République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Par

Imane Deriadi

ON THE SUB SUPERSOLUTION METHOD FOR ELLIPTIC PROBLEMS

Soutenu publiquement le 29 juin 2025 devant le jury composé de

Haoues BAGUA	*MAA.* **Univ. Médéa**	**Président**
Rezak SOUILAH	*MCA.* **Univ. Médéa**	**Encadreur**
Khaled BOUADJILA	*MCA.* **Univ. Médéa**	**Examinateur**

Année universitaire 2024/2025

Remerciements

Tout d'abord, je voudrais remercier ***Allah****, tout puissant, qui m'a donné la force de mener à bien ce travail.*

Avec toute ma gratitude et ma considération, j'adresse mes sincères remerciements à Monsieur ***R. SOUILAH****, pour la bienveillance avec laquelle il a encadré ce travail, pour ses orientations constructives et ses conseils précieux, ainsi que pour les efforts considérables et le temps précieux qu'il a consacrés à me suivre tout au long des différentes étapes de l'élaboration de cette recherche.*

Mes remerciements vont également à Monsieur ***H. BAGUA****, président du jury qui a accepté de relire ce travail.*

Je remercie vivement Monsieur ***K. BOUADJILA*** *qui m'a fait honneur en acceptant d'examiner et de juger ce travail.*

Je souhaite aussi remercier tous les enseignants du département de mathématiques et informatique de la faculté des sciences de l'université Yahia Farès Médéa.

إهداء

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات

الحمد لله ما تم ولا ختم ولا سعى إلا بفضله عز وجل

إلى والدي العزيز، سندي في الحياة،

يا من غرست في قلبي معنى الاجتهاد والاعتماد على النفس

أهديك هذا العمل عربون امتنان لما بذلته من جهد، فلك كل التقدير والمحبة

إلى من كانت دوما النور الذي يهديني، والملاذ الذي ألوذ إليه،

إلى من علمتني أن الصبر مفتاح الفرج،

إلى أمي الحبيبة، رمز العطاء والحنان، لك وحدك أهدي ثمرة جهدي،

فكل نجاحي هو امتداد لتضحياتك

إلى إخوتي وأخواتي الأحبة، معرفي، هشام، كريمة، يسرى ولزوجي

أنتم النبض الجميل في حياتي، أرجو من الله أن يمنحكم سعادة دائمة

إلى صديقاتي العزيزات: نور الهدي، حنان، وداد، إكرام،

وإلى كل زملائي وزميلاتي في تخصص التحليل الرياضي وتطبيقاته،

كانت صحبتكم دعما وسندا لا ينسى، بلكم مني أسمى عبارات الشكر والتقدير.

إيمان

Résumé

Le but de ce mémoire est d'introduire la méthode des sous-et sur-solutions pour la résolution de quelques problèmes elliptiques non-linéaires.

Mots-clés :Sous- et sur-solution, sous- et sur-solution faible, Minimiseur relatif

Notations

Ω	un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$
$\partial\Omega$	frontière topologique de Ω
$x=(x_1,\cdots,x_N)$	point générique de $\mathbb{R}^N$
$dx=dx_1dx_2\cdots dx_N$	mesure de Lebesgue sur Ω
$\overline{\Omega}$	l'adhérence de l'ensemble Ω
$\rightharpoonup$	la convergence faible
p.p.	presque partout
V	un espace de Banach
H	un espace de Hilbert
V'	le dual topologique de V
$\langle .,. \rangle_{V'\times V}$	le crochet de dualité entre l'espace V et son dual topologique V'
$\|.\|$	la norme sur l'espace de Banach V
$(.,.)$	le produit scalaire sur l'espace de Hilbert H
$\|.\|$	la norme sur l'espace de Hilbert H
$\mathbb{R}^{m\times N}$	l'espace des matrices réelles.
Id	désigne la matrice d'identité.
$f^+=\max(f,0)$, $f^-=\max(-f,0)$	la partie positive et négative de la fonction f
$\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$	l'espace des fonctions continues
$\mathscr{D}(\Omega)=\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$	espace des fonctions différentiables et à support compact dans Ω
$\mathscr{C}^k(\Omega)$	espace des fonctions k-fois continûment différentiables dans Ω
$\mathscr{D}'(\Omega)=(\mathscr{D}(\Omega))'$	l'espace des distributions

Introduction

La méthode des **sous- et sur-solutions** est une technique fondamentale en analyse non linéaire, utilisée pour étudier l'existence, la multiplicité et les propriétés qualitatives des solutions d'équations aux dérivées partielles (**EDP**) et d'inéquations variationnelles. Bien que certains principes sous-jacents soient déjà présents dans le procédé de Perron [45] pour obtenir des fonctions harmoniques satisfaisant (au sens généralisé) des conditions aux limites données, c'est avec l'article de Dragoni [20] que l'on trouve l'une des premières utilisations systématiques d'une paire ordonnée de solutions vérifiant des inégalités différentielles pour établir l'existence d'une solution à un problème aux limites pour une équation différentielle ordinaire non linéaire du second ordre.

Ce travail a été suivi par des contributions majeures de Nagumo [39, 40], qui ont inspiré de nombreuses recherches sur les problèmes avec conditions aux limites de Dirichlet, tant pour les équations différentielles ordinaires que pour les équations aux dérivées partielles. Dans les années soixante, des auteurs tels que Akô [2] et Sattinger [51] ont étendu la méthode aux équations elliptiques et paraboliques quasi-linéaires, tandis que Deuel et Hess [17] en ont formalisé la version pour les solutions faibles. Par la suite, les travaux de Szulkin [53] et Papageorgiou [42] ont permis d'adapter la méthode aux inégalités variationnelles, et Carl et al. [10] ont étudié les solutions extrémales.

Le principe fondamental repose sur la construction de deux fonctions $\underline{u}$ et $\overline{u}$, appelées respectivement **sous-solution** et **sur-solution**, qui satisfont des inéquations différentielles appropriées ainsi que certaines conditions aux-limites. Sous des hypothèses adéquates, on démontre l'existence d'une solution $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$ pour l'EDP considérée.

Ce travail propose une analyse approfondie de la méthode des sous- et sur-solutions appliquée aux problèmes elliptiques semi-linéaires. Elle est organisée en quatre chapitres. Le premier est entièrement consacré à la présentation des définitions et des résultats fondamentaux nécessaires à la suite de ce travail. Le deuxième chapitre présente une étude

des propriétés des solutions des équations elliptiques, incluant le principe du maximum, la régularité des solutions faibles et les propriétés spectrales liées aux problèmes de valeurs propres, essentielles pour la construction de sous- et sur-solutions. Le troisième chapitre donne une exposition de la méthode dans le cadre classique, avec les hypothèses nécessaires, les résultats d'existence et des applications à des problèmes semi-linéaires concrets, où les non-linéarités sont suffisamment régulières pour appliquer les outils classiques de comparaison. Le dernier chapitre développe l'approche dans un cadre plus général, en considérant des solutions au sens faible. On y introduit les notions de solutions généralisées, on discute des critères de convergence, et on présente des exemples où les méthodes classiques échouent mais où la méthode faible permet de garantir l'existence de solutions.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé i

Notation ii

Introduction iii

1 Préliminaires 1

1 Compacité dans un espace vectoriel normé 1

2 Espaces de Hölder 1

3 Espaces de Lebesgue 5

4 Espaces de Sobolev 9

5 Minimisation d'une fonctionnelle 13

2 Principes du maximum, régularité elliptique et problèmes de valeurs propres 16

1 Principes du maximum 16

2 Régularité elliptique 21

3 Principe de comparaison faible. 22

4 Problèmes de valeurs propres pour Laplacien 23

3 **Méthode de sous et sur-solutions classiques pour un problème sémi-linéaire** 24

1 Mise en œuvre de la méthode 24

2 Applications de la méthode 35

4 **Méthode de sous et sur-solutions faibles pour un problème sémi-linéaire** 41

1 Cas la non-linéarité est une fonction C^1 41

2 Problème sémi-linéaire avec la non-linéarité est une fonction de Carathéodory 48

Préliminaires

1

Chapitre

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et rappels des résultats nécessaires pour la suite de ce travail. Nous introduisons quelques définitions, lemmes et quelques théorèmes sur les espaces fonctionnels.

1.1 Compacité dans un espace vectoriel normé

THÉORÈME 1.1 ((Ascoli-Arzelà [1, 31])): Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. Un ensemble $G \subset C(\overline{\Omega})$ est relativement compact si et seulement s'il est borné et équicontinu, c'est-à-dire s'il existe une constante C telle que

$$|u(x)| \leq C,$$

pour tout $x \in \overline{\Omega}$ et tout $u \in G$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|u(x) - u(y)| < \varepsilon,$$

pour tout $x, y \in \overline{\Omega}$ vérifiant $|x - y| < \delta$ et tout $u \in G$.

1.2 Espaces de Hölder

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

DÉFINITION 1.1: (Continuité höldérienne [13])

Soit u une fonction définie sur Ω, et soit $x_0 \in \Omega$. Si pour un certain $0 < \gamma < 1$,

$$\sup_{x \in \Omega} \frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|^\gamma} < \infty, \tag{1.1}$$

alors u est dite höldérienne continue en point x_0 par rapport à Ω, avec l'exposant γ.
Si $\gamma = 1$ dans la définition ci-dessus, alors u est dite Lipschitz continue en x_0.

DÉFINITION 1.2: (Fonction uniformément hölderienne [21, 31])

Une fonction à valeurs réelles u définie sur Ω est dite uniformément hölderienne avec un exposant de Hölder $0 < \gamma \leq 1$ s'il existe une constante C telle que

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^{\gamma}$$

pour tout $x, y \in \Omega$.
Par $C^{0,\gamma}(\Omega)$, on désigne l'espace vectoriel de toutes les fonctions définies sur Ω qui sont bornées et uniformément hölderiennes avec l'exposant γ. L'espace $C^{0,\gamma}(\Omega)$ est appelé un espace de Hölder.

DÉFINITION 1.3: [21]

1. Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est bornée et continue, nous écrivons

$$\|u\|_{C(\Omega)} := \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

2. La semi-norme de Hölder d'ordre γ de $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\Omega)} := \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\gamma}} \right\},$$

et la norme de Hölder d'ordre γ est

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\Omega)} := |u|_{C(\Omega)} + [u]_{C^{0,\gamma}(\Omega)}.$$

DÉFINITION 1.4: [13, 21]

L'espace de Hölder $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ consiste en toutes les fonctions $u \in C^k(\overline{\Omega})$ pour lesquelles la norme

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}$$

est finie. Ainsi, l'espace $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ consiste en les fonctions u qui sont k fois continûment différentiables et dont les dérivées partielles d'ordre k sont bornées et Hölder continues avec l'exposant γ.

THÉORÈME 1.2 ([21, 31]): L'espace $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ est un espace de Banach.

Preuve.

Il est clair que

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma}$$

définit une semi-norme sur $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Alors $\|\cdot\|_\gamma = \|\cdot\|_\infty + |\cdot|_\gamma$ est une norme, puisque $\|u\|_\infty := \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|$ définit une norme. La convergence dans la norme supremum $\|\cdot\|_\infty$ est équivalente à la convergence uniforme sur $\overline{\Omega}$. Si Ω est compact, la norme supremum et la norme maximale sur $C(\overline{\Omega})$ coïncident.

Il reste à montrer que $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ est complet. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Alors, évidemment, (u_n) est aussi une suite de Cauchy par rapport à la norme $\|.\|_\infty$, et par le critère de Cauchy concernant la convergence uniforme, il existe une fonction $u \in C(\overline{\Omega})$ telle que $\|u_n - u\|_\infty \to 0$, $n \to \infty$. Parce que (u_n) est une suite de Cauchy dans $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $[u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} < \varepsilon$ pour tout $n, k \geq N(\varepsilon)$, c'est-à-dire

$$\Big|(u_n(x)-u_k(x))-\big(u_n(y)-u_k(y)\big)\Big| < \varepsilon|x-y|^\gamma,$$

pour tout $n, k \geq N(\varepsilon)$ et tout $x, y \in \overline{\Omega}$.

Puisque $u_n \to u$, $n \to \infty$, uniformément sur Ω, en faisant tendre $k \to \infty$, on a

$$\Big|(u_n(x)-u(x))-\big(u_n(y)-u(y)\big)\Big| < \varepsilon|x-y|^\gamma,$$

pour tout $n \geq N(\varepsilon)$ et tout $x, y \in \overline{\Omega}$. De cela, on conclut que $u \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ et $[u_n - u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N(\varepsilon)$, ce qui implique $\|u_n - \varphi\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \to 0$, $n \to \infty$.

THÉORÈME 1.3 ([31]): Soient Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^N$ et $0 < \gamma \leq 1$. Alors l'injection $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ est compacte.

Preuve.

Soit G un ensemble borné dans $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ c'est-à-dire

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C \quad \text{pour tout } u \in G,$$

où C est une constante positive.

Alors on a

$$|u(x)| \leq C \quad \text{pour tout } x \in \overline{\Omega},$$

et

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^{\gamma},$$

pour tout $x, y \in \overline{\Omega}$ et $u \in G$, c'est-à-dire que G est borné et équicontinu. Par conséquent, par le théorème d'Arzela-Ascoli, l'ensemble G est relativement compact dans $C(\overline{\Omega})$, ce qui implique que l'injection $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ est compacte.

THÉORÈME 1.4 ([1, Theorem 1.34]): Soient Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^N$, m un entier positif et $0 < \gamma \leq 1$. Alors l'injection $C^{m,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$ est compacte.

1.3 Espaces de Lebesgue

1.3.1 Notions générales

DÉFINITION 1.5

On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par :

Pour $1 \leq p < +\infty$

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mesurable}, \quad \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < +\infty \right\},$$

mini de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = +\infty$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mesurable}, \quad \sup_{x \in \Omega} ess|u(x)| < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} ess|u(x)|.$$

$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$ et de Hilbert Pour $p = 2$ muni de produit scalaire

$$(f, g) = \int_\Omega f(x) g(x) \, dx.$$

PROPOSITION 1.1 – Séparabilité, réflexivité et dual de $L^p(\Omega)$ [9]. Les assertions suivantes sont vraies.

1. $L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < +\infty$ et réflexif pour $1 < p < +\infty$.
2. Le dual de $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$ est isomorphe à $L^{p'}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
3. $L^1(\Omega)$ est séparable, ni réflexif et son dual est $L^\infty(\Omega)$.
4. $L^\infty(\Omega)$ ni séparable, ni réflexif et son dual est contient strictement $L^1(\Omega)$.

LEMME 1.1 (Inégalité de Young [9])

Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Pour tout réel positif a et b, on a

$$a\,b \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}.$$

LEMME 1.2 (Inégalité de Convexité [9])

Soient $a \geq 0$, $b \geq 0$ et soit $1 \leq p < +\infty$. On a

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

PROPOSITION 1.2 – Inégalité de Hölder [9]. Soient $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Alors $fg \in L^1$ et

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^{p'}}.$$

PROPOSITION 1.3 – Compacité $L^p - L^q$ [9]. Soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Si $|\Omega| < +\infty$ alors $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$. De plus, l'injection est compacte pour $p < q$.

1.3.2 Mode de convergence dans les espaces $L^p(\Omega)$

DÉFINITION 1.6: Convergence forte, convergence faible dans $L^p(\Omega)$

Soient $p \in [1,\infty[$,et $\{f_n, f\}$ une famille de $L^p(\Omega)$.

- On dit que f_n converge fortement vers f dans $L^p(\Omega)$ et on note $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$.
- On dit que f_n converge faiblement vers f dans $L^p(\Omega)$ et on note $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\Omega (f_n - f).g = 0,\ \forall g \in L^{p'}(\Omega)$, avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.
- On dit que f_n converge faible $*$ vers f dans $L^\infty(\Omega)$ et on note $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ dans $L^\infty(\Omega)$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\Omega (f_n - f).g = 0,\ \forall g \in L^1$.

PROPOSITION 1.4 – [9]. Lorsque E est de dimension finie, la topologie faible $\sigma(E, E')$ et la topologie usuelle coïncident. En particulier, une suite (x_n) converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.

THÉORÈME 1.5 ([9, 14]): Soit X un espace normé et supposons que $x_n \to x$ (faiblement). Alors :

1. (x_n) est bornée dans la norme de X, c'est-à-dire $\sup \|x_n\| < \infty$.
2. La limite faible x de (x_n) est unique.

LEMME 1.3 (Lemme de Fatou [35])

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction mesurable, à valeurs dans $[0, +\infty[$ on a

$$\int_\Omega \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)\, dx \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega f_n(x)\, dx.$$

PROPOSITION 1.5 – Théorème de convergence dominée [35]. Soit $1 \leq p < +\infty$, $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$. On suppose que

1. $f_n \longrightarrow f$ p.p dans Ω.
2. il existe $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|f_n| \leq g$ p.p dans Ω.

Alors

$$f_n \to f \quad \text{dans} \quad L^p(\Omega).$$

La proposition suivante est la réciproque partielle du proposition 1.5.

PROPOSITION 1.6 – [28]. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge vers f dans $L^p(\Omega)$. Alors il existe une sous suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et une fonction g de $L^p(\Omega)$ telles que :

1. $f_{n_k}(x) \longrightarrow g(x)$ p.p. sur Ω.
2. $\forall k \in \mathbb{N}, |f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω.

La proposition suivante est une généralisation de la proposition 1.5.

PROPOSITION 1.7 – [49]. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions mesurables sur E qui converge ponctuellement presque partout sur E vers f. Supposons qu'il existe une suite $\{g_n\}$ de fonctions mesurables non négatives sur E qui converge ponctuellement presque partout sur E vers g et domine $\{f_n\}$ sur E dans le sens où

$$|f_n| \leq g_n \text{ sur } E \text{ pour tout } n.$$

Si

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n = \int_E g < \infty,$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f.$$

La proposition suivante donne le lien entre la bornitude et la convergence faible dans les espaces de Lebesgues réfléxifs.

PROPOSITION 1.8 – [8]. Soit $1 < p < \infty$ et soient f_n des fonctions dans $L^p(\mu)$ convergeant presque partout (ou en mesure) vers une fonction f. Alors, une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de $\{f_n\}$ vers f dans la topologie faible de $L^p(\mu)$ est la bornitude de $\{f_n\}$ dans la norme de $L^p(\mu)$.

1.3.3 Opérateurs de Nemytskii (opérateurs de superposition)

DÉFINITION 1.7: (Fonction de Carathéodory)

Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dite que f est de Carathéodory si :

1. $f(.,s) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable pour tout $s \in \mathbb{R}$,
2. $f(x,.) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue presque partout $x \in \Omega$.

DÉFINITION 1.8: (Opérateur de Nemitski)

Soient $u : \Omega \to \mathbb{R}$ et $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. l'opérateur N_f défini par $(N_f u)(x) = f(x, u(x))$ est appelé opérateur de Nemitski relatif à f.

THÉORÈME 1.6 (Continuité de l'opérateur de Nemytskii[43]): Si f est de Carathéodory et elle existe une fonction positive $a \in L^{p'}(\Omega)$ et une constante $b > 0$, tels que

$$|f(x,t)| \leq a(x) + b|t|^{p-1}.$$

alors l'opérateur de Nemytskii est continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^{p'}(\Omega)$.

1.4 Espaces de Sobolev

DÉFINITION 1.9: (Espaces de Sobolev ($W^{1,p}(\Omega)$))

On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$,pour $1 \leq p \leq +\infty$ par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \quad \nabla u \in (L^p(\Omega))^N\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si} \quad 1 \leq p < \infty, \\ \max\left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}\right), & \text{si} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Pour $p = 2$, l'espace $W^{1,2}(\Omega)$ noté $H^1(\Omega)$ est de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)},$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

PROPOSITION 1.9 – Complétude, séparabilité, et réflexivité de $W^{1,p}(\Omega)$ [1, 9] . L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach, et séparable pour $1 \leq p < +\infty$, et réflexif pour $1 < p < +\infty$.

DÉFINITION 1.10: (Espaces de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$)

Soit $1 \leq p < +\infty$. On note $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, (c'est-à-dire $W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{\mathscr{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$)

Le théoréme suivant donne une Caractérisation de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ via le théoreme de trace (voir [48])

THÉORÈME 1.7: On suppose que Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega); \quad v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

DÉFINITION 1.11: (Espace de Sobolev $W^{-1,p'}(\Omega)$)

L'espace de Sobolev $W^{-1,p'}(\Omega)$ est le dual topologique de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$; c'est-à-dire : l'espace vectoriel de toutes les formes linéaires continues sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.

DÉFINITION 1.12: (Convergence faible, convergence forte dans $W^{1,p}(\Omega)$)

Soient $p \in [1, +\infty[$ et $\{f_n, f\}$ une famille de $W^{1,p}(\Omega)$.

- On dit que f_n converge fortement vers f dans $W^{1,p}(\Omega)$ et on note $f_n \to f$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ si

$$f_n \to f \text{ dans } L^p(\Omega) \quad \text{et} \quad \nabla f_n \to \nabla f \text{ dans } L^p(\Omega).$$

- On dit que f_n converge faiblement vers f dans $W^{1,p}(\Omega)$ et on note $f_n \rightharpoonup f$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ si

$$f_n \rightharpoonup f \text{ dans } L^p(\Omega) \quad \text{et} \quad \nabla f_n \rightharpoonup \nabla f \text{ dans } L^p(\Omega).$$

THÉORÈME 1.8 (Injections de Sobolev-Rellich-Kondrachov [41]):

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et de classe $\mathscr{C}^1$, on a :

- Si $p < N$, alors l'injection $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compacte pour $q \in \left[1, p^*\right)$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.
- si $p = N$, alors l'injection $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compacte pour $q \in [1, +\infty)$
- Si $p > N$, alors l'injection $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ est compacte. En particulier l'injection $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ est compact pour tout $p \in [1, +\infty)$

THÉORÈME 1.9 ([1, Theorem 4.12]): Soit Ω un domaine suffisamment régulier de $\mathbb{R}^N$, avec $N \geq 1$, $p > N$ et $0 < \gamma \leq 1 - \frac{N}{p}$. Alors l'injection $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ est continue.

THÉORÈME 1.10 (Inégalité de Poincaré [30]): Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Alors, il existe une constante positive $C = C(\Omega)$ telle que :

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Par conséquence l'application $u \mapsto \|\nabla u\|_{L^p}$ définit une norme sur $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme usuelle de $H^1(\Omega)$.

THÉORÈME 1.11 (Meyers-Serrin [30]): Soient $u \in H^1(\Omega)$. Alors il existe une suite $u_n \in \mathscr{C}^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$.

THÉORÈME 1.12 (Stampacchia): Soit f une fonction de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = 0$, dont la dérivée est bornée. Alors pour tout $u \in H^1(\Omega)$ on a $f(u) \in H^1(\Omega)$ et

$$\forall i, 1 \leq i \leq N, \ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f \circ u\right) = (f' \circ u)\frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Preuve.

D'après le théorème 1.11, il existe une suite de fonction $(u_n)_n$ de $\mathscr{C}^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ qui converge vers $u \in H^1(\Omega)$. Soit $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$. Tout d'abord, on va montrer que

$$\int_\Omega f(u_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx \to \int_\Omega f(u)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx \quad \forall i = 1, \cdots, N. \tag{1.2}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega f(u)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx-\int_\Omega f(u_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx\right| &\le \int_\Omega |f(u)-f(u_n)||\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}|\,dx\\ &\le \left(\int_\Omega |f(u)-f(u_n)|^2 dx\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{\frac12}\\ &\le \left(\int_\Omega \left|\int_{u_n}^{u} f'(t)\,dt\right|^2 dx\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{\frac12}\\ &\le \|f'\|_{L^\infty(\Omega)}\left(\int_\Omega |u-u_n|^2\,dx\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{\frac12}\\ &\le C\left(\int_\Omega |u-u_n|^2\,dx\right)^{\frac12}.\end{aligned}$$

Ainsi, en faisant tendre n vers l'infini, on obtient le résultat désiré.

Ensuite, en utilisant l'égalité (1.2), et l'intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f\circ u)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_\Omega f(u_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx\\ &= -\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(f(u_n))\varphi\,dx\\ &= -\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_\Omega f'(u_n)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\varphi\,dx\\ &= -\int_\Omega f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\,dx\\ &= -\int_\Omega (f'\circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\,dx\end{aligned}$$

Finalement, on va prouver que $f(u)\in H^1(\Omega)$. Le fait que

$$|f(u)| = |f(u)-f(0)| = \left|\int_0^u f'(t)\,dt\right| \le \|f'\|_{L^\infty(\Omega)}|u|,$$

alors

$$\left(\int_\Omega |f(u)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f'\|_{L^\infty(\Omega)}\left(\int_\Omega |u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

et

$$\left(\int_\Omega \left|f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f'\|_{L^\infty(\Omega)}\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

1.5 Minimisation d'une fonctionnelle

DÉFINITION 1.13: (Dérivation au sens de Fréchet [6])

Soient X un espace de Banach, U un ouvert de X et $I : U \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle. On dit que I est (Fréchet) différentiable en $u \in U$ s'il existe $A \in X'$ tel que

$$\lim_{\|v\|\to 0} = \frac{I(u+v)-I(u)-Av}{\|v\|} = 0. \tag{1.3}$$

DÉFINITION 1.14: (Dérivation au sens de Gâteaux [6])

Soient X un espace de Banach, U un ouvert de X et $I : U \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle. On dit que I est différentiable au sens de Gâteaux en $u \in U$ s'il existe $A \in X'$ tel que, pour tout $v \in X$,

$$\lim_{t\to 0} = \frac{I(u+tv)-I(u)}{t} = Av. \tag{1.4}$$

DÉFINITION 1.15: (Fonction convexe [12])

Soit $I \subset \mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si

$$f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y) \tag{1.5}$$

pour tout $x, y \in I$ et chaque $t \in [0,1]$.

On dit que f est strictement convexe si l'inégalité ci-dessus est stricte lorsque $x \neq y$

et $t \in (0,1)$.

DÉFINITION 1.16: (Fonction semi-continue inférieurement [52])

Soit X un espace topologique, x_0 un point de X et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. On dit que f semi-continuité inférieure en x_0 si :

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0) \tag{1.6}$$

et f est dite semi-continue inférieurement si et seulement si elle est semi-continue inférieurement en tout point de X, ou encore si et seulement si $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ est un ouvert pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

THÉORÈME 1.13 ([29]): Tout ensemble convexe fermé pour la norme dans un espace de Banach X est fermé pour la topologie faible.

THÉORÈME 1.14 ((Minimiseur relatif [52])): On suppose que V est un espace de Banach réflexif muni de la norme $\|\cdot\|$, et soit $M \subset V$ un sous-ensemble faiblement fermé de V. On suppose que $J : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est coercive et (séquentiellement) faiblement semi-continue inférieurement sur M par rapport à V, c'est-à-dire que les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $J(u) \to \infty$ lorsque $\|u\| \to \infty$, avec $u \in M$.
2. Pour tout $u \in M$, et pour toute suite (u_n) dans M telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans V, on a :
$$J(u) \leq \liminf_{n \to \infty} J(u_n).$$

Alors J est bornée inférieurement sur M et atteint son infimum dans M.

Preuve.

Soit

$$\inf_{u\in M} J(u) = m$$

et soit $\{u_n\} \subset M$ une suite minimisante, i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} J(u_n) = \inf_{u\in M} J(u) = m. \tag{1.7}$$

Supposons que $\|u\| \to +\infty$, alors par coercivité, on a $J(u_n) \to +\infty$, ce qui contredit le fait que $J(u_n) \to m < +\infty$.

Donc , la suite $\{u_n\}$est bornée dans V. Puisque V est un espace de Banach réflexif et que $\{u_n\}$ est bornée, il existe une sous-suite $\{u_{nk}\}$, tel que

$$u_{nk} \rightharpoonup \overline{u}, \ \ \overline{u} \in V.$$

Mais M est faiblement fermé, donc $\overline{u} \in M$. Par J est faiblement semi-continue inférieurement :

$$J(\overline{u}) \leq \liminf_{k\to\infty} J(u_{nk}) = \inf_{\overline{u}\in M} J(\overline{u}) = m.$$

On a aussi $m \leq J(\overline{u})$,

donc

$$J(\overline{u}) = m.$$

Donc, J atteint son infimum sur M.

Principes du maximum, régularité elliptique et problèmes de valeurs propres

2

Chapitre

Dans ce qui suit Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ avec $N \geq 2$.

2.1 Principes du maximum

Le principe du maximum est une caractéristique importante des équations elliptiques du second ordre qui les distingue des équations d'ordre supérieur et des systèmes d'équations. En plus de ses nombreuses applications, le principe du maximum fournit des estimations ponctuelles qui conduisent à une théorie plus définitive que ce qui serait autrement disponible.

Dans cette section, on établit le principe du maximum pour des équations aux dérivées partielles elliptiques du second ordre.

Les méthodes du principe du maximum reposent sur l'observation suivante : si une fonction $u \in C^2(\Omega)$ atteint son maximum sur un ensemble ouvert Ω en un point $x_0 \in \Omega$, alors

$$D\,u(x_0) = 0, \quad D^2\,u(x_0) \leq 0. \tag{2.1}$$

La dernière inégalité signifiant que la matrice symétrique $D^2\,u = ((u_{x_i x_j}))$ est non définie-positive en point x_0.

De plus, on devra exiger que les solutions u soient au moins de classe C^2, afin qu'il soit possible de considérer les valeurs ponctuelles de $D\,u, D^2\,u$.

On introduit l'opérateur différentiel du second ordre

$$L\,u = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\,u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i\,u_{x_i} + c\,u, \tag{2.2}$$

DÉFINITION 2.1: (Ellipticité uniforme)[21, 27]

On dit que l'opérateur aux dérivées partielles L est uniformément elliptique s'il existe

une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \text{pour tout } x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{2.3}$$

En particulier, la matrice $(a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,N}$ est définie positive pour tout x, et la plus petite valeur propre est supérieure ou égale à α.

On suppose désormais que les coefficients a_{ij}, b_i et c sont des fonctions appartiennent à $\mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$. Sans perte de généralité, on suppose la condition de symétrie

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad \big(i, j = 1, \dots, N\big). \tag{2.4}$$

Évidemment, l'opérateur de Laplace $-\Delta$ satisfait ces conditions. L'objectif de cette section est de démontrer des principes du maximum pour les solutions de $Lu = 0$.

2.1.1 Principe du maximum faible

Pour de nombreuses applications, il suffit d'avoir le principe du maximum faible suivant. Tout d'abord, on détermine les conditions sous lesquelles une fonction atteint nécessairement son maximum (ou son minimum) sur la frontière.

THÉORÈME 2.1 (Principe du maximum faible [21, 27]):

On suppose que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ et $c \equiv 0$ dans Ω.

1. Si u satisfait

$$Lu \leq 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{2.5}$$

alors

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

2. Si u vérifie

$$Lu \geq 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{2.6}$$

alors

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Remarque 2.1. *Une fonction satisfaisant (2.5) est appelée une sous-solution. On affirme donc qu'une sous-solution atteint son maximum sur $\partial\Omega$. De même, si (2.6) est vérifiée, u est une sur-solution et atteint son minimum sur $\partial\Omega$.*

Preuve.

1. **Étape 1 : Cas d'une inégalité stricte**. On suppose que l'on ait

$$Lu < 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{2.7}$$

et qu'il existe un point $x_0 \in \Omega$ tel que

$$u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u. \tag{2.8}$$

En un tel point x_0, on a les propriétés suivantes :

(a). Le gradient de u s'annule :

$$u_{x_i}(x_0) = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, N.$$

(b). La matrice hessienne $\left(u_{x_i x_j}(x_0)\right)_{i,j=1,\cdots,N}$ est semi-définie négative, c'est-à-dire :

$$\sum_{i,j=1}^{N} u_{x_i x_j}(x_0)\xi_i \xi_j \leq 0 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Puisque la matrice $\left(u_{x_i x_j}(x_0)\right)_{i,j=1,\cdots,N}$ est semi-définie négative toutes ses valeurs propres λ sont négatives ou nulles :

$$\lambda_k \leq 0 \quad k = 1, \cdots, N.$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_0)u_{x_ix_j}(x_0) &= \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_0)\left(\sum_{k=1}^{N}\lambda_k \xi_k^{(i)}\xi_k^{(j)}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{N}\lambda_k\left(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_0)\xi_k^{(i)}\xi_k^{(j)}\right)\end{aligned} \tag{2.9}$$

où λ_k sont les valeurs propres de $(u_{x_ix_j}(x_0))$ et ξ_k les vecteurs propres correspondants.

Appliquant la condition d'ellipticité (2.3) à (2.9), on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_0)u_{x_ix_j}(x_0) &\le \alpha\sum_{k=1}^{N}\lambda_k|\xi_k|^2\\ &\le 0.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$Lu(x_0) = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_0)u_{x_ix_j}(x_0) \ge 0.$$

Cela contredit l'hypothèse $Lu < 0$. Ainsi, un maximum intérieur ne peut pas exister, et le maximum de u est nécessairement atteint sur la frontière $\partial\Omega$.

Étape 2 : Cas d'une inégalité large. Dans le cas général où (2.5) est vérifié, on pose

$$u^\epsilon(x) := u(x) + \epsilon e^{\lambda x_1} \quad (x \in \Omega),$$

où $\lambda > 0$ sera déterminé ultérieurement et $\epsilon > 0$. La condition (2.3) implique $a_{ii}(x) \ge \alpha$ $(i = 1,\dots,N,\ x \in \Omega)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}Lu^\epsilon &= Lu + \epsilon L(e^{\lambda x_1})\\ &\le \epsilon e^{\lambda x_1}\left[-\lambda^2 a_{11} + \lambda b_1\right]\\ &\le \lambda\epsilon e^{\lambda x_1}\left[-\lambda\alpha + \|b\|_{L^\infty}\right]\\ &< 0 \quad \text{dans } \Omega,\end{aligned}$$

à condition de choisir $\lambda > 0$ suffisamment grand. Alors, selon les étapes 1 et 2 ci-dessus, $\max_{\overline{\Omega}} u^\epsilon = \max_{\partial\Omega} u^\epsilon$. Faisons tendre $\epsilon \to 0$ pour obtenir $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$. Ceci prouve (1).

2. Puisque $-u$ est une sous-solution dès que u est une sur-solution, l'assertion (2) en découle directement.

On adapte maintenant le principe du maximum pour tenir compte d'un coefficient d'ordre zéro c positif.

THÉORÈME 2.2 (Principe du maximum faible pour $c \geq 0$ [21, 27]): On suppose que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ et $c \geq 0$ dans Ω.

1. Si u satisfait
$$Lu \leq 0 \quad \text{dans } \Omega,$$
alors
$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+. \tag{2.10}$$
2. De même, si u vérifie
$$Lu \geq 0 \quad \text{dans } \Omega,$$
alors
$$\min_{\Omega} u \geq -\max_{\partial\Omega} u^-. \tag{2.11}$$

Remarque 2.2. *En particulier, si $Lu = 0$ dans Ω, alors*

$$\max_{\Omega} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|. \tag{2.12}$$

Preuve.

1. Soit u une sous-solution et on pose $G := \{x \in \Omega \mid u(x) > 0\}$. Alors
$$Ku := Lu - cu \leq -cu \leq 0 \quad \text{dans } G.$$
L'opérateur K n'a pas un terme d'ordre zéro, et par conséquent le Théorème 2.1 implique
$$\max_{G} u = \max_{\partial G} u = \max_{\partial\Omega} u^+.$$
Ceci donne (2.10) dans le cas où $G \neq \emptyset$. Sinon, $u \leq 0$ partout dans Ω, et (2.10) suit également.
2. L'assertion (2) découle de (1) appliqué à $-u$, dès que $(-u)^+ = u^-$.

2.2 Régularité elliptique

Dans cette section, on rappelle quelques estimations fondamentales pour les équations $Lu = f$ où L est un opérateur elliptique de type (2.2). Une référence de base est Gilbarg-Trudinger [24].

2.2.1 Estimation uniforme dans l'espace $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$

THÉORÈME 2.3 ([35, 24]): Soient Ω un domaine régulier de $\mathbb{R}^N$, L un opérateur elliptique de type (2.2), et $u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ une solution de $Lu = f$ dans Ω, où $f \in C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$ et les coefficients de L vérifient la condition (2.3) et

$$\|a_{ij}\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}, \|b_i\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}, \|c\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq \Lambda.$$

Soit $\varphi \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, et on suppose que $u = \varphi$ sur $\partial\Omega$. Alors

$$\|u\|_{C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C\left(\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \|\varphi\|_{C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})} + \|f\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}\right)$$

où $C > 0$ est une constante dépend de $N, \gamma, \alpha, \Lambda$ et du domaine Ω.

Démonstration. Voir [24, Theorem 6.6., page 98]. □

2.2.2 Estimation uniforme dans les espaces $W^{2,p}(\Omega)$

THÉORÈME 2.4 ([35]): Soit Ω un ouvert borné de classe $C^{1,1}$, $a_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$ et $b_i, c \in L^\infty(\Omega)$. Pour tous $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in W^{2,p}(\Omega)$ avec $1 < p < +\infty$, il existe un unique $u \in W^{2,p}(\Omega)$ une fonction telle que

$$Lu = f \text{ presque partout dans } \Omega, \quad u - g \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

avec l'estimation

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_p\left(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{W^{2,p}(\Omega)}\right),$$

où C_p ne dépend pas de f et g.

2.3 Principe de comparaison faible.

THÉORÈME 2.5 ([44]): Soient u_1, $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ satisfont

$$\begin{cases} -\Delta u_1 \leq -\Delta u_2, & \text{Dans } \Omega, \text{ (au sens faible)} \\ u_1 \leq u_2, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors, $u_1 \leq u_2$ p.p. dans Ω.

Preuve.

Soient $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ deux fonctions telles que

$$-\Delta u_1 \leq -\Delta u_2 \text{ au sens faible.}$$

Cela signifie que, pour toute fonction de test $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\varphi \geq 0$, on a :

$$\int_\Omega \nabla u_1 . \nabla \varphi \, dx \leq \int_\Omega \nabla u_2 . \nabla \varphi \, dx.$$

Posons $\varphi = (u_1 - u_2)^+$, qui appartient à $H_0^1(\Omega)$ par le théorème 1.12. Alors on a :

$$\int_\Omega \nabla(u_1 - u_2) . \nabla(u_1 - u_2)^+ dx \leq 0.$$

Mais on remarque que :

$$\nabla(u_1 - u_2)^+ = \begin{cases} \nabla(u_1 - u_2) & \text{si } \Omega,\ u_1 > u_2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc

$$\int_\Omega \left|\nabla(u_1 - u_2)^+\right|^2 dx \leq 0.$$

Cela implique :

$\nabla(u_1 - u_2)^+ = 0$ p.p. dans Ω,

ce qui donne que $(u_1 - u_2)^+ = 0$, donc $u_1 \leq u_2$ p.p. dans Ω.

2.4 Problèmes de valeurs propres pour Laplacien

Dans cette section, on se concentrera sur le problème de valeurs propres.

$$(P_\lambda)\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.13}$$

DÉFINITION 2.2

On dit que λ est une valeur propre si (P_λ) admet une solution. Cette solution est appelée une fonction propre correspondant à la valeur propre λ.
La première valeur propre λ_1 est définie par :

$$\lambda_1 = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla w|^2 dx : \ w \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega V(x)|w|^2 dx = 1\right\}.$$

THÉORÈME 2.6 ([19, 25, 52]): Soit $u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$ une fonction propre associée à λ_1. Alors $u \in L^\infty(\Omega)$.

THÉORÈME 2.7 ([5, 18, 37, 19]): Si u est une solution de (P_λ), alors $u \in C^{1,\gamma}(\Omega)$. De plus, si $u \geq 0$, alors $u > 0$ dans Ω et $\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0$ sur $\partial\Omega$, où ν désigne le vecteur normal unitaire extérieur à $\partial\Omega$.

THÉORÈME 2.8 ([44, Lemma 1.4.5]): La première valeur propre λ_1 est simple, c'est-à-dire que si u, v sont deux fonctions propres correspondant à la valeur propre λ_1, alors $u = \alpha v$ pour un certain α.

THÉORÈME 2.9 ([44, Lemma 1.4.3]): Toute fonction propre ϕ_1 correspondant à λ_1 ne change pas de signe dans Ω : soit $\phi_1 > 0$, soit $\phi_1 < 0$.

Méthode de sous et sur-solutions classiques pour un problème sémi-linéaire

Chapitre 3

3.1 Mise en œuvre de la méthode

Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$, et $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que f est de classe C^1 par rapport à la deuxième variable.

On considère le problème aux limites non linéaire de type Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

DÉFINITION 3.1

Une solution du problème (3.1), est une fonction $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ qui satisfait (3.1).

DÉFINITION 3.2: (Sous-solution)

Une fonction $\underline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ est dite sous-solution du problème (3.1) si

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} \leq f(x,\underline{u}), & \text{dans } \Omega, \\ \underline{u} \leq 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

DÉFINITION 3.3: (Sur-solution)

Une fonction $\overline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ est dite sur-solution du problème (3.1) si

$$\begin{cases} -\Delta \overline{u} \geq f(x,\overline{u}), & \text{dans } \Omega, \\ \overline{u} \geq 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

THÉORÈME 3.1: Soit $\underline{u}$ (resp., $\overline{u}$) une sous-solution (resp., une sur-solution) du problème (3.1) telle que $\underline{u} \leq \overline{u}$ dans Ω. Alors il existe une solution u du problème (3.1) satisfaisant $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$.

Preuve.

La preuve est basée sur la méthode des itérations monotones développée par Amann [3] et Sattinger [51].

Soit $g(x,u) := f(x,u) + a\,u$, où a est une constante réelle. On peut choisir $a \geq 0$ suffisamment grand pour que l'application $\mathbb{R} \ni u \longmapsto g(x,u)$ soit croissante sur $[\underline{u}(x), \overline{u}(x)]$, pour tout $x \in \Omega$. Pour cela, il suffit que $a \geq 0$ et

$$a \geq \max\left\{-f_u(x,u);\, x \in \overline{\Omega},\, u \in [\underline{u}(x), \overline{u}(x)]\right\}.$$

Pour ce choix de a, on définit la suite de fonctions $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ comme suit : $u_0 = \underline{u}$ et, pour tout $n \geq 1$, u_n est l'unique solution du problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_n + a\,u_n = g(x, u_{n-1}), & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

On a besoin du lemme suivant.

LEMME 3.1

La suite $(u_n)_n$ vérifiant :

$$\underline{u} = u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \cdots \leq \overline{u}.$$

Preuve du Lemme 3.1 Nos arguments utilisent de manière essentielle le principe du maximum. Ainsi, pour prouver que $u_1 \geq \underline{u}$, nous avons, par la définition de u_1,

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + a\,u_1 = g(x, \underline{u}), & \text{dans } \Omega, \\ u_1 = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.5}$$

En soustrayant (3.2) de (3.5), on obtient :

$$\begin{cases} -\Delta(u_1-\underline{u})+a(u_1-\underline{u})\geq g(x,\underline{u})-g(x,\underline{u})=0, & \text{dans } \Omega,\\ u_1-\underline{u}\geq 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

Puisque l'opérateur $-\Delta+aI$ est uniformément elliptique, par le théorème 2.2, il s'ensuit que $u_1\geq\underline{u}$ dans Ω. Pour la preuve de $u_1\leq\overline{u}$, on observe que $\overline{u}\geq 0=u_1$ sur $\partial\Omega$ et, pour tout $x\in\Omega$,

$$-\Delta(u_1-\overline{u})+a(u_1-\overline{u})\leq g(x,\underline{u})-g(x,\overline{u})\leq 0,$$

par la monotonie de g. Le théorème 2.2 implique $u_1\leq\overline{u}$.

Il reste à prouver que

$$u_n\leq u_{n+1}\leq\overline{u}.$$

En tenant compte des équations satisfaites par u_n et u_{n+1}, on obtient

$$\begin{cases} -\Delta(u_{n+1}-u_n)+a(u_{n+1}-u_n)=g(x,u_n)-g(x,u_{n-1})\geq 0, & \text{dans } \Omega,\\ u_{n+1}-u_n\geq 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.7}$$

ce qui implique $u_{n+1}\geq u_n$ dans Ω.

D'autre part, par

$$\begin{cases} -\Delta\overline{u}+a\overline{u}\geq g(x,\overline{u}), & \text{dans } \Omega,\\ \overline{u}\geq 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et la définition de u_{n+1}, on a

$$\begin{cases} -\Delta(\overline{u}-u_{n+1})+a(\overline{u}-u_{n+1})\geq g(x,\overline{u})-g(x,u_n)\geq 0, & \text{dans } \Omega,\\ \overline{u}-u_{n+1}\geq 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Encore une fois, par le théorème 2.2, on déduit que $\underline{u}\leq u_{n+1}\leq\overline{u}$ dans Ω, ce qui complète la preuve du lemme 3.1.

Il s'ensuit qu'il existe une fonction u telle que, pour tout $x\in\Omega$ fixé,

$$u_n(x)\nearrow u(x)\quad \text{quand } n\longrightarrow\infty.$$

Notre objectif est de montrer qu'on peut passer à la limite dans (3.4).

Posant

$$g_n(x) := g(x, u_n(x)) \quad \text{pour tout } x \in \Omega,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

et

$$M = \max\left\{\|\underline{u}\|_{C^0(\overline{\Omega})}, \|\overline{u}\|_{C^0(\overline{\Omega})}\right\}.$$

Puisque $\|u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})} \in [0, M]$ et que g est une fonction continue, la suite $(g_n))$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)(\Omega)$, et donc dans chaque espace $L^p(\Omega)$ pour $1 < p < \infty$. Par le théorème 2.4, la suite (u_n) est bornée dans $W^{2,p}(\Omega)$ pour tout $1 < p < \infty$. D'après le théorème 1.9, l'espace $W^{2,p}(\Omega)$ s'injecte continûment dans l'espace $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ pour $0 < \gamma \leq 1 - \frac{N}{p}$, à condition que $p > N$. Cela implique que (u_n) est bornée dans $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$. Ensuite, par le théorème 2.3, on déduit que (u_n) est bornée dans $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$. Par le théorème 1.4, l'espace $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ s'injecte de manière compacte dans $C^2(\overline{\Omega})$. Ainsi, en passant éventuellement à une sous-suite, on obtient

$$u_n \longrightarrow u \qquad \text{dans } C^2(\overline{\Omega}). \tag{3.8}$$

Puisque la suite est monotone, on en déduit que la suite entière converge vers u dans $C^2(\overline{\Omega})$. En passant à la limite dans (3.4) lorsque $n \to \infty$, on obtient que u est une solution du problème (3.1).

Remarque 3.1. *La méthode de démonstration précédente fonctionne également si l'on remplace l'hypothèse selon laquelle f est de classe C^1 par rapport à la deuxième variable par l'hypothèse plus faible que f est localement lipschitzienne (voir [35, théorème 5.17]).*

EXAMPLE 3.1

Soit $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\quad x^2 + y^2 < 1\right\}$. On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + u^5 = 1, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.9}$$

Montrer que le problème (3.9) admet au-moins une solution $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

SOLUTION.

On définit $f(t)=1-t^5$. Prenant $\overline{u}=1$, alors

$$-\Delta\overline{u}=0=f(\overline{u})$$

et $\overline{u}\geq 0$ sur $\partial\Omega$.

Définissant $\underline{u}=0$, alors

$$-\Delta\underline{u}=0\leq f(\underline{u})=1$$

et $\underline{u}\leq 0$ sur $\partial\Omega$.

$$-\Delta u+u^5=1 \iff -\Delta u+a\,u=1-u^5+a\,u.$$

Ainsi, on définit $g(t)=1-t^5+a\,t$.

Pour que g soit croissante sur $[0,1]$ (puisque $0\equiv\underline{u}\leq u\leq\overline{u}\equiv 1$), choisissant par exemple $a=5$, alors $g'(t)=5-5t^4\geq 0$.

Ainsi, par le théorème 3.1 il existe une solution classique u au problème (3.9) telle que $\underline{u}\leq u\leq\overline{u}$ presque partout dans Ω.

EXAMPLE 3.2

Soit $\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\quad x^2+y^2<1\right\}$. On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u=1+u^2, & \text{dans } \Omega,\\ u=0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

Montrer que le problème (3.10) admet au-moins une solution $u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$.

SOLUTION.

La fonction $\underline{u}=0$ est une sous-solution, car $\underline{u}\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ et

$$-\Delta\underline{u}=0\leq 1+\underline{u}^2 \quad \text{dans } \Omega, \quad \underline{u}\leq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

On définit

$$\overline{u}(x,y):=1-x^2-y^2, \quad \forall x,\, y\in\overline{\Omega}.$$

Alors $\overline{u} \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ et $\overline{u}|_{\partial\Omega} \geq 0$.

Puisque

$$-\Delta \overline{u} = 4 \geq 1 + (1 - x^2 - y^2)^2 = 1 + \overline{u}^2 \quad \text{dans } \Omega,$$

alors $\overline{u}$ est une sur-solution. Comme $\underline{u} \leq \overline{u}$ dans Ω, par le théorème 3.1 il existe, une solution classique u au problème (3.10) telle que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ presque partout dans Ω.

EXAMPLE 3.3

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Montrer que le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \sin u, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.11}$$

admet au-moins une solution $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

SOLUTION.

Étape 1. Construction d'une sur-solution.

$$\begin{cases} -\Delta \overline{u} = 1, & \text{dans } \Omega, \\ \overline{u} = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Étape 2. Construction d'une sous-solution. On cherche une sous-solution de la forme $\underline{u} = \varepsilon \varphi_1 > 0$ dans Ω.

$$-\Delta \underline{u} = \varepsilon \lambda_1 \varphi_1 = \lambda_1 \underline{u} \leq \sin \underline{u}.$$

Remarque 3.2. *Il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\sin z - \lambda_1 z \geq 0$ *pour tout* $z \in [0, \delta]$.

Choisissant $\varepsilon = \frac{\delta}{\|\varphi_1\|_\infty}$, on obtient $0 < \underline{u} < \delta$.

EXAMPLE 3.4

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Montrer que le problème de Fisher stationnaire

$$\begin{cases} -\Delta u = u(1-u), & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.12}$$

admet au-moins une solution strictement positive $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

SOLUTION.

Clairement, $u \equiv 0$ est une solution. Si l'on suppose que le domaine Ω est régulier et que la première valeur propre de Dirichlet pour l'opérateur de Laplace est $\lambda_1 < 1$, on peut montrer qu'il existe une solution qui est positive dans Ω. En fait, $\overline{u} \equiv 1$ est une sur-solution. On va maintenant construire une sous-solution positive. Soit φ_1 la fonction propre normalisée non négative associée à λ_1. D'après le théorème 2.8, on sait que $\varphi_1 > 0$ dans Ω, et d'après la régularité elliptique, $\varphi_1 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Soit $\underline{u} = \varepsilon\varphi_1$. On affirme que, si ε est positif et suffisamment petit, $\underline{u}$ est une sous solution. En effet, puisque $-\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$, on a

$$-\Delta\underline{u} - \underline{u}(1-\underline{u}) = \varepsilon\varphi_1(\lambda_1 - 1 + \varepsilon\varphi_1). \tag{3.13}$$

Choisissant $\varepsilon = \frac{1-\lambda_1}{2\|\varphi_1\|_\infty}$, le membre de droite de (3.13) est négatif, et par conséquent $\underline{u}$ est une sous-solution.

D'après le théorème 3.1, on en déduit l'existence d'une solution u telle que $\underline{u} \le u \le 1$.

EXAMPLE 3.5

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Montrer que le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 - |u|, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.14}$$

admet au-moins une solution $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

SOLUTION.

On observe que $f(t)=1-|t|$ satisfait les conditions du théorème 3.1. De plus, comme il est facile de le voir, les fonctions $\underline{u}=-1$ et $\overline{u}=1$ sont respectivement des sous-solutions et sur-solutions du problème (3.14), vérifiant $\underline{u}<\overline{u}$. Par conséquent, il existe une solution classique u au problème telle que $\underline{u}\le u\le\overline{u}$.

EXAMPLE 3.6

Soient Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ et $p>1$. Montrer que le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = 1-|u|^p, & \text{dans } \Omega, \\ u=0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.15}$$

admet au-moins une solution $u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$.

SOLUTION.

Pour $p>1$, satisfait également les conditions du théorème 3.1, et $\underline{u}=-1$ et $\overline{u}=1$ sont respectivement des sous-solutions et sur-solutions du problème (3.15), vérifiant $\underline{u}<\overline{u}$. Par conséquent, il existe une solution classique u au problème telle que $\underline{u}\le u\le\overline{u}$.

EXAMPLE 3.7

On suppose que $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ soit un domaine borné et régulier, et que $K(x)$ soit une fonction régulière sur $\overline{\Omega}$ satisfaisant $-c_0\le K(x)\le 0$. On considère le problème

$$\begin{cases} \Delta u + K(x)e^u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u=0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.16}$$

admet au-moins une solution $u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$.

SOLUTION.

1. Sur-solution :

   La fonction $\overline{u}=0$ est une sur-solution, car $\overline{u}\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ et

$$-\Delta\overline{u}=0, \text{ et } K(x)e^{\overline{u}}=K(x),$$

comme $K(x) \leq 0$,

donc :

$$-\Delta \overline{u} = 0 \geq K(x) \quad \text{dans } \Omega, \quad \overline{u} \leq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

2. Sous-solution :

on considère le problème :

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = 1, & \text{dans } \Omega, \\ \varphi = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.17}$$

$\varphi > 0$.

On définit : $\underline{u} = -c_0\varphi$, $c_0 > 0$. On obtient

$$-\Delta \underline{u} = -\Delta(-c_0\varphi) = -c_0,$$

car $-c_0 \leq K(x)$ et $0 < e^{-c_0\varphi}$, donc

$$-\Delta \underline{u} \leq K(x)e^{\underline{u}} \text{ et } \underline{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Donc $\underline{u} = -c_0\varphi$ est sur-solution.

D'après le théorème 3.1, on en déduit l'existence d'une solution u telle que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$.

EXAMPLE 3.8

Si $K(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions régulières satisfaisant $K(x)$, $f(x) \leq 0$ dans le domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, montrer que

$$\begin{cases} \Delta u + K(x)u^2 = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.18}$$

admet une solution régulière unique u.

SOLUTION.

Étape 1. Construction d'une sous-solution.

Puisque $f(x) \leq 0$, on choisit :

$$\underline{u} = 0, \text{ alors } \Delta \underline{u} + K(x)\underline{u}^2 = 0 \geq f(x), \text{ et } \underline{u} \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Donc $\underline{u} = 0$ est sous-solution.

Étape 2. Construction d'une sur-solution.

On définit $\overline{u} = M > 0$,

choisissant

$$M^2 K(x) \leq f(x) \leq 0.$$

On obtient

$$\Delta \overline{u} + K(x)\overline{u} = K(x)M^2 \leq f(x) \text{ et } \overline{u} = M \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Donc $\overline{u} = M$ est sur-solution.

D'après le théorème 3.1, on en déduit l'existence d'une solution u telle que $0 \leq u \leq M$.

- Unicité

  supposons qu'il existe deux solution u_1, u_2. On considère le différence :

  $$-\Delta(u_1 - u_2) = K(x)(u_1^2 - u_2^2) = K(x)(u_1 - u_2)(u_1 + u_2).$$

  Utilisons une identité d'énergie en multipliant par $u_1 - u_2$ et intégrant

  $$\int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, dx = \int_\Omega K(x)(u_1 - u_2)^2(u_1 + u_2) dx$$

  Mais puisque $K(x) \leq 0$ et $u_1 + u_2 \geq 0$, le second membre et non positif, alors que le premier est positif, sauf si $u_1 = u_2$. Donc $u_1 = u_2$, d'où l'unicité.

EXAMPLE 3.9

Pour un domaine borné et régulier Ω de $\mathbb{R}^N$, on considère le problème de valeur propre

non linéaire

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda f(x,u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.19}$$

où $f : \Omega \times \mathbb{R}$ satisfaisant

$$f(x,t) \text{ est de class } C^\gamma \text{ par rapport à } x \in \overline{\Omega},\ C^1 \text{ par rapport à } t \in \mathbb{R}, \tag{3.20}$$

$$f(x,t) \geq 0 \quad \text{pour tout } (x,t), \text{ et } f(x,t) > 0 \quad \text{pour tout } t > 0. \tag{3.21}$$

Nous nous intéressons aux solutions non négatives $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

1. Si u est une solution non négative, alors soit u est positive dans Ω, soit $u \equiv 0$.
2. Si $f(x,0) > 0$, montrer qu'il existe $\lambda_1 > 0$ pour lequel une solution positive u_1 existe.
3. Si $f(x,0) > 0$ et $\lambda_1 > 0$ admet une solution positive u_1, montrer qu'il existe une solution positive u_λ pour tout $0 < \lambda < \lambda_1$.

SOLUTION.

1. Soient $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $x_0 \in \Omega$, telle que :

   $$u(x_0) = 0.$$

   Cela signifie que u atteint un minimum intérieur en x_0.
   comme $u \geq 0$, et $\Delta u = -\lambda f(x,u) \leq 0$ (car $f(x,u) \geq 0$), alors $\Delta u \leq 0$.
   Donc par le principe du maximum fort, soit $u \equiv 0$, soit $u > 0$ dans Ω.

2. **Étape 1. Construction d'une sous-solution.**
   Prenons $\underline{u} = 0$. On a :

   $$\Delta \underline{u} + \lambda f(x,\underline{u}) = \lambda f(x,0) > 0, \text{ et } \underline{u} = 0 \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

   Donc $\underline{u}$ est une sous-solution.
   Étape 2. Construction d'une sur-solution.

Soit ϕ_1 la première fonction propre du Laplacien :

$$\begin{cases} -\Delta\phi_1 = \lambda_1\phi_1, & \text{Dans } \Omega, \\ \phi_1 = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Prenons $\overline{u} = \varepsilon\phi_1$, avec $\varepsilon > 0$ petit.

$$\Delta\overline{u} + \lambda f(x,\overline{u}) = -\varepsilon\lambda_1\phi_1 + \lambda f(x,\varepsilon\phi_1).$$

Pour ε petit, $f(x,\varepsilon\phi_1) \approx f(x,0) > 0$, donc on peut choisir λ suffisamment petit pour que :

$$\Delta\overline{u} + \lambda f(x,\overline{u}) \leq 0, \text{ et } \overline{u} = 0 \geq 0 \text{ sur} \partial\Omega$$

Donc $\overline{u}$ est une sur-solution.

D'après le théorème 3.1, on en déduit l'existence d'une solution u_1 telle que $0 \leq u_1 \leq \overline{u}$.

3.2 Applications de la méthode

3.2.1 Application 1. (Sattinger [51])

Soit λ_1 la première valeur propre de $-\Delta$ définie sur un domaine borné Ω dans $\mathbb{R}^N$. On considère le problème non linéaire

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - b\,u^3, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.22}$$

où $b > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

THÉORÈME 3.2:

a) Si $\lambda \leq \lambda_1$, le problème (P) n'a que la solution triviale $u \equiv 0$.

b) Si $\lambda > \lambda_1$, le problème (P) a au moins deux solutions, une positive et une négative.

Preuve.

a) On suppose qu'il existe une solution non triviale u. En multipliant l'équation par u et en intégrant par parties, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega \lambda u^2 - b u^4.$$

Par l'inégalité de Poincaré,

$$\lambda_1 \int_\Omega u^2 \leq \int_\Omega |\nabla u|^2,$$

donc

$$(\lambda_1 - \lambda) \int_\Omega u^2 \leq -b \int_\Omega u^4.$$

De là, on déduit que $u \equiv 0$ si $\lambda \leq \lambda_1$.

b) En effet, si φ_1 est une fonction propre positive associée à λ_1, on peut vérifier que $\varepsilon\varphi_1$ est une sous-solution si $\varepsilon > 0$ et suffisamment petit, et une sur-solution si $\varepsilon < 0$ et petit en valeur absolue. D'autre part, K est une sur-solution pour $K > 0$ grand et une sous-solution pour $K < 0$ et grand en valeur absolue.

3.2.2 Application 2. (Problème sous-linéaire [16, 26])

On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q, & \text{dans } \Omega, \\ u > 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.23}$$

où $0 < q < 1$.

Montrer que le problème (3.10) admet au-moins une solution.

SOLUTION.

La fonction $f(t) = t^q$, $0 < q < 1$, est de classe C^γ et croissante. Par conséquent, elle satisfait les conditions du théorème 3.1. Construisons des sous-solutions et des sur-solutions ordonnées.

Étape 1. Construction d'une sous-solution. Considérons le problème aux valeurs propres

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1 & \text{dans } \Omega, \\ \phi_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.24}$$

où λ_1 est la première valeur propre de $-\Delta$. Soit $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ la fonction propre associée. D'après le théorème 2.7, $\phi_1 \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ pour un certain $\gamma \in (0,1)$ et $\phi_1(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$. Choisissons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que

$$\lambda_1 \varepsilon^{1-q} \left|\varphi_1(x)\right|^{1-q} \leq 1, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \tag{3.25}$$

Définissons $\underline{u} = \varepsilon\phi_1$. En utilisant l'équation aux valeurs propres et l'inégalité (3.25), on obtient :

$$-\Delta(\varepsilon\varphi_1) = \varepsilon(-\Delta\varphi_1) = \varepsilon\lambda_1\varphi_1 \leq (\varepsilon\varphi_1)^q \text{ dans } \Omega. \tag{3.26}$$

Puisque $\varepsilon\varphi_1 = 0$ sur $\partial\Omega$, $\underline{u} = \varepsilon\varphi_1$ est une sous-solution du problème (3.23) pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

Étape 2. Construction d'une sur-solution. Soit $e > 0$, $e \in C^\infty(\overline{\Omega})$ l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta e = 1 & \text{dans } \Omega, \\ e = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.27}$$

Choisissant une constante $k > 0$ telle que

$$k^{1-q} \geq \|e\|_\infty^q, \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{3.28}$$

Alors,

$$-\Delta(ke) = k(-\Delta e) = k \geq (ke)^q \text{ dans } \Omega, \tag{3.29}$$

et puisque $ke = 0$ sur $\partial\Omega$, il s'ensuit que $\overline{u} = ke$ est une sur-solution du problème (3.31).

Étape 3. Comparaison entre la sous- et la sur-solution. Choisissant $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a

$$-\Delta \underline{u} = -\Delta(\varepsilon\varphi_1) = \lambda_1 \varepsilon \varphi_1 \leq \lambda_1 \varepsilon \|\varphi_1\|_\infty \leq k \min_{x\in\overline{\Omega}} e(x) \leq ke = -\Delta \overline{u}.$$

Par le théorème 2.5, il s'ensuit que

$$\underline{u} = \varepsilon\varphi_1 \leq ke = \overline{u}. \tag{3.30}$$

Ainsi, d'après le théorème 3.1, le problème (3.31) admet une solution u vérifiant

$$\underline{u} = \varepsilon\varphi_1 \leq u \leq ke = \overline{u}.$$

3.2.3 Application 3. (Peral [44])

On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q + u^r, & \text{dans } \Omega, \\ u > 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.31}$$

où $0 < q < 1 < r$ et $\lambda > 0$.

THÉORÈME 3.3 ([44, Theorem 2.2.]): Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \lambda \leq \lambda_0$, le problème (3.23) a une solution positive.

Preuve.

Étape 1. Trouver une sur-solution. Soit $e > 0$, $e \in C^\infty(\overline{\Omega})$ l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta e = 1, & \text{dans } \Omega, \\ e = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pour simplifier l'écriture, on définit

$$F(u) = \lambda u^q + u^r.$$

On définit $\overline{u}(x) = k e(x)$, où k est une constante qui sera choisie de telle sorte que

$$-\Delta \overline{u} \geq F(kM) \geq F(\overline{u}),$$

où $M = \max\{1, \|e\|_\infty\}$. Maintenant, $-\Delta \overline{u} = k$ et

$$F(\overline{u}) \equiv \lambda k^q e^q + k^r e^r \leq \lambda k^q M^q + k^r M^r.$$

Il suffit donc de trouver k tel que

$$1 \geq \lambda k^{q-1} M^q + k^{r-1} M^r.$$

On définit la fonction

$$\phi(k) = \lambda M^q k^{q-1} + M^r k^{r-1},$$

Alors

$$\lim_{k \to 0^+} \phi(k) = \lim_{k \to \infty} \phi(k) = \infty,$$

car $q-1 < 0 < r-1$; ainsi, ϕ atteint un minimum sur $[0, \infty)$. Par des calculs élémentaires, on obtient

$$\phi'(k) = \lambda(q-1) M^q k^{q-2} + (r-1) k^{r-2} = 0 \quad \text{en } k_0 = c_0 \lambda^{\frac{1}{r-q}},$$

où $c_0 = M^{-1} \left(\frac{1-q}{r-1}\right)^{\frac{1}{r-q}}$. Pour terminer, il suffit que

$$\phi(k_0) \leq 1,$$

c'est-à-dire,

$$c_1 \lambda^{\frac{r-1}{r-q}} < 1,$$

où $c_1 = c_{r,q} M$. Alors il existe $\lambda_0 = c_1^{\frac{q-r}{r-1}}$ tel que pour $0 < \lambda < \lambda_0$, $\overline{u} = k_0 v$ est une sur-solution du problème (3.31).

Étape 2. Construction d'une sous-solution.

En prenant $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $\underline{u} = \varepsilon \varphi_1$ est une sous-solution du problème (3.31), où $\varphi_1 \in C^2(\Omega)$ est une fonction propre normalisée ($\|\varphi_1\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$) de l'opérateur

$-\Delta$ associée à la première valeur propre λ_1. En effet, on a que

$$-\Delta(\varepsilon\varphi_1) = \lambda_1\varepsilon\varphi_1 = \varepsilon(\lambda_1\varphi_1) = \left(\frac{\varepsilon^{1-q}\lambda_1}{\lambda}\varphi_1^{1-q}\right)\cdot\lambda(\varepsilon\varphi_1)^q.$$

Il suffit de choisir $\varepsilon > 0$ tel que

$$\frac{\varepsilon^{1-q}\lambda_1}{\lambda} < 1,$$

pour obtenir

$$-\Delta(\varepsilon\varphi_1) = \varepsilon(\lambda_1\varphi_1) \leq \lambda_1(\varepsilon\varphi_1)^q \leq \lambda(\varepsilon\varphi_1)^q + (\varepsilon\varphi_1)^p.$$

Cela montre que $\underline{u} = \varepsilon\varphi_1$ est une sous-solution du problème (3.31). On a également que, en choisissant ε suffisamment petit,

$$-\Delta\underline{u} = \varepsilon\lambda_1\varphi_1 \leq k = -\Delta\overline{u}.$$

Alors, par le principe de comparaison faible (voir théorème 2.5), $\underline{u} \leq \overline{u}$. Ainsi, d'après le théorème 3.1, le problème (3.31) a une solution u telle que $\varepsilon\varphi_1 \leq u \leq ke$, lorsque $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$.

Méthode de sous et sur-solutions faibles pour un problème sémi-linéaire

Chapitre 4

4.1 Cas la non-linéarité est une fonction C^1

4.1.1 Position du problème

On étudiera le problème aux limites non linéaire :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction régulière qui vérifie

$$|f'(t)| \leq C \quad \forall t \in \mathbb{R}), \tag{4.2}$$

où C est une constante positive.

DÉFINITION 4.1: (Sur-solution faible [21])

On dit que $\overline{u} \in H^1(\Omega)$ est une sur-solution faible du problème (4.1) si $\overline{u} \geq 0$ sur $\partial\Omega$ et

$$\int_\Omega \nabla \overline{u} \cdot \nabla \varphi \, dx \geq \int_\Omega f(\overline{u}) \varphi \, dx, \tag{4.3}$$

pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, avec $\varphi \geq 0$ presque partout dans Ω.

DÉFINITION 4.2: (Sous-solution faible [21])

On dit que $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ est une sous-solution faible du problème (4.1) si $\underline{u} \leq 0$ sur $\partial\Omega$ et

$$\int_\Omega \nabla \underline{u} \cdot \nabla \varphi \, dx \leq \int_\Omega f(\underline{u}) \varphi \, dx, \tag{4.4}$$

pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, avec $\varphi \geq 0$ presque partout dans Ω.

DÉFINITION 4.3: (Solution faible [21])

On dit que $u \in H^1(\Omega)$ est une solution faible du problème (4.1) si $u = 0$ sur $\partial\Omega$ et

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f(u)\varphi \, dx, \tag{4.5}$$

pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Remarque 4.1. *Si $\overline{u}, \underline{u} \in C^2(\Omega)$, alors de (4.3) et (4.4) il suit que*

$$-\Delta \overline{u} \geq f(\overline{u}), \quad -\Delta \underline{u} \leq f(\underline{u}) \quad \textit{dans } \Omega.$$

4.1.2 Mise en œuvre de la méthode

THÉORÈME 4.1 (Existence d'une solution entre sous-solution et sur-solution [21]): On suppose qu'il existe une sur-solution faible $\overline{u}$ et une sous-solution faible $\underline{u}$ de (4.1), satisfaisant

$$\underline{u} \leq 0, \quad \overline{u} \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ au sens de la trace}, \quad \underline{u} \leq \overline{u} \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{4.6}$$

Alors il existe une solution faible u de (4.1), telle que

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \quad \text{p.p. dans } U.$$

Preuve.

1. On fixe un nombre $a > 0$ suffisamment grand pour que

$$\text{l'application } t \mapsto g(t) = f(t) + a\,t \text{ soit croissante;} \tag{4.7}$$

ceci est possible en conséquence de l'hypothèse (4.2).

Pour ce choix de a, on définit la suite de fonctions $u_n \in H_0^1(\Omega)$ comme suit : $u_0 = \underline{u}$ et, pour tout $n \geq 1$, u_n est l'unique solution faible du problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_n + a\, u_n = g(u_{n-1}), & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.8}$$

2. On affirme que

$$\underline{u} = u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \cdots \leq \overline{u} \quad \text{p.p. dans } \Omega. \tag{4.9}$$

D'après (4.8) pour $n = 1$, on a

$$\int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla \varphi + a \int_\Omega u_1 \varphi \, dx = \int_\Omega g(u_0)\varphi \, dx, \tag{4.10}$$

pour chaque $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. En soustrayant (4.10) de (4.4), en rappelant que $u_0 = \underline{u}$, et en posant

$$\varphi := (u_0 - u_1)^+ \in H_0^1(\Omega),\ \varphi \geq 0 \text{ p.p.},$$

on obtient

$$\int_\Omega \nabla(u_0 - u_1) \cdot \nabla(u_0 - u_1)^+ \, dx + a \int_\Omega (u_0 - u_1)(u_0 - u_1)^+ \, dx \leq 0.$$

Or,

$$\nabla(u_0 - u_1)^+ = \begin{cases} \nabla(u_0 - u_1) & \text{p.p. sur } \{u_0 \geq u_1\} \\ 0 & \text{p.p. sur } \{u_0 \leq u_1\}. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\int_{\{u_0 \geq u_1\}} |\nabla(u_0 - u_1)|^2 \, dx + a \int_\Omega |u_0 - u_1|^2 \, dx \leq 0,$$

ainsi $u_0 \leq u_1$ p.p. dans Ω.

Supposons maintenant par récurrence que

$$u_{n-1} \leq u_n \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{4.11}$$

D'après (4.8), on trouve

$$\int_\Omega \nabla u_{n+1}\cdot\nabla\varphi + a\int_\Omega u_{n+1}\varphi\,dx = \int_\Omega g(u_n)\varphi\,dx \tag{4.12}$$

et

$$\int_\Omega \nabla u_n\cdot\nabla\varphi + a\int_\Omega u_n\varphi\,dx = \int_\Omega g(u_{n-1})\varphi\,dx \tag{4.13}$$

pour chaque $\varphi\in H_0^1(\Omega)$. En soustrayant et en posant $\varphi := (u_n-u_{n+1})^+$, on déduit

$$\begin{aligned}&\int_{\{u_n\geq u_{n+1}\}} |\nabla(u_n-u_{n+1})|^2\,dx + a\int_\Omega |u_n-u_{n+1}|^2\,dx\\ &= \int_\Omega \big[g(u_{n-1})-g(u_n)\big](u_n-u_{n+1})^+\,dx \leq 0,\end{aligned}$$

la dernière inégalité étant justifiée par (4.11) et (4.7). Par conséquent, $u_n\leq u_{n+1}$ p.p. dans Ω, comme annoncé.

3. On montre ensuite que

$$u_n\leq \overline{u} \quad \text{p.p. dans } \Omega \quad (n=0,1,\dots). \tag{4.14}$$

L'énoncé (4.14) est vrai pour $n=0$ selon l'hypothèse (4.6). On suppose maintenant par récurrence que

$$u_n\leq \overline{u} \quad \text{p.p. dans } \Omega. \tag{4.15}$$

Puis, en soustrayant (4.3) de (4.12) et en prenant $\varphi := (u_{n+1}-\overline{u})^+$, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{\{u_{n+1}\geq\overline{u}\}} |\nabla(u_{n+1}-\overline{u})|^2\,dx + a\int_\Omega |u_{n+1}-\overline{u}|^2\,dx\\ &= \int_\Omega \big[g(u_n)-g(\overline{u})\big](u_{n+1}-\overline{u})^+\,dx \leq 0,\end{aligned}$$

par (4.15) et (4.7). Ainsi, $u_{n+1}\leq\overline{u}$ p.p. dans Ω.

4. En vertu de (4.9) et (4.14), on a

$$\underline{u}\leq\cdots\leq u_n\leq u_{n+1}\leq\cdots\leq\overline{u} \quad \text{a.e. dans } \Omega. \tag{4.16}$$

Par conséquent,

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x). \tag{4.17}$$

existe pour presque tout x. De plus, par le théorème de convergence dominée et (4.16), on a

$$u_n \to u \quad \text{dans } L^2(\Omega), \tag{4.18}$$

Enfin, comme on a $\|f(u_n)\|_{L^2(\Omega)} \le C\left(\|u_n\|_{L^2(\Omega)} + 1\right)$, on déduit de (4.8) que

$$\sup_n \|u_n\|_{H^1(\Omega)} < \infty.$$

Il existe donc une sous-suite $\left(u_{n_k}\right)_k$ qui converge faiblement dans $H^1(\Omega)$ vers $u \in H_0^1(\Omega)$.

5. On vérifie enfin que u est une solution faible du problème (4.1). Pour cela, on fixe $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Alors, d'après (4.8), il vient

$$\int_\Omega \nabla u_{n+1} \cdot \nabla \varphi \, dx + a \int_\Omega u_{n+1} \varphi \, dx = \int_\Omega g(u_n) \varphi \, dx.$$

En laissant $n \to \infty$, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + a \int_\Omega u \varphi \, dx = \int_\Omega \big(f(u) + a\,u\big) \varphi \, dx.$$

En annulant le terme impliquant a, on trouve

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f(u) \varphi \, dx.$$

EXAMPLE 4.1

Soient Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et λ_1 est la première valeur propre de $-\Delta$. Pour $c > 0$, on considère le

$$(p_c) \begin{cases} -\Delta u = u(c-u), & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.19}$$

Montrer que :

1. Pour $c > \lambda_1$, il existe une solution positive et bornée de (P_c).

2. Pour $c \in [0, \lambda_1]$, il n'existe aucune solution non triviale avec $u \geq 0$ dans Ω.

SOLUTION.

1. On définit $f(u) = u(c-u)$.

Étape 1. Construction d'une sous-solution faible.

On pose $\underline{u} = \varepsilon\varphi_1$

où φ_1 est la première fonction propre de $-\Delta$ sur Ω, associée à λ_1, normalisée telle que φ_1 dans Ω, et $\varepsilon > 0$.

On a $\varphi_1 = 0$ sur $\partial\Omega$. Donc $\underline{u} = \varepsilon\varphi_1 = 0$ sur $\partial\Omega$, alors $\underline{u} = 0 \leq 0$ sur $\partial\Omega$.

On rappelle que $-\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$, donc :

$$-\Delta\underline{u} = -\Delta(\varepsilon\varphi_1) = \varepsilon\lambda_1\varphi_1,$$

et

$$\underline{u}(c-\underline{u}) = \varepsilon\varphi_1(c-\varepsilon\varphi_1).$$

On montrer que

$$\int_\Omega \nabla\underline{u}\cdot\nabla\varphi\, dx \leq \int_\Omega \underline{u}(c-\underline{u})\varphi\, dx,$$

pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, avec $\varphi \geq 0$ p.p. dans Ω.

Par intégration par parties :

$$\int_\Omega \nabla\underline{u}\cdot\nabla\varphi = \varepsilon\int_\Omega \nabla\varphi_1.\nabla\varphi\, dx$$

et comme φ_1 est propre donc :

$$\int_\Omega \nabla\underline{u}\nabla\varphi = \varepsilon\lambda_1\int_\Omega \varphi_1\nabla\varphi\, dx.$$

et

$$\int_\Omega \underline{u}(c-\underline{u})\varphi = \varepsilon c\int_\Omega \varphi_1\varphi\, dx - \varepsilon^2\int_\Omega \varphi_1^2\varphi\, dx.$$

Comme $c > \lambda_1$, et $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, alors le terme $\varepsilon^2\int_\Omega \varphi_1^2\varphi\, dx$ sera négligeable.

Donc

$$\int_\Omega \nabla\varphi_1.\nabla\varphi\,dx \le c\int_\Omega \varphi_1\varphi\,dx - \varepsilon\int_\Omega \varphi_1^2\varphi\,dx$$

alors :

$$\int_\Omega \nabla\underline{u}\cdot\nabla\varphi\,dx \le \int_\Omega \underline{u}(c-\underline{u})\varphi\,dx.$$

pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, avec $\varphi \ge 0$ p.p. dans Ω.

Donc, pour ε petit, $\underline{u} = \varepsilon\varphi_1$ est une sous-solution faible.

Étape 2. Construction d'une sur-solution faible.

On choisit : $\overline{u} = c$, alors

$$-\Delta\overline{u} = 0,$$

et

$$\overline{u}(c-\overline{u}) = c(c-c) = 0.$$

Donc

$$\int_\Omega \nabla\overline{u}\cdot\nabla\varphi\,dx \ge \int_\Omega f(\overline{u})\varphi\,dx,$$

pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, avec $\varphi \ge 0$ p.p. dans Ω.

Et sur $\partial\Omega$, on a :

$$\overline{u} = c > 0.$$

Donc $\overline{u}$ est une sur-solution fiable.

Après le théorème 4.1 il existe une solution faible u vérifiant :

$$\underline{u} \le u \le \overline{u} \text{ p.p. dans } \Omega,$$

c'est-à-dire $0 < u \le c$, pour $c > \lambda_1$.

Donc u est positive et bornée.

2. Soit $c \in [0, \lambda_1]$,

Supposons qu'il existe une solution $u \ge 0$ dans Ω. Prenons u comme test fonction dans l'équation fiable :

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla u\,dx = \int_\Omega u(c-u)u\,dx.$$

Donc :

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = c \int_\Omega u^2 dx - \int_\Omega u^3 dx.$$

Pour $u \geq 0$, alors $\int_\Omega u^3 dx \geq 0$. Donc

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \leq c \int_\Omega u^2 dx.$$

Par l'inégalitaire de Poincaré :

$$\lambda_1 \int_\Omega u^2 \leq \int_\Omega |u|^2$$

alors

$$\lambda_1 \int_\Omega u^2 \leq \int_\Omega |u|^2 \leq c \int_\Omega u^2 dx,$$

donc $\lambda_1 \leq c$.

Mais on a $c \in [0, \lambda_1]$, donc il n'existe aucune solution non triviale avec $u \geq 0$ dans Ω, pour $c \in [0, \lambda_1]$.

4.2 Problème sémi-linéaire avec la non-linéarité est une fonction de Carathéodory

On considère le problème semi-linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.20}$$

où $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est fonction de Carathéodory vérifiant

$$|f(x,u)| \leq C(R) \tag{4.21}$$

Pour tout $R > 0$ et pour tout u tel que $|u(x)| \leq R$ presque partout.

DÉFINITION 4.4: (Sur-solution faible [52])

Une fonction $\overline{u} \in H^1(\Omega)$ est une sur-solution faible du problème (4.20) si $\overline{u} \geq 0$ sur $\partial\Omega$ et

$$\int_\Omega \nabla \overline{u} \cdot \nabla \varphi \, dx \geq \int_\Omega f(x, \overline{u}) \varphi \, dx, \tag{4.22}$$

pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, avec $\varphi \geq 0$ presque partout dans Ω.

DÉFINITION 4.5: (Sous-solution faible [52])

Une fonction $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ est une sous-solution faible du problème (4.20) si $\underline{u} \leq 0$ sur $\partial\Omega$ et

$$\int_\Omega \nabla \underline{u} \cdot \nabla \varphi \, dx \leq \int_\Omega f(x, \underline{u}) \varphi \, dx, \tag{4.23}$$

pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, avec $\varphi \geq 0$ presque partout dans Ω.

DÉFINITION 4.6: (Solution faible [52])

Une fonction $u \in H^1(\Omega)$ est une solution faible du problème (4.20) si $u = 0$ sur $\partial\Omega$ et

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f(x, u) \varphi \, dx, \tag{4.24}$$

pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

THÉORÈME 4.2 ([52]): On suppose qu'il existe une sur-solution faible $\overline{u}$ et une sous-solution faible $\underline{u}$ du problème (4.20), et qu'il existe des constantes $\underline{c}, \bar{c} \in \mathbb{R}$ telles que $-\infty < \underline{c} \leq \underline{u} \leq \overline{u} \leq \bar{c} < \infty$, presque partout dans Ω. Alors il existe une solution faible du problème (4.20), telle que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ presque partout dans Ω.

Preuve.

Soit $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)\,ds$ une primitive de la fonction f. Les solutions du problème (4.20) sont formellement des solutions des équations d'Euler-Lagrange de la fonctionnelle :

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx-\int_\Omega F(x,u)\,dx.$$

Cependant, nos hypothèses ne permettent pas de conclure que J est fini ou même différentiable sur $V := H_0^1(\Omega)$ le plus petit espace où on a une chance de vérifier la coercivité de la fonctionnelle J. Au lieu de cela, on restreint J à l'ensemble

$$M=\left\{u\in H_0^1(\Omega);\quad \underline{u}\le u\le \overline{u}\quad \text{presque partout dans } \Omega\right\}.$$

Puisque $\underline{u}$, $\overline{u}\in L^\infty(\Omega)$ par hypothèse, on a également $M\subset L^\infty(\Omega)$ et $F(x,u(x))\le c$ pour tout $u\in M$ et presque tout $x\in\Omega$.

On peut maintenant vérifier les hypothèses du théorème 1.14 : Clairement, $V=H_0^1(\Omega)$ est réflexif. De plus, M est fermé et convexe, donc faiblement fermé. Puisque M est essentiellement borné, notre fonctionnel $J(u)\ge \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}-c$ est coercif sur M. Enfin, pour montrer que J est faiblement semi-continu inférieurement sur M, il suffit de montrer que

$$\int_\Omega F(x,u_n)\,dx\to\int_\Omega F(x,u)\,dx$$

si $u_n\rightharpoonup u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, où u_n, $u\in M$. Mais en passant à une sous-suite si nécessaire, on peut supposer que $u_n\to u$ presque partout ; de plus, $|F(x,u_n(x))|\le c$ uniformément. Par conséquent, on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

D'après le théorème 1.14, on déduit l'existence d'un minimiseur relatif $u\in M$. Pour voir que u résout faiblement le problème (4.20), pour $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ et $\varepsilon>0$, on pose

$$v_\varepsilon=\min\left\{\overline{u},\max\left\{\underline{u},u+\varepsilon\varphi\right\}\right\}=u+\varepsilon\varphi-\varphi^\varepsilon+\varphi_\varepsilon\in M,$$

avec

$$\varphi^\varepsilon=\max\left\{0,u+\varepsilon\varphi-\overline{u}\right\}\ge 0,$$

$$\varphi_\varepsilon=\max\left\{0,\underline{u}-(u+\varepsilon\varphi)\right\}\ge 0.$$

Notez que par le théorème 1.12, $\varphi_\varepsilon,\varphi^\varepsilon\in H_0^1(\Omega)$.

J est différentiable dans la direction $v_\varepsilon-u$. Puisque u minimise J dans M, on a

$$0\le\langle(v_\varepsilon-u),J'(u)\rangle=\varepsilon\langle\varphi,J'(u)\rangle-\langle\varphi^\varepsilon,J'(u)\rangle+\langle\varphi_\varepsilon,J'(u)\rangle,$$

ce qui donne

$$\langle \varphi, J'(u)\rangle \geq \frac{1}{\varepsilon}\big[\langle \varphi^\varepsilon, J'(u)\rangle - \langle \varphi_\varepsilon, J'(u)\rangle\big].$$

Maintenant, puisque $\overline{u}$ est une sur-solution de (4.20), on a

$$\begin{aligned}
\langle \varphi^\varepsilon, J'(u)\rangle &= \langle \varphi^\varepsilon, J'(\overline{u})\rangle + \langle \varphi^\varepsilon, J'(u) - J'(\overline{u})\rangle \\
&\geq \langle \varphi^\varepsilon, J'(u) - J'(\overline{u})\rangle \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} \big\{\nabla(u-\overline{u})\nabla(u+\varepsilon\varphi-\overline{u}) - \big(g(x,u)-g(x,\overline{u})\big)\big(u+\varepsilon\varphi-\overline{u}\big)\big\}\, dx \\
&\geq \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(u-\overline{u})\nabla\varphi\, dx - \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} \big|g(x,u)-g(x,\overline{u})\big||\varphi|\, dx,
\end{aligned}$$

où

$$\Omega^\varepsilon = \big\{x \in \Omega;\, u(x) + \varepsilon\varphi(x) \geq \overline{u}(x) > u(x)\big\}.$$

Notez que $|\Omega^\varepsilon| \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Ainsi, par la continuité absolue de l'intégrale de Lebesgue, on obtient que

$$\langle \varphi^\varepsilon, J'(u)\rangle \geq o(\varepsilon),$$

où $o(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$. De manière similaire, on conclut que

$$\langle \varphi_\varepsilon, J'(u)\rangle \leq o(\varepsilon),$$

d'où

$$\langle \varphi, J'(u)\rangle \geq 0$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. En inversant le signe de φ et comme $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, nous voyons enfin que $J'(u) = 0$, comme annoncé.

EXAMPLE 4.2

Soit Ω un domaine régulier borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = k(x)u - u|u|^{p-2}, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.25}$$

où $p = \frac{2N}{N-2}$, et où k est une fonction continue telle que

$$1 \leq k(x) \leq K < \infty, \quad \text{pour tout } x \in \Omega.$$

Alors $\underline{u} \equiv 0$ est une sous-solution tandis que $\overline{u} \equiv c$ pour un grand $c > 1$ est une super-solution du problème (4.25). Par conséquent, celui-ci admet une solution faible $u \geq 0$.

4.2.1 Application 1 . (Problème non-linéaire singulier)

Soient Ω un domaine régulier borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $0 < \gamma < 1$, et $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant

$$\inf_{x \in \overline{\Omega}} f(x) = C_f > 0. \tag{4.26}$$

On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{f(x)}{u^\gamma}, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.27}$$

- Montrer que le problème (4.27) admet au-moins une solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$.

Preuve.

Nous procédons en plusieurs étapes.

Étape 1. Construction d'une sous-solution faible. Considérons le problème aux valeurs propres

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1 & \text{dans } \Omega, \\ \phi_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.28}$$

où λ_1 est la première valeur propre de $-\Delta$. Soit $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ la fonction propre associée. D'après le théorème 2.7, $\phi_1 \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ pour un certain $\gamma \in (0,1)$ et $\phi_1(x) > 0$

pour tout $x \in \Omega$. Choisissons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que

$$\lambda_1 \varepsilon^{1+\gamma} \leq C_f. \tag{4.29}$$

Définissons $\underline{u} = \varepsilon \phi_1$. En utilisant l'équation aux valeurs propres et l'inégalité (3.25), on obtient :

$$\begin{aligned} -\Delta \underline{u} &= \varepsilon(-\Delta \phi_1) \\ &= \lambda_1 \varepsilon \phi_1 \leq \lambda_1 \varepsilon \|\phi_1\|_\infty \\ &\leq \frac{C_f}{\varepsilon^\gamma} = \frac{C_f}{(\varepsilon \|\phi_1\|_\infty)^\gamma} \\ &\leq \frac{C_f}{(\varepsilon \phi_1)^\gamma} \leq \frac{f(x)}{\underline{u}^\gamma} \ \text{dans} \mathscr{D}'(\Omega). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Multipliant (4.30) par une fonction test $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ avec $\varphi \geq 0$, on obtint

$$\int_\Omega \nabla \underline{u} \cdot \nabla \varphi \, dx \leq \int_\Omega \frac{f(x)}{\underline{u}^\gamma} \varphi \, dx.$$

Par densité, il en résulte

$$\int_\Omega \nabla \underline{u} \cdot \nabla \varphi \, dx \leq \int_\Omega \frac{f(x)}{\underline{u}^\gamma} \varphi \, dx, \ \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \ \ \varphi \geq 0. \tag{4.31}$$

Puisque $\varepsilon \varphi_1 = 0$ sur $\partial\Omega$, $\underline{u} = \varepsilon \varphi_1$ est une sous-solution du problème (3.23) pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

Étape 2. Construction d'une sur-solution faible. Soit $e > 0$, $e \in C^\infty(\overline{\Omega})$ l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta e = 1, & \text{dans } \Omega, \\ e = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On définit $\overline{u} = k e$. Posons $L = \inf_{x \in \overline{\Omega}} e(x) > 0$. Choisissons k suffisamment grand pour que

$$k^{\gamma+1} \geq \frac{\|f\|_\infty}{L^\gamma}. \tag{4.32}$$

On obtient

$$\begin{aligned} -\Delta\overline{u} &= k(-\Delta e) \\ &= k \geq \frac{\|f\|_\infty}{(Lk)^\gamma} \\ &\geq \frac{\|f\|_\infty}{(ke)^\gamma} \geq \frac{f(x)}{\overline{u}^\gamma} \ \text{ dans} \mathscr{D}'(\Omega). \end{aligned} \tag{4.33}$$

Multipliant (4.33) par une fonction test $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ avec $\varphi \geq 0$, on obtient

$$\int_\Omega \nabla\overline{u}\cdot\nabla\varphi\, dx \geq \int_\Omega \frac{f(x)}{\overline{u}^\gamma}\varphi\, dx.$$

Ainsi, par densité, on a

$$\int_\Omega \nabla\overline{u}\cdot\nabla\varphi\, dx \geq \int_\Omega \frac{f(x)}{\overline{u}^\gamma}\varphi\, dx, \ \ \forall\varphi \in H_0^1(\Omega), \ \ \varphi \geq 0. \tag{4.34}$$

Étape 3. Comparaison entre la sous- et la sur-solution. Choisissant $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a

$$-\Delta\underline{u} = -\Delta(\varepsilon\varphi_1) = \lambda_1\varepsilon\varphi_1 \leq \lambda_1\varepsilon\|\varphi_1\|_\infty \leq k\min_{x\in\overline{\Omega}} e(x) \leq ke = -\Delta\overline{u}.$$

Ainsi, par le théorème 2.5, il s'ensuit que

$$\underline{u} = \varepsilon\varphi_1 \leq ke = \overline{u}. \tag{4.35}$$

Étape 4. Existence d'une solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$. Définissons l'application $g : \Omega\times[\min\underline{u}, \max\overline{u}] \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$g(x,s) = \frac{f(x)}{s^\gamma}.$$

Posons $G(x,s) = \int_0^s g(x,t)dt$ et considérons la fonctionnelle d'énergie

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \int_\Omega G(x,u)\, dx.$$

Restreignons J à l'ensemble

$$M = \left\{ w \in H_0^1(\Omega); \quad \underline{u} \leq w \leq \overline{u} \quad \text{presque partout dans } \Omega \right\}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème 1.14.

1. **Fermeture faible de M.** L'ensemble M est non vide, convexe et fermé pour la topologie forte, donc faiblement fermé.

2. **Coercivité de J sur M.** On a l'estimation

$$\left|g(x,s)\right| = \frac{f(x)}{s^{\gamma}} \leq \frac{\|f\|_{\infty}}{\min\limits_{\overline{\Omega}} \underline{u}} = c.$$

Il en découle que

$$|G(x,u)| = \left|\int_0^u g(x,s)ds\right| \leq c\,u.$$

Par la continuité de l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega} G(x,u)dx\right| &\leq c\int_{\Omega}|u|\,dx \\ &\leq c_1\|u\|_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned} \tag{4.36}$$

On en déduit la minoration

$$\begin{aligned}J(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \int_{\Omega} G(x,u)dx \\ &\geq \frac{1}{2}[\|u\|_{H_0^1(\Omega)} - c_1]\|u\|_{H_0^1(\Omega)},\end{aligned}$$

qui implique la coercivité :

$$\lim_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\to+\infty} J(u) = +\infty.$$

3. **Semi-continuité inférieure faible de J sur M.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ telle que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } M.$$

La semi-continuité inférieure de la norme donne

$$\liminf_{n\to\infty} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \geq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{4.37}$$

Par théorème de Lebesgue dominée, on a

$$\int_\Omega G(x,u_n)dx \to \int_\Omega G(x,u)dx. \tag{4.38}$$

Combinant (4.37) et (4.38), on obtient

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} J(u_n) &= \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega G(x,u_n)\,dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega G(x,u)\,dx,\end{aligned}$$

ce qui établit la semi-continuité inférieure faible.

Par application du théorème 1.14, la fonctionnelle J admet un minimiser $u \in M$. En suivant un raisonnement analogue à celui de la démonstration du théorème 4.2, on vérifie que u satisfait la formulation variationnelle du problème (4.27).

Bibliographie

[1] R. A. Adams, and J. J. Fournier, *Sobolev spaces*. Elsevier, 2003.

[2] K. Akô, *On the Dirichlet problem for quasi-linear elliptic differential equations of the second order*, Journal of the Mathematical Society of Japan, 13 :45-62, 1961.

[3] H. Amann, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces*. SIAM review 18.4 (1976) : 620-709.

[4] A. Anane, *Étude des valeurs propres et de la résonance pour l'opérateur p -Laplacien*. (1988).

[5] A. Anane, *Simplicité et isolation de la première valeur propre du p -laplacien avec poids*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 305 (1987) 725-728.

[6] M. Badiale, and E. Serra, *Semilinear Elliptic Equations for Beginners : Existence Results Via the Variational Approach*. Springer Science, Business Media, 2010.

[7] L. Boccardo, and G. Croce, *Elliptic partial differential equations : existence and regularity of distributional solutions*. Vol. 55. Walter de Gruyter, 2013.

[8] V. I. Bogachev, and M. A. S. Ruas, *Measure theory*. Vol. 1. Berlin : springer, 2007.

[9] H. Brézis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. New York : Springer, 2011.

[10] S. Carl, S. Heikkilä, V. Lakshmikantham, *Nonlinear elliptic differential inclusions governed by state-dependent subdifferentials*, Nonlinear Analysis, 25 :729-745, 1995.

[11] S. Carl, H. Diedrich, *The weak upper and lower solution method for quasilinear elliptic equations with generalized subdifferentiable perturbations*, Applicable Analysis, 56 :263-278, 1996.

[12] K. C. Chang, *Methods in nonlinear analysis*. Vol. 10. Berlin : Springer, 2005.

[13] Y. Z. Chen, and L. C. Wu, *Second order elliptic equations and elliptic systems*. Vol. 174. American Mathematical Soc., 1998.

[14] Clason, Christian. Introduction to functional analysis. Springer Nature, 2020.

[15] M. Cuesta, *Eigenvalue problems for the p-laplacian with indefinite weight*. Elec. J. Diff. Equations (2001) : 1-9.

[16] A. A. de Lima, *O Método de Sub e Supersolução e Aplicações a Problemas Elípticos*. Diss. Universidade Federal de Campina Grande.

[17] J. Deuel, P. Hess, *A criterion for the existence of solutions of non-linear elliptic boundary value problems*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 74A :49-54, 1975.

[18] J. I. Diaz, J.E. Saa, *Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilinéaires*. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 305 (1987) 521-524.

[19] P. Drábek, A. Kufner, and F. Nicolosi, *Quasilinear elliptic equations with degenerations and singularities*. de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, Vol. 5, Berlin, New York, 1997.

[20] G. S. Dragoni, *II problema dei valori ai limiti studiato in grande per le equazioni differenziali del secondo ordine*. Math. Ann. 105 (1931), 133-143.

[21] L. C. Evans, *Partial differential equations*. Vol. 19. American Mathematical Society, 2022.

[22] L. Gasinski, and N. S. Papageorgiou, *Nonsmooth critical point theory and nonlinear boundary value problems*. Chapman and Hall/CRC, 2004.

[23] L. Gasinski, and N. S. Papageorgiou, *Nonlinear Analysis*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.

[24] D. Gilbarg, and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, 1998.

[25] M. Guedda, and L. Véron, *Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*. NONLINEAR ANAL. THEORY METHODS APPLIC. 13.8 (1989) : 879-902.

[26] A. R. F. Holanda, *Existência de soluções positivas para uma classe de equações elípticas*. Dissertação de Mestrado, UFPB, 2000.

[27] J. Jost, *Partial Differential Equations*. Springer-Verlag New York, 2013.

[28] O. Kavian : Introduction a la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Springer-Verlag,Berlin Heidelberg, vol. 13, 1993.

[29] Kenneth R. Davidson , *Functional Analysis and Operator Algebras*. Springer Nature Switzerland, 09 April 2025.

[30] J.Kinnunen, *Sobolev Spaces*.Déparetement of mathematics and Systems Analysis, Aalto University, 2017.

[31] R. Kress, *Linear Integral Equations*, no. volume 82 in Applied Mathematical Sciences, Springer, New York, third edition ed., 2014.

[32] M. T. Lacroix-Sonrier, *Distributions, espaces de Sobolev : applications*. Ellipses, 1998.

[33] V.K. Le, *Subsolution-supersolution method in variational inequalities*, Nonlinear Analysis, 45 :775-800, 2001.

[34] A. Lê, *Eigenvalue problems for the p-Laplacian*. Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications 64.5 (2006) : 1057-1099.

[35] H. Le Dret, *Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires*. Vol. 136. Springer, 2013.

[36] G. Leoni, *A first course in Sobolev spaces*. American Mathematical Soc., 2017.

[37] P. Lindqvist, *On the equation* $-\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$. Proc. Amer. Math. Soc. 109 (1990) 157-166. Addendum, Proc. Amer. Math. Soc. 116 (1992) 583-584.

[38] S. Migorski, A. Ochal, and M. Sofonea, *Nonlinear inclusions and hemivariational inequalities : models and analysis of contact problems*. Vol. 26. Springer Science and Business Media, 2012.

[39] M. Nagumo, *Über die Differentialgleichung* $y'' = f(x, y, y')$. Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series 19 (1937) : 861-866.

[40] M. Nagumo, *Über das Randwertproblem der nicht linearen gewohnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung*. Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series 24 (1942) : 845-851.

[41] N.S Papageorgiou, V.D Radulescu and D.D.Repovs, *Nonlinear Analysis : Theory and Methods*.Springer Monographs in Mathematics.

[42] N.S. Papageorgiou, *On the existence of solutions for nonlinear parabolic problems with nonmonotone discontinuities*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 205 :434-453, 1997.

[43] H.K. Pathak, *An introduction to nonlinear analysis and fixed point theory*. Springer, 2018.

[44] I. Peral, Multiplicity of solutions for the p-Laplacian. International Center for Theoretical Physics Lecture Notes, Trieste 2 (1997).

[45] O. Perron, *Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für* $\Delta u = 0$. Mathematische Zeitschrift, 18 :42-54, 1923.

[46] P. Pucci, and J. Serrin, *The strong maximum principle revisited*. Journal of Differential Equations 196.1 (2004), 1-66.

[47] V. D. Radulescu, and V. D. Rădulescu, *Qualitative analysis of nonlinear elliptic partial differential equations : monotonicity, analytic, and variational methods*. Hindawi Publishing Corporation, 2008.

[48] P. A. Raviart, and J. M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Vol. 6. Elsevier Masson, 1983.

[49] H. Royden, and P. M. Fitzpatrick, *Real analysis*. China Machine Press, 2010.

[50] S. Sakaguchi, *Concavity properties of solutions to some degenerate quasilinear elliptic Dirichlet problems*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze 14.3 (1987) : 403-421.

[51] D. H. Sattinger, *Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems*. Indiana University Mathematics Journal, 21 :979-1000, 1972.

[52] M. Struwe M, *Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*. Fourth edition. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[53] A. Szulkin, *On a class of variational inequalities involving gradient operators*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 100 :486-499, 1982.