n > n_0$.

On pose

$$D_n = \{ x \in \Omega : |f(x,u_n(x)) - f(x,u_0(x))| < \varepsilon \}.$$

Par définition, on a $A_n \cap \Omega_{k_0} \subset D_n$ et cela donne

$$\mu(\Omega) - \mu(D_n) < [\mu(\Omega - \mu(A_n))] + \left[\mu(\Omega) - \mu(\Omega_{k_0})\right] < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta.$$

Ce qu'il faut démentrer. ■

Théorème 1.8 (Opérateur de Nemytskii) *.Soient $p,q \geq 1$ et soit $f(x,t) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction Carathédory.*

Supposons qu'il existe une fonction positive $a \in L^q(\Omega)$ et une constante $b \geq 0$ telles que :

$$|f(x,t)| \leq a(x) + b|t|^{\frac{p}{q}}. \tag{1.6}$$

Alors l'opérateur

$$N_f : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$$
$$u(x) \to f(x,u(x))$$

est appelé opérateur de Nemytskii et il est continue et borné.

Preuve:

Supposons que $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$ et montrons que $N_f(u_n) \to N_f(u)$ dans $L^q(\Omega)$.

D'abord on va montrer que $N_f(u_n)$ satisfait aux hypothèses (1) et (2) de théorème 1.7.

Il est clair que $u_n \to u$ en mesure et alors d'aprés le lemme 1.2on trouve que $f(x,u_n(x)) \to f(x,u(x))$ en mesure, donc $N_f(u_n) \to N_f(u)$ en mesure.

Montrons maintenant que

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E |N_f(u_n)|^q = 0$$

uniformément par rapport à n.

Si E est une partie mesurable de Ω et d'aprés (1.6) on trouve

$$\int_E |f(x,u_n(x))|^q \leq 2^{q-1} \int_E a(x)^q + 2^{q-1} b \int_E |u_n(x)|^p,$$

on passe à la limite quand $\mu(E) \to 0$, uniformément par rapport à n.Comme $a^q \in L^1(\Omega)$ alors $\int_E a(x) \to 0$; appliquons le théorème 1.7 sur la suite u_n on obtient $\lim\limits_{\mu(E)\to 0} \int_E |u_n|^p = 0$ et alors $\lim\limits_{\mu(E)\to 0} \int_E |f(x,u_n(x))|^p = 0$.

Appliquons maintenant le théorème 1.7 sur la suite $f(x,u_n(x))$, on trouve donc $f(x,u_n(x)) \to f(x,u(x))$ dans $L^q(\Omega)$, on conclut donc que N_f est continue. ∎

Lemme 1.3 *Soit (Ω,μ) un espace mesurable, Soient $p,q \in [1,\infty)$, et soit $k \geq 0$.*

Supposons que $\frac{1}{q} - \frac{k}{p} \in (0,1)$ et soit $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable qui est continue par rapport à la deuxième variable et satisfait

$$|h(\omega,u)| \leq \varphi(\omega)|u|^k + \psi(\omega)$$

Pour tout $u \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \Omega$ avec des fonctions positives $\varphi \in L^{pq/(p-qk)}(\Omega)$.

Alors l'opérateur de Nemytskii $u \to h(.,u(.))$ est bien définit et continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

Preuve:

on définit $H(u) := h(.,u(.))$ pour $u \in L^p(\Omega)$.

Alors $H(u)$ est mesurable étant une composition de fonctions mesurables.

De plus,

$$\|H(u)\|_{L^q(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{L^{pq/(p-qk)}(\Omega)} \||u|^k\|_{L^{q/k}(\Omega)} + \|\psi\|_{L^q(\Omega)} = c_1\|u\|^k_{L^p(\Omega)} + c_2 \tag{1.7}$$

Pour certaines constantes positives c_1 et c_2 par les inégalités de Minkowski et Hölder.

Donc $H(u) \in L^q(\Omega)$ pour $u \in L^p(\Omega)$, prouvant que l'opérateur de Nemytskii est bien défini.

Soit maintenant (u_n) une suite de $L^p(\Omega)$ qui converge en norme dans $L^p(\Omega)$ vers $u \in L^p(\Omega)$.

En passant à une sous-suite, on peut supposer que (u_n) converge presque partout vers u et qu'il existe $v \in L^p(\Omega)$ tel que $|u_n| \leq v$ presque partout pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors, par continuité de h, les fonctions $H(u_n)$ converge presque partout vers $H(u)$, et $|H(u_n)| \leq \varphi v^k + \psi$, avec le coté droit étant en $L^p(\Omega)$ par (1.7).

D'aprés le théorème de convergence dominée de Lebesgue 1.13,on obtient que $H(u_n)$ converge vers $H(u)$ dans $L^q(\Omega)$.

De cette façon, on vois que chaque sous-suite de $H(u_n)$a une sous-suite qui converge vers $H(u)$ dans $L^q(\Omega)$.

Donc $H(u_n)$ converge vers $H(u)$, prouvant que H est continue. ■

Théories de mesure

Soit E un sous-ensemble mesurable de Lebesgue de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.Soit $1 < p < \infty$.

Théorème 1.9 (Inégalité de Hölder généralisée) *.Soient (E,T,μ) un espace mesuré et $p,q,r \in [1,+\infty]$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$.Soient $f \in L^p(E)$ et $g \in L^q(E)$.*

Alors, $fg \in L^r(E)$ et

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Théorème 1.10 (Inégalité de Minkowski) *.Soient (E,T,μ) un espace mésuré,$p \in [1,+\infty[$ et deux fonctions $f,g \in L^p(E)$.*

Alors

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

c'est -à-dire

$$\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Théorème 1.11 (Inégalité de Young) . *Soient $a,b \in \mathbb{R}_+$ et $p,q \in]1,+\infty[$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.*

Alors :

$$|ab| \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

Théorème 1.12 (Inégalité de Sobolev) *Soit u une fonction de $H_0^1(\Omega)$, alors $u \in L^{2^*}(\Omega)$, où $2^* = \frac{2N}{N-2}$. De plus, on a*

$$\left[\int_\Omega |u|^{2^*} dx\right]^{\frac{1}{2^*}} \leq S^2 \left[\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.8}$$

où S est une constante positive dépend de N.

Théorème 1.13 (Convergence dominée de Lebesgue) . *Soit f_n une suite de fonctions mesurable sur E à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que*

$f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to +\infty$ presque partout dans E, et telle qu'il existe une fonction g sur E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que l'on ait

$|f_n(x)| \leq g(x)$ presque partout dans E.

Alors f est intégrable et l'on a

$\int_E |f_n - f| d\mu \to 0$ quand $n \to +\infty$.

En particulier,

$$\int_E f_n d\mu \to \int_E f d\mu.$$

Le théorème de convergence dominnée existe aussi en version L^p.

Théorème 1.14 (convergence monotone) .*Soient (E,T,μ) un espace mesuré et (f_n) une suitr de fonctions mesurable sur E, telle que :*

- *$(0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq ... \leq f_n(x)$*
- *$(f_n(x) \to f(x)$ pour presque tout x.*

Alors f est mesurable, et :

$$\int_E f_n d\mu \to \int_E f d\mu.$$

Théorème 1.15 (Egorov) . *Soient f_n une suite de fonctions et f une fonction défini sur E, avec $\mu(E) < +\infty$.*

Supposons que $f_n \to f$ p.p.dans E.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partie mesurable A de E telle que $\mu(E\backslash A) < \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément dans A, quand $n \to +\infty$.

Théorème 1.16 (La réciproque partielle du théorème de convergence dominée) . *Soient $p \in [1,+\infty[$, f_n une suite de fonctions de $L^p(E,d\mu)$ et f une fonction de $L^p(E,d\mu)$, telles que $|f_n - f|_{L^p(E,d\mu)} \to 0$ quand $n \to +\infty$.*
Alors on peut extraire une sous-suite f_{n_m} telle qu'il existe $g \in L^p(E,d\mu)$ avec
$f_{n_m}(x) \to f(x)$ quand $q \to +\infty$ presque partout dans X,
et
$|f_{n_m}(x)| \leq g(x)$ presque partout dans X.

Théorème 1.17 (Fatou) . *Soit f_n une suite de fonctions de $L^1(E)$ telle que*

(1) *$f_n \geq 0$ p.p dans E ;*

(2) *$\int_E f_n < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Soit $f(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)$ pour p.p.x $\in E$.
Alors $\int_E f \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n$.

Théorème 1.18 (Convergence faible dans L^p) . *Une suite de fonctions f_n de $L^p(E)$ converge faiblement vers f dans $L^p(E)$ si :*

1. *Pour $1 < p < \infty$, $\int_E (f_n - f)g \to 0$ pour tout $g \in L^{p'}(E)$.*
2. *pour $p = 1$, $\int_E (f_n - f)g \to 0$ pour tout $g \in L^\infty(E)$.*

Théorème 1.19 *Soit $1 < p < \infty$.*
Tout suite bornée f_n de $L^p(E)$ admet une sous-suite convergeant faiblement vers certains f dans $f \in L^p(E)$.

Théorème 1.20 (Dunford-Pettis) .*On dit que f_n converge vers f en mesure sur E si*

$$\mu\left(\{x \in E : |f_n - f| \geq \varepsilon\}\right) \to 0 \ \text{ quand } \ \varepsilon \to 0.$$

Lemme 1.4 *Soient $N \in \mathbb{N}$ et $m \in (2,\infty)$.Il existe $\gamma > 0$ tel que*

$$(a-b).(|a|^{m-2}a - |b|^{m-2}b) \geq \gamma |a-b|^m$$

Pour tout a et b dans $\mathbb{R}$.

Lemme 1.5 *Pour tout $p \in (0,\infty)$ et $N \in \mathbb{N}$, il existe des constants positives α et β telles que*

$$\alpha \sum_{j=1}^{N} a_j^p \leq \left(\sum_{j=1}^{N} a_j \right)^p \leq \beta \sum_{j=1}^{N} a_j^p$$

Pour tout $a_j \geq 0, j = 1,...,N$.

Chapitre 2

Problème élliptique unilatéral

2.1 Introduction

Soit le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} A(u) = f(x) & en \quad \Omega \\ u = 0 & sur \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

où Ω est un ouvert borné dans $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, A est l'opérateur différentiel défini par

$$A(u) = -div(a(x, \nabla u))$$

et f est une fonction telle que

$f \in L^m(\Omega)$. $m \geq 1$

la fonction $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est une fonction caratédory telle que ce qui suit vaut pour presque tous les $x \in \Omega$, pour chaque $s \in \mathbb{R}$, pour chaque
$\xi \neq \eta$:

$$a(x, \xi)\xi \geq \alpha|\xi|^p \tag{2.2}$$

$$|a(x, \xi)| \leq \beta \left[|\xi|^{p-1} + j(x)\right] \tag{2.3}$$

$$[a(x, \xi) - a(x, \eta)](\xi - \eta) > 0 \tag{2.4}$$

Où $j(x)$ est une fonction positive dans $\mathbb{L}^{p'}(\Omega)$, et α et β sont des constantes positives et $p > 1$ on définit l'opérateur elliptique non linéaire $A(u) = -div(a(x, \nabla u))$ de $W_0^{1,p}(\Omega)$ vers son espace dual

$W^{-1,p}(\Omega)$, mais il n'est pas coércif sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ lorsque u n'est pas fini.

A cause de manque de coércivité, la théorie classique pour les opérateurs elliptiques agissant entre des espaces en dualité, ne peuvent pas etre appliqué même si les donnés f sont suffisament régulière.

la régularité des solutions du problème du Dirichlet (2.1) en termes de sommbabilité de la donné f peut être résumée comme suit

2.2 Régularité du problème elliptique unilatéral

$(R1)$ si $f \in L^m(\Omega)$ avec $m > \frac{N}{p}$, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

$(R2)$ si $f \in L^m(\Omega)$ avec $\frac{pN}{(N-p)(p-1)+p^2} < m < \frac{N}{p}$, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, avec $r = \frac{Nm(p-1)}{N-mp}$.

$(R3)$ si $f \in L^m(\Omega)$ avec $\max\left\{1, \frac{N}{N(p-1)+1}\right\} < m < \frac{pN}{(N-p)(p-1)+p^2}$, avec $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$, avec $q = \frac{Nm(p-1)}{N-m}$.

$(R4)$ si $f \in L^m(\Omega)$ avec $1 \leq m \leq max\left\{1, \frac{N}{N(p-1)+1}\right\}$, alors le problème(2.1) admet une seule solution d'entropie u apparient à l'espace de Marcinkiewicz $M^r(\Omega)$ et ∇u, les faibles gradients de u appartient à l'espace de Marcinkiewicz $(M^q(\Omega))^N$, avec $r = \frac{Nm(p-1)}{N-mp}$ et $q = \frac{Nm(p-1)}{N-m}$.

pour une fonction donnée $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, le problème d'obstacle (A, f, ψ) associé avec le problème(2.1) peut être formulé en termes d'inégalité

$$\begin{cases} u \geq \psi \qquad\qquad p.p. \quad en \quad \Omega \\ \int_\Omega a(x,\nabla u).\nabla(u-v) \leq \int_\Omega f.(u-v), \quad pour \quad tout \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ avec \quad v \geq \psi \quad p.p \quad en \quad \Omega \end{cases} \tag{2.5}$$

à condition que $f \in W_0^{-1,p}$.

Le dernier fait est vrai juste si m de telle façon

$$m \geq \frac{pN}{(N-p)(p-1)+p^2}. \tag{2.6}$$

on note que la condition (2.6)garantit l'existance de $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, solution de probléme (2.5).

Ainsi, le coté droit de (2.5) est logique .Dans le cas

$$1 \leq m < \frac{pN}{(N-p)(p-1)+p^2}. \tag{2.7}$$

La formulation (2.5) ne reste pas valable puisque le terme $\int_\Omega f(u-v)$ n'a pas de sens. En effet meme dans le cas d'equations, la solution $u$de (2.1) n'appartient pas à $W_0^{1,p}$.

Afin de surmenter cette dificulté nous devons introduit une formulation plus générale du problème d'obstacle (A,f,ψ) à l'aide de la fonction de troncature $T_k(s) = max(-k, min(k,s))$, $s \in \mathbb{R}$, $k > 0$.

Une solution d'entropie du problème d'obstacle (A,f,ψ) associé au problème(2.1) est une fonction mésurable u telle que

$$\begin{cases} u \geq \psi \qquad\qquad p.p. \quad en \quad \Omega, \\ T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega). \qquad pour \quad tout \quad k > 0. \\ \int_\Omega a(x,\nabla u).\nabla T_k(u-v) \leq \int_\Omega f.T_k(u-v), \quad pour \quad tout \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \\ avec \quad v \geq \psi \quad p.p. \quad en \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.8}$$

Notre objectif maintenant est de prouver que les résultats précédents $(R1)$, $(R2)$ et $(R3)$ restent vrais dans le cas du problème unilatérale (A,f,ψ) associé au probléme (2.1).

de plus, nous prouvons que si $f \in L^1(\Omega)$et $p > 2 - \frac{1}{N}$, le problème unilatéral (A,f,ψ) admet au moins une solution d'entropie $u \in W^{1,\delta}(\Omega)$, pour tout $\delta < \frac{N(p-1)}{N-1}$ pour obtenir des estimations a priori de la suite du problème pénalisé, nous utilisons un choix approprié de fonction de test .

Exposé des principaux résulats

Théorème 2.1 *soit $f \in L^m(\Omega)$ avec $m > \frac{N}{p}$*

il existe alors au moins une fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ qui est la solution du probléme (2.5).

Théorème 2.2 *soit $f \in L^m(\Omega)$, avec m de telle façon*

$$\frac{pN}{(N-p)(p-1)+p^2} \leq m < \frac{N}{p}. \tag{2.9}$$

alors il existe au moins une fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, avec

$$r = \frac{Nm(p-1)}{N-mp}. \tag{2.10}$$

qui est la solution du problème (2.5)

Théorème 2.3 *soit $f \in L^m(\Omega)$, avec $m > 1$ telle que*

$$\frac{N}{N(p-1)+1} < m < \frac{pN}{(N-p)(p-1)+p^2} \tag{2.11}$$

alors il existe au moins une fonction $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$, avec

$$q = \frac{Np(p-1)}{N-m}$$

qui est la solution du problème (2.8).

Remarque

l'hypothèse (2.12) implique que $1 < q < p$

Théorème 2.4 *si $f \in L^1(\Omega)$, et*

$$p > 2 - \frac{1}{N} \tag{2.12}$$

alors il existe au moins une fonction u solution de (2.5), de plus u apprécie la régularité $W_0^{1,\delta}(\Omega)$, pour tout $\delta < \frac{N(p-1)}{N-1}$

Remarque

on remarque que la condition (2.12) garantit que $\frac{N(p-1)}{N-1} > 1$

Remarque

si nous supposons (2.12), alors la conclutions du théorème 2.3 est vrai pour tout $f \in L^m(\Omega)$, avec

$$1 < m < \frac{pN}{(N-p)(p-1)+p^2}. \tag{2.13}$$

Estimations à priori

Soit f une fonction de $L^m(\Omega)$, avec m comme l'enoncé des théorèmes. Considérons pour $\varepsilon > 0$ le problème pénalisé suivant :

$$\begin{cases} -div(x, \nabla u_\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon^{p-1}}((u_\varepsilon - \phi)^-)^{p-1} = f_\varepsilon \quad in \quad D'(\Omega) \\ u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases} \tag{2.14}$$

Où $f_\varepsilon = T_{\frac{1}{\varepsilon}}(f)$. Comme f_ε appartient $W_0^{-1,p'}(\Omega)$ donc il existe au moins une solution u_ε du problème (2.14)dans le sens :

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ \int_\Omega a(x,\nabla u_\varepsilon).\nabla v - \dfrac{1}{\varepsilon^{p-1}} \int_\Omega ((u_\varepsilon - \phi)^-)^{p-1} v = \int_\Omega f_\varepsilon v, \quad pour \quad tout \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases} \tag{2.15}$$

Lemme 2.1 *soit $f \in L^m(\Omega)$, avec $m > \frac{N}{p}$ et soit u_ε la solution du problème pénalisé (2.14) alors la suite u_ε est borné en $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.*

Preuve:

on définit, pour $s \in \mathbb{R}$, et $k > \| \psi \|_{L^\infty(\Omega)}$,

$G_k(s) = s - T_k(s)$,

et

$H(s) = \int_0^s dt = s$ si on prend $G_k(H(u_\varepsilon))$ comme une fonction de teste en (2.15), et on utilise l'hypothèse :

$a(x,\xi)\xi \geq \alpha|\xi|^p$, on obtient :

$$\alpha \int_{A_k} |\nabla u_\varepsilon|^p - \frac{1}{\varepsilon^{p-1}} \int_{A_k} ((u_\varepsilon - \psi)^-)^{p-1} G_k(H(u_\varepsilon)) = \int_{A_k} f_\varepsilon G_k(H(u_\varepsilon)), \tag{2.16}$$

où nous avons l'ensemble $A_k = \{x \in \Omega : |H(u_\varepsilon)| > k\}$. Nous vérifions que le deuxieme terme de la partie gauche est positif. Dans le cas, où $H(u_\varepsilon) < u_\varepsilon$ on a :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\varepsilon^{p-1}} \int_{A_k} ((u_\varepsilon - \psi)^-)^{p-1} G_k(H(u_\varepsilon)) \\ & = -\frac{1}{\varepsilon^{p-1}} \int_{\{H(u_\varepsilon) \geq k\}} ((u_\varepsilon - \psi)^-)^{p-1} G_k(H(u_\varepsilon)) \\ & -\frac{1}{\varepsilon^{p-1}} \int_{\{H(u_\varepsilon) \leq -k\}} ((u_\varepsilon - \psi)^-)^{p-1} G_k(H(u_\varepsilon)) \\ & = -\frac{1}{\varepsilon^{p-1}} \int_{\{H(u_\varepsilon) \leq -k\}} ((u_\varepsilon - \psi)^-)^{p-1} G_k(H(u_\varepsilon) + k) \geq 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

on utilise (2.16) et (2.17), on obtient :

$$\int_{A_k} |\nabla H(u_\varepsilon)|^p dx \leq \int_{A_k} |f| |G_k(H(u_\varepsilon))|. \tag{2.18}$$

L'inégalité (2.18)est exactement le point de départ de preuve de Stampachia L^∞ régularité, donc il existe un constant c_1 telle que :

$\| H(u_\varepsilon) \| \leq C.$

Les propriéties de la fonction H (en particulier le cas où $\lim_{s\to+\infty} H(x) = +\infty$, $\lim_{s\to-\infty} H(x) = -\infty$ on considère que u_ε est bornné en$L^\infty(\Omega)$, qu'elle est :

$$\| u_\varepsilon \|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_1 \tag{2.19}$$

Pour que montrer la bornitude de la suite u_ε en $W_0^{1,p}(\Omega)$, on prend $u_\varepsilon - \psi$ comme une fonction de teste dans (2.15). En utilisant l'hypothèse (2.3), et (2.19), on obtient :

$$\begin{aligned} &\alpha \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^p + \frac{1}{\varepsilon^{p-1}} \int_\Omega ((u_\varepsilon - \psi)^-)^p \\ &\leq \int_\Omega f_\varepsilon (u_\varepsilon - \psi) - \int_\Omega a(x,\nabla) u_\varepsilon \nabla \psi. \end{aligned} \tag{2.20}$$

A savoir (2.19), et le condition $|f_\varepsilon| \leq |f|$ le premier terme de le coté droit de (2.20) est estimisé par :

$$\int_\Omega f_\varepsilon (u_\varepsilon - \psi) \leq c_3 \| f \|_{L^1(\Omega)}. \tag{2.21}$$

par (2.3) et l'inégalité de Hölder 1.9 le deuxième terme du coté droit de (2.20)est estimisé par :

$$-\int_\Omega a(x,\nabla) u_\varepsilon \nabla \psi \leq \beta \| \nabla u_\varepsilon \|_{L^p(\Omega)} \| \nabla \psi \|_{L^p(\Omega)} + C \tag{2.22}$$

on fait une combinison entre (2.20),(2.21), et (2.22), on obtient :

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^p \leq C + \beta \| \nabla u_\varepsilon \|_{L^p(\Omega)} \| \nabla \psi \|_{L^p(\Omega)}, \tag{2.23}$$

où C est un constant indépendant de ε. donc par l'inégalité du Young 1.11 dans le coté gauche de l'inégalité ci-dessus, on déduit que :

$$\| u_\varepsilon \|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq c_2, \tag{2.24}$$

■

Lemme 2.2 *soit $f \in L^m(\Omega)$, avec $m > 1$, telle que :*

$$\frac{pN}{(N-p)(p-1)+p^2} \leq m < \frac{N}{p}. \tag{2.25}$$

et soit u_ε la solution du problème pénalisé (2.14). Alors la suite u_ε est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, avec $r = \frac{Nm(p-1)}{N-mp}$.

Preuve:

on définie pour $k \in \mathbb{N}$, avec $k > \| \psi \|_{L^\infty(\Omega)}$, la fonction $\varphi_k(s) = T_1(G_k(s)$. si on teste (2.14)avec $\varphi_k(s)$, on obtient :

$$\alpha \int_{B_k} |\nabla u_\varepsilon|^p - \frac{1}{\varepsilon^{p-1}} \int_\Omega ((u_\varepsilon - \psi)^-)^{p-1} \varphi_k(u_\varepsilon) \leq \int_{A_k} |f| \tag{2.26}$$

telle que on a les ensembles :

$$A_k = \{x \in \Omega : |u_\varepsilon| \geq k\}, B_k = \{x \in \Omega : k \leq |u_\varepsilon| < k+1\}. \tag{2.27}$$

On vérifie que le deuxieme terme du coté gauche de (2.26) n'est pas négatif. Utilisant le fait que $(u_\varepsilon - \psi)^- = 0$ dans l'ensemble $\{x \in \Omega : u_\varepsilon \geq k\}$ (puisque $k > \| \psi \|_{L^\infty(\Omega)}$), on a

$$\begin{aligned}
&- \frac{1}{\varepsilon^{p-1}} \int_\Omega ((u_\varepsilon - \psi)^-)^{p-1} \varphi_k(u_\varepsilon) \\
&= - \frac{1}{\varepsilon^{p-1}} \int\limits_{\{u_\varepsilon > k\}} ((u_\varepsilon - \psi)^-)^{p-1} \varphi_k(u_\varepsilon) \\
&= - \frac{1}{\varepsilon^{p-1}} \int\limits_{\{-1 \leq u_\varepsilon + k < 0\}} ((u_\varepsilon - \psi)^-)^{p-1} (u_\varepsilon + k) \\
&+ \frac{1}{\varepsilon^{p-1}} \int\limits_{\{u_\varepsilon + k < -1\}} ((u_\varepsilon - \psi)^-)^{p-1} \geq 0
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Selon (2.26) et (2.28),on obtient

$$\alpha \int_{B_k} |\nabla u_\varepsilon|^p \leq \int_{A_k} |f|. \tag{2.29}$$

En choisissant $\gamma = \frac{mN(p-1)}{p^*(N-pm)}$, puisque on a $m \geqslant \frac{pN}{(N-p)(p-1)+p^2}$. Et on a

$$\begin{aligned}
\left[\int_\Omega |u_\varepsilon|^{p^* \gamma} \right]^{\frac{p}{p^*}} &\leq C \int_\Omega |\nabla (|u_\varepsilon|^\gamma)|^p \\
&= C \int_\Omega |u_\varepsilon|^{p(\gamma-1)} |\nabla u_\varepsilon|^p \\
&= C \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{B_k} |u_\varepsilon|^{p(\gamma-1)} |\nabla u_\varepsilon|^p \\
&\leq C \sum_{k=0}^{+\infty} (1+k)^{p(\gamma-1)} \int_{A_k} |f| \\
&\leq C \sum_{k=0}^{+\infty} (2+k)^{p\gamma-p} \sum_{h=k}^{+\infty} \int_{B_h} |f|.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Par conséquent, on change l'order de sommation on a

$$\begin{aligned}\left[\int_\Omega |u_\varepsilon|^{p^*\gamma}\right]^{\frac{p}{p^*}} &\leq C\sum_{h=0}^{+\infty}\int_{B_h}|f|\sum_{k=0}^{+\infty}(2+k)^{p\gamma-p}\\ &\leq C\sum_{h=0}^{+\infty}\int_{B_h}|f|(2+h)^{p\gamma-p+1}\\ &\leq C\sum_{h=0}^{+\infty}\int_{B_h}|f|(2+|u_\varepsilon|)^{p\gamma-p+1}\\ &\leq \| f \|_{L^m(\Omega)}\left(1+\left[\int_\Omega |u_\varepsilon|^{m'\{p\gamma-p+1\}}\right]^{\frac{1}{m'}}\right)\end{aligned} \quad . \tag{2.31}$$

Grâce au choix de γ on a $p^*\gamma = \{p\gamma - p + 1\} = r$.Puisque $\frac{p}{p^*} > \frac{1}{m'}$(du fait que $m < \frac{N}{p}$)de (2.30) on obtient

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^{p^*\gamma} = \int_\Omega |u_\varepsilon|^r \leq C, \tag{2.32}$$

et

$\int_\Omega |u_\varepsilon|^{p(\gamma-1)}|\nabla u_\varepsilon|^p \leq C.$

Puisque $\gamma \geq 1$, l'inégalité précédente implique que

$$\int_{\{|u_\varepsilon|\geq 1\}} |\nabla u_\varepsilon|^p \leq \int_\Omega |u_\varepsilon|^{p(\gamma-1)}|\nabla u_\varepsilon|^p \leq C. \tag{2.33}$$

L'inégalité (2.29) ecrite pour $k = 0$, implique

$$\alpha\int_{\{|u_\varepsilon|<1\}} |\nabla u_\varepsilon|^p \leq C \| f \|_{L^1(\Omega)} \leq C. \tag{2.34}$$

De (2.33) et (2.34) on déduit que

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^p \leq C \tag{2.35}$$

■

Lemme 2.3 *soit $f \in L^m(\Omega)$, avec $m > 1$ telle que*

$$\frac{N}{N(p-1)+1} < m < \frac{pN}{(N-p)(p-1)+p^2} \tag{2.36}$$

et soit u_ε une solution au problème de pénalité (2.14). Alors la suite $u_\varepsilon$est bornée en $W_0^{1,q}(\Omega)$. de plus la suite $T_k(u_\varepsilon)$ est bornée en $W_0^{1,p}(\Omega)$, pour chaque $k > 0$

Preuve:

soit $k > k_0 = \| \psi \|_{L^\infty(\Omega)}$. $\varphi(u_\varepsilon) = T_1(G_k(u_\varepsilon))$ comme fonction de test dans (2.14), on obtient

$$\alpha \int_{B_k} |\nabla u_\varepsilon|^p \leq \int_{A_k} |f|. \tag{2.37}$$

soit $\lambda > 0$ un nombre positif (à fixer ultérieurment), on peut ecrire

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{|\nabla u_\varepsilon|^p}{(1+|u_\varepsilon|)^\lambda} &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B_k} \frac{|\nabla u_\varepsilon|^p}{(1+|u_\varepsilon|)^\lambda} \\ &\leq C \sum_{k=0}^{+\infty} (1+k)^{-\lambda} \int_{A_k} |f| \\ &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} (2+k)^{-\lambda} \sum_{h=k}^{+\infty} \int_{B_k} |f|, \end{aligned} \tag{2.38}$$

où A_k, etB_k sont les ensembles définies en (2.27). En changeant l'ordre de sommation, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{|\nabla u_\varepsilon|^p}{(1+|u_\varepsilon|)^\lambda} &= C \sum_{h=0}^{+\infty} \int_{A_k} |f| \sum_{k=0}^{h} (2+k)^{-\lambda} \\ &\leq C \sum_{h=0}^{+\infty} \int_{A_k} |f| (2+h)^{-\lambda+1} \\ &\leq C \sum_{h=0}^{+\infty} \int_{A_k} |f| (2+|u_\varepsilon|)^{-\lambda+1} \\ &\leq C \int_\Omega |f| (2+|u_\varepsilon|)^{-\lambda+1} \\ &\leq C \| f \|_{L^m(\Omega)} \left(1 + \left[\int_\Omega |u_\varepsilon|^{m'(-\lambda+1)} \right]^{\frac{1}{m'}} \right) \\ &\leq C \left(1 + \left[\int_\Omega |u_\varepsilon|^{m'(-\lambda+1)} \right]^{\frac{1}{m'}} \right). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Soit r et q comme définis précédément. On peut alors vérifier que $q < p$ et que $r = q*$.

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Sobolev 1.8, on obtient

$$\begin{aligned} \left[\int_\Omega |u_\varepsilon|^r \right]^{\frac{q}{r}} &\leq \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^q \\ &= \int_\Omega \frac{|\nabla u_\varepsilon|^q}{(1+|u_\varepsilon|)^{\frac{\lambda q}{p}}} (1+|u_\varepsilon|)^{\frac{\lambda q}{p}} \\ &\leq \left[\int_\Omega \frac{|\nabla u_\varepsilon|^p}{(1+|u_\varepsilon|)^\lambda} \right]^{\frac{q}{p}} \left[\int_\Omega (1+|u_\varepsilon|)^{\frac{\lambda q}{p-q}} \right]^{\frac{p-q}{p}} \\ &\leq C \left(1 + \left[\int_\Omega |u_\varepsilon|^{m'(-\lambda+1)} \right]^{\frac{q}{pm'}} \right) \left(1 + \left[\int_\Omega |u_\varepsilon|^{\frac{\lambda q}{p-q}} \right]^{\frac{p-q}{p}} \right). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Choisir λ telle que $\frac{\lambda q}{p-q} = r$, c'est a dire :

$$\lambda = \frac{pN - pm - Nm(p-1)}{N - pm} \tag{2.41}$$

Grâce au choix de λ dans (2.41), nous avons $(1-\lambda)m' = r$. Par conséquent le calcul et l'inégalité de Young1.11 implique

$$\left[\int_\Omega |u_\varepsilon|^{\frac{q}{r}}\right] \leq C\left(1 + \left[\int_\Omega |u_\varepsilon|^{\frac{q}{r}}\right]^{\frac{q}{pr}}\right). \tag{2.42}$$

Maintenant, nous soulignons que $\frac{q}{r} > \frac{q}{pr}$ par conséquent a partir de (2.42), il suit la bornitude de la suite u_ε dans $L^r(\Omega)$.

pour revenir à(2.40), cela implique à son tour la bornitude de la suite u_ε dans $W_0^{1,q}(\Omega)$. Cesi complète la preuve de la première partie du lemme(2.3). Afin de preuver la deuxieme partie, on utilise $T_k(u_\varepsilon - \varepsilon)$ avec $k > k_0 = \| \varepsilon \|_L^\infty (\Omega)$ comme fonction de test dans (2.14), pour obtenir :

$$\begin{aligned} &\alpha \int_{\{|u_\varepsilon - \psi| < k\}} |\nabla u_\varepsilon|^p - \frac{1}{\varepsilon^{p-1}} \int_\Omega ((u_\varepsilon - \psi)^-)^{p-1} T_k(u_\varepsilon - \psi) \\ &\leq \int_\Omega f T_k(u_\varepsilon - \psi) + \int_{\{|u_\varepsilon - \psi| < k\}} a(x, \nabla u_\varepsilon).\nabla \psi \end{aligned}. \tag{2.43}$$

on verifie que le deuxième terme du coté gauche de (2.43) n'est pas négatif, dans le fait on a

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\varepsilon^{p-1}} \int_\Omega ((u_\varepsilon - \psi)^-)^{p-1} T_k(u_\varepsilon - \psi) \\ &= -\frac{k}{\varepsilon^{p-1}} \int_{\{u_\varepsilon - \psi > k\}} ((u_\varepsilon - \psi)^-)^{p-1} \\ &-\frac{1}{\varepsilon^{p-1}} \int_{\{-k \leq u_\varepsilon - \psi \leq k\}} ((u_\varepsilon - \psi)^-)^{p-1} (u_\varepsilon - \psi) \\ &+\frac{k}{\varepsilon^{p-1}} \int_{\{u_\varepsilon - \psi < -k\}} ((u_\varepsilon - \psi)^-)^{p-1} \geq 0 \end{aligned}. \tag{2.44}$$

Maintenant on va estimer le deuxième terme dans le coté droit de (2.43)

$$\int_{\{|u_\varepsilon - \psi| < k\}} a(x, \nabla u_\varepsilon).\nabla \psi \leq C + \beta \int_{\{|u_\varepsilon - \psi| < k\}} |\nabla u_\varepsilon|^{p-1} \nabla \psi \tag{2.45}$$

Grâce à (2.2)et l'inégalité de Young 1.11 avec $\eta > 0$, le second terme de la cotée droite de (2.45) se peut estimiser comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{\{|u_\varepsilon - \psi| < k\}} |\nabla u_\varepsilon|^{p-1} |\nabla \psi| &\leq \eta \int_{\{|u_\varepsilon - \psi| < k\}} |\nabla u_\varepsilon|^p + C(\eta) \int_{\{|u_\varepsilon - \psi| < k\}} |\nabla \psi|^p \\ &\leq \eta \int_{\{|u_\varepsilon - \psi| < k\}} |\nabla u_\varepsilon|^p + C. \end{aligned}. \tag{2.46}$$

De (2.43) et(2.46), nous déduissons que

$$\alpha \int_{\{|u_\varepsilon-\psi|<k\}} |\nabla u_\varepsilon|^p \leq k \parallel f \parallel_{L^1(\Omega)} + \beta\eta \int_{\{|u_\varepsilon-\psi|<k\}} |\nabla u_\varepsilon|^p + C.$$

on choisit η telle que $\alpha = 2\beta\eta$, on obtient

$$\frac{\alpha}{2} \int_{\{|u_\varepsilon-\psi|<k\}} |\nabla u_\varepsilon|^p \leq k \parallel f \parallel_{L^1(\Omega)} + C. \tag{2.47}$$

Remplacer k par $k+ \parallel \psi \parallel_{L^\infty(\Omega)}$ en (2.47) et noter que $\{|u_\varepsilon| < k\} \subset \left\{|u_\varepsilon - \psi| < k+ \parallel \psi \parallel_{L^\infty(\Omega)}\right\}$

$$\frac{\alpha}{2} \int_{\{|u_\varepsilon|<k\}} |\nabla u_\varepsilon|^p \leq C(1+k),$$

donc

$$\int_{\{|u_\varepsilon|<k\}} |\nabla u_\varepsilon|^p \leq C(1+k), \quad pour \quad tout \quad k > k_0 \tag{2.48}$$

Par conséquant le lemme (2.3) est complètement prouvé. ■

Lemme 2.4 *soit $f \in L^1(\Omega)$et soitp $> 2 - \frac{1}{N}$, et soit u_ε solution le problème de pénalité*(2.14). *Alors la suite est bornée en $W^{1,\delta}(\Omega)$, pour tout $\delta < \frac{N(p-1)}{N-1}$, en plus la suite $T_k(\varepsilon)$ est bornée en $W^{1,p}(\Omega)$, pour tout $k > 0$.*

Preuve: de (2.37). ■

On a

$$\int_{B_k} |\nabla u_\varepsilon|^p \leq c_1$$

où $c_1 = \frac{\|f\|_{L^1(\Omega)}}{\alpha}$. Pour chaque $\delta < p$, l'inégalité de Hölder 1.9 implique que

$$\int_{B_k} |\nabla u_\varepsilon|^\delta \leq \left(\int_{B_k} |\nabla u_\varepsilon|^p\right)^{\frac{\delta}{p}} |B_k|^{\frac{p-\delta}{p}},$$

Où $|B_k|$ désigne la mesure du Lebesgue de l'ensemble B_k. D'autre part, comme

$$|B_k| \leq \frac{1}{k^{\delta^*}} \int_{B_k} |u_\varepsilon|^{\delta^*},$$

Ensuite on a

$$\int_{B_k} |\nabla u_\varepsilon|^\delta \leq c_2 \frac{1}{k^{\frac{\delta^*(p-\delta)}{p}}} \left(\int_{B_k} |u_\varepsilon|^{\delta^*}\right)^{\frac{p-\delta}{p}}$$

Appliquer l'inégalité de Hölder 1.9 avec l'exposant $\frac{p}{\delta}$ on trouve que pour tout entier positif l

$$\sum_{k=l}^{\infty} \int_{B_k} |\nabla u_\varepsilon|^\delta \leq C_3 \left(\sum_{k=l}^{\infty} \int_{B_k} |u_\varepsilon|^{\delta^*}\right)^{\frac{p-\delta}{p}} \left(\sum_{k=l}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{N(p-\delta)}{N-\delta}}}\right)^{\frac{\delta}{p}}.$$

Comme $\delta < \frac{N(p-1)}{N-1}$,on a$\frac{N(p-\delta)}{N-\delta} > 1$. Par conséquant l'estimation ci-dessus, avec (2.48), donne

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^\delta \leq C_5 + C_4 \left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{\delta^*} \right)^{\frac{p-\delta}{p}} \tag{2.49}$$

l'inégalité de Sobolev 1.8 implique

$$\left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{\delta^*} \right)^{\frac{\delta}{\delta^*}} \leq C_6 + C_7 \left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{\delta^*} \right)^{\frac{p-\delta}{p}} \tag{2.50}$$

Comme $\frac{\delta}{\delta^*} \geq \frac{p-\delta}{p}$ (étant $p < N$), puis de (2.50), on déduit que la suite u_ε est bornée en $W_0^{1,\delta}(\Omega)$. Ceci conclut la preuve de la premiére partie du lemme (2.4). La deuxième partie découlé immédiatement de (2.48).

Preuve des principaux résultats

Preuve: de théorème 2.2

En vertu du le lemme(2.1), il existe une fonction u appartient $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ telle que, jusqu'à aux sous-suite u_ε converge faiblement vers u dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, et presque partout en Ω.

Prouvons que u est une solution du problème unilatéral (2.5). Premièrement, nous prouvons que

$$u \geq \psi \qquad p.p \quad en \quad \Omega \tag{2.51}$$

On définit la suite suivante

$$\mu_n(s) = \frac{s(1+n|s|)}{1+|s|(1+n|s|)}, \tag{2.52}$$

qui converge vers

$$\mu(s) = \begin{cases} 1 & si \quad s > 0, \\ 0 & si \quad s = 0, \\ -1 & si \quad s < 0. \end{cases} \tag{2.53}$$

De plus nous avons pour chaque $n \in \mathbb{N}$, μ_n est continue et différentiellement continu par morceaux avec $\mu_n(0) = 0$, $\mu_n' \geq 0$ et $sup_{s\in\mathbb{R}} \ \mu_n'(s) < C$ pour tout constant positif indépendant de n.

on prend $\mu_n(u_\varepsilon - \psi)$ comme fonction de test en (2.14), on obtient

$$\begin{aligned} &\alpha \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^p \mu_n'(u_\varepsilon - \psi) - \frac{1}{\varepsilon^{p-1}} \int_\Omega ((u_\varepsilon - \psi)^-)^{p-1} \mu_n(u_\varepsilon - \psi) \\ &\leq \int_\Omega f_\varepsilon \mu_n(u_\varepsilon - \psi) + \int_\Omega a(x, \nabla u_\varepsilon).\nabla\psi.\mu_n'(u_\varepsilon - \psi). \end{aligned} \tag{2.54}$$

Le dernier terme de l'inégalité précédente on peut le estimiser en utilisant l'inégalité de Young 1.11

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(x,\nabla u_\varepsilon).\nabla\psi.\mu_n'(u_\varepsilon-\psi)\\
&\leq \beta\int_\Omega (j(x)+|\nabla u_\varepsilon|^{p-1}).\nabla\psi.\mu_n'(u_\varepsilon-\psi)\\
&\leq C+\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-1}.|\nabla\psi|.\nabla\psi.\mu_n'(u_\varepsilon-\psi)\\
&\leq C+\frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p}.\mu_n'(u_\varepsilon-\psi).
\end{aligned}$$

Ceci et (2.54) implique que

$$-\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\int_\Omega((u_\varepsilon-\psi)^-)^{p-1}\mu_n(u_\varepsilon-\psi)\leq C+\int_\Omega f_\varepsilon\mu_n(u_\varepsilon-\psi). \tag{2.55}$$

En utilisant la convergence monotone 1.14 et théorème de Lebesgue 1.13, nous pouvons passer à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient

$$-\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\int_\Omega((u_\varepsilon-\psi)^-)^{p-1}\mu(u_\varepsilon-\psi)\leq C+\int_\Omega f_\varepsilon\mu(u_\varepsilon-\psi)\leq C+\parallel f\parallel_{L^1(\Omega)}.$$

donc

$$\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\int_\Omega((u_\varepsilon-\psi)^-)^{p-1}=\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\int_{\{u_\varepsilon<\psi\}}((u_\varepsilon-\psi)^-)^{p-1}\leq C. \tag{2.56}$$

De (2.56) elle suivit la bornitude de la suite $\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}((u_\varepsilon-\psi)^-)^{p-1}$ en $L^1(\Omega)$,et

$$((u_\varepsilon-\psi)^-)^{p-1}\to 0 \ \ fortement \ \ en \ \ L^1(\Omega). \tag{2.57}$$

Grace à(2.57), on a

$$(u_\varepsilon-\psi)^-=0 \ \ p.p \ \ en \ \ \Omega, \tag{2.58}$$

Lequelle prouve (2.51).

En plus, comme $\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}((u_\varepsilon-\psi)^-)^{p-1}+f_\varepsilon$ est borné en $L^1(\Omega)$, alors ce implique que

$$\nabla u_\varepsilon\to\nabla u \ \ p.p \ \ en \ \ \Omega \tag{2.59}$$

Soit $v\in w_0^{1,p}(\Omega)$ avec $v\geq\psi$ p.p en Ω.

On va tester (2.14) avec $u_\varepsilon-v$, on obtient

$$\int_\Omega a(x,\nabla u_\varepsilon).\nabla(u_\varepsilon-v)-\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\int_\Omega((u_\varepsilon-\psi)^-)^{p-1}(u_\varepsilon-v)=\int_\Omega f_\varepsilon(u_\varepsilon-v). \tag{2.60}$$

On verifie que le deuxième terme du coté gauche n'est pas négatif, dans le fait on obtient

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\int_\Omega((u_\varepsilon-\psi)^-)^{p-1}(u_\varepsilon-v)\\ &=-\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\int_\Omega((u_\varepsilon-\psi)^-)^{p-1}(u_\varepsilon-\psi)\ .\\ &-\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\int_\Omega((u_\varepsilon-\psi)^-)^{p-1}(\psi-v)\geq 0 \end{aligned} \tag{2.61}$$

L'estimation au-dessus avec (2.60) donne

$$\int_\Omega a(x,\nabla u_\varepsilon).\nabla u_\varepsilon-\int_\Omega a(x,\nabla u_\varepsilon).\nabla v\leq\int_\Omega f_\varepsilon(u_\varepsilon-v.) \tag{2.62}$$

Dans le deuxième terme du coté gauche de (2.62) on a : en utilisant (2.2), la bornitude de la suite u_ε en $W_0^{1,p}(\Omega)$(par le lemme 2.1 et 2.2), et la convergence presque partout de ∇u_ε en Ω vers ∇u on déduit que

$$\parallel a(x,\nabla u_\varepsilon)\parallel_{(L^{p'}(\Omega))^N}\leq C, \tag{2.63}$$

et

$$a(x,\nabla u_\varepsilon)\to a(x,\nabla u)\ \ p.p\ \ en\ \ \Omega, \tag{2.64}$$

Par (2.63) et (2.64)et en utilisant le théorème de Vitali 1.6, nous pouvons conclure que

$$a(x,\nabla u_\varepsilon)\to a(x,\nabla u)\ \ faiblement\ \ en\ \ (L^{p'}(\Omega))^N \tag{2.65}$$

d'où

$$\int_\Omega a(x,\nabla u_\varepsilon).\nabla v\to\int_\Omega a(x,\nabla u).\nabla v \tag{2.66}$$

pour le premier terme du coté gauche de (2.62), en utilisant le lemme de Fatou 1.17, on obtient

$$\int_\Omega a(x,\nabla u).\nabla u\leq\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega a(x,\nabla u_\varepsilon).\nabla u_\varepsilon \tag{2.67}$$

Maintenant on passe à la limite dans le coté droit de (2.62). Comme la suite u_ε est bornée en $L^r(\Omega)$ (d'aprés lemme 2.1 et 2.2, $r\geq m'$), et la convrgence forte de f_ε vers $f\in L^m(\Omega)$, donc

$$\int_\Omega f_\varepsilon(u_\varepsilon-v)\to\int_\Omega f(u-v). \tag{2.68}$$

On passe à la limite en (2.62) on obtient

$$\int_\Omega a(x,\nabla u).\nabla(u-v)\leq\int_\Omega f(u-v). \tag{2.69}$$

donc, u est une solution du problème unilatéral (2.5). ■ **Preuve:** du théorème 2.1

Grâce à 2.1 la suite $\{u_\varepsilon\}$ solution du problème de pénalité (2.14) est borné en $W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, donc aussi en $W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^r(\Omega)$, alors la preuve du théorème 2.1 est identique avec le théorème 2.2 ■

Preuve: du théorème 2.3

Par le lemme 2.3, il exsiste une fonction u appartient à $W_0^{1,q}(\Omega)$ telle que, jusqu'au les sous-suites,u_ε converge faiblement en $W_0^{1,q}(\Omega)$, et presque partout en Ω vers u et $T_k(u_\varepsilon)$ converge faiblement en $W_0^{1,p}(\Omega)$,et presque partout en Ω vers $T_k(u)$ pour chaque $k>0$. En plus, comme la suite $\frac{1}{\varepsilon^{p-1}((u_\varepsilon)^-)^{p-1}}+f_\varepsilon$ est bornée en $L^1(\Omega)$, et on a ∇u_ε converge presque partout vers ∇u en Ω .

Maintenant on va montrer que u satisfie (2.8).

D'abord par quelques téchniques utilisées dans la peuve du théorème (2.2), on a $u\geq\psi$.soit $v\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ avec $v\geq\psi$ p.p. en Ω. On teste (2.14) avec $T_k(u_\varepsilon-v)$, on obtient

$$\int_\Omega a(x,\nabla u_\varepsilon).\nabla T_k(u_\varepsilon-v)-\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\int_\Omega((u_\varepsilon-\psi)^-)^{p-1}T_k(u_\varepsilon-v)=\int_\Omega f_\varepsilon T_k(u_\varepsilon-v). \tag{2.70}$$

on vérifie que le deuxiéme terme du coté gauche est n'est pas négatif, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\int_\Omega((u_\varepsilon-\psi)^-)^{p-1}T_k(u_\varepsilon-v)=&-\frac{k}{\varepsilon^{p-1}}\int_{\{u_\varepsilon-v\geq k\}}((u_\varepsilon-\psi)^-)^{p-1}\\&+-\frac{k}{\varepsilon^{p-1}}\int_{\{u_\varepsilon-v\leq -k\}}((u_\varepsilon-\psi)^-)^{p-1}\\&-\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\int_{\{|u_\varepsilon-v|<k\}}((u_\varepsilon-\psi)^-)^{p-1}(u_\varepsilon-\psi)\\&-\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\int_{\{|u_\varepsilon-v|<k\}}((u_\varepsilon-\psi)^-)^{p-1}(\psi-v)\geq 0.\end{aligned} \tag{2.71}$$

L'estimation ci-dessus avec (2.70), donne

$$\int_{\{|u_\varepsilon-v|<k\}}a(x,\nabla u_\varepsilon).\nabla u_\varepsilon+\int_{\{|u_\varepsilon-v|<k\}}a(x,\nabla u_\varepsilon).\nabla v\leq\int_\Omega f_\varepsilon T_k(u_\varepsilon-v).$$

Comme dans l'ensemble $\{x\in\Omega;|u_\varepsilon-v|<k\}$, et $|u_\varepsilon|\leq h=k+\parallel v\parallel_{L^\infty(\Omega)}$. Par conséquent l'inégalité précédent se peut écrire comme

$$\int_\Omega\chi_\varepsilon a(x,\nabla u_\varepsilon).\nabla u_\varepsilon+\int_\Omega A(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon).\nabla v\leq\int_\Omega f_\varepsilon T_k(u_\varepsilon-v). \tag{2.72}$$

Où $\chi_\varepsilon=\chi_{\{|u_\varepsilon-v|<k\}}(x)$, et $A(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)=a(x,\nabla T_h var(u_\varepsilon))\chi_\varepsilon(x)$.

on passe à la limite en (2.72). Dans le coté droit il est simple comme f_ε est converge fortement

vers f en $L^1(\Omega)$, et $T_k(u_\varepsilon - v)$ converge vers $T_k(u-v)$ *faiblement en $L^\infty(\Omega)$. Quant à le premier terme du coté gauche nous avons, en utilisant lemme de Fatou 1.17

$$\int_\Omega \chi a(x,\nabla u).\nabla u \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \chi_\varepsilon a(x,\nabla u_\varepsilon).\nabla u_\varepsilon, \tag{2.73}$$

Où $\chi(x) = \chi_{\{|u-v|<k\}}(x)$. En le deuxième terme du coté gauche nous avons, en utilisant (2.2), la bornitude de la suite $T_h(u_\varepsilon)$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$, et la convergence presque partout de ∇u_ε en Ω vers ∇u, on déduit que

$$\| A(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon) \|_{(L^{p'}(\Omega))^N} \leq C \tag{2.74}$$

et

$$A(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon) \to A(x,u,\nabla u) \;\; p.p \;\; en \;\; (L^{p'}(\Omega))^N \tag{2.75}$$

Où $A(x,u,\nabla u) = a(x,\nabla T_h(u))\chi_{\{|u-v|<k\}}(x)$. Par (2.74) et (2.75), et en utilisant le théorème de Vitali 1.6 nous pouvons conclure que

$$A(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon) \to A(x,u,\nabla u) \;\; faiblement \;\; en \;\; (L^{p'}(\Omega))^N. \tag{2.76}$$

aussi

$$\int_\Omega A(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon).\nabla v \to \int_\Omega A(x,u,\nabla u).\nabla v \tag{2.77}$$

On pose ε tend vers zéro en (2.72) donne

$$\int_\Omega \chi a(x,\nabla u).\nabla u + \int_\Omega \chi a(x,\nabla T_h(u)).\nabla v \leq \int_\Omega f_\varepsilon T_k(u-v). \tag{2.78}$$

Comme $T_h(u) = u$ dans l'ensemble $\{x\in\Omega; |u-v|<k\}$, l'inégalité précédent se peut écrire comme suit

$$\int_\Omega a(x,\nabla u).\nabla T_k(u-v) \leq \int_\Omega f_\varepsilon T_k(u-v). \tag{2.79}$$

Ceci la fin de preuve du théorème 2.3. ■

Preuve: du théorème 2.4

Par le lemme 2.4, il existe une fonction u appartient à $W_0^{1,\delta}(\Omega)$ telle que jusqu'au les sous-suites u_ε converge faiblement en $W_0^{1,\delta}(\Omega)$, et presque partout en Ω vers u, et $T_k(u_\varepsilon)$ converge faiblement en $W_0^{1,p}(\Omega)$, et presque partout en Ω vers $T_k(u)$ pour chaque $k>0$.

En plus comme la suite $\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}((u_\varepsilon-\psi)^-)^{p-1} + f_\varepsilon$ est bornée en $L^1(\Omega)$ donc on a la convergence presque partout de ∇u_ε vers ∇u en Ω ■

Conclusion

Dans ce mémoire on a traité un type des problèmes elliptiques qu'il est le problème unilatéral de raison a cherché l'existence et la régularité des solutions généralement sur l'espace de Sobolev en utilisant la méthde de pénalization.

Bibliographie

[1] Hocine Ayadi - Rezak Souilah : *EXISTENCE AND REGULARITY REUSLTS FOR UNILATERAL PROBLEMS WITH DEGENERATE COERCIVITY.* Math. Slovaca **69** (2019), No. 6, 1351-1366.

[2] ALVINO, A.-BOCCARDO, L.-FERONE, V.-ORSINA, L.-TROMBETTI, G. : *Existence results for non- linear elliptic equations with degenerate coercivity.* Ann. Mat. Pura Appl. **182** (1) (2003), 53-79.

[3] BOCCARDO, L.-BREZIS, H. : *Some remarks on a class of elliptic equations with degenerate coercivity,* Boll. Unione Mat. Ital. **6** (2003), 521–530.

[4] BOCCARDO, L.-CIRMI, R. : $W_0^{1,1}$ *solutions of some unilateral problems,* Nonlinear Anal. **121** (2015), 447-457.

[5] BOCCARDO, L.-CIRMI, R. : *Existence and uniqueness of solutions of unilateral problems with* L^1 *data,* J.Convex Anal.**6** (1999), 195-206.

[6] BOCCARDO, L.-CIRMI, R. : *Unilateral problems with degenerate coercivity,* Le Matematiche **54** (3) (1999),61-73.

[7] BOCCARDO, L.-DALL'AGLIO, A.-ORSINA, L. : *Existence and regularity resultsfor some elliptic equations with degerate coercivity,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Moderna **46** (1988), 51-81.

[8] BOCCADRO, L-GALLOUËT, T. : *Problèmes unilatéraux avec données dans* L^1*,* C.R. Acad. Sci. Paris, **311** (1990), 617-619.

[9] BOCCADRO, L.-MURAT F. : *Almost every-where convergence of the gradients of solutions to elliptic and parabolic equations,* Nonlinear Anal. TMA **19** (1992), 581-597.

[10] LERAY, J.-LIONS, J.-L. : *Quelques méthodes de Visik sur les problèmes elliptiques semilinéaires par les méthodes de Minty et Browder,* Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 97-107.