REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE YAHIA FARES DE MEDEA
FACULTE DE TECHNOLOGIE



LBMPT
Médéa - Algérie

2019-UYFM-LBMPT

Doctorat

T H È S E

Pour obtenir le grade de docteur en sciences délivré par

L'Université Yahia Farès de Médéa
Spécialité : Génie des Procédés

Présentée et soutenue publiquement par

Nadia KERRACHE

Le 06/03/2019

TRANSFERTS THERMIQUES ET DE MASSE COUPLES EN MILIEU POREUX, ET ECOULEMENT MHD AVEC EFFETS RADIATIFS

Directeur de thèse : **Mohamed Najib BOUAZIZ**

Jury

M. Abdallah BENAROUS	Maitre de Conférences A, USD Blida	Président
M. Mohamed Najib BOUAZIZ	Professeur, Université Y.F Médéa	Directeur de Thèse
M. Mounir ZIRARI	Maitre de Conférences A, UY.F Médéa	Examinateur
M. Younes CHIBA	Maitre de Conférences A, UY.F Médéa	Examinateur

Laboratoire de Biomatériaux
et Phénomènes de Transport

T H È S E

نـقـل حـراري و كـتلي مقـــرون في وســط مســامي، وتـدفـق هـ د م مـع تـأثـيـرات إشعـاعيـــة

الهدف من هذا العمل هو دراسة تدفق الطبقة الحدية الهيد وديناميكية المغناطيسية (هـ د م) ذو حمل حراري طبيعي مشبع في وسط مسامي دارسي-فورشهايمر على لوحة مسطحة عمودية بوجود تأثير الإمتصاص / الحقن. مجموع المعادلات التفاضلية الجزئية يتم تحويلها إلى معادلات تفاضلية عادية باستخدام تحولات التشابه مع تقنية الإضطراب. الحلول الرقمية لهذه المعادلات يتم الحصول عليها باستخدام البرنامج ماتلاب. من أجل الأربع حالات المختلفة للتدفق، وهي السطح المعزول، سطح التدفق المستمر، ريشة مسطحة و التدفق المتولد من مصدر طاقة خط أفقي سطح عمودي بدون تبادل حراري. النتائج الرقمية لجوانب السرعة ودرجة الحرارة يتم مناقشتها من أجل قيم مختلفة من العوامل الفيزيائية، وهي عامل المجال المغناطيسي (م)، عدد رينولدز(ري)، عدد برندل (بر) و عامل الإمتصاص / الحقن (ف). أظهرت نتائجنا أن درجة الحرارة تتزايد بزيادة M,Re,F و تتناقص عندما يزداد Pr لكن السرعة تقل مع زيادة M,Re,Pr و تتزايد بزيادة F.

الكلمات المفتاحية: الحمل الحراري الحر، الطبقة الحدية (هـ د م) ، وسط مسامي، نموذج دارسي ـ فورشهايمر، الإمتصاص / الحقن.

Transferts thermiques et de masse couplés en milieu poreux, et ecoulement MHD avec effets radiatifs

Le but du présent travail est d'étudier le flux de la couche limite magnétohydrodynamique (MHD) de convection naturelle saturé dans un milieu poreux Darcy-Forchheimer sur une plaque verticale en présence d'un effet injection/aspiration. L'ensemble des équations différentielles partielles se transforme en équations différentielles ordinaires en utilisant des transformations de similarité avec une technique de perturbation. Les solutions numériques de ces équations sont obtenues en utilisant le logiciel MATLAB. Pour les quatre différents cas d'écoulements, à savoir la surface isotherme, la surface de flux constant, panache plan et le flux généré à partir d'une source d'énergie de ligne horizontale une surface adiabatique verticale, les résultats numériques pour les profils de vitesse et de température sont discutés pour des valeurs diverses de paramètres physiques, à savoir le paramètre de champ magnétique *(M)*, le nombre de Reynolds *(Re)*, le nombre de Prandtl *(Pr)* et le paramètre injection/aspiration *(F)*. Nos résultats ont montré que la température augmente avec l'augmentation de *M, Re*, *F* et diminue lorsque *Pr* augmente mais la vitesse diminue avec l'augmentation de *M, Re*, *Pr* et augmente lorsque *F* augmente.

Mots clés: Convection naturelle, MHD couche limite, Milieu poreux, Modèle de Darcy-Forchheimer, Injection/Aspiration.

Heats and mass transfers coupled in a porous medium, flow with MHD and radiative effects

The purpose of the present work is to study the magnetohydrodynamic (MHD) free convection boundary layer flow saturated in a Darcy- Forchheimer porous medium over a vertical flat plate in presence of suction/injection effect. The set of the partial differential equations is transformed into ordinary differential equations by using similarity transformations with perturbation technique. Numerical solutions of these equations are obtained by employing the logical MATLAB. For the four different cases of flows, namely isothermal surface, constant flux surface, plane plume and flow generated from a horizontal line energy source a vertical adiabatic surface. The numerical results for the velocity and temperature profiles are discussed for various values of physical parameters, namely the magnetic field parameter *(M)*, the Reynolds number *(Re)*, the Prandtl number *(Pr)* and the suction/injection parameter *(F)*.Ours results showed that the temperature increases with the increasing of *M, Re, F* and decreases when *Pr* increase but the velocity decreases with the rising of *M, Re ,Pr* and increases when *Pr* increases.

Keywords: Free convection, Boundary layer MHD, Porous medium, Darcy- Forchheimer model, Suction/Injection.

REMERCIEMENTS

Avant tout, je remercie ALLAH le Seigneur de l'Univers de m'avoir donné le courage, la force et la patience de mener à bien ce modeste travail.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à Monsieur ***Mohamed Najib BOUAZIZ****, Professeur à l'université Dr. Yahia Farès de Médéa, pour la confiance qu'il m'a témoigné en acceptant de diriger et encadrer les travaux de cette thèse. Je lui réitère ici mes remerciements les plus vifs pour sa patience, son aide et ses orientations.*

J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur ***Abdallah BENAROUS****, Maitre de Conférences à l'université Saâd Dahlab de Blida, pour avoir accepté de présider le jury de thèse.*

Je remercie Monsieur ***Mounir ZIRARI****, Maitre de Conférences à l'université Dr. Yahia Farès de Médéa d'avoir accepté d'évaluer ce travail en faisant partie de ce jury.*

Je tiens à remercie Monsieur ***Younes CHIBA****, Maitre de Conférences à l'université Dr. Yahia Farès de Médéa, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'examiner ce travail.*

Je n'oublierai pas également tous ceux et celles qui m'ont aidé de près ou de loin à réaliser ce travail, notamment Mon mari ***Abdelkader****, de leur dire Merci beaucoup.*

Enfin, j'espère que ce travail soit la bonne expression de ma gratitude.

N. Kerrache

LISTE DES FIGURES

Figure I.1 Exemples de milieux poreux naturels 5

Figure I.2 Evolution de la fonction porosité au voisinage d'un point du milieu poreux 7

Figure I.3 Volume élémentaire représentatif 8

Figure I.4 Bloc poreux soumis à un écoulement..... 12

Figure I.5 La transition du régime de Darcy au régime de Forchheimer dans un écoulement unidirectionnelle à travers un milieu poreux saturé isothermique 13

Figure II.1 Couche limite dynamique sur une plaque plane 23

Figure II.2 Couche limite thermique sur une plaque isothermique..... 24

Figure II.3 Couche limite massique sur une plaque horizontale..... 25

Figure II.4 Développement de couches limites laminaires 27

Figure II.5 Développement de la couche limite sur une plaque verticale chauffée 28

Figure II.6 Couche limite en convection libre laminaire sur une plaque verticale 32

Figure II.7 Transfert de chaleur par convection naturelle externe dans un milieu poreux 35

Figure II.8 Couche limite devant une plaque verticale en milieu poreux 36

Figure III.1 Écoulement en conduite en présence d'une induction magnétique Transversale Uniforme..... 46

Figure III.2 Profils de vitesse de l'écoulement de Hartmann 47

Figure IV.1 Modèle physique 53

Figure V.1 Variation de profils de vitesse avec η pour surface isotherme (n=0.0, Pr =0.733, Ec=0.01) 60

Figure V.2 Variation de profils de vitesse avec η pour surface de flux constant (n=0.2, Pr = 0.733, Ec=0.01) 60

Figure V.3 Variation de profils de vitesse avec η pour panache plan

(n= -0.6, Pr =0.733, Ec=0.01) 61

Figure V.4 Variation de profils de vitesse avec η pour panache mur plan
(n= -0.6, Pr =0.733, Ec=0.01) 61

Figure V.5 Variation de profils de température avec η pour surface isotherme
(n=0.0, Pr =0.733, Ec=0.01) 62

Figure V.6 Variation de profils de température avec η pour surface de flux constant
(n=0.2, Pr = 0.733, Ec=0.01) 63

Figure V.7 Variation de profils de température avec η pour panache plan
(n= -0.6, Pr=0.733, Ec=0.01) 63

Figure V.8 Variation de profils de température avec η pour panache mur plan
(n= -0.6, Pr=0.733, Ec=0.01) 64

Figure V.9 Variation de profils de vitesse avec η pour surface isotherme
(n=0.0, Re=1, Ec=0.01)..... 67

Figure V.10 Variation de profils de vitesse avec η pour surface de flux constant
(n=0.2, Re=1, Ec=0.01)..... 68

Figure V.11 Variation de profils de vitesse avec η pour panache plan
(n= -0.6, Re=1, Ec=0.01) 68

Figure V.12 Variation de profils de vitesse avec η pour panache mur plan
(n= -0.6, Re=1, Ec=0.01) 69

Figure V.13 Variation de profils de température avec η pour surface isotherme
(n=0.0, Re=1, Ec=0.01) 70

Figure V.14 Variation de profils de température avec η pour surface de flux constant
(n=0.2, Re=1, Ec=0.01)..... 70

Figure V.15 Variation de profils de température avec η pour panache plan
(n= -0.6, Re=1, Ec=0.01) 71

Figure V.16 Variation de profils de température avec η pour panache mur plan
(n= -0.6, Re=1, Ec=0.01) 71

Figure V.17 Variation de profils de vitesse avec η pour surface isotherme
(n=0.0, Pr=0.733, Re=1, Ec=0.01)..... 75
Figure V.18 Variation de profils de vitesse avec η pour surface de flux constant
(n=0.2, Pr = 0.733, Re=1, Ec=0.01)..... 75
Figure V.19 Variation de profils de vitesse avec η pour panache plan
(n= -0.6, Pr=0.733, Re=1, Ec=0.01) 76
Figure V.20 Variation de profils de vitesse avec η pour panache mur plan
(n= -0.6, Pr=0.733, Re=1, Ec=0.01) 76
Figure V.21 Variation de profils de température avec η pour surface isotherme
(n=0.0, Pr=0.733, Re=1, Ec=0.01)..... 77
Figure V.22 Variation de profils de température avec η pour surface de flux constant
(n=0.2, Pr=0.733, Re=1, Ec=0.01)..... 78
Figure V.23 Variation de profils de température avec η pour panache plan
(n= -0.6, Pr=0.733, Re=1, Ec=0.01) 78
Figure V.24 Variation de profils de température avec η pour panache mur plan
(n= -0.6, Pr=0.733, Re=1, Ec=0.01) 79

LISTE DES TABLEAUX

Tableau I.1. Propriétés de quelques matériaux poreux 10

Tableau II.1. Transfert de chaleur par convection naturelle externe dans un milieu poreux 34

Tableau III.1. Diffusivités magnétiques D_m et nombres de Reynolds magnétiques R_m pour quelques écoulements MHD 42

Tableau V.1. Validation pour le cas de surface isotherme 59

Tableau V.2. Grandeurs déterminantes pour surface isotherme (n=0.0, Pr=0.733, Ec=0.01) 65

Tableau V.3. Grandeurs déterminantes pour surface de flux constant (n=0.2, Pr=0.733, Ec=0.01) 65

Tableau V.4. Grandeurs déterminantes pour panache plan (n= -0.6, Pr=0.733, Ec=0.01) 66

Tableau V.5. Grandeurs déterminantes pour panache mur plan (n= -0.6, Pr=0.733, Ec=0.01) 66

Tableau V.6. Grandeurs déterminantes pour surface isotherme (n=0.0, Re=1, Ec=0.01) 72

Tableau V.7. Grandeurs déterminantes pour surface de flux constant (n=0.2, Re=1, Ec=0.01) 73

Tableau V.8. Grandeurs déterminantes pour panache plan (n= -0.6, Re=1, Ec=0.01) 73

Tableau V.9. Grandeurs déterminantes pour panache mur plan (n= -0.6, Re=1, Ec=0.01) 74

Tableau V.10. Grandeurs déterminantes pour surface isotherme (n = 0.0, Pr = 0,733, Re = 1, Ec = 0,01) 80

Tableau V.11. Grandeurs déterminantes pour surface de flux constant (n=0.2, Pr=0.733, Re=1, Ec=0.01) 80

Tableau V.12. Grandeurs déterminantes pour panache plan (n= -0.6, Pr=0.733, Re=1, Ec=0.01) 81

Tableau V.13. Grandeurs déterminantes pour panache mur plan (n= -0.6, Pr=0.733, Re=1, Ec=0.01) 81

LISTE DES SYMBOLES

B_0	Induction magnétique	[Tesla]
$U\tau$	Vitesse de frottement à la paroi	[m/s]
C_f	Coefficient de frottement. chapitre II	[-]
c_f	Chaleur spécifique à pression constante du fluide	[J/Kg]
$C_f(x)$	Coefficient de frottement local	[-]
c_p	Chaleur spécifique du fluide	[J/Kg.K]
$C_{A,s}$	Concentration de l'espèce chimique surfacique A	[mol/m^3]
$C_{A,\infty}$	Concentration de l'espèce chimique surfacique A à l'infini	[mol/m^3]
D_{AB}	Diffusivité massique	[m^2/s]
D_m	Diffusion magnétique	[m^2/s]
d_p	Diamètre des particules	[m]
E	Champ électrique	[V/m]
E_c	Nombre d'Eckert	[-]
F^*	Paramètre de Forchheimer	[-]
f	Fonction de courant adimensionnelle	[-]
g	Accélération gravitationnelle	[m/s^2]
$\mathrm{Gr_x}$	Nombre local de Grashof.	[-]
h	Coefficient du transfert de chaleur	[W/m².K]
h_m	Coefficient de transfert massique	[m/s]
j	Densité de courant électrique	[A/m^2]
k	Conductivité thermique	[W/m.K]
K	Perméabilité	[m^2]
k_m	Conductivité thermique total du milieu.	[W/m.K]
L	Longueur de paroi	[m]
M	Paramètre Magnétique	[-]
$P*$	Pression	[Pa]
Pr	Nombre de Prandt	[-]
q'_s	Flux thermique surfacique.	[W/m²]
q''_A	Flux massique surfacique.	[W/m²]
Ra_x	Nombre de Rayleigh Local	[-]
Re	Nombre de Reynolds	[-]
t	Temps	[s]

T	Température.	[K]
T^*	Température adimensionnelle.	[-]
u	Composante de vitesse selon x	[m/s]
u_0	Vitesse de référence	[m/s]
u_∞	Vitesse en dehors de couche limite	[m/s]
v	Composante de vitesse selon y	[m/s]
x, y	Coordonnées cartésiennes	[m]

LETTRES GRECQUES

α	Diffusivité thermique	[m^2/s]
α_m	Diffusivité thermique de milieu poreux	[m^2/s]
β	Coefficient de dilatation thermique	[1/K]
δ	Epaisseur de lacouche limite Dynamique.	[m]
δ_T	Epaisseur de couche limite thermique.	[m]
ε	Porosité	[-]
ε_0	Permittivité diélectrique	[F/m]
η	Variable de similitude	[-]
θ	Température adimensionnelle	[-]
μ	Viscosité dynamique.	[N.s/m]
$\tilde{\mu}$	Viscosité effective.	[N.s/m]
μ_0	Perméabilité magnétique	[H/m]
ν	Viscosité cinématique	[m^2/s]
ρ_f	Masse volumique de fluide	[Kg/m^3]
ρ	Densité	[Kg/m^3]
σ	Conductivité électrique.	[S/m]
ψ	Fonction de courant	[m^2/s]

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE 1

CHAPITRE I: LES MILIEUX POREUX

I.1 Introduction 4
I.2 Classification des milieux poreux 6
1.3 Paramètres caractérisant le milieu poreux 6
1.3.1 Volume élémentaire représentatif (V.E.R.) 6
1.3.2 La Porosité 8
1.3.3 La perméabilité d'un milieu poreux 8
I.4 Écoulement de fluide à travers un milieu poreux 10
I.4.1 Équation de continuité 10
I.4.2 La loi de Darcy 11
I.4.3 Extensions de la loi de Darcy 12
I.4.3.1 Équation de Forchheimer 12
I.4.3.2 Équation de Brinkman 14
I.4.3.3 Équation de Brinkman –Forchheimer 14
I.5 Transfert thermique à travers un milieu poreux 15
I.5.1 Équation d'énergie: cas simple 15
I.5.2 Conductivité thermique totale 16
I.5.3 Effets de changements de pression, dissipation visqueuse, et absence d'équilibre thermique local 17
I.5.4 Conditions aux limites thermiques 19

CHAPITRE II: CONVECTION NATURELLE

II.1 Introduction 20
II.2 Convection naturelle thermique et massique 20
II.2.1 Aspect physique du problème 20
II.2.2 Couche limite en convection libre dans un milieu libre 22
II.2.2.1 Couche limite dynamique 22
II.2.2.2 Couche limite thermique 24
II.2.2.3 Couche limite massique 25
II.2.3 Équations de couche limite laminaire en convection libre 27
II.2.3.1 Considérations de similitude 29
II.2.4 Convection naturelle en milieu poreux 33

II.2.4.1 Convection externe (cas d'une plaque verticale) 35

CHAPITRE III: MAGNETOHYDRODYNAMIQUE

III.1 Introduction 38
III.2 Description d'un fluide conducteur 39
III.2.1 Loi d'Ohm généralisée 39
III.2.2 Equations de Maxwell 40
III.2.3 Équation d'induction et force de Laplace 41
III.2.4 Équations du mouvement 43
III.3 Écoulement de Hartmann 44
III.4 Nombres sans dimension 49

CHAPITRE IV: CONFIGURATION ET FORMULATION MATHEMATIQUE

IV.1 Introduction 51
IV.2 Configuration étudiée 52
IV.3 Formulation mathématique 53
IV.3.1 Formulation mathématique de base 53
IV.3.2 Formulation mathématique en variables adimensionnées 54
IV.3.3 Formulation mathématique en variables de similarité (C.L) 55
IV.4 Résolution par perturbation 55
IV.5 Méthode numérique 58

CHAPITRE V: RESULTATS ET DISCUSSION

V.1 Validation du code de contrôle 59
V.2 L'influence de champ magnétique M et le nombre de Reynolds Re 59
V.3 L'influence de champ magnétique M et le nombre de Prandtl Pr 67
V.4 L'influence de champ magnétique M et le paramètre injection/aspiration F 74
V.5 Conclusion 82

CONCLUSION GENERALE 83

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES 84

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Les transferts de chaleur constituent la base de nombreux procédés industriels et ils sont aussi très présents dans la vie quotidienne. L'amélioration de ces échanges et l'augmentation du rendement sont une préoccupation majeure des industriels, des organismes de réglementation mais aussi de la société dans son ensemble, qui prend conscience de l'épuisement progressif des ressources fossiles et qui se soucie de l'avenir en matière énergétique.

La recherche théorique et appliquée dans l'écoulement du fluide et les transferts convectifs thermique à travers les milieux poreux ont reçu l'attention soutenue pendant les trois décennies passées en raison des phénomènes particuliers dans ces milieux et qui sont souvent rencontrés dans les procédés industriels et surtout en industrie chimique, dans l'ingénierie des réservoirs de gaz et pétrole, notamment lors de la récupération tertiaire.

Le transfert de chaleur par convection naturelle dans un milieu poreux comprend plusieurs effets physiques importants, tel que l'effet d'un milieu poreux dû aux force d'inertie à l'échelle des pores,sur la quantité de mouvement, l'énergie, a été étudié en profondeur pour plusieurs configurations géométriques et conditions aux limites, de telle sorte qu'il existe actuellement le modèle couplé de Brinkman - Forchheimer (modèle généralisé) qui est utilisé par les chercheurs. . Oztop et al. [1] ont étudié la convection naturelle dans une enceinte partiellement ouverte remplie de matière poreuse et utilisant le modèle de Brinkman-Forchheimer. Une simulation numérique utilisant la méthode des différences finies avec l'étude théorique pour le problème du flux et du transfert de chaleur sur une feuille d'étirement instable intégrée dans un milieu poreux en présence d'un rayonnement thermique a été présentée par Khader et Megahed [2]. Umavathi [3] étudiée la convection libre sur une conduite verticale rectangulaire avec matrice poreuse à viscosité variable et variable conductivité thermique.

L'étude des mouvements des fluides conducteurs d'électricité se passe souvent en présence de champ magnétique et est désignée comme étant la magnétohydrodynamique ou (MHD). Cette dernière

est une branche de la physique, qui s'applique aux métaux liquides (mercure, métaux alcalins fondus), au gaz faiblement ionisés, aux plasmas et aux solutions aqueuses. Lorsqu'un fluide conducteur se déplace dans un champ magnétique, il est le siège d'un champ électrique qui y produit des courants électriques ; ceux-ci modifient le champ magnétique initial ; d'autre part, les forces de Lorentz appliquées à la matière le long des lignes de courant modifient le mouvement du fluide. Ainsi apparait une interaction des effets électromagnétiques et hydrodynamiques qui constituent le domaine de la MHD. L'importance de l'interaction est caractérisée par un nombre sans dimension R_M appelé nombre de Reynolds magnétique; R_M est proportionnelle à la conductivité électrique du fluide, à sa vitesse et aux dimensions de l'écoulement. L'interaction est généralement faible ($R_M < 1$) dans les métaux liquides et les gaz faiblement ionisés et forte ($R_M > 1$) dans les plasmas.

Les effets d'un champ magnétique et de la génération de chaleur sur la convection instationnaire libre dans une enceinte carrée remplie d'un milieu poreux saturé par un fluide électriquement conducteur ont été analysés par Revnic et al. [4]. Sharma [5] a étudié le transfert de chaleur instationnaire caractéristique de l'écoulement du fluide visqueux sur une feuille d'étirement placé dans un milieu poreux en présence de dissipation visqueuse et absorption de chaleur interne ou génération. Afify [6] a étudié l'écoulement par convection libre d'un fluide électriquement conducteur sur une plaque verticale imperméable noyée dans un milieu poreux non darcy saturé de fluide thermiquement stratifié dans le cas de la température de surface de loi de puissance. Bég et al. [7] ont étudié le flux de MHD de convection d'une sphère vers un milieu poreux non-Darcéen avec des effets de génération de chaleur ou d'absorption. Chaudhary et Jain [8] ont obtenu une solution de flux de MHD de convection passé une surface accélérée intégrée dans un milieu poreux. Sharma et al. [9] ont étudié l'effet combiné du champ magnétique et de l'absorption thermique sur la convection instationnaire libre et le flux de transfert de chaleur dans un fluide micropolaire au-delà d'une plaque mobile semi-infinie avec dissipation visqueuse utilisant la méthode de Galerkin sans élément.

La présente thèse s'articule sur cinq chapitres répartis comme suit:

Le premier chapitre est destiné aux caractéristiques des milieux poreux, ensuite à l'écoulement de fluide à travers ces milieux, suivi par une partie théorique concernant le transfert thermique dans les milieux poreux saturés d'un fluide, un exposé est alors présenter les caractéristiques du milieu poreux pour comprendre les différents aspects.

Le deuxième chapitre est consacré exclusivement à l'étude théorique de la convection naturelle dans un milieu fluide et poreux et également une description détaillée en ce qui concerne la région dit couche limite dynamique, thermique et massique.

Le troisième chapitre se présente comme l'aspect théorique et pratique de la magnétohydrodynamique (MHD) et les relations qui existent avec la mécanique des fluides.

Le quatrième chapitre est dédié ainsi à la configuration d'étude et par suite à la formulation mathèmatique qui s'y rapporte. Un aperçu est réservé à la méthode numérique utilisée pour traiter les équations fortement couplés et non linéaires issues de la formulation mathématique.

Le cinquième chapitre rassemble les résultats numériques d'un écoulement magnétohydrodynamique de convection naturelle en présence de l'effet injection/aspiration sur une plaque verticale dans un milieu poreux Darcéen-Fochheimer. L'analyse des résultats est établie pour décrire l'influence de différents paramètres qui contrôlent les mécanismes de l'écoulement-transfert.

Une conclusion générale rassemble les principaux résultats obtenus dans cette étude et des perspectives qui peuvent être envisagées comme projets de recherche.

CHAPITRE (I)

LES MILIEUX POREUX

LES MILIEUX POREUX

I.1 Introduction

On désigne communément par milieu poreux un solide de forme compliquée délimitant et englobant des vides appelés pores. Ces vides peuvent communiquer entre eux et contenir une ou plusieurs phases fluides pouvant s'écouler et, éventuellement, échanger entre elles et/ou avec le solide de la matière et/ou de l'énergie. La partie solide, encore appelée matrice, peut être déformable mais doit avoir une certaine cohésion, ce qui exclut les lits fluidisées constitués de particules solides tenues en suspension sous l'effet d'un écoulement du fluide interstitiel.

On trouve de nombreux exemples de milieux poreux dans la vie courante : Textiles, cuirs, papiers, tissus, matériaux de construction, isolants, sols, filtres, etc., en constituant autant d'illustrations (Figure I.1).

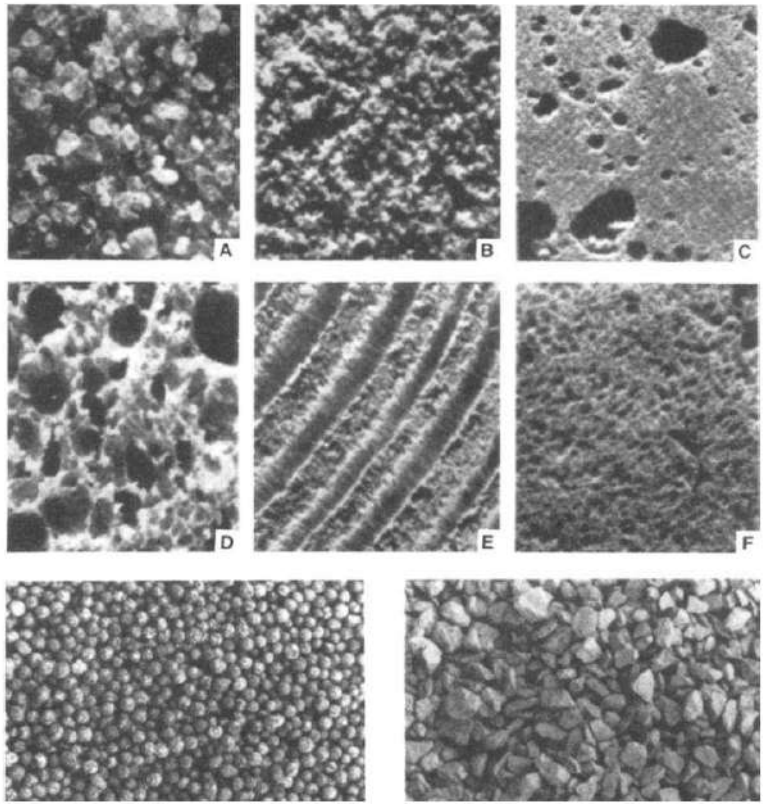


Figure I.1: Exemples de milieux poreux naturels

A) sable de plage, B) grès,C) calcaire, D) pain de seigle, E) bois, F) poumon humain, En bas: Les matériels poreux granuleux sont utilisés dans la construction et en industrie, 0.5 centimètre diamètre Liapor, sphères (à gauche) ; et le calcaire écrasé de taille 1 centimètre (à droite), [10].

D'une très grande variété, aussi bien de structure (forme et taille des grains et des pores de la matrice) que de nature (propriétés physico-chimiques des matériaux constitutifs) ou d'échelles spatiales (plusieurs dizaines de kilomètres cubes de gisements d'hydrocarbures et les nappes d'eau souterraines, à quelques millimètres cubes pour certains types de membranes filtrantes), les milieux poreux occupent une large place et jouent un rôle important dans de nombreux secteurs industriels et phénomènes naturels. En se limitant à quelques exemples typiques, on peut notamment citer : le génie pétrolier, le génie chimique, et l'électrochimie, l'hydrogéologie, le génie thermique, le génie civil, la médecine, la biochimie…

Les phénomènes qui se déroulent dans les milieux poreux dépendent, en général, d'un certain nombre de propriétés dont : les propriétés de stockage des fluides (soit sous forme adsorbée sur le

solide, soit remplissant les pores), les propriétés de transfert (masse, quantité de mouvement, énergie) et enfin les propriétés mécaniques. Comme pour tous les systèmes hétérogènes polyphasiques, ces propriétés sont évidemment fonction de la morphologie de la matrice et des phénomènes qui se développent et interagissent dans les différentes phases, ce qui rend le champ d'étude des transferts thermique et massique en milieux poreux particulièrement vaste [10].

I.2 Classification des milieux poreux

La matrice d'un milieu poreux peut être :

- **non consolidée** : la phase solide est alors formée de grains ou de fibres non soudés entre eux (graviers, sables, limons, billes de verre et acier, matériaux divers…) ; les billes de verre sont notamment très utilisées en laboratoire pour étudier les phénomènes de transfert en milieu poreux [11].
- **consolidée** : dans ce cas, la matrice solide compacte ne peut pas se diviser en grains ou fibres (roches calcaires, grés, argiles, bois, céramiques, poudres frittées, tissus végétaux et animaux…) [11].

1.3 Paramètres caractérisant le milieu poreux

1.3.1 Volume élémentaire représentatif (V.E.R.)

La notion de Volume Elémentaire Représentatif (V.E.R.) consiste à associer à un point mathématique les propriétés d'un volume suffisamment représentatif pour définir ou mesurer des propriétés moyennes du milieu; Bear cité dans [12].

Le V.E.R peut-être défini comme le fait De Marsily, cité dans [12] :

- il est suffisamment grand pour contenir un grand nombre de pores, de façon que l'on puisse y définir une propriété moyenne globale, avec l'assurance que l'effet de fluctuation d'un pore à l'autre sera négligeable ;
- il est suffisamment petit pour que les variations de paramètres d'un domaine au domaine voisin puissent être approchées par des fonctions continues.

A cette échelle d'étude, le milieu poreux est équivalent à un milieu continu dans lequel sont définies des grandeurs moyennes. La taille du V.E.R est généralement définie par l'apparition d'un palier dans la courbe reliant une propriété du milieu à la taille du volume d'observation (Figure I.2).

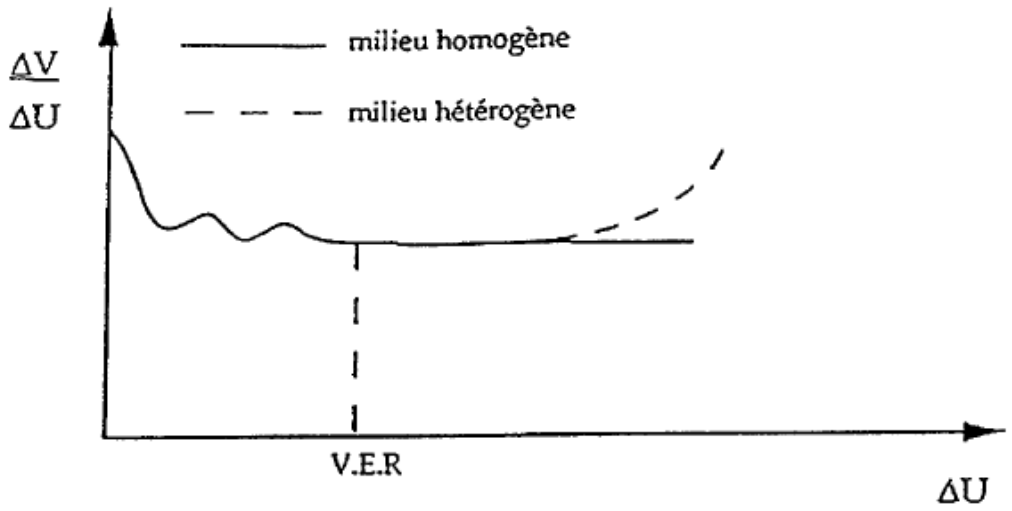


Figure I.2: Evolution de la fonction porosité au voisinage d'un point du milieu poreux

Définition du volume élémentaire représentatif

Mais rien ne permet d'affirmer que ce palier existe toujours. La taille du V.E.R. (Figure I.3) reste donc assez arbitraire, De Marsily, dans [12]. Zhang et al. dans [12] vérifient même expérimentalement que cette taille varie dans l'espace et en fonction de la propriété étudiée. Ils rectifient la définition de Bear en ajoutant à la stabilisation de la valeur moyenne un coefficient de variation de la variable qui doit être inférieur à une valeur seuil.

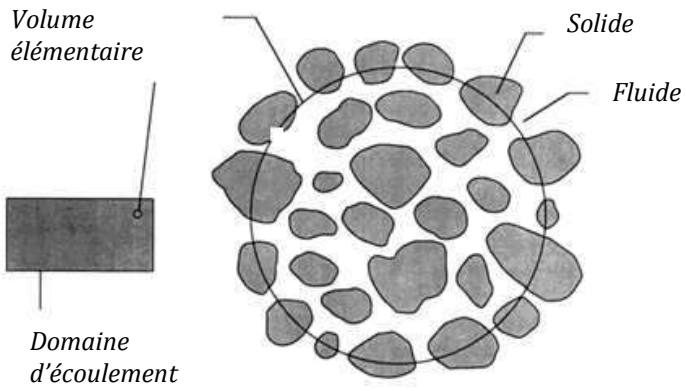


Figure I.3: Volume élémentaire représentatif

Les variations spatiales de la grandeur étudiée sont mieux prises en compte, l'alternative étant le traitement statistique des valeurs locales. Dans l'approche statistique, la moyenne est sur un ensemble de structures du pore qui sont macroscopiquement équivalentes. Une difficulté habituellement rencontré est que l'information statistique au sujet de l'ensemble doit être basée sur un échantillon unique, et c'est possible seulement si une homogénéité statistique est supposée.

1.3.2 La Porosité

La porosité d'un milieu poreux, notée ε désigne le rapport du volume des pores sur le volume total de la matrice poreuse :

$$\varepsilon = \frac{\text{Volume des pores}}{\text{Volume total du milieu poreux}} \qquad \text{I-1}$$

1.3.3 La perméabilité d'un milieu poreux

La perméabilité est la propriété d'un matériau à laisser s'écouler un fluide sous pression, la perméabilité K dépend de la porosité, de la géométrie et de la porosité communicante. Plusieurs évaluations de la perméabilité K en fonction de ε et d'une dimension caractéristique de la matrice poreuse à l'échelle du pore ont été proposées. Les différentes expressions donnant la perméabilité dépendent de la géométrie du milieu poreux.

La relation de Kozeny-Carman, donne une estimation de la perméabilité *K* pour un milieu poreux non consolidé constitué d'éléments identiques de géométrie simple :

$$k = \frac{d_P^2 \, \varepsilon^2}{36 C_0 (1-\varepsilon)^2} \qquad \text{I-2}$$

où, d_P désigne une dimension caractéristique des éléments constituant la matrice poreuse (diamètre pour des billes, arrête pour des cubes…) et C_0 une constante dépendant de la forme des grains ($3.6 < C_0 < 5$) et en particulier $C_0 = 4.84$ pour des grains sphériques.

Ergun, 1952, établit une expression semblable à l'équation I-2 en considérant l'écoulement unidirectionnel d'un fluide incompressible au sein d'une colonne poreuse constituée de particules sphériques, de diamètre *d*, et soumise à un gradient de pression :

$$k = \frac{d_P^2 \, \varepsilon^2}{150 C_0 (1-\varepsilon)^2} \qquad \text{I-3}$$

Ce qui correspond à une valeur de C_0 de la loi de Kozeny-Carman de 4.16.

La modélisation des pores par des fissures capillaires de largeur *w* et distantes de *D*, conduit à une perméabilité :

$$k = \frac{w^3}{12(w+D)} = \frac{w^3}{12} \varepsilon \qquad \text{I-4}$$

La modélisation de la matrice poreuse comme un faisceau de tubes capillaires parallèles conduit à l'expression suivante de la perméabilité :

$$k = \varepsilon \frac{d_P^2}{36} \text{ avec } \varepsilon = n(\pi d_P^2)/4 \qquad \text{I-5}$$

où, *n* est le nombre de capillaires par unité de surface perpendiculaire au sens de l'écoulement et d_P est le diamètre des capillaires.

Nous présentons dans le Tableau I.1 les valeurs de la porosité et de la perméabilité pour différents matériaux poreux [10].

Tableau I.1: Propriétés de quelques matériaux poreux

Matériau	**Porosité ε**	**Perméabilité K (m²)**
Ardoise	0.56 à 0.66	4.9×10^{-14} à 4.4×10^{-13}
Brique	0.12 à 0.34	4.8×10^{-15} à 2.2×10^{-13}
Charbon	0.02 à 0.12	-
Fibre de verre	0.88 à 0.93	-
Calcaire (dolomite)	0.04 à 0.10	2×10^{-15} à 4.5×10^{-14}
Sable	0.37 à 0.50	2×10^{-11} à 1.8×10^{-10}
Grés	0.08 à 0.38	5×10^{-16} à 3×10^{-12}
Silice(en poudre)	0.37 à 0.49	1.3×10^{-14} à 5.1×10^{-14}

I.4 Écoulement de fluide à travers un milieu poreux

I4.1 Équation de continuité

La construction d'un modèle de la continuité pour un milieu poreux peut se baser ainsi sur le (V.E.R.), il faudrait alors introduire une référence cartésienne et considérer des éléments du volume qui sont suffisamment grand, à comparer avec les volumes du pore pour les moyennes du volume fiables qui peuvent être obtenues. En d'autres termes, les moyennes ne sont pas sensibles au choix de l'élément du volume.Une distinction est faite entre une moyenne sur un élément du volume V_m du milieu (solide et fluide), et sur un élément du volume V_f qui consiste seulement en une partie au fluide.

Par exemple, la vitesse moyenne du fluide sur V_m est dénotée par $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$, [10]. Cette quantité a été donnée par plusieurs appellations, comme, vitesse de filtration, vitesse de Darcy, vitesse superficielle…etc. Le terme vitesse de Darcy est préféré parce qu'il est court et distinctif. En prenant

une moyenne de la vitesse de fluide sur un volume V_f nous obtenons la vitesse moyenne intrinsèque V qui est en rapport avec v par la relation de Dupuit-Forchheimer $v = \varepsilon V$. Par cette liaison, il est possible d'appliquer les équations différentielles habituelles qui expriment les lois de la conservation. Par exemple, la conservation de masse est exprimée par l'équation de la continuité :

$$\varepsilon \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla(\rho_f . v) = 0 \qquad \text{I-6}$$

où, ρ_f est la masse volumique de fluide, cette équation est dérivée en considérant un volume élémentaire unitaire du milieu et est égale au taux d'augmentation de la masse du fluide dans ce volume [10].

I.4.2 La loi de Darcy

L'´étude fondatrice des écoulements dans les milieux poreux a été réalisée par l'ingénieur Darcy en 1856 avec un "Mémoire sur les fontaines publiques de la ville de Dijon".

Il a mis en évidence une relation linéaire entre la vitesse et le gradient de pression appliqué de part et d'autre du matériau poreux. La loi de Darcy s'applique à un milieu poreux homogène et isotrope parcouru par un écoulement à faible vitesse. Avec ces hypothèses, la vitesse moyenne de l'´écoulement est [13]:

$$v_f = -\frac{K}{\mu}\frac{\Delta p}{L} \qquad \text{I-7}$$

Avec, μ la viscosité dynamique du fluide, $\Delta P/L$ le gradient de pression appliqué à un échantillon de longueur L (Figure I.4), et K la perméabilité du milieu poreux. Il est important de noter que ce paramètre est indépendant de la nature du fluide. Il ne dépend que de la structure du réseau de pores du matériau. Il est possible de rattacher par la suite cette perméabilité aux propriétés géométriques du matériau. Il ne faut pas confondre la vitesse de filtre et la vitesse du fluide dans les pores. En effet, la vitesse de filtre est bien une vitesse moyenne de l'écoulement, moyenne effectuée sur un volume comprenant une partie de solide immobile. Par conséquent, la vitesse du fluide dans les pores, appelée vitesse interstitielle est [13]:

$$v_i = \frac{v_f}{\varepsilon} \qquad \text{I-8}$$

Vitesse supérieure à la vitesse de filtre (car ε< 1).

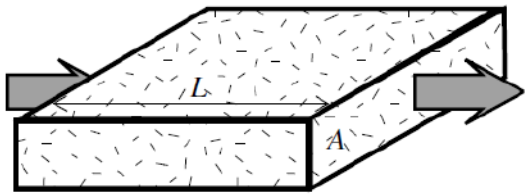


Figure I.4: Bloc poreux soumis à un écoulement

I.4.3 Extensions de la loi de Darcy

I.4.3.1 Équation de Forchheimer

L'équation de Darcy est linéaire pour la vitesse du Darcy *v*. Cela est valide quand *v* est suffisamment petit. En pratique, "suffisamment petits" signifie que le nombre Reynolds représentant l'écoulement est très petit, basé sur un pore typique ou diamètre de la particule, qui est de l'ordre des unités. Comme *v* augmente, la transition au non linéarité est tout à fait régulière.

Il n'y a pas de transition soudaine comme Re_p varie dans la gamme 1 à 10. Puisque le nombre de Reynolds est petit, l'écoulement dans les pores est toujours laminaire.

D'après Joseph et al. [14], le changement approprié de l'équation de Darcy est :

$$\nabla p = -\frac{\mu}{K} v - c_f K^{-1/2} \rho_f |v| v \qquad \text{I-9}$$

où, le c_f est une constante adimensionnelle. L'équation I-9 [15] est un changement d'une équation associée avec les noms de Dupuit et Forchheimer, Pour simplicité, l'équation I-9 est dite équation de Forchheimer et le dernier terme s'appelle le terme de Forchheimer, mais en fait la dépendance sur $c_f K^{-1/2}$ est une investigation moderne Ward [16]. Ward pensait que le c_f peut être une constante universelle, avec une valeur d'approximativement de 0.55, mais plus tard il a été trouvé que le c_f varie avec la nature du milieu poreux et peut être aussi petit que 0.1 dans le cas de fibres de mousse

métallique. Beavers et al. dans [14], ont montré que les parois de délimitation pourraient avoir un effet important sur la valeur de c_f, et ont constaté que les données sont corrélées assez bien avec l'expression :

$$c_f = 0.55\left(1 - 5.5\frac{d}{D_e}\right) \qquad \text{I-10}$$

où, d est le diamètre de leurs sphères et D_e est le diamètre équivalent du lit, définie par :

$$D_e = \frac{2wh}{w+h} \qquad \text{I-11}$$

La transition du régime Darcy au régime Forchheimer est illustrée dans la Figure I.5. Les données font référence à l'écoulement isotherme unidirectionnelle avec la vitesse de Darcy v dans la direction x. L'ordonnée est le "facteur de la friction" f_K qui est basé sur $K^{1/2}$ comme échelle de la longueur. L'abscisse représente le nombre de Reynolds basé sur $K^{1/2}$. La Figure I.5 montre que la transition se produit quand Re_K est compris entre 1 et 10. Quand le nombre de Reynolds est plus grand, le terme de Forchheimer domine sur le côté droit de l'équation I-9, et le f_K devient le même comme C_f. Notons que la transition Darcy et Darcy- Forchheimer est marquée par $Re_K \approx 100$ [14].

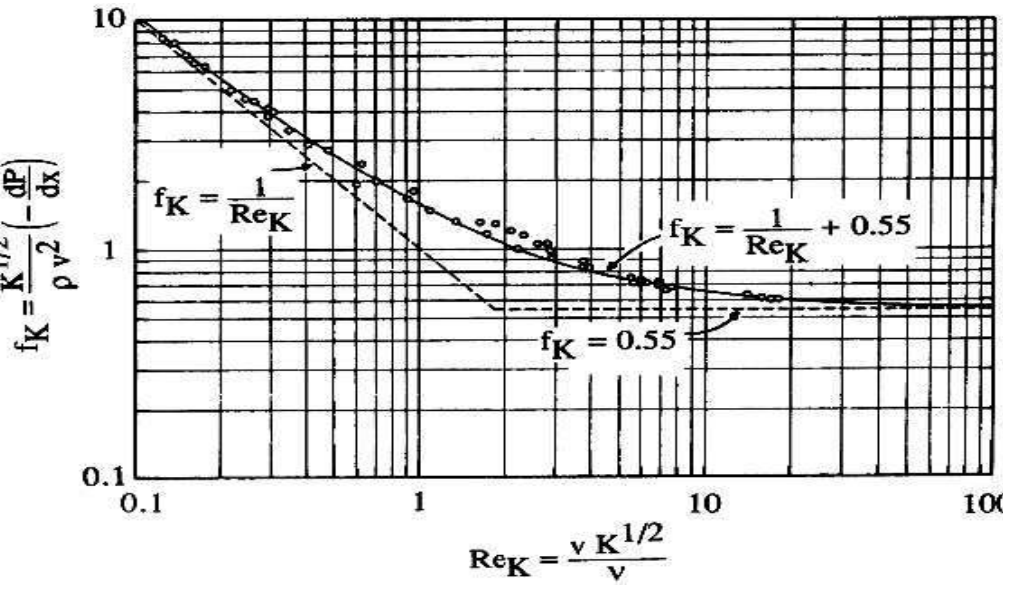


Figure I.5: La transition du régime de Darcy au régime de Forchheimer dans un écoulement unidirectionnelle à travers un milieu poreux saturé isothermique

I.4.3.2 Équation de Brinkman

L'équation de Brinkman prend la forme suivante (avec omission du terme d'inertie) :

$$\nabla p = -\frac{\mu}{K} v + \tilde{\mu} \nabla^2 v \qquad \text{I-12}$$

Deux termes visqueux apparaissent. Le premier est le terme usuel de Darcy et le second terme est analogue au terme du Laplacien qui paraît dans l'équation de Navier- Stokes.

Le coefficient $\tilde{\mu}$ est la viscosité effective. Brinkman a émis que $\tilde{\mu}$ et μ sont égaux, mais sans que cela soit vrai, généralement. Dans la littérature l'équation I-12 a été connue sous le nom de l'extension de Brinkman de la loi de Darcy, Brinkman n'a pas ajouté un autre terme. Plutôt, il a obtenu une relation entre la perméabilité K et la porosité pour un assemblage de sphères selon une procédure auto-consistante, qui est valide seulement quand la porosité est suffisamment grande, $\varepsilon > 0.6$ d'après Lundgren [17]. Par conséquent, ce terme n'est pas d'importance si $\varepsilon < 0.6$.

Quand l'équation Brinkman est employée comme équation générale de mouvement, la situation est plus compliquée. Dans l'équation I-12, P est la pression intrinsèque du fluide, donc chaque terme dans cette équation représente une force par un volume unitaire du fluide. Un processus détaillé de prise de moyenne mène au résultat qui, pour un milieu poreux isotopique, $\tilde{\mu} / \mu = 1/\varepsilon T^*$, où T^* est la tortuosité du milieu; Bear et Bachmat, dans [10]. Donc $\tilde{\mu} / \mu$ dépend de la géométrie du milieu.

Ce résultat paraît être cohérent avec le résultat de Martys et al. [18], qui d'après une étude dans laquelle une solution numérique de l'équation de Stokes est apparentée avec une solution de l'équation de Brinkman pour un écoulement près de l'interface entre un fluide et un milieu poreux, a conclu que la valeur de $\tilde{\mu} / \mu$ dépasse l'unité, et augmente de façon monotonique.

I.4.3.3 Équation de Brinkman -Forchheimer

Plusieurs auteurs ont ajouté un terme du Laplacien à l'équation I-9 pour former une équation de "Brinkman-Forchheimer." La validation de ceci n'est pas complètement claire.

Comme expliqué, pour que l'équation de Brinkman soit valide, la porosité, doit être grande, et il y a

quelque doute au sujet de la validation de loi de Forchheimer à telle grande porosité. Une analyse d'échelle par Manole et Lage [19], a révélé les régimes distincts dans lesquels plusieurs termes dans l'équation Brinkman-Forchheimer étaient importants ou pas. C'est possible de dériver une équation Brinkman-Forchheimer en faisant la moyenne formelle, Vafai et Tien [20], ont obtenu l'équation suivante :

$$\rho_f\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{\varepsilon}\nabla\left(\frac{v.v}{\varepsilon}\right)\right]=-\nabla p+\frac{\mu}{\varepsilon\rho_f}\nabla^2 v-\frac{\mu}{K}v-\frac{c_F\rho_f}{K^{1/2}}|v|v \qquad \text{I-13}$$

Pour un fluide incompressible $\nabla.v = 0$, et donc $\varepsilon^{-1}\nabla(\varepsilon^{-1}v.v)$ réduit à $\varepsilon^{-1}v.\ \nabla(v/\varepsilon)$, la position du facteur ε par rapport aux dérivées spatiales est importante si le milieu poreux est hétérogène.

I.5 Transfert thermique à travers un milieu poreux

I.5.1 Équation d'énergie: cas simple

L'équation est celle qui exprime la première loi de la thermodynamique dans un milieu poreux, et pour laquelle le milieu est isotropique avec les effets radiatifs, dissipation visqueuse, et en négligeant le travail effectué par les changements de la pression. On admet alors qu'il y a un équilibre thermique local, $T_s = T_f = T$, où T_s et T_f sont les températures des phases solides et fluides, respectivement. De plus, on suppose que cela se passe sans transfert entre les phases solide et fluide, alors pour la phase solide [10] :

$$(1-\varepsilon)(\rho c)_s\frac{\partial T_s}{\partial t}=(1-\varepsilon)\nabla.(k_s\nabla T_s)+(1-\varepsilon)q_s''' \qquad \text{I-14}$$

Et pour la phase fluide :

$$\varepsilon(\rho c)_f\frac{\partial T_f}{\partial t}+(\rho.c_p)_f V.\nabla T_f=\varepsilon\nabla.(k_f\nabla T_f)+\varepsilon.q_f''' \qquad \text{I-15}$$

Ici s et f font référence aux phases solide et fluide respectivement, c_s est la chaleur spécifique du solide, c_f est la chaleur spécifique à pression constante du fluide, k est la conductivité thermique, et q''' est la production thermique par unité de volume [10].

Mettant $T_s = T_f = T$ et par l'addition des équations I-14 et I-15 nous avons:

$$(\rho c)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c)_f V.\nabla T = \nabla.(k_m \nabla T) + q'''_m \qquad \text{I-16}$$

où,

$$(\rho c)_m = (1-\varepsilon)(\rho c)_s + \varepsilon(\rho c_p)_f \qquad \text{I-17}$$

$$k_m = (1-\varepsilon)k_s + \varepsilon k_f \qquad \text{I-18}$$

$$q'''_m = (1-\varepsilon)q'''_s + \varepsilon q'''_f \qquad \text{I-19}$$

où, $(\rho c)_m$ la capacité thermique totale par volume unitaire, k_m la conductivité thermique totale, et q_m''' est la production thermique totale par unité de volume du milieu [10].

I.5.2 Conductivité Thermique Totale

En général, la conductivité thermique totale d'un milieu poreux dépend dans un mode complexe de la géométrie du milieu. Si la conduction thermique dans les phases solide et fluide se produit en parallèle, alors la conductivité totale est la moyenne arithmétique chargée d'un poids de conductivités k_s et k_f, [11].

$$k_A = (1-\varepsilon)k_s + \varepsilon k_f \qquad \text{I-20}$$

En revanche, si la structure et l'orientation du moyen poreux sont telles que la conduction de la chaleur se passe en série, avec tout le flux de la chaleur qui passe à travers le solide et le fluide, alors la conductivité totale k_H est la moyenne harmonique chargée d'un poids de k_s et k_f, [11].

$$\frac{1}{k_H} = \frac{1-\varepsilon}{k_s} + \frac{\varepsilon}{k_f} \qquad \text{I-21}$$

En général, le k_A et k_H fourniront les bornes supérieure et inférieure respectivement, sur la conductivité totale réelle k_m. Nous avons toujours $k_H \leq k_A$, avec égalité si et seulement si k_s=k_f. Pour les buts pratiques, une évaluation rigoureuse et prête pour k_m est fournie par k_G, la moyenne géométrique chargée d'un poids de k_s et k_f, défini par [11] :

$$k_G = k_s^{1-\varepsilon}.k_f^{\varepsilon} \qquad \text{I-22}$$

Cela fournit une bonne évaluation si k_s et k_f ne sont pas trop différent l'un de l'autre, Nield [21]. Beaucoup de corrélations plus compliquées pour la conductivité de lits fixes ont été proposées. Les expériences menées par Prasad et al. [22], ont montré que ces formules ont donné des bons résultats pourvus que k_f ne fût pas considérablement plus grand que k_s. L'accord quand $k_f >> k_s$ n'était pas bon, la conductivité réelle est plus grande que ce qui peut être prédit. Cette contradiction peut être due à la variation de la porosité près des parois, ou bien, due à la difficulté de mesurer une vraie conductivité thermique, stagnante dans ce cas, Nield dans [11]. Dans le cas où le fluide est un gaz raréfié et le nombre de Knudsen à une grande valeur, des sauts de température se produisent dans le fluide aux limites du pore. La conductivité tend alors vers zéro, quand le nombre augmente.

I.5.3 Effets de changements de pression, dissipation visqueuse, et absence d'équilibre thermique local (E.T.L)

Si le travail fait par les changements de pression n'est pas négligeable c.-à-d. la condition $\beta T\ (g\beta/C_{Pf})\ L << 1$ n'est pas vérifiée, alors un terme $-\beta T\left(\partial p/\partial t\right)+v.\nabla p$ a besoin d'être ajouté au côté gauche d'équation I-16. Ici β est le coefficient de dilatation volumétrique thermique**,** défini par:

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P \qquad \text{I-23}$$

La dissipation visqueuse n'est pas négligeable en convection naturelle si $\left(g\beta/c_{pf}\right)L << 1$. Sinon, un autre terme doit être ajouté au côté droit d'équation I-16, comme noté en premier par Ene et Sanchez-Palencia [23]. Ce terme est $\left(\mu/K\right)v.v$ dans le cas d'un milieu isotropique et $\mu v.K^{-1}.v$, Si le milieu est anisotropique. Le terme Forchheimer, en adéquation avec le vecteur de la vitesse, contribue à la dissipation, en dépit du fait que la viscosité n'entre pas explicitement. Ce paradoxe apparent était résolu par Nield et Bejan [10]. La contribution du terme de Brinkman est actuellement un sujet controversé. Nield et Bejan [10] a proposé que le terme de Brinkman soit traité de la même manière que les termes de Darcy et de Forchheimer de sorte que la dissipation visqueuse totale reste égale à

hauteur de la force de la résistance totale. Nield et Bejan [10] dans une analyse d'échelle, a effectué une comparaison de la magnitude, du terme de la dissipation visqueuse au terme de la diffusion thermique, et montre que la dissipation visqueuse est négligeable si $N << 1$, où $N=\mu U^2 L^2/K C_p k_m \Delta T= Br/Da$, où le nombre de Brinkman est défini par $Br =\mu U^2 L/K C_p k_m \Delta T=Ec Pr$, le nombre de Eckert Ec est défini par $U^2 / C_p \Delta T$. Pour la plupart des situations le nombre de Darcy K/L^2 est petit, la dissipation visqueuse est importante pour des petites valeurs du nombre de Brinkman.

On conclut que pour la dissipation visqueuse soit négligeable, on a $Ge << 1$, tel que Ge est le nombre de Gebhart définie comme $Ge = g\beta L/C_p$.

Si on tient compte du transfert de chaleur entre solide et fluide sans équilibre thermique local, alors on remplace les équations I-14 et I-15 par :

$$(1-\varepsilon)(\rho C)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = (1-\varepsilon)\nabla.(k_s \nabla T_s) + (1-\varepsilon) q_s''' + h(T_f - T_s) \qquad \text{I-24}$$

$$(\varepsilon)(\rho C)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + (\rho C_p) V.\nabla T_f = (\varepsilon)\nabla.(k_f \nabla T_f) + (1-\varepsilon) q_f''' + h(T_s - T_f) \qquad \text{I-25}$$

où, h est le coefficient du transfert de chaleur. Un aspect critique de cette approche se situe dans la détermination de la valeur appropriée de h. Les valeurs expérimentales de h sont trouvées par une manière indirecte; par exemple, Polyaev et al. [24]. Pour un lit poreux de particules, Dixon et Cresswell, dans [21], ont établi :

$$h = a_{fs} h^* \qquad \text{I-26}$$

où, la surface spécifique (surface par un volume unitaire) a_{fs} est donné par :

$$a_{fs} = 6(1-\varepsilon)/d_p \qquad \text{I-27}$$

et

$$\frac{1}{h^*} = \frac{d_p}{Nu_{fs} k_f} + \frac{d_p}{\beta k_s} \qquad \text{I-28}$$

où, le d_p est le diamètre de la particule et β =10 si les particules du lit poreux sont de forme sphérique.

Les résultats théoriques et expérimentaux rapportés par Grangeot et al, dans [10] indiquent que ce h^*

dépend faiblement du nombre de Péclet. Pour le cas d'un milieu en couches dans des plaques parallèles du canal, avec une interface fluide/solide parallèle à la direction *x*, les équations appropriées en absence de chauffage interne sont :

$$(1-\varepsilon)(\rho C)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \left((1-\varepsilon)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k_s' \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_s \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \right) + h(T_f - T_s) \qquad \text{I-29}$$

$$(\varepsilon)(\rho C)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + (\rho C_p) V.\nabla T_f = \varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k_f' \frac{\partial T_f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_f \frac{\partial T_f}{\partial y} \right) \right] + h(T_s - T_f) \qquad \text{I-30}$$

où, $k'_f = k'_s = k_H$ avec k_H donnée par l'équation I-21. Les équations I-29 et I-30 doivent être résolus à certaines conditions thermiques aux limites appliquées. Si une limite est à une température constante, alors $T_f = T_s$. Si le flux de la chaleur constant est imposé sur la limite, alors il y a quelque ambiguïté au sujet de la distribution de flux entre les deux phases [10].

I.5.4 Conditions aux limites thermiques

Une fois la conductivité thermique dans le milieu poreux a été déterminée, l'application des conditions aux limites thermiques est généralement simple. A l'interface entre deux milieux poreux, ou entre un milieu poreux et un liquide clair, on peut imposer une continuité de température (dans l'hypothèse que nous avons un équilibre thermodynamique local) et la continuité de la composante normale de flux de chaleur. Il est à noter que deux conditions sont nécessaires parce que l'équation de l'énergie contient des dérivés de second ordre.

Le vecteur de flux de chaleur est la somme de deux termes: un terme convectif $(\rho c_p)_f T \boldsymbol{v}$ et un terme conductif $-k\nabla T$. La composante normale du premier est continue parce que les deux T et la composante normale de $\rho_f v$ sont continués. Il s'ensuit que la composante normale de $(k\nabla T)$ doit également être continue. Pour une limite imperméable, la condition thermique usuelle appropriée pour un environnement externe peut être appliquée. Par exemple, on peut prescrire une température ou un flux thermique, ou on peut prescrire un coefficient de transfert de chaleur.

CHAPITRE (II)

CONVECTION NATURELLE

CONVECTION NATURELLE

II.1 Introduction

La convection libre ou naturelle se distingue de la convection forcée en ceci que le mouvement du fluide n'est pas dû à un apport externe d'énergie mécanique, mais qu'il trouve sa source au sein même du fluide, sous l'effet conjugué de gradient de masse volumique et d'un champ de pesanteur. Les variations de masse volumique sont également dues à des gradients de température, encore que des forces d'accélération (dans les centrifugeuses) ou de Coriolis (dans les transferts atmosphériques), ou encore des gradients de concentration (dans les mélanges), puissent jouer le même rôle. Nous ne mentionnerons par la suite que les phénomènes ayant une origine thermique.

Les écoulements de convection libre se répartissent en quatre grandes catégories:

- panaches lorsqu'il n'y a pas de parois à proximité,
- convection libre externe en présence d'une paroi,
- convection libre interne dans des espaces confinés comportant une entrée et une sortie distinctes,
- et enfin convection libre dans des enceintes closes ou partiellement ouvertes.

En outre, certains auteurs font une différence entre convection "naturelle", interne ou dans une enceinte, et véritable convection "libre", correspondant aux panaches et aux écoulements externes. Mais très souvent on emploie indifféremment l'un ou l'autre terme.

II.2 Convection naturelle thermique et massique

II.2.1 Aspect physique du problème

En fait, dans notre environnement quotidien, les manifestations de la convection libre sont plus présentes que les effets de la convection forcée, même si elles ne sont pas toujours directement

perceptibles par nos sens. C'est ainsi que dans n'importe quelle salle d'habitation nous sommes entourés en permanence de mouvement d'air; celui-ci se réchauffe en montant les long des parois les plus chaudes, et se refroidit en descendent le long des parois les plus froides .La diversité des situations est également plus grande en convection libre**:** par l'inclinaison d'une paroi, qui est souvent sans effet dans un écoulement isotherme, devient ici un paramètre essentiel; de même les effets de gravité sont significatifs dans des enceintes fermés anisothermes (bâtiment, réacteurs chimiques) ou en physique de l'environnement, du fait des écarts de température entre la surface et l'ambiance [25].

Les domaines d'applications sont donc vastes, et concernent aussi bien l'isolation des canalisations que le refroidissement des circuits électriques et électroniques, la thermique du bâtiment et le confort humain, les panaches et la dispersion des effluents ou encore la thermique de l'atmosphère et des océans. En ce qui concerne la mécanique des écoulements de convection naturelle on observe que, puisque les gradients de masse volumique à l'origine du mouvement sont eux-mêmes dus à des gradients de température, il y a là un couplage structurel entre bilan de quantité du mouvement et bilan d'énergie, c.-à-d. entre champ de vitesse et champ de température. Ce couplage est fort du fait que la température est sous la dépendance de la vitesse et réciproquement.

Une spécificité de la convection libre concerne les faibles niveaux de vitesse atteints, avec pour conséquence immédiate des flux thermiques également modestes. Il en résulte d'abord que la convection libre constitue soit un obstacle lorsqu'on veut améliorer les échanges thermiques soit une sorte d'isolation naturelle lorsqu'on veut au contraire les réduire, et ensuite que les échanges par rayonnement, souvent négligeable en convection forcée, pourront être ici du même ordre de grandeur que les échanges convectifs [25].

Bien évidemment, les gradients de densité auxquels nous avons fait allusion se produisent aussi en convection forcée mais là, justement, leurs effets sont à peu près nuls. Les cas intermédiaires, où ces effets sont comparables à ceux de l'écoulement forcé, constituent des situations de convection mixte. Ajoutons enfin que l'existence d'un gradient de masse volumique n'entraine pas automatiquement un

mouvement de convection naturelle, ainsi, entre deux plaques planes horizontales, si c'est la plaque supérieure qui est la plus chaude, le transfert thermique reste en général purement conductif [25].

L'aspect le plus important des transferts en convection libre est (comme en convection forcée) ce qui se passe au voisinage des parois. On y retrouve en particulier des structures de couche limite. Les équations générales aux quelles obéit le phénomène seront traitées dans ce qui suit.

II.2.2 Couche limite en convection libre dans un milieu libre

Le concept de la couche limite joue un rôle important pour la compréhension de la convection thermique et massique entre une surface et un fluide qui circule devant elle .Dans ce qui suit, la couche limite dynamique, thermique, et de concentration sont décrits ,ainsi que leurs relations avec le coefficient de frottement, le coefficient de transfert de chaleur par convection, et le coefficient de transfert de masse par convection.

II.2.2.1 Couche limite dynamique

Pour introduire le concept d'une couche limite, on considère un écoulement sur la plaque plane de la FigureII.1. Lorsque les particules de fluide entrent en contact avec la surface, leur vitesse est réduite de manière significative par rapport à la vitesse du fluide en amont de la plaque, et dans la plupart des cas, il est valable de supposer que la vitesse de la particule est égale à zéro à la paroi. Ces particules agissent alors pour retarder le mouvement des particules dans la couche de fluide adjacente, qui servent à retarder le mouvement des particules dans la couche suivante, et ainsi de suite jusqu'à ce que, à une distance $y=\delta$ à partir de la surface, l'effet devient négligeable. Ce retard de mouvement est associé à des contraintes de cisaillement τ agissant dans des plans qui sont parallèles à la vitesse du fluide (Figure II.1). Avec l'augmentation de la distance y à partir de la surface, la composante de vitesse du fluide u selon l'axe x, doit alors augmenter jusqu'à ce qu'elle se rapproche de la valeur limite u_∞. L'indice∞ est utilisé pour désigner les conditions dans l'écoulement libre en dehors de la couche limite. La quantité δ est dite l'épaisseur de la couche limite, et il est généralement définie comme la

valeur de *y* pour lequel l*u* =*0.99u*$_\infty$. Le profil de vitesse de la couche limite se rapporte à une manière dans laquelle *u* varie avec *y* à travers la couche limite [26].

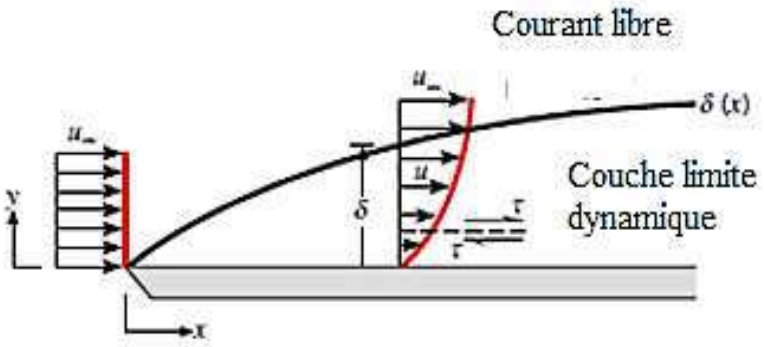


Figure II.1: Couche limite dynamique sur une plaque plane

En conséquence, l'écoulement du fluide est caractérisé par deux zones distinctes, une couche mince de fluide (la couche limite) dans lequel des gradients de vitesse et les contraintes de cisaillement sont grandes et une région en dehors de la couche limite dans laquelle les gradients de vitesse et les contraintes de cisaillement sont négligeables. Avec l'augmentation de la distance du bord d'attaque, les effets de la viscosité pénètrent plus loin dans le courant libre et la couche limite se développe (δ Augmente avec *x*). En mécanique des fluides, la couche limite joue un rôle important dans les écoulements à travers les conduites à cause de contraintes de cisaillement τ_s, et donc les effets de frottement en sont des conséquences. Pour les écoulements, ce taux fournit la base de détermination du coefficient de frottement local [26].

$$C_f \equiv \frac{\tau_s}{\rho u_\infty^2/2} \qquad \text{II-1}$$

Un paramètre essentiel dont lequel la traînée de frottement de surface peut être déterminée .En supposant un fluide Newtonien, la contrainte de cisaillement surfacique peut être évaluée à partir du gradient de vitesse à la surface.

$$\tau_s = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} \qquad \text{II-2}$$

où, μ est la viscosité dynamique dans la couche limite dynamique, le gradient de vitesse à la surface ; dépend de la distance x en amont de la plaque. Par conséquent, la contrainte de cisaillement surfacique et le coefficient de frottement aussi dépend de x [26].

II.2.2.2 Couche limite thermique

Quand il ya un écoulement du fluide devant un surface, une couche limite thermique doit se développer s'il existe une différence de températures entre le fluide et la surface [26].

Considérons un écoulement sur une plaque plane isotherme (Figure II.2).

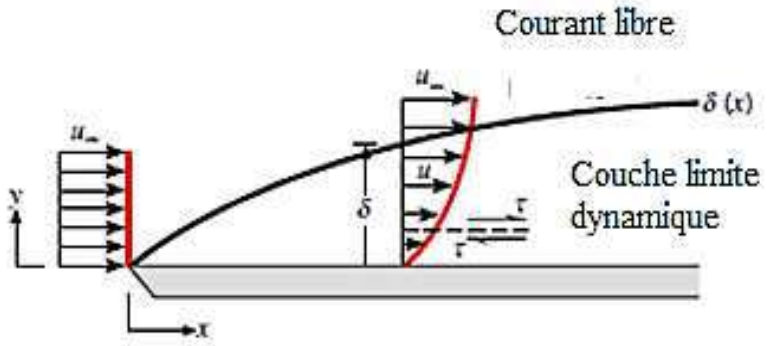


Figure II.2: Couche limite thermique sur une plaque isothermique

La température en amont de la plaque est uniforme $T(y) = T_\infty$, Cependant, les particules de fluide qui sont en contact avec la plaque évoluent pour atteindre l'équilibre thermique à la température de la surface de la plaque. À leur tour, ces particules s'échangent de l'énergie avec ceux de la couche de fluides adjacents, et les gradients de température dans le fluide se développent.

La zone du fluide ou existent ces gradients de température appelé la couche limite thermique, et leur épaisseur δ_T est typiquement définie comme la valeur de y pour laquelle le rapport $(T_s - T)/(T_s - T_\infty) = 0.99$. L'expérience montre que δ_T évolue le long de la paroi, et que la couche limite thermique s'épaissit quand on s'éloigne du bord d'attaque. La relation entre les conditions dans cette couche limite et le coefficient de transfert de chaleur par convection peut facilement être mise en évidence. À une distance x du bord d'attaque, le flux local thermique surfacique peut être obtenu en appliquant la loi de Fourier pour le fluide à y =0.

$$q'_s = -k_f \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} \qquad \text{II-3}$$

Cette expression est appropriée parce que, à la surface, il n'y a pas un mouvement fluide et le transfert d'énergie se produit uniquement par conduction. Rappelant la loi de Newton, nous voyons que:

$$q'_s = h(T_s - T_\infty) \qquad \text{II-4}$$

et en combinant cette équation avec l'équation II-3, on obtient:

$$h = \frac{-k_f \left.\partial T/\partial y\right|_{y=0}}{T_s - T_\infty} \qquad \text{II-5}$$

Par conséquent, les conditions imposées dans la couche limite, qui influencent fortement le gradient de température à la paroi $\left.\partial T/\partial y\right|_{y=0}$, détermine le taux de transfert thermique.

Tant que δ_T augmente avec l'augmentation de x, le gradient de température dans la couche limite doit donc diminuer avec l'accroissement de x, et il en résulte que h et q' s'affaiblissent avec l'élévation de x [26].

II.2.2.3 Couche limite massique

Lorsque l'air se déplace devant la surface d'une flaque d'eau, l'eau liquide s'évapore, et la vapeur d'eau sera transférée dans le courant d'air. Ceci est un exemple de transfert de masse par convection. Considérons un mélange binaire d'espèces chimiques *A* et *B*, qui circule sur une surface (Figure II.3).

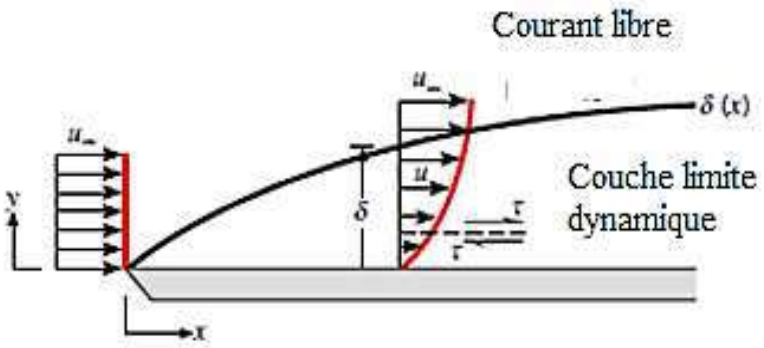


Figure II.3: Couche limite massique sur une plaque horizontale.

La concentration molaire ($kmol/m^3$) de l'espèce *A* est à la surface $C_{A,s}$, et dans le courant libre, il est libre $C_{A,\infty}$ .Si $C_{A,s}$ diffère de $C_{A,\infty}$, Le transfert de l'espèce chimique *A* par convection se produit .Par exemple, une espèce peut être une vapeur qui est transférée dans un courant de gaz (espèce *B*) due à l'évaporation à la surface du liquide (comme dans l'exemple de l'eau) ou en raison de la sublimation à une surface solide .Dans ce cas ,une couche limite de concentration se développe et qui est similaire à la couche limite dynamique et thermique. La couche limite massique est la zone du fluide dans laquelle le gradient de concentration existe, l'épaisseur est typiquement définie comme la valeur de *y* pour que $\left[\left(C_{A,s}-C_A\right)/\left(C_{A,s}-C_{A,\infty}\right)\right]=0.99$ avec l'augmentation de la distance du bord d'attaque, les effets de transfert massique pénètrent plus loin dans le courant libre et la couche limite massique évolue. Le transfert massique par convection entre la surface et le fluide est déterminé par des conditions dans la couche limite, et il est intéressant de déterminer le taux de transfert produit. Cas particulier, pour le flux molaire de l'espèce chimique *A*, Il est utile de savoir que ce flux associé avec le transfert de l'espèce par la diffusion est déterminée par une expression qui est analogue à la loi de Fourier, nommée la loi Fick de la forme:

$$q''_A = -D_{AB}\frac{\partial C_A}{\partial y} \qquad \text{II-6}$$

où, D_{AB} est une propriété du mélange binaire appelé le coefficient de diffusion binaire. *A* tout point correspondant à $y>0$ dans la couche limite de concentration de la Figure II.3, le transfert d'espèces est due à la fois au mouvement d'advection et de diffusion .Cependant, en absence de l'effet de l'échelle nano ou macroscopique et l'influence de la diffusion de l'espèce sur la vitesse normale à la surface, le mouvement du fluide à la surface peut être négligé. Le transfert massique est du uniquement à la diffusion, à partir de la loi de Fick, le flux molaire à $y=0$ est :

$$q''_A = -D_{AB}\left.\frac{\partial C_A}{\partial y}\right|_{y=0} \qquad \text{II-7}$$

Par analogie du transfert thermique, le coefficient de transfert massique h_m est :

$$h_m = \frac{-D_{AB}\partial C_A/\partial y\big|_{y=0}}{C_{A,S} - C_{A,\infty}} \qquad \text{II-8}$$

II.2.3 Équations de couche limite laminaire en convection libre

Le mouvement d'un fluide dans lequel les gradients de vitesse, température et de concentration coexistent, les équations doivent se conformer à plusieurs lois physiques fondamentales. En particulier, à chaque point dans le fluide, la loi de la conservation de masse, de l'énergie et des espèces chimiques, ainsi que la deuxième loi de Newton doit être satisfaites. Les équations représentant ces exigences sont obtenues par l'application des lois sur un volume de contrôle différentiel situé dans l'écoulement (Figure II.4.). Ces équations servent de point de départ de l'analyse de couches limites laminaires [27].

$$div\vec{V} = 0 \qquad \text{II-9}$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}.grad\vec{V} = -\frac{1}{\rho} grad\left(p^*\right) + div\left(\nu.grad\vec{V}\right) \qquad \text{II-10}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V}.grad\left(T\right) = div\left(\alpha.grad\left(T\right)\right) + \mu\Phi + \dot{q} \qquad \text{II-11}$$

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \vec{V}.grad\left(C_A\right) = div\left(\alpha.grad\left(C_A\right)\right) + \dot{N} \qquad \text{II-12}$$

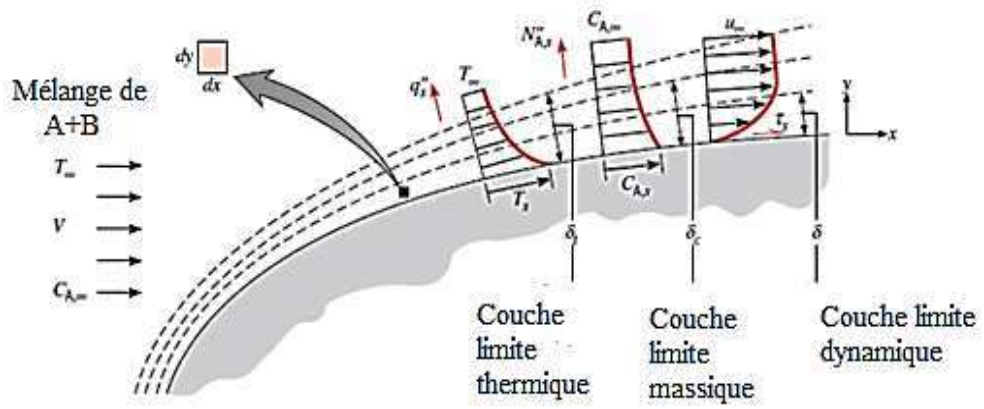


Figure II.4: Développement de couches limites laminaires sur une surface arbitraire

Considérons un écoulement de couche limite laminaire (Figure II.5) qui est entraîné par des forces de flottabilité. On suppose que le régime soit stable, à deux dimensions, la force de gravité est constante et dirigée vers le bas (sens inverse de l'axe x). Ainsi, on suppose que le fluide est incompressible.

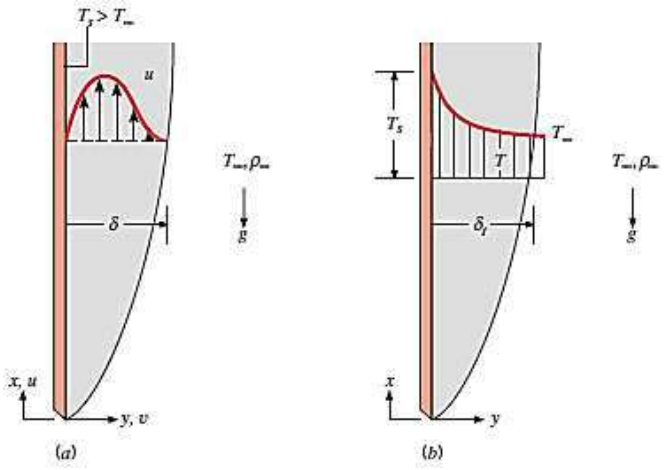


Figure II.5: Développement de la couche limite laminaire sur une plaque verticale chauffée
(a) une couche limite dynamique. (b) la couche limite thermique

Les caractéristiques observées de l'écoulement à proximité de la paroi autorisent à conserver les approximations de la couche limite dynamique [27], à savoir:

$$v << u, et \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} << \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \text{II-13}$$

Par contre, $\partial u/\partial x$ n'est pas toujours négligeable devant $\partial u/\partial y$: au voisinage du maximum u_m (Figure II.5) on a en effet $\partial u/\partial y = 0$ et $\partial u/\partial x \neq 0$. Le même problème se rencontre d'ailleurs dans les jets pariétaux ou dans les zones de décollement.

Quoi qu'il en soit, il résulte de l'équation II-13 que l'équation de continuité est inchangée, et que dans l'équation de quantité de mouvement selon x, le terme $\partial^2 u/\partial x^2$ disparait [27].

En fin dans la couche limite thermique et massique, les approximations suivantes sont justifiées:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial x} << \frac{\partial T}{\partial y}, et \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} << \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ &\frac{\partial C_A}{\partial x} << \frac{\partial C_A}{\partial y}, et \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} << \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} \end{aligned} \qquad \text{II-14}$$

Ce qui traduit par la disparition des termes $\partial^2 T/\partial x^2$ et $\partial^2 C_A/\partial x^2$ dans l'équation de l'énergie et de la concentration. En ce qui concerne la pression, vu la lenteur de l'écoulement il est admis que les gradients de pression induits par le champ de vitesse sont faibles. Autrement dit, la pression motrice *p** obéit à la loi de la statique, comme dans le fluide au loin, ce qui s'exprime par :

$$grad(p^*) \approx 0 \qquad \text{II-15}$$

Le regroupement des conditions précédentes va conduire aux équations de couche limite en convection libre laminaire. En ce qui concerne le terme en $\vec{g}$ dans l'équation de quantité du mouvement, si on se trouve dans le cas $T_s > T_\infty$, l'écoulement se fait vers le haut. On choisit alors pour *x* la même direction, de sorte que $\vec{g} = -g\vec{x}$ (la pesanteur dirigée vers le bas) et le terme en $\vec{g}$ devient $+\beta(T - T_\infty)g$ .Au contraire, avec $T_s < T_\infty$, l'écoulement est descendant, et on préfère encore prendre $\vec{x}$ dans le sens du mouvement. Cette fois, $\vec{g} = +g\vec{x}$ et le terme en $\vec{g}$ s'écrit $-\beta(T - T_\infty)g$.

Sous ces hypothèses les équations de II-9 à II-12 devient comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \text{II-16}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T - T_\infty) + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \text{II-17}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad \text{II-18}$$

$$u\frac{\partial C_A}{\partial x} + v\frac{\partial C_A}{\partial y} = D_{AB}\frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} \qquad \text{II-19}$$

II.2.3.1 Considérations de similitude

Les paramètres sans dimension qui régissent l'écoulement de convection naturelle et le transfert de chaleur pour une plaque verticale sont de la forme [28] :

$$x^* \equiv \frac{x}{L}, y^* \equiv \frac{y}{L}, u^* \equiv \frac{u}{u_0} v^* \equiv \frac{v}{u_0}, T^* \equiv \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty}$$

où, L est une longueur caractéristique et u_0 est une vitesse de référence, les équations de quantité de mouvement et de l'énergie II-17 et II-18 sont réduites:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L}{u_0^2} T^* + \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \qquad \text{II-20}$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re_L Pr} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \qquad \text{II-21}$$

Le paramètre sans dimension dans le premier terme du côté droit de l'équation II-20 est une conséquence directe de la force de flottabilité. La vitesse de référence u_0 peut être spécifiée afin de simplifier la forme de l'équation. Il est convenable de choisir $u_0^2 = g\beta(T_s - T_\infty)L$, de sorte que le terme multipliant T^* devient l'unité. Alors Re_L devient $\left[g\beta(T_s - T_\infty)L^3/\nu^2\right]^{1/2}$ [28].

Il est d'usage de définir le nombre de Grashof Gr_L comme le carré de ce nombre de Reynolds:

$$Gr_L \equiv \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\nu^2} \qquad \text{II-22}$$

En conséquence, Re_L dans les équations II-20 et II-21 est remplacé par $Gr_L^{1/2}$, et ainsi le nombre de Grashof (ou plus précisément, $Gr_L^{1/2}$) joue le même rôle dans la convection libre que le nombre de Reynolds joue en convection forcée. Basé sur la forme résultant les équations II-20 et II-21, nous nous prédisons des corrélations de transfert de chaleur de forme $Nu_L=f(Gr_L, Pr)$ en convection libre. Rappelons que le nombre de Reynolds permet de mesurer le rapport de forces d'inertie aux forces visqueuses agissant sur un élément de fluide .En revanche, le nombre de Grashof est une mesure du rapport entre les forces de flottabilité et forces de la viscosité agissant sur le fluide.

De nombreuses solutions aux équations de couche limite de convection libre laminaire sont été obtenues, et un cas particulier qui aperçut beaucoup d'attention implique convection libre à partir d'une

surface verticale isotherme dans un milieu libre (Figure II.5). Pour cette géométrie les équations de II-16 à II-18 doivent être résolues sous des conditions aux limites de la forme:

$$\begin{aligned} &y = 0 : u = v = 0, T = T_s \\ &y \to \infty : u \to 0, T \to T_\infty \end{aligned} \qquad \text{II-23}$$

Une solution de similarité au problème ci-dessus a été obtenue par Ostrach [29].

La solution nécessite le recours à des variables de transformation par l'introduction de variable de similarité de la forme :

$$\eta \equiv \frac{y}{x}\left(\frac{Gr_x}{4}\right)^{1/4} \qquad \text{II-24}$$

et représentant les composantes de vitesse en termes d'une fonction de courant défini comme :

$$\psi(x,y) \equiv f(\eta)\left[4\nu\left(\frac{Gr_x}{4}\right)^{1/4}\right] \qquad \text{II-25}$$

Avec la définition précédente de la fonction de courant, la composante de vitesse selon x peut être exprimée comme :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{2\nu}{x} Gr_x^{1/2} f'(\eta) \qquad \text{II-26}$$

L'évaluation de la composante de vitesse d'une manière analogue $v = -\partial\psi/\partial x$ et en introduisant la température adimensionnée :

$$T^* \equiv \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty} \qquad \text{II-27}$$

Les trois équations aux dérivées partielles de II-16 à II-18 peuvent ensuite être réduites à deux équations différentielles ordinaires de la forme :

$$f''' + 3ff'' - 2(f')^2 + T^* = 0 \qquad \text{II-28}$$

$$T^{*\prime\prime} + 3Pr\, fT^{*\prime} = 0 \qquad \text{II-29}$$

où, f et T^* sont des fonctions de η et que les exposants doubles et triples respectivement, se rapportent à la deuxième et troisième dérivées par rapport à η. Notez que f est la variable dépendante

correspondante à la couche limite dynamique et que l'équation de continuité II-16 est automatiquement satisfaite au moyen de l'introduction de la fonction de courant.

Les conditions aux limites transformées nécessaires pour résoudre les équations de quantité de mouvement et de l'énergie II-17 et II-18 sont alors de la forme :

$$\eta = 0 : f = f' = 0; T^* = 1$$
$$\eta \to \infty : f' \to 0, T^* \to 0 \qquad \text{II-30}$$

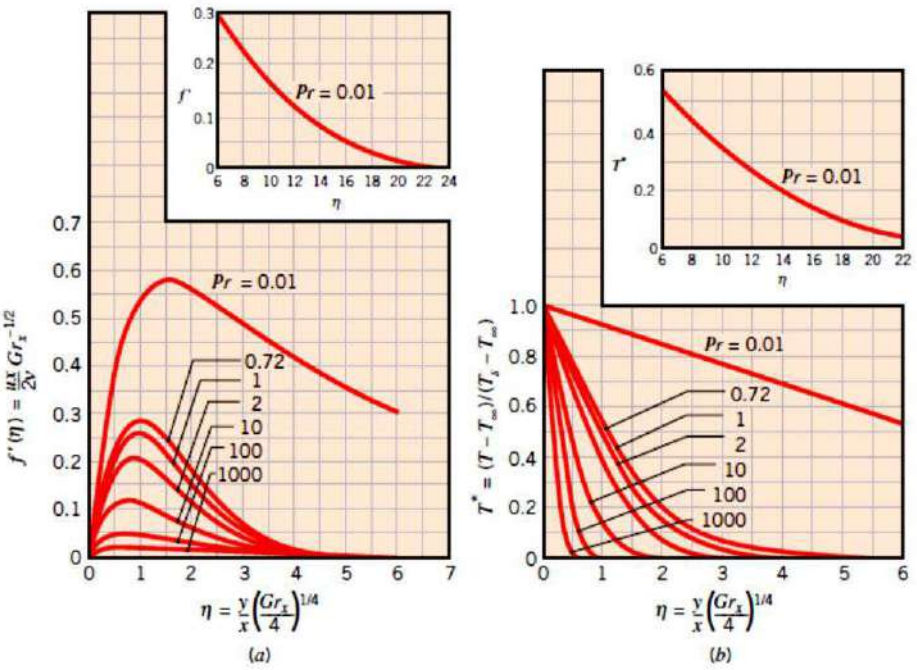


Figure II.6: Couche limite en convection libre laminaire sur une plaque verticale isothermique
(a) profils de vitesse, (b) profils de température

La solution numérique a été obtenue par Ostrach [29], et des résultats sélectionnés sont montés dans la Figure II.6. Utilisant la loi de Newton pour le coefficient de convection local *h*, le nombre Nusselt local peut être exprimé comme:

$$Nu_x = \frac{hx}{k} = \frac{\left[q_s' / \left(T_s - T_\infty\right)\right]x}{k} \qquad \text{II-31}$$

On peut aussi exprimer le nombre du Nusselt local sous la forme adimensionnée comme suit:

$$Nu_x = \frac{hx}{k} = -\left(\frac{Gr_x}{4}\right)^{1/4} \left.\frac{dT^*}{d\eta}\right|_{\eta=0} \qquad \text{II-32}$$

II.2.4 Convection naturelle en milieu poreux

On s'intéresse dans cette partie à la convection naturelle autour d'un objet (plaque, cylindre ou sphère) immergé dans un milieu poreux. De même qu'en milieu libre, il existe pour les milieux poreux des corrélations permettant de prédire les transferts thermiques (caractérisés par un nombre de Nusselt) en fonction des écarts de température (caractérisés par un nombre de Rayleigh) et de la géométrie. On utilise dans ce cas une diffusivité thermique moyenne α_m et un nombre de Rayleigh modifié (basé sur la longueur caractéristique L et la perméabilité K du milieu poreux) définis comme suit, Tableau II.1 et Figure II.7 [30]:

$$\alpha_m = \frac{k_m}{(1-\varepsilon)(\rho C_P)_s + \varepsilon(\rho C_P)_f} \qquad \text{II-33}$$

$$R\tilde{a} = Ra \times Da = \frac{\rho g \beta \Delta T L^3}{\mu \alpha_m} \times \frac{K}{L^2} = \frac{\rho g \beta \Delta T K L}{\mu \alpha_m} \qquad \text{II-34}$$

k_m est la conductivité moyenne, [W m^{-1} K^{-1}]

K est la perméabilité du milieu poreux, [m^{-2}]

Da est le nombre de Darcy, $Da = K/L^2$

Tableau II.1: Transfert de chaleur par convection naturelle externe dans un milieu poreux

Configuration	**Corrélation**	**Validation expérimentale**	**Références**
Plaque verticale isotherme (Fig II.7-a)	$Nu = 0.89\widetilde{Ra}^{1/2}$	$1<Ra<10^2$ polyuréthane de 0.98 de diamètre et de 0.4 à 4 pores par millimètre	Cheng et Minkowycz (1977)
Plaque horizontale isotherme chauffée sur la face supérieure (Fig II.7-b)	$Nu = 1.26\widetilde{Ra}^{1/2}$	Pas de validation expérimentale	Cheng et Chang (1976)
Cylindre horizontal isotherme (Fig II.7-c)	$\overline{Ra} = \frac{\rho g\, \beta \Delta T K L}{\mu \alpha_m}$ (d)	$5<Ra<10^2$	F and et al. (1986)
Sphère isotherme (Fig II.7-c)	$Nu = 0.362\widetilde{Ra}^{1/2}$	Pas de validation expérimentale	Cheng (1985)
Cylindre vertical avec des extrémités Adiabatiques (Fig II.7d)	$\frac{q_c}{q_p} = 1 + 0.26\zeta_L^{\otimes}\ \zeta_L = \frac{2L}{r_0 \widetilde{Ra}^{1/2}}$	Pas de validation expérimentale	Minkowycz et Cheng (1976)

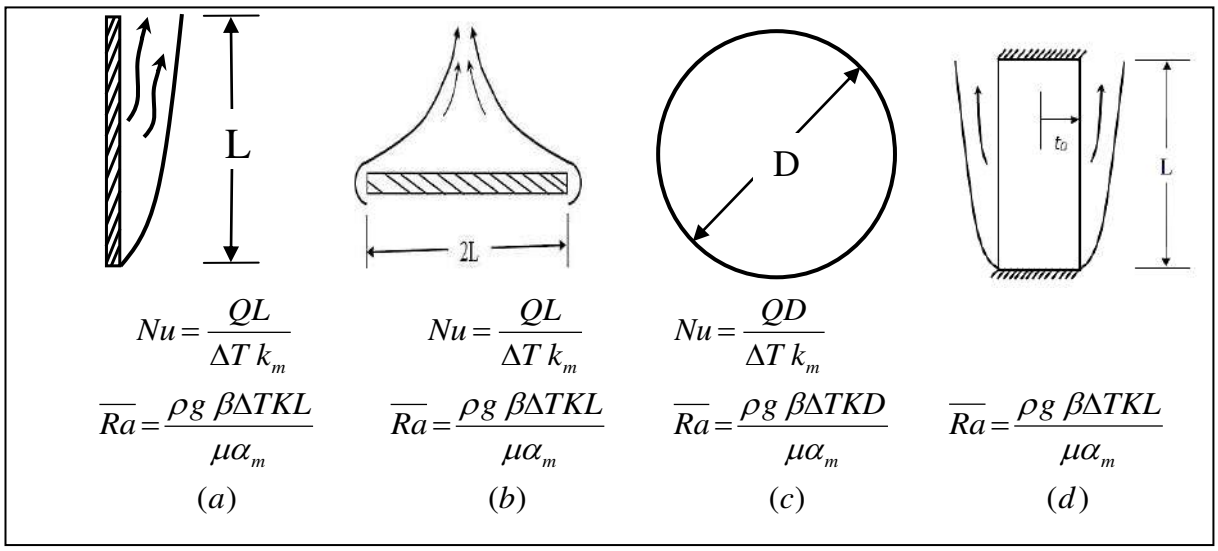


Figure II.7: Transfert de chaleur par convection naturelle externe dans un milieu poreux

(a)Plaque verticale isotherme ; (b) Plaque horizontale isotherme chauffée sur la face supérieure ; (c)Cylindre horizontal isotherme ; (d) Cylindre vertical avec des extrémités adiabatiques.

II.2.4.1 Convection externe (cas d'une plaque verticale)

Le calcul numérique des équations différentielles complètes pour la convection dans une région illimité est très ardu, et donc des solutions approximatives importantes sont introduites.

Pour les valeurs réduites de nombre de Rayleigh *Ra*, les méthodes de perturbation sont appropriées. Quand le nombre de *Ra* devient important les couches limites thermique sont formées, et la théorie de couche limite est la méthode d'investigation évidente [11].

Cette approche est utilisée par plusieurs auteurs [31, 32, 33, 34].

On considère à titre d'illustration une convection dans un milieu poreux adjacent à une plaque plane verticale chauffée, sur laquelle une couche limite thermique mince est formée lorsque *Ra* prend des valeurs importantes. Utilisant des hypothèses simplifiées, les équations de couche limite à deux dimensions prennent la forme suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \text{II-35}$$

$$u = -\frac{K}{\mu}\left[\frac{\partial p^*}{\partial x} - \rho g \beta (T - T_\infty)\right] \qquad \text{II-36}$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial y} = 0 \qquad \text{II-37}$$

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_m \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad \text{II-38}$$

Ici, l'indice ∞ désigne la valeur de référence à une grande distance de la limite chauffée, et p^* désigne la différence entre la pression statique réelle et la pression hydrostatique locale .Il a été supposé que l'approximation Oberbeck-Boussinesq et la loi de Darcy sont valides, l'axe x est pris dans le sens de l'écoulement principal (ici verticalement vers le haut, Figure II.8) et de l'axe y perpendiculaire à la surface limite et dirigé vers le milieu poreux.

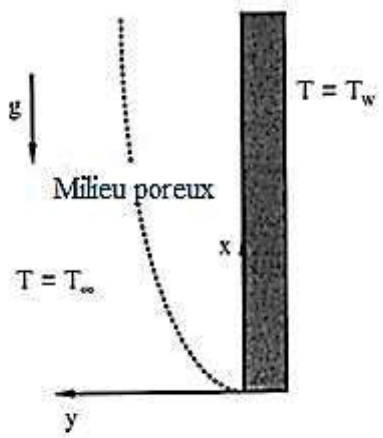


Figure II.8: Couche limite devant une plaque verticale en milieu poreux

Près de la frontière, la composante normale de la vitesse de filtration v est petite par rapport à l'autre composante de la vitesse u, et les dérivées par rapport à y sont grandes en comparaison avec les dérivées de cette quantité par rapport à x. Par conséquent, aucun terme en v n'apparaît dans l'équation II-37, et le terme en $\partial^2 T/\partial x^2$ a été omis de l'équation II-38. Éliminant P^* dans les équations II-36 et II-37 et l'introduction de la fonction de courant ψ défini par: $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

Les équations de II-36 à II-38 sont alors de la forme:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{g\beta K}{\nu}\frac{\partial T}{\partial y} \qquad \text{II-39}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha_m}\left(\sigma\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}\right) \qquad \text{II-40}$$

Ces équations doit être résolues avec des conditions aux limites appropriées [11].

CHAPITRE (III)

MAGNETOHYDRODYNAMIQUE

MAGNETOHYDRODYNAMIQUE

III.1 Introduction

La magnétohydrodynamique (MHD) est considérée la partie de la mécanique des fluides qui traite l'écoulement d'un fluide électro-conducteur en présence d'un champ magnétique. Ainsi aux forces d'inerties, de pression, de viscosité, de capillarité, qui intervient en mécanique des fluides classique, viennent s'ajouter des forces d'origine électromagnétique.Une description MHD réaliste de la dynamique d'un système fluide conducteur impose que les propriétés du milieu et des processus qui s'y développent répondent le plus exactement possible aux hypothèses, parfois sévères, sur lesquelles repose cette théorie.

Le champ électromagnétique, seul élément qui en milieu conducteur différencie formellement la MHD de l'hydrodynamique, a une influence sur le mouvement uniquement par le champ magnétique, les forces électriques, qu'elles soient d'origine électromagnétique ou électrostatique (produites par d'éventuelles variations locales dans la densité de charge), sont négligeables car, dans une très bonne approximation, le fluide MHD est localement neutre(en conservant néanmoins des courants non nuls). La MHD repose donc simplement sur une vision hydrodynamique du fluide incluant toutefois les forces de Laplace dues à l'action du champ magnétique sur les courants; quant a l'évolution du champ électromagnétique, elle est bien entendu déterminée par les équations de Maxwell. La fermeture du système se fait à travers une loi d'Ohm reliant la densité de courant et donc les mouvements de la matière au champ électromagnétique [35].

Parmi les applications de la MHD, on citera la métallurgie, qui consiste à produire des forces magnétiques suffisantes pour mettre en métal liquide en mouvement (brassage), le maintenir en sustentation (lévitation), le façonner (formage), le pulvériser,... etc.

III.2 Description d'un fluide conducteur

Afin de pouvoir définir des grandeurs physiques dans un fluide, les particules doivent rester localisées. L'approximation fluide n'est donc valable que dans la mesure où les conditions thermodynamiques varient peu sur des distances de l'ordre du libre parcours moyen, trajectoire suivie par une particule sans être défléchie, pour des temps détermines par l'agitation thermique; les processus de délocalisation sont en fait responsables des phénomènes de transport. La description d'un fluide sous-entend que toutes les espèces chimiques sont suffisamment couplées pour être thermalisées et suivre une distribution de Maxwell unique. Ce couplage doit bien sûr s'opérer entre les éléments d'une même espèce chimique mais également entre chacune des populations dans le cas d'un plasma. En hydrodynamique, dans des milieux suffisamment denses, l'approximation fluide est validée par des collisions qui transfèrent de la quantité de mouvement entre les particules de façon très efficace, via des interactions de type Van der Waal [36].

III.2.1 Loi d'Ohm généralisée

L'établissement de la loi d'Ohm pour un fluide conducteur, c'est-a-dire d'une loi reliant les mouvements de la matière aux densités volumiques de courant, au champ électrique E et au champ magnétique B est à la base de la théorie MHD et peut être un point délicat, notamment pour les plasmas. Cette loi traduit en termes de courant la réponse d'un milieu conducteur immobile à un champ électrique via la conductivité électrique σ_e. Elle prend la forme d'une simple relation de proportionnalité dans le référentiel où le fluide est localement au repos ; sa traduction dans le référentiel lié au laboratoire se fait par une transformation de Lorentz sur le tenseur de Maxwell décrivant le champ électromagnétique. Dans l'approximation classique valide pour la MHD, la loi d'Ohm s'écrit dans le référentiel du laboratoire [37]:

$$\vec{j} = \sigma_e\left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}\right) \qquad \text{III-1}$$

La loi d'Ohm formulée ici est une forme réduite de l'expression la plus générale établie en physique des plasmas dans le cadre d'un modèle simplifié. Elle cache en fait toute la micro-physique de la

population d'électrons qui dépend du type de plasma rencontré. Dans un plasma chaud complètement ionisée par exemple, un courant peut être produit d'une part à travers le gradient de la pression du gaz d'électrons dans une direction parallèle au champ magnétique et peut être d'autre part généré par un effet Hall dans la direction perpendiculaire à *B*. La loi d'Ohm s'écrit alors sous une forme tensorielle et la relation III-1 n'est plus valable que dans le cas limite des plasmas complets mentionisées sans effets Hall [38]. Cependant, quel que soit le milieu conducteur considéré, pour des champs magnétiques pas trop grands et des fréquences pas trop élevées, l'expression de la loi d'Ohm énoncée reste largement valable.

III.2.2 Equations de Maxwell

L'ensemble des équations fluides montre comment vont évoluer les grandeurs physiques sous l'action d'éventuels champs de forces extérieurs. Nous allons à présent voir comment évoluent ces champs électromagnétiques *E* et *B*. Cette évolution se décrit naturellement par les quatre équations de Maxwell que nous exprimons dans le système MKSA :

$$\nabla.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{III-2-a}$$

$$\nabla.\vec{B} = 0 \qquad \text{III-2-b}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \qquad \text{III-2-c}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{III-2-d}$$

Auxquelles on ajoute la loi d'Ohm III-1. Le diamagnétisme des milieux diluées que sont les fluides électro-conducteurs est très faible, on peut donc se permettre d'approximer la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique à celles du vide $\varepsilon = \varepsilon_0$ et $\mu = \mu_0$, avec :

$\mu_0 = 4\ \pi \times 10^{-7}\ H.m^{-1}$ et $\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2) \approx 8{,}854 \times 10^{-12}\ F.m^{-1}$.

Dans la limite relativiste à laquelle nous allons nous intéresser, la forme réduite de la relation d'Ampère s'écrit :

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 j \qquad \text{III-3}$$

en accord avec la conservation de la charge, qui requiert un courant à divergence nulle, c.-à-d. un courant circulant sur des boucles fermées sans accumulation de charges.

III.2.3 Équation d'induction et force de Laplace

Les phénomènes de couplage entre le champ de vitesse et le champ magnétique que rassemble la MHD peuvent être à caractère fort lorsque les deux champs s'influencent mutuellement ou faible si un champ influence l'autre sans contrepartie. Lorsque le champ magnétique induit reste suffisamment faible pour être négligée devant le champ externe appliqué, on observe la formation d'un courant électrique qui va réagir avec le champ magnétique pour créer une force volumique de Laplace (force de Lorentz) $\vec{f}_0 = \vec{j} \times \vec{B}$ s'opposant à la cause qui lui donne naissance (i.e. l'écoulement) et qui tendra à retarder le mouvement du fluide [37]. Le champ magnétique est décrit par une équation de diffusion, pilotée par un coefficient de diffusion magnétique $D_m = 1/\mu_0\sigma_e$:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = D_m \nabla^2 \vec{B} \qquad \text{III-4}$$

L'équation III-4 exprime le fait que toute perturbation locale de ***B*** tend à s'atténuer par diffusion selon le schéma classique d'une courbe Gaussienne : la largeur augmente comme la racine carrée du temps et l'amplitude décroit comme l'inverse de cette largeur (de façon à ne pas être en contradiction avec l'équation de conservation III-2b de Maxwell). En un temps de l'ordre de *t*, la distance de diffusion parcourue est de l'ordre de $\sqrt{D_m t}$; la pénétration d'un champ alternatif de pulsation ω est limitée à une couche dont l'épaisseur est de l'ordre de $\sqrt{D_m/\omega}$: c'est l'effet de peau. Un paramètre important qui mesure cet effet est le paramètre d'écran $R_\omega = \omega L_0^2/D_m$ qui, en termes de rapport de fréquences, traduit cette pénétration du champ magnétique dans le fluide conducteur. La condition $R_\omega << 1$ implique que le temps caractéristique de diffusion des gradients magnétiques sur l'épaisseur du film magnétique (qui représente le terme caractéristique d'établissement d'un profil de champ stationnaire) est beaucoup plus petit que le temps caractéristique $1/\omega$ d'évolution de l'écoulement. Si

cette condition est réalisée, l'écoulement magnéto-diffusif pourra être considéré comme quasi-stationnaire.

Les phénomènes de diffusion sont indépendants de u : dans ce cas limite, il n'y a aucune convection de B par la matière. Le nombre qui mesure le flux de convection du champ magnétique sur le flux diffusif est le nombre de Reynolds magnétique $R_\omega = U_0 L_0 / D_m$, analogue au nombre de Reynolds hydraulique, où la viscosité cinématique s'apparie au coefficient effectif de diffusion magnétique. Nous donnons à titre d'illustration quelques valeurs numériques de ce coefficient au Tableau III.1. La restriction de couplage faible entre le champ dynamique et le champ magnétique impose à ce nombre d'être le plus petit possible.

Dans le cas limite contraire de très fort Reynolds magnétique, les lignes de champ sont attachées aux éléments fluides à tout instant. On parle alors de MHD idéale. Cette discipline connaît son essor en astrophysique ; l'équation de transport qui modélise la MHD non-résistive s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\vec{u} \times \vec{B} \right) \qquad \text{III-5}$$

Tableau III.1: Diffusivités magnétiques D_m et nombres de Reynolds magnétiques R_m pour quelques écoulements MHD, pour des longueurs L_0, des vitesses U_0 et des temps t_0 caractéristiques

Substance	$L_0(m)$	$U_0(m.s^{-1})$	$D_m(m^2s^{-1})$	t_0	R_m
Mercure	0.1	0.1	1	0.01	0.01
Sodium liquide	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
Plasma de laboratoire	1	100	10	0.1	10
Noyau terrestre	10^7	0.1	1	10^{14}	10^6
Gaz interstellaire	10^{17}	10^3	10^3	10^{31}	10^{17}

III.2.4 Équations du mouvement

L'équation d'état des fluides conducteurs (métaux liquides) peut souvent se ramener a $\rho = Cte$ (avec ρ masse volumique). Lorsque les variations de température T sont suffisantes pour provoquer des variations de densité, on peut adopter la loi Boussinesq, de la forme [39] :

$$\rho = \rho_0\left[1-\beta\left(T-T_0\right)\right] \qquad \text{III-6}$$

avec β coefficient de dilatation volumique, ρ_0 masse volumique à T_0. Mais le coefficient de dilatation volumique est assez faible ($\approx 2.10^{-4}K^{-1}$) pour que l'équation de continuité, qui exprime le principe de conservation de la masse, s'écrive :

$$\vec{\nabla}.\vec{u} = 0 \qquad \text{III-7}$$

La loi fondamentale de la dynamique conduit à l'équation de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}.\vec{\nabla}\right)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\nabla^2\vec{u} + \vec{g} + \frac{1}{\rho}\vec{j}\wedge\vec{B} \qquad \text{III-8}$$

avec, g accélération due à la pesanteur, p pression,ν viscosité cinématique.

où parmi les forces extérieures, nous retenons la force de Laplace par unité de masse $\frac{1}{\rho}\vec{j}\wedge\vec{B}$:

Cette équation introduit la viscosité cinématique v du fluide, tellement petite dans les métaux liquides ($\approx 10^{-7}$ m^2s^{-1}) que le nombre de Reynolds $Re = UL/\nu$ est en général très grand par rapport à l'unité ($\approx 10^7$). Cela a pour conséquence qu'à grande échelle le frottement visqueux est négligeable. Toutefois, il existe des régions très minces, que l'on appelle couches limites, où le terme devient capable d'entrer en compétition avec les autres. Ces couches limites ont une épaisseur [39].

Lorsque la température T est une variable importante du problème, comme c'est bien souvent le cas dans les métaux fondus, on doit encore exprimer le premier principe de la thermodynamique pour fermer le système d'équations. Cette équation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\vec{u}.\vec{\nabla}\right)T = \alpha\Delta T + \frac{j^2}{\sigma\rho c} + \frac{\Phi_\nu}{\rho c} \qquad \text{III-9}$$

avec c: Capacité thermique massique,

Φ_v: Dissipation volumique par viscosité,

α: Diffusivité thermique *($\alpha = \kappa / \rho c$), κ* conductivité thermique.

La dissipation Φ_v est en général négligeable dans les métaux liquides. Dans de nombreux problèmes, c'est aussi le cas pour la dissipation par effet Joule $j^2 / \sigma \rho c$. On a en effet, en notant Θ une différence de température caractéristique [39] :

$$\frac{j^2}{\sigma \kappa \Delta T} \approx \frac{\sigma u^2 B^2 L^2}{\kappa \Theta} = \frac{u^2}{c\Theta} \frac{\nu}{\alpha} \frac{\sigma B^2 L^2}{\rho \nu} \qquad \text{III-10}$$

Le nombre de Prandtl ν/α est petit ($\approx 10^{-3}$), et le nombre d'Eckert $u/\sqrt{c\Theta}$ est lui aussi habituellement petit ($\approx 10^{-2}$). Il faudrait des valeurs spécialement élevées de l'induction magnétique pour que le nombre de Hartmann $\sigma B^2 L^2 / \rho \nu$ soit assez grand pour rendre l'effet Joule non négligeable par rapport à la conduction thermique.

III.3 Écoulement de Hartmann

Dans ce paragraphe, nous utilisons les coordonnées adimensionnelles : $X,Y,Z = \frac{1}{\ell}(x,y,z)$ avec, ℓ demi-largeur de la conduite.

Limitons d'abord notre attention au cas des conduites très longues en régime établi $\partial/\partial t = \partial/\partial x = 0$ situées dans l'entrefer d'un aimant (Figure III.1.a). Le fluide s'écoule avec la vitesse $\vec{u}(u,0,0)$ dans un champ magnétique uniforme d'induction $\vec{B}(0,B_0,0)$. Le champ électromoteur $\vec{u} \wedge \vec{B} = (0,0,uB_y)$ pousse les ions positifs dans la direction Oz et, pour que les lignes de courant électrique se referment, un champ électrique $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ apparaît.

Le potentiel φ est maximal en M et minimal en M', et la différence $\varphi(M) - \varphi(M')$ est proportionnelle au débit. Ce champ électrique permet le retour des lignes de courant électrique soit dans la paroi, soit dans la couche limite, au prorata à des conductances de ces deux régions. Ce circuit électrique forme deux spires de sens opposés qui induisent une induction $B_x = b$, mais ne modifient

pas l'induction transversale $B_y = B_0$. En identifiant les expressions de j_y et j_z déduites de la relation d'Ampère et de la loi d'Ohm [39]:

$$j_y = \frac{1}{\mu}\frac{\partial b}{\partial z} = -\sigma\frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad \text{III-11}$$

$$j_z = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial b}{\partial y} = \sigma\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z} + uB_0\right) \qquad \text{III-12}$$

et en tenant compte la relation $\vec{\nabla}.\vec{j} = 0$, on obtient les relations qui lient b et φ à u:

$$\Delta b + \mu\sigma B_0\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \text{III-13}$$

$$\Delta \varphi - B_0\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad \text{III-14}$$

La troisième équation, qui ferme le système, est l'équation du mouvement, qui s'écrit :

$$\Delta u + \frac{B_0}{\rho\nu\mu}\frac{\partial b}{\partial y} = -\frac{G_p}{\nu} \qquad \text{III-15}$$

en notant $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho G_p$ le gradient de pression moteur appliqué de l'extérieur.

Les conditions aux limites, qui doivent être associées à ces équations de III-13 à III-15 pour déterminer complètement la solution, expriment :

- que la vitesse u s'annule sur le contour intérieur C_i de la paroi ;

- que la composante b du champ magnétique s'annule sur le contour extérieur C_e de la paroi ;

- que la composante du champ électrique normale à la paroi $\left(\vec{e}_n.\vec{\nabla}\varphi\right)$ est nulle sur C_e et continue sur C_i, et que φ est aussi continu sur C_i. La solution de ce problème est élémentaire lorsque la conduite est un rectangle de demi-longueur dans la direction Oz (Figure III.1.b). Loin des bords Z= ±Γ, les distributions de u, b et φ sont indépendantes de z, les équations III-13, III-14 et III-15 se réduisent à des équations différentielles ordinaires et leur solution s'écrit [39]:

$$\frac{u}{V} = 1 - \frac{ch(HaY)}{chHa} \qquad \text{III-16}$$

$$\frac{b}{B_0 R_m} = \frac{1}{Ha}\frac{sh(HaY)}{chHa} - \left(1 + \frac{E}{B_0 V}\right)Y \qquad \text{III-17}$$

$$\frac{j_z}{\sigma B_0 V} = \frac{E}{B_0 V} + 1 - \frac{ch(HaY)}{chHa} \qquad \text{III-18}$$

$$\text{avec, } R_m = \mu\sigma V\ell, Ha = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}}B_0\ell, etV = \frac{\rho G_p}{\sigma B_0^2} - \frac{E}{B_0} \qquad \text{III-19}$$

On retrouve le rôle attendu du nombre de Reynolds magnétique et un nombre nouveau apparaît, le nombre de Hartmann *Ha*, dont le carré $\sigma B^2\ell^2/\rho\nu$ est une mesure du rapport des forces électromagnétiques aux forces de viscosité.

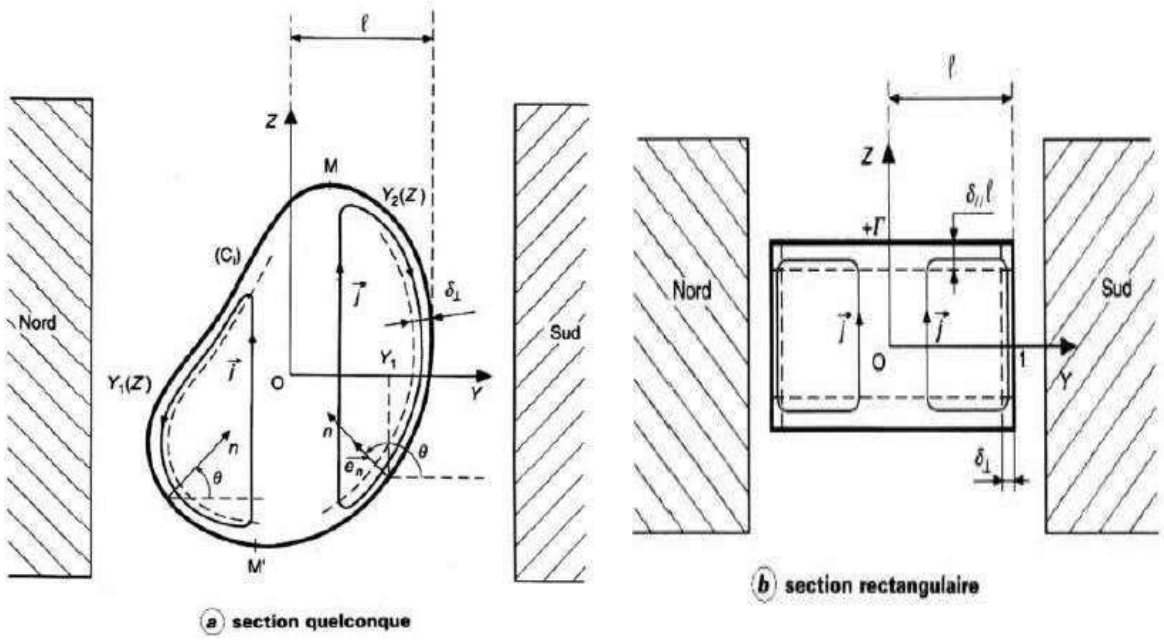


Figure III.1: Écoulement en conduite en présence d'une induction magnétique transversale uniforme

La Figure III.2 met en évidence le rôle crucial de ce nombre de Hartmann. Lorsqu'il est modéré, le profil de vitesse est encore proche de la parabole de Poiseuille. Mais, lorsqu'il devient très grand, ce profil est tout à fait plat, sauf dans une mince couche limite située le long des parois perpendiculaires à B_0, dont l'épaisseur est indépendante de la largeur de la conduite:

$$\delta_{\perp} = \frac{1}{B_0}\sqrt{\frac{\rho\nu}{\sigma}} \qquad \text{III-20}$$

où est concentrée toute la variation de vitesse. Les paramètres globaux de cet écoulement sont aussi fortement dépendants du nombre de Hartmann, notamment :

- la vitesse moyenne :

$$\bar{u} = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} u dy = V\left(1 - \frac{thHa}{Ha}\right) \qquad \text{III-21}$$

- la densité de courant moyenne :

$$\bar{j} = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} j_z dy = \sigma E + \sigma B_0 \bar{u} \qquad \text{III-22}$$

- le coefficient de frottement :

$$C_f = \frac{2\nu}{\bar{u}^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\ell} = \frac{2Ha^2}{Re}\frac{1}{\frac{Ha}{thHa} - 1} \qquad \text{III-23}$$

- le coefficient de perte de charge :

$$\lambda = \frac{2G_p\ell}{\bar{u}^2} = C_f + 2\frac{B_0\bar{j}\ell}{\rho\bar{u}^2} \qquad \text{III-24}$$

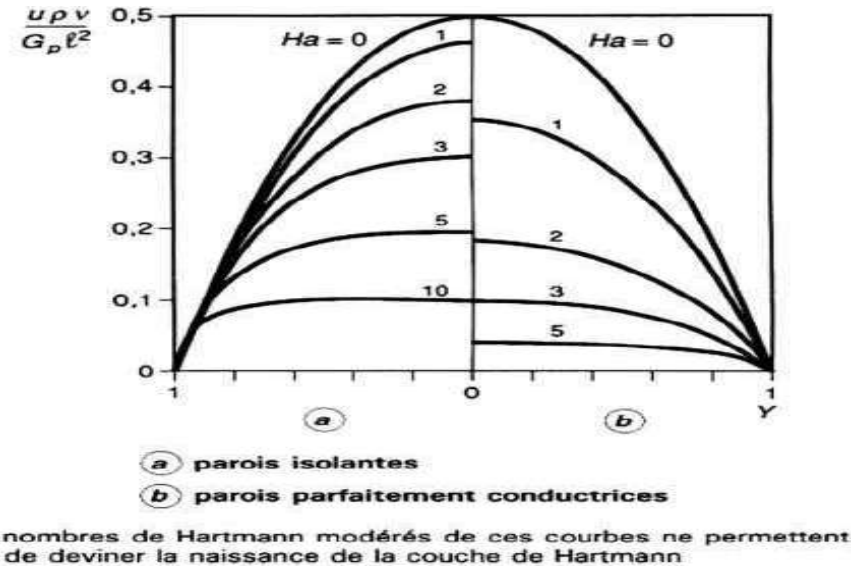


Figure III.2: Profils de vitesse de l'écoulement de Hartmann

Tous ces paramètres, ainsi que *E* et *V*, liés par une des relations III-19, dépendent également de la conductance du circuit extérieur, que celui-ci se limite aux parois ou bien qu'il existe effectivement un circuit électrique extérieur lié au domaine fluide par des électrodes placées aux bouts $Z = \pm\Gamma$. Deux cas particuliers simples se dégagent.

Dans une conduite à parois isolantes, sans circuit extérieur, on a :

$$\bar{j} = 0; E = \frac{\rho G_p}{\sigma B_0}\left(1 - \frac{Ha}{thHa}\right); V = \frac{\rho G_p}{\sigma B_0^2}\frac{Ha}{thHa} \qquad \text{III-25}$$

Dans une conduite à parois parfaitement conductrices, on a :

$$E = 0; \bar{j} = \frac{\rho G_p}{B_0}\left(1 - \frac{thHa}{Ha}\right); V = \frac{\rho G_p}{\sigma B_0^2} \qquad \text{III-26}$$

et quand $Ha >> 1$, $\bar{j} = \rho G_p / B_0$ .Dans le cas le plus général, on doit introduire le rapport *C* des conductances respectives des parois (épaisseur *e*, conductivité σ_p) et du fluide (largeur 2ℓ, conductivité σ) :

$$C = \frac{\sigma_p e}{\sigma \ell} \qquad \text{III-27}$$

Ainsi que le courant électrique par unité de longueur *I* forcé de l'extérieur. La condition de fermeture du circuit s'écrit :

$$\sigma E \ell (1 + C) + \sigma B_0 \bar{u} \ell = \frac{1}{2} \qquad \text{III-28}$$

Quand $I = 0$, l'expression globale de l'équilibre des forces appliquées à une tranche fluide se ramène à :

$$\lambda = 2\frac{Ha^2}{Re}\left(\frac{thHa}{Ha - thHa} + \frac{C}{1 + C}\right) \qquad \text{III-29}$$

On note les deux formes asymptotiques de cette loi lorsque $Ha \to \infty$: si $C = 0$, $\lambda \to 2Ha/Re$, alors que, si $C \to \infty$, $\lambda \to 2Ha^2/Re$ .Autrement dit, à G_p et B_0 donnés, la vitesse est *Ha* fois plus faible en présence de parois très conductrices qu'en présence de parois isolantes ; on parle de blocage

électromagnétique du fluide lorsque ces parois sont très conductrices et de freinage électromagnétique lorsqu'elles sont isolantes. Quand $I \neq 0$, le fonctionnement du système peut être interprété en termes de conversion d'énergie. Le système est un générateur de courant électrique continu si $0 < I < 2\ell\rho G_p / B_0$; une part de la puissance mécanique fournie au fluide est en effet convertie en puissance électrique dissipée elle-même dans le circuit.

Si $I < 0$, le système fonctionne comme une pompe et le débit est supérieur à ce qu'il serait à courant nul ; la puissance électrique provient alors d'un générateur placé sur le circuit extérieur. Enfin, si $I > 2\ell\rho G_p / B_0$, les forces électromagnétiques s'opposent au gradient de pression moteur et le système est un frein électromagnétique. Si $I > 2\ell\rho G_p (1 + C)/B_0$, la direction de l'écoulement peut être inversée [39].

III.4 Nombres sans dimension

L'adimensionnement des équations de la MHD, conduit à des nombres sans dimension caractéristiques, qui nous aiderons à décrire les résultats des expériences. On note L une échelle caractéristique de longueur, U une amplitude caractéristique du champ de vitesse, t une échelle caractéristique de temps. Pour construire les nombres sans dimension, le choix des valeurs de ces échelles, pour qu'elles soient pertinentes pour le problème étudié, n'est pas évident [40].

En pratique on prend le plus souvent, pour L la longueur intégrale de l'écoulement, vue comme l'échelle spatiale de l'injection de l'énergie. Pour U on prend l'amplitude du champ de vitesse, moyenné en temps et en espace. Enfin pour t on prend l'inverse de la fréquence de rotation des turbines qui mettent en mouvement le fluide. On envisage aussi une amplitude caractéristique du champ magnétique B_0, mais qui n'est bien définie, que dans le cas d'un champ homogène et constant [40].

- Nombre de Prandtl $Pr = \dfrac{\eta}{\nu}$

Ce nombre dépendant des propriétés physiques du fluide, compare l'efficacité de la diffusion de la quantité de mouvement, à celle du champ magnétique. Pr vaut $9.5\ 10^{-6}$ pour le sodium et $1.5\ 10^{-6}$ pour

le gallium. Pour des longueurs comparables, les perturbations de champ magnétique diffusent environ 100 000 fois plus vite, que celles de vitesse.

- Nombre de Reynolds $Re = \frac{LV}{\nu}$

Il traduit l'importance du terme convectif dans l'équation de Navier-Stokes, par rapport aux termes visqueux. Dans les expériences, *Re* sera toujours grand, au dessus de 10 000, de sorte que les écoulements seront toujours turbulents.

- Nombre de Reynolds magnétique $Rm = \frac{LV}{\eta}$

Il est construit dans l'équation de l'induction comme le rapport du terme $rot\left(\vec{u} \wedge \vec{B}\right)$ produisant les effets d'induction, par rapport au terme diffusif $\eta \Delta \vec{B}$. Ce nombre est le paramètre naturel de l'effet dynamo. Le nombre de Reynolds magnétique *Rm* est lié au nombre de Reynolds *Re* (dit hydrodynamique pour le différencier du premier), par la relation *Rm = Pm Re*. Les valeurs de *Pm* pour les métaux liquides, font que pour avoir *Rm* d'ordre un, *Re* est d'ordre 10^5 au moins.

- Paramètre d'interaction $N = \frac{\sigma B_0^2 L}{\rho V}$

Il correspond au rapport dans l'équation de Navier-Stokes de la force de Laplace $\vec{j} \wedge \vec{B}$, sur le terme convectif_$\left(\vec{u}.grad\vec{)}\vec{u}$. Il traduit l'importance de l'action d'un champ magnétique sur le mouvement du fluide. Notons que la définition ici énoncée, n'est pas adaptée à l'effet dynamo. Certaines références utilisent le nombre de Lundquist S [41], qu'on peut définir par $s = \sqrt{NRm}$.

CHAPITRE (IV)

CONFIGURATION ET FORMULATION MATHEMATIQUE

CONFIGURATION ET FORMULATION MATHEMATIQUE

IV.1 Introduction

Les transferts de chaleur dans un milieu poreux sont bien représentés dans la littérature et les études sont relativement significatives. Relativement et dans de telles configurations les milieux poreux en présence d'un champ magnétique sont beaucoup moins étudiées. Badruddin et al. [42] ont analysé l'effet de la dissipation visqueuse et du rayonnement sur la convection naturelle dans un milieu poreux incorporé dans un espace annulaire vertical.

L'effet de magnétohydrodynamique (MHD) sur les courants de convection dans les milieux poreux ont été étudiés par de nombreux auteurs dans divers cas; Taklifi et al. [43] ont considéré l'effet de MHD sur une nageoire poreuse fixé à une surface isotherme verticale.

Les flux de magnétohydrodynamique MHD de convection naturelle dans un milieu poreux ont été présentés par de nombreux auteurs; convection libre hydromagnétique bidimensionnelle instationnaire et flux de rayonnement thermique d'un fluide visqueux incompressible électriquement conducteur, à travers un milieu très poreux délimité par une surface plane verticale de température constante ont présenté par El-Hakiem [44]. Mansour et El-Shaer [45] ont étudié l'effet du champ magnétique sur les non-Darcy convection libre axisymétrique dans un milieu poreux saturé de fluide avec perméabilité variable.

Le flux convectif libre entièrement développé d'un fluide électriquement conducteur dans un canal verticale occupé par un milieu poreux sous l'influence du champ magnétique transversal a étudié par Kumar et Gupta [46]. Gueddaa et Ouahsine [47] ont obtenu des solutions de similarité d'écoulements de MHD dans un milieu poreux saturé. Pekmen et Tezer-Sezgin [48] ont étudié la convection libre dans des enceintes poreuses sous l'effet d'un champ magnétique. (Voir aussi [49-53]).

L'effet d'injection / aspiration sur le transfert de chaleur dans le milieu poreux a fait l'objet de travaux de nombreux chercheurs mais sans effet magnétique, [54-57]. En présence du champ

magnétique, le transfert de chaleur par MHD de convection instationnaire passé un semi-infini plaque mobile poreuse verticale à aspiration variable analysée par Kim [58]. Israël-Cookey et al. [59] ont étudié l'influence de la dissipation visqueuse et du rayonnement sur un flux de convection libre de MHD instable adjointe à une plaque verticale chauffée et infinie dans un milieu poreux tenant en compte une aspiration dépendante du temps. Grosan et al. [60] ont étudié les effets du champ magnétique et de la génération de chaleur interne sur la convection libre dans une cavité rectangulaire remplie d'un milieu poreux. Flux de couche limite instable et transfert de chaleur passé une feuille d'étirement poreuse en présence de viscosité variable et diffusivité thermique ont étudié par Mukhopadhyay [61], de plus [62-64].

Dans ce travail, nous présentons l'analyse mathématique pour le flux de la couche limite magnétohydrodynamique (MHD) de convection naturelle d'un fluide saturé dans un milieu poreux Darcéen-Forchheimer. La configuration est attenante à une plaque plate verticale en présence d'effets injection/aspiration et la technique numérique est celle choisie par Mansour et El- Shaer [65]. En utilisant des transformations de similarité et la méthode des perturbations, les équations différentielles partielles sont réduites en équations différentielles ordinaires.

IV.2 Configuration d'étude

On considère l'écoulement laminaire bidimensionnel de couche limite magnétohydrodynamique de convection naturelle d'un fluide incompressible au-delà d'une plaque verticale incorporée dans un milieu poreux à caractère Darcéen-Forchheimer.

Le modèle Brinkman-Forchheimer est utilisé pour décrire le flux dans le milieu poreux. Les propriétés de fluide sont supposées constantes et le champ magnétique est tenu perpendiculaire à la plaque. (Figure IV.1)

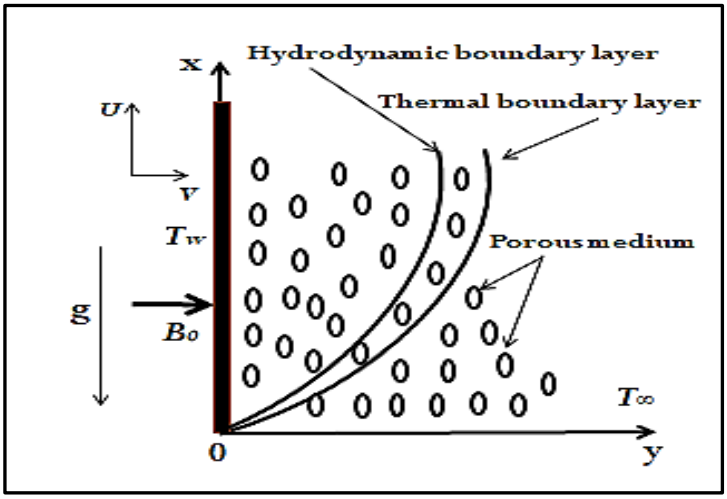


Figure IV.1: Modèle physique.

IV.3 Formulation mathématique

IV.3.1 Formulation mathématique de base

En utilisant l'approximation de la couche limite, les équations gouvernantes pour la continuité, le moment et l'énergie peuvent être écrites comme suit:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}=0 \qquad \text{IV-1}$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}+\beta g(T-T_\infty)-\frac{\nu}{K}\bar{u}-\frac{F^*}{\sqrt{K}}\bar{u}^2-\frac{\sigma B_0^2}{\rho}\bar{u} \qquad \text{IV-2}$$

$$\bar{u}\frac{\partial T}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\nu}{C_p}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2+\frac{\sigma B_0^2}{\rho C_p}\bar{u}^2 \qquad \text{IV-3}$$

où, u et v sont les composantes de la vitesse dans les directions x et y respectivement, T la température. B est le coefficient de dilatation thermique volumétrique du fluide, K la perméabilité du milieu poreux. g l'accélération gravitationnelle. ν , α ,ρ et F^* sont la viscosité cinématique, la diffusivité thermique, la densité du fluide et le paramètre de Forchheimer respectivement. σ la conductivité électrique du fluide, B_0 la force du champ magnétique, c_p la chaleur spécifique du fluide.

Les conditions aux limites naturellement explicités par:

$$\begin{aligned} &y=0:\ u=0\ ,v=(+/-)v_0\ ,T=T_w \\ &y\to\infty:\ u\to 0,\ \ T\to T_\infty \end{aligned} \qquad \text{IV-4}$$

IV.3.2 Formulation mathématique en variables adimensionnées

Les variables suivantes sont ensuite introduites :

$$x=\bar{x}/L \qquad \text{IV-5}$$

$$y=\bar{y}\sqrt{\mathrm{Re}}/L \qquad \text{IV-6}$$

$$u=\bar{u}/u_c \qquad \text{IV-7}$$

$$v=\bar{v}\sqrt{\mathrm{Re}}/u_c \qquad \text{IV-8}$$

$$(T_0-T_\infty)_0=d(x)=Nx^n \qquad \text{IV-9}$$

$$\mathrm{Re}=u_cL/v \qquad \text{IV-10}$$

$$u_c=(\beta gL(T_c-T_\infty))^{1/2} \qquad \text{IV-11}$$

où, $(T_0-T_\infty)_0$ est la différence de température en aval (le long de l'axe des abscisses), *Re* est le nombre de Reynolds, u_c est la vitesse de référence.

En utilisant ces variables de IV-5 à IV-11, les équations sans dimensions peuvent être écrites comme suit:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad \text{IV-12}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{T-T_\infty}{T_c-T_\infty}-\frac{vL}{Ku_c}u-\frac{F^*L}{\sqrt{K}}u^2-\frac{\sigma B_0^2L}{\rho u_c}u \qquad \text{IV-13}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{u_c^2}{C_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{\sigma B_0^2Lu_c}{\rho C_p}u^2 \qquad \text{IV-14}$$

où *Pr* est le nombre de Prandtl.

IV.3.3 Formulation mathématique en variables de similarités (C.L)

Comme seconde étape, les variables de similarité sont choisies :

$$\eta(x, y) = yb(x) \qquad \text{IV-15}$$

$$\psi(x, y) = c(x) f(\eta, x) \qquad \text{IV-16}$$

$$c(x) = 4xb(x) = 4\left[\frac{\beta g L^3 x^3 (T_0 - T_\infty)_0}{4\nu^2}\right]^{1/4} = 4\left[\frac{Gr_x}{4}\right]^{1/4} \qquad \text{IV-17}$$

$$\theta(\eta) = \frac{(T - T_\infty)}{(T_0 - T_\infty)_0} \qquad \text{IV-18}$$

où, b, c sont fonction linéaire dans x, *Grx* est le nombre local de Grashof, η est la variable de similarité, $f(\eta, x)$ est la fonction de flux sans dimension, $\theta(\eta)$ est la température sans dimension.

La fonction de flux $\psi(x, y)$ est définie par:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \text{IV-19-a}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad \text{IV-19-b}$$

Par les équations IV-19-a et IV-19-b, l'équation IV-12 est satisfaite automatiquement et les composantes de la vitesse deviennent :

$$u = c\, b\, f' \qquad \text{IV-20-a}$$

$$v = -\left[c' f + c\, y b' f'\right] \qquad \text{IV-20-b}$$

IV.4 Résolution par perturbations

Expansions selon la méthode des perturbations pour les fonctions de courant et de la température :

$$f(\eta, x) = f_0(\eta) + \varepsilon(x) f_1(\eta) + \lambda(x) f_2(\eta) \qquad \text{IV-21}$$

$$\theta(\eta, x) = \theta_0(\eta) + \varepsilon(x)\theta_1(\eta) + \lambda(x)\theta_2(\eta) \qquad \text{IV-22}$$

Avec :

$$\varepsilon(x)=\frac{2\nu}{K}\left[\frac{Lx}{\beta g d(x)}\right]^{1/2} \qquad \text{IV-23}$$

$$\lambda(x)=\frac{4F^{*}L}{\sqrt{K}}x \qquad \text{IV-24}$$

On aboutit à un système complexe en termes principaux et de perturbation suivant :

$$f_0'''-2(n+1)\left(f_0'\right)^2+(n+3)f_0 f_0''+\frac{1}{\mathrm{Re}^2}\theta_0-Mf_0'=0 \qquad \text{IV-25}$$

$$\theta_0''+\mathrm{Pr}\left[(n+3)f_0\theta_0'-4n\theta_0 f_0'+Ec\left(f_0''\right)^2+Ec\,M\left(f_0'\right)^2\right]=0 \qquad \text{IV-26}$$

$$f_1'''-4(n+1)\left(f_0'f_1'\right)+(n+3)\left(f_0 f_1''+f_1 f_0''\right)+\frac{1}{\mathrm{Re}^2}\theta_1-\frac{1}{\mathrm{Re}}f_0'-Mf_1'=0 \qquad \text{IV- 27}$$

$$\theta_1''+\mathrm{Pr}\left[(n+3)\left(f_0\theta_1'+f_1\theta_0'\right)-4n\left(f_0'\theta_1+f_1'\theta_0\right)+2Ecf_0''f_1''+2EcMf_0'f_1'\right]=0 \qquad \text{IV-28}$$

$$f_2'''-4(n+1)\left(f_0'f_2'\right)+(n+3)\left(f_0 f_2''+f_2 f_0''\right)+\frac{1}{\mathrm{Re}^2}\theta_2-\left(f_0'\right)^2-Mf_2'=0 \qquad \text{IV-29}$$

$$\theta_2''+\mathrm{Pr}\left[(n+3)\left(f_0\theta_2'+f_2\theta_0'\right)-4n\left(f_0'\theta_2+f_2'\theta_0\right)+2Ecf_0''f_2''+2EcMf_0'f_2'\right]=0 \qquad \text{IV-30}$$

où, M est le paramètre de champ magnétique et Ec le nombre d'Eckert où sont définis par:

$$M=\frac{\sigma B_0^2 Lx^2}{\rho u_c\left[Gr_x/4\right]^{1/2}} \qquad \text{IV-31}$$

$$Ec=\frac{4u_c^2 Gr_x}{C_p\left(T_0-T_\infty\right)_0 x^2} \qquad \text{IV-32}$$

Les conditions aux limites sont remaniées en fonction des cas suivants:

a- Surface isotherme :

$$\begin{aligned}
&\eta = 0 : f_0(0) = -F \\
&\quad f_1(0) = f_2(0) = f_0'(0) = f_1'(0) = f_2'(0) = 0 \\
&\quad 1 - \theta_0(0) = \theta_1(0) = \theta_2(0) = 0 \\
&\eta \to \infty : f_0'(\infty) = f_1'(\infty) = f_2'(\infty) = 0 \\
&\quad \theta_0(\infty) = \theta_1(\infty) = \theta_2(\infty) = 0
\end{aligned} \qquad \text{IV-33}$$

b- Surface de flux constant :

$$\begin{aligned}
&\eta = 0 : f_0(0) = -F \\
&\quad f_1(0) = f_2(0) = f_0'(0) = f_1'(0) = f_2'(0) = 0 \\
&\quad 1 - \theta_0(0) = \theta_1'(0) = \theta_2'(0) = 0 \\
&\eta \to \infty : f_0'(\infty) = f_1'(\infty) = f_2'(\infty) = 0 \\
&\quad \theta_0(\infty) = \theta_1(\infty) = \theta_2(\infty) = 0
\end{aligned} \qquad \text{IV-34}$$

c- Panache plan illimité avec source thermique à $x=0$:

$$\begin{aligned}
&\eta = 0 : f_0(0) = -F \\
&\quad f_1(0) = f_2(0) = f_0''(0) = f_1''(0) = f_2''(0) = 0 \\
&\quad 1 - \theta_0(0) = \theta_0'(0) = \theta_1'(0) = \theta_2'(0) = 0 \\
&\eta \to \infty : f_0'(\infty) = f_1'(\infty) = f_2'(\infty) = 0 \\
&\quad \theta_1(\infty) = \theta_2(\infty) = 0
\end{aligned} \qquad \text{IV-35}$$

d- Surface adiabatique avec source thermique concentrée :

$$\begin{aligned}
&\eta = 0 : f_0(0) = -F \\
&\quad f_1(0) = f_2(0) = f_0'(0) = f_1'(0) = f_2'(0) = 0 \\
&\quad 1 - \theta_0(0) = \theta_0'(0) = \theta_1'(0) = \theta_2'(0) = 0 \\
&\eta \to \infty : f_0'(\infty) = f_1'(\infty) = f_2'(\infty) = 0 \\
&\quad \theta_1(\infty) = \theta_2(\infty) = 0
\end{aligned} \qquad \text{IV-36}$$

IV.5 Méthode de résolution

L'ensemble d'équations différentielles ordinaires couplées de IV-25 à IV-30 est fortement non linéaire et couplé, et ne peut être résolu analytiquement, avec les conditions aux limites pour les quatre différents cas de flux de IV-33 à IV-36, ils forment un problème aux limites à deux points qui peut être résolu pour certaines valeurs des paramètres le régissant.

Le système d'équations ainsi élaboré, est rendu d'abord en système élargi avec l'écriture des dérivées comme équations subsidiaires. Ensuite, la méthode des différences finies qui implémente la formule de Lobatto à trois étapes de collocation (III.A) et le polynôme de collocation fournit une solution continue qui est du quatrième ordre en précision, de manière uniforme dans l'intervalle d'intégration. La sélection du maillage et l'erreur de contrôle sont basés sur le résidu de la solution en continu. La technique de collocation utilise un maillage de points pour diviser l'intervalle en sous-intervalles d'intégration. Le logiciel (Matlab@) détermine une solution numérique en résolvant un système d'équations algébriques résultant avec les conditions aux limites, et les conditions de collocation imposées sur tous les sous-intervalles. Le solveur estime alors l'erreur de la solution numérique sur chaque sous-interval. Si la solution ne satisfait pas aux critères de tolérance, le solveur adapte le maillage et répète le processus. L'utilisateur doit fournir les points du maillage initial ainsi qu'une approximation initiale de la solution aux points de maillage. L'exécution du programme implémenté fournit des calculs numériques qui sont effectués pour différentes valeurs de paramètre physique, à savoir, le paramètre de champ magnétique M, le nombre de Reynolds Re, le nombre de Prandtl Pr, le paramètre injection/aspiration F.

CHAPITRE (V)

RESULTATS ET DISCUSSION

RESULTATS ET DISCUSSION

Dans cette partie les principaux résultats liés au contrôle du système écoulement-transfert dans la configuration étudiée sont donnés et montrent l'influence des paramètres dominants.

V.1 Validation du code de contrôle

Le code de calcul a été validé en le comparant aux résultats de M. A. Mansour and N. A. El-Shaer [65] dans le Tableau V.1 pour le cas de surface isotherme**:**

Tableau V.1 : Validation pour le cas de surface isotherme

	n	M	Ec	$f_0''(0)$	$-f_1''(0)$	$-f_2''(0)$	$-\theta_0'(0)$	$\theta_1'(0)$	$\theta_2'(0)$
M. A. Mansour and N. A. El-Shaer	0.0	0	0	0.6724	0.1137	0.0214	0.5080	0.0609	0.0124
			0.01	0.6725	0.1140	0.0214	0.5072	0.0610	0.0123
		1	0	0.5659	0.0768	0.0116	0.4546	0.0480	0.0081
			0.01	0.5660	0.0769	0.0117	0.4538	0.0478	0.0080
		2	0	0.4948	0.0654	0.0069	0.4152	0.0376	0.0054
			0.01	0.4949	0.0547	0.0069	0.4145	0.0374	0.0054
Les présents résultats	0.0	0	0	0.6724	0.1321	0.0264	0.5081	0.0620	0.0178
			0.01	0.6725	0.1321	0.0264	0.5073	0.0616	0.0178
		1	0	0.5659	0.0854	0.0134	0.4546	0.0456	0.0106
			0.01	0.5661	0.0855	0.0135	0.4538	0.0453	0.0105
		2	0	0.4948	0.0592	0.0076	0.4153	0.0338	0.0065
			0.01	0.4949	0.0593	0.0076	0.4145	0.0336	0.0065

V.2 L'influence de champ magnétique *M* et le nombre de Reynolds *Re*

Les Figures V.1, V.2, V.3 et V.4 décrivent l'influence de paramètre de champ magnétique *M* et le nombre de Reynolds *Re* sur les profils de vitesse avec la variable de similarité η le long de la plaque plane verticale et poreuse pour les quatre cas de flux respectivement ,nous notons que la vitesse diminue avec l'augmentation de champ magnétique *M* et le nombre de Reynolds *Re* qui signifie que l'épaisseur de la couche limite hydrodynamique diminue lorsque *M* et *Re* augmentent. En raison de la force de Lorentz induite par le champ magnétique, les profils se rabaissent avec la progression de *M*,

supplantant l'effet d'inertie représenté par le nombre *Re*, ici de référence seulement, mais qui est dans le milieu poreux faible.

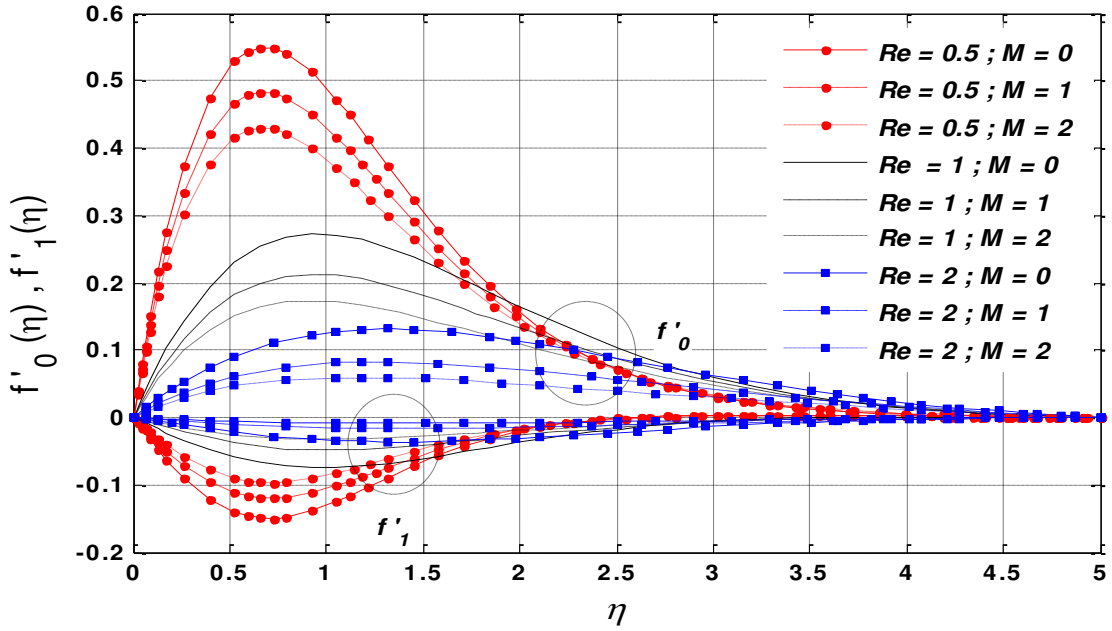


Figure V.1 : Variation de profils de vitesse avec η pour **surface isotherme** (n=0.0, Pr=0.733, Ec=0.01)

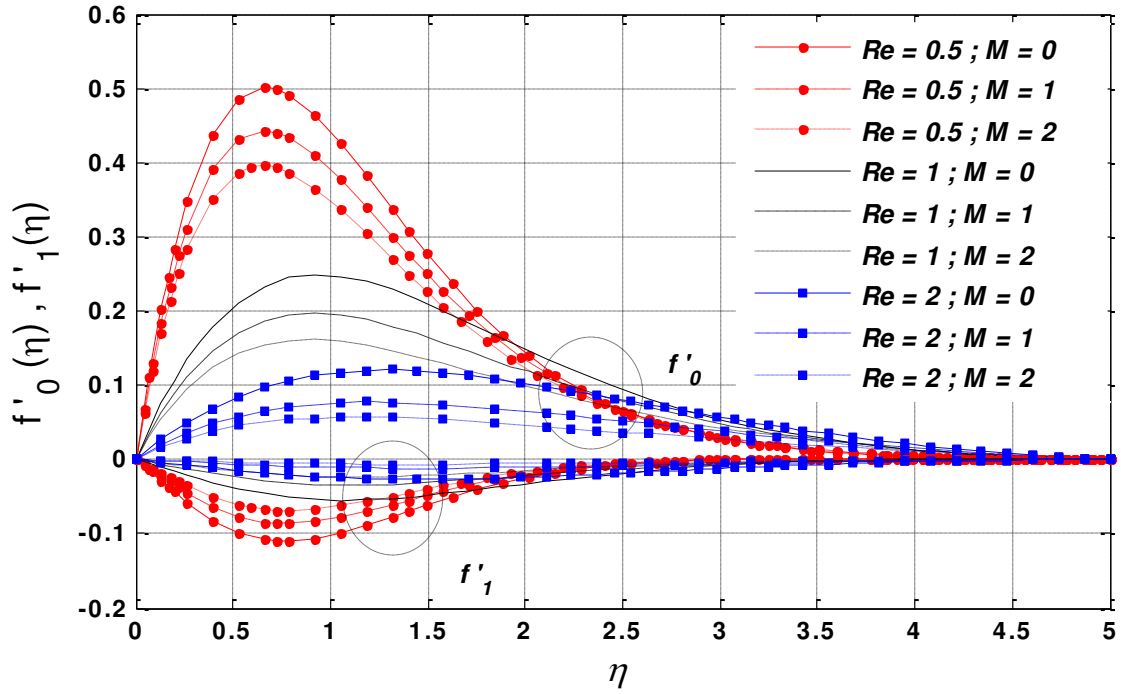


Figure V.2: Variation de profils de vitesse avec η pour **surface de flux constant** (n=0.2, Pr=0.733, Ec=0.01)

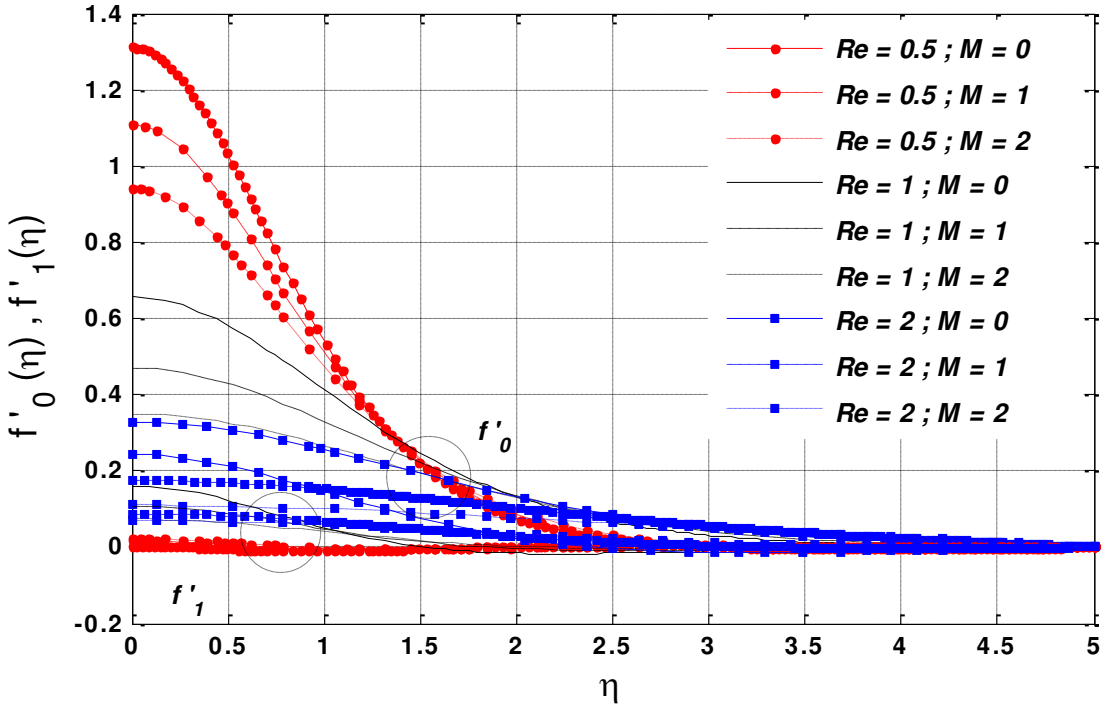


Figure V.3: Variation de profils de vitesse avec η pour **panache plan** (n= -0.6, Pr=0.733, Ec=0.01)

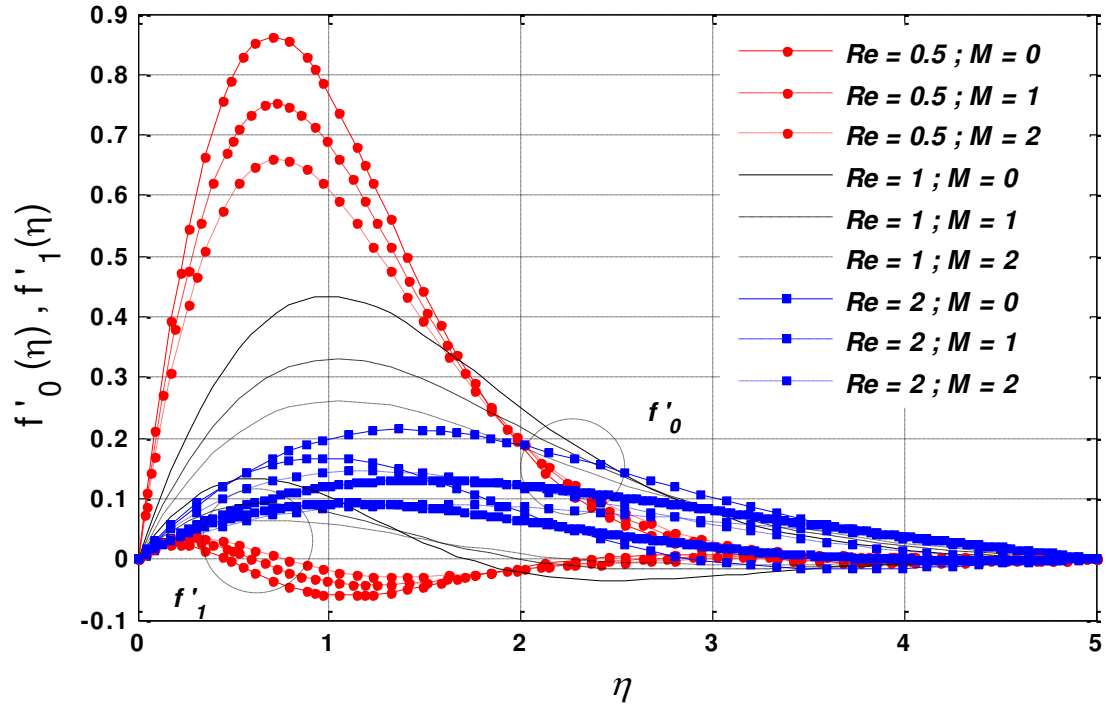


Figure V.4: Variation de profils de vitesse avec η pour **panache mur plan** (n= -0.6, Pr=0.733, Ec=0.01)

La variation du profil de température avec la variable de similarité η le long de la plaque poreuse est illustrée dans les Figures V.5, V.6, V.7, V.8, nous remarquons que la température est contrairement à la vitesse augmente avec l'augmentation de champ magnétique *M*. Cela s'explique par frottements induits par une vitesse plus retardée par la force de Lorentz, elle-même induite par le champ magnétique, en addition de la dissipation magnétique prise en compte dans cette étude. Il est à signaler aussi que la baisse du profil de température est plus brutale lors des nombres de Reynolds *Re* réduits. Dans tous les profils, il est remarqué le rapport prépondérant de la vitesse principale sur la première vitesse de perturbation. D'ailleurs cette dernière n'est en fait significative que pour les nombres de référence *Re* plus grandes. Pour les deux configurations – surface isotherme et surface flux constant- la première température perturbatrice peut être considérée d'un apport négligeable dans la constitution du profil. Il n'en est pas de même pour les deux autres configurations où la présence de la source thermique joue un rôle substantiel et parfois de niveau de dominance comparable à celui de la température principale.

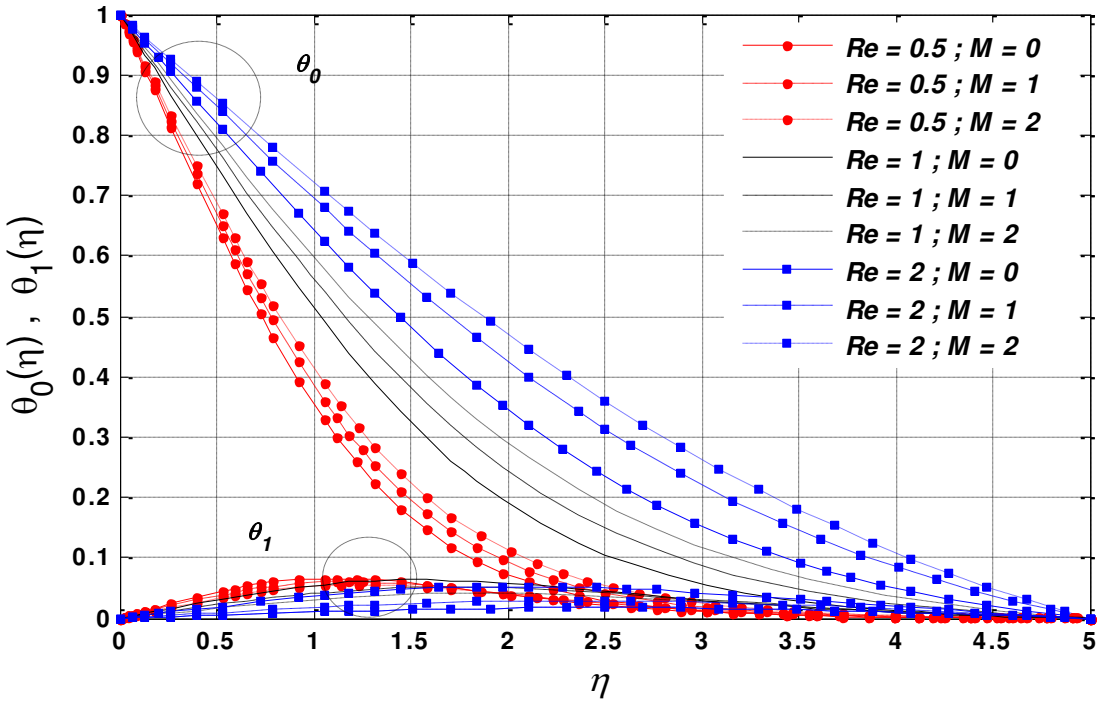


Figure V.5: Variation de profils de température avec η pour **surface isotherme** (n=0.0, Pr=0.733, Ec=0.01)

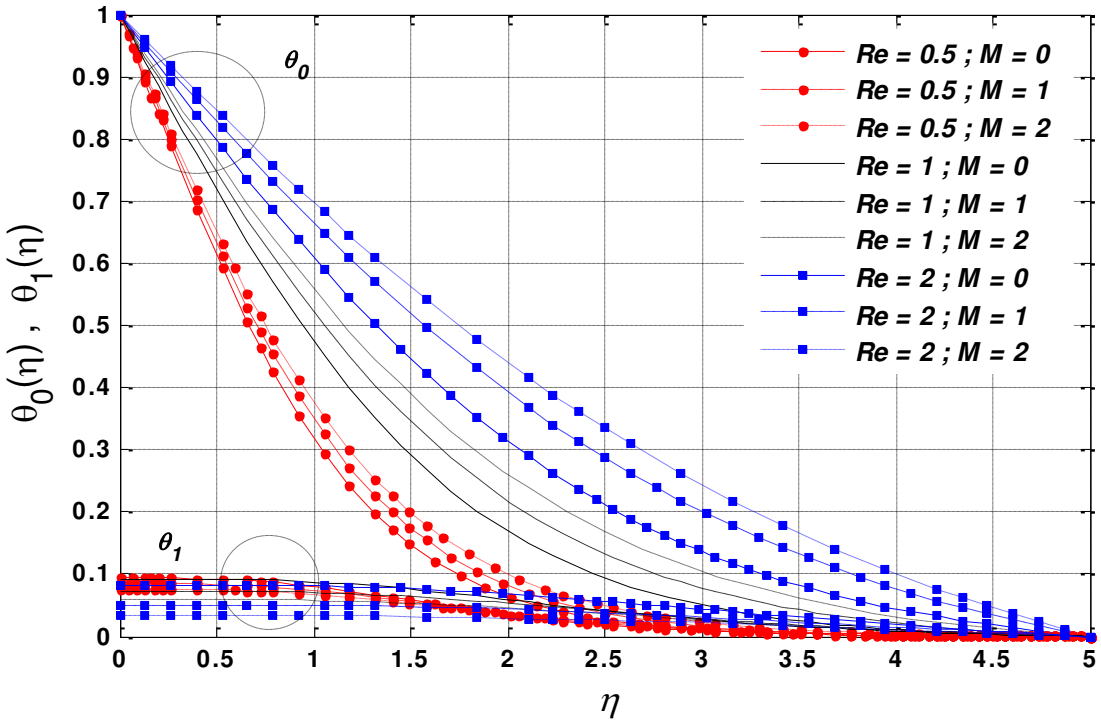


Figure V.6: Variation de profils de température avec η pour **surface de flux constant** (n=0.2, Pr=0.733, Ec=0.01)

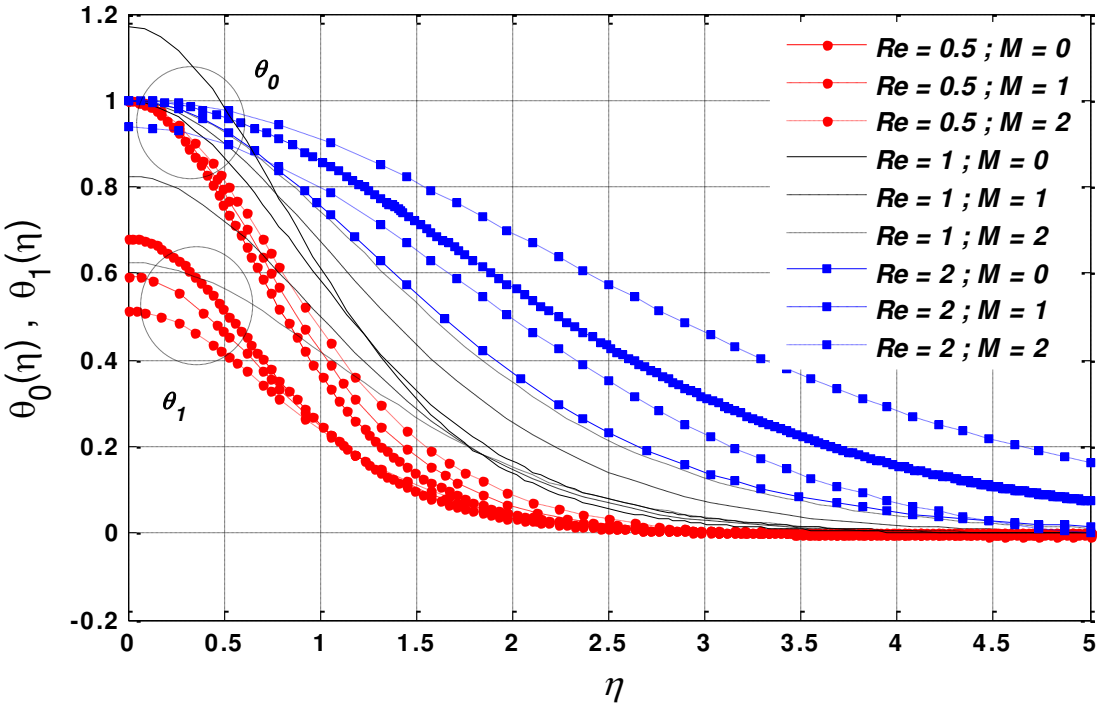


Figure V.7: Variation de profils de température avec η pour **panache plan** (n= -0.6, Pr=0.733, Ec=0.01)

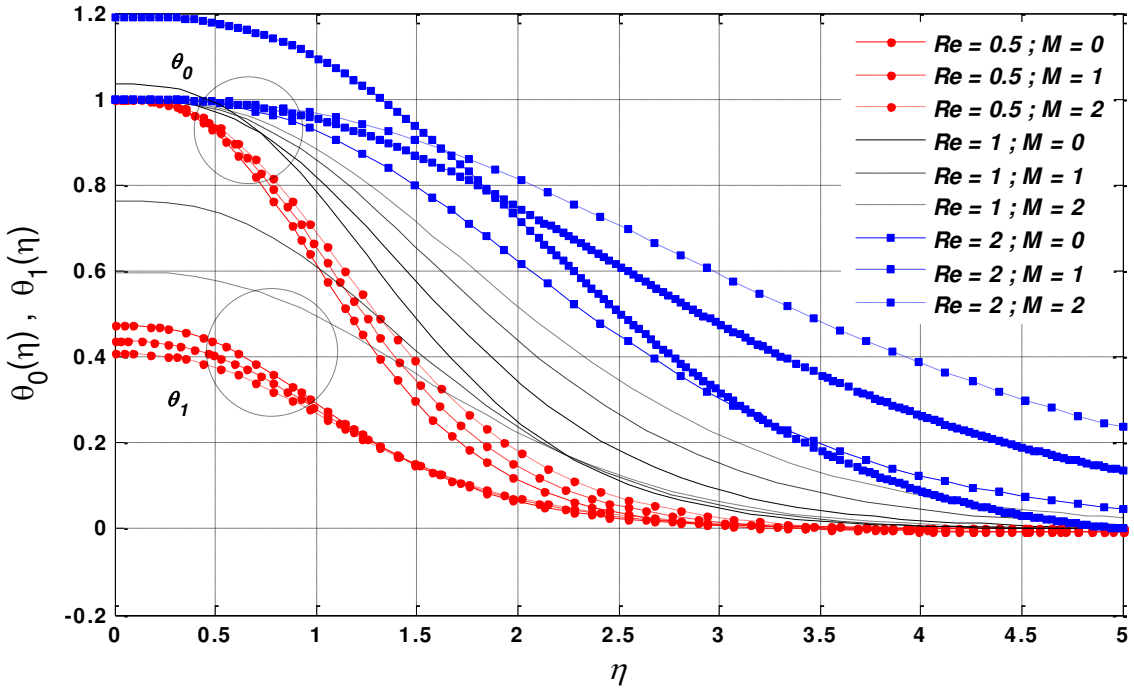


Figure V.8 : Variation de profils de température avec η pour **panache mur plan** (n= -0.6, Pr=0.733, Ec=0.01)

Les résultats numériques de la technique de perturbation pour les quatre différents cas de flux correspondant aux valeurs indiquées de dérivation de vitesse et de température sont calculés dans les Tableaux V.2- V.5 respectivement et rendent mieux compte des effets sur les transferts, notamment thermique suivant l'intensité du champ magnétique et le nombre de Reynolds.

Tableau V.2: Grandeurs déterminantes pour surface isotherme (n=0.0, Pr=0.733, Ec=0.01)

n	M	Re	$f_0''(0)$	$-f_1''(0)$	$-f_2''(0)$	$-\theta_0'(0)$	$\theta_1'(0)$	$\theta_2'(0)$
0.0	0	0.5	1.9077	0.3748	0.0753	0.7137	0.0882	0.0252
		1	0.6725	0.1321	0.0264	0.5073	0.0616	0.0178
		2	0.2338	0.0459	0.0089	0.3625	0.0378	0.0111
0.0	1	0.5	1.7411	0.2983	0.0532	0.6716	0.0764	0.0195
		1	0.5661	0.0855	0.0135	0.4538	0.0453	0.0105
		2	0.1718	0.0207	0.0026	0.3081	0.0189	0.0037
0.0	2	0.5	1.6074	0.2417	0.0385	0.6352	0.0662	0.0152
		1	0.4949	0.0593	0.0076	0.4145	0.0336	0.0065
		2	0.1407	0.0117	0.0010	0.2798	0.0105	0.0016

Tableau V.3: Grandeurs déterminantes pour surface de flux constant (n=0.2, Pr=0.733, Ec=0.01)

n	M	Re	$f_0''(0)$	$-f_1''(0)$	$-f_2''(0)$	$-\theta_0'(0)$	$\theta_1'(0)$	$\theta_2'(0)$
0.2	0	0.5	1.8037	0.2050	0.0384	0.8156	0.0003	0
		1	0.6362	0.0726	0.0134	0.5785	0	0
		2	0.2219	0.0263	0.0047	0.4106	0	0
0.2	1	0.5	1.6560	0.1555	0.0257	0.7705	0.0002	0
		1	0.5416	0.0436	0.0063	0.5205	0	0
		2	0.1664	0.0114	0.0013	0.3479	0	0
0.2	2	0.5	1.5365	0.1212	0.0178	0.7313	0.0001	0
		1	0.4775	0.0291	0.0034	0.4770	0	0
		2	0.1377	0.0067	1.0e-003 *	0.3131	0	0

Tableau V.4: Grandeurs déterminantes pour panache plan (n= -0.6, Pr=0.733, Ec=0.01)

n	M	Re	$f_0'(0)$	$-f_1'(0)$	$-f_2'(0)$	$\theta_1(0)$	$\theta_2(0)$
-0.6	*0*	*0.5*	*1.3118*	*-0.0039*	*0.0333*	*0.6819*	*0.3198*
		1	*0.6568*	*-0.1610*	*0.0162*	*1.1700*	*0.3230*
		2	*0.3271*	*-0.2428*	*0.0093*	*2.1357*	*0.3148*
-0.6	*1*	*0.5*	*1.1074*	*-0.0181*	*0.0243*	*0.5933*	*0.2310*
		1	*0.4714*	*-0.1073*	*0.0087*	*0.8255*	*0.1706*
		2	*0.1751*	*-0.0883*	*0.0033*	*1.0010*	*0.0900*
-0.6	*2*	*0.5*	*0.9413*	*-0.0230*	*0.0175*	*0.5147*	*0.1693*
		1	*0.3507*	*-0.0736*	*0.0048*	*0.6248*	*0.0960*
		2	*0.1099*	*-0.0707*	*0.0014*	*0.9386*	*0.0326*

Tableau V.5: Grandeurs déterminantes pour panache mur plan (n= -0.6, Pr=0.733, Ec=0.01)

n	M	Re	$f_0''(0)$	$-f_1''(0)$	$-f_2''(0)$	$\theta_1(0)$	$\theta_2(0)$
-0.6	*0*	*0.5*	*2.6003*	*- 0.2800*	*- 0.1189*	*0.4732*	*0.1663*
		1	*0.9224*	*- 0.4857*	*- 0.0433*	*1.0349*	*0.1699*
		2	*0.3237*	*- 0.3694*	*- 0.0117*	*1.8189*	*0.1537*
-0.6	*1*	*0.5*	*2.3099*	*- 0.2970*	*- 0.0889*	*0.4359*	*0.1252*
		1	*0.7361*	*- 0.3313*	*- 0.0236*	*0.7640*	*0.0963*
		2	*0.2173*	*- 0.2019*	*- 0.0029*	*1.1914*	*0.0493*
-0.6	*2*	*0.5*	*2.0781*	*- 0.3054*	*- 0.0669*	*0.4067*	*0.0957*
		1	*0.6160*	*- 0.2368*	*- 0.0135*	*0.5971*	*0.0585*
		2	*0.1684*	*- 0.3203*	*- 0.0008*	*2.0902*	*0.0196*

V.3 L'influence de champ magnétique *M* et le nombre de Prandtl *Pr*

Les Figures V.9, V.10, V.11, V.12 montrent l'effet du paramètre de champ magnétique *M* en relation avec la nature du fluide représenté par le nombre de Prandtl *Pr,* sur les profils de vitesse avec la variable de similarité η le long de la plaque. Pour les quatre cas d'écoulements nous observons que la vitesse diminue avec l'augmentation du champ magnétique et le nombre de Prandtl, donc l'épaisseur de la couche limite hydrodynamique est diminuée tant que *M* et *Pr* augmentent. La force de Lorentz invoquée plus haut est donc le moteur de ce ralentissement tandis que, et bien évidemment une viscosité plus grande du fluide par exemple mène à une vitesse également plus réduite. Si les profils de vitesse sont assez typiques de ceux rencontrés en convection naturelle, ce qui est le cas, ici, la configuration dite panache plan et en raison des conditions aux limites spécifiques présente des allures différents ou plutôt tronquées. Comme signalé, la vitesse principale domine la première vitesse de perturbation pour les deux premières configurations et sont plus ou moins comparables pour les deux autres.

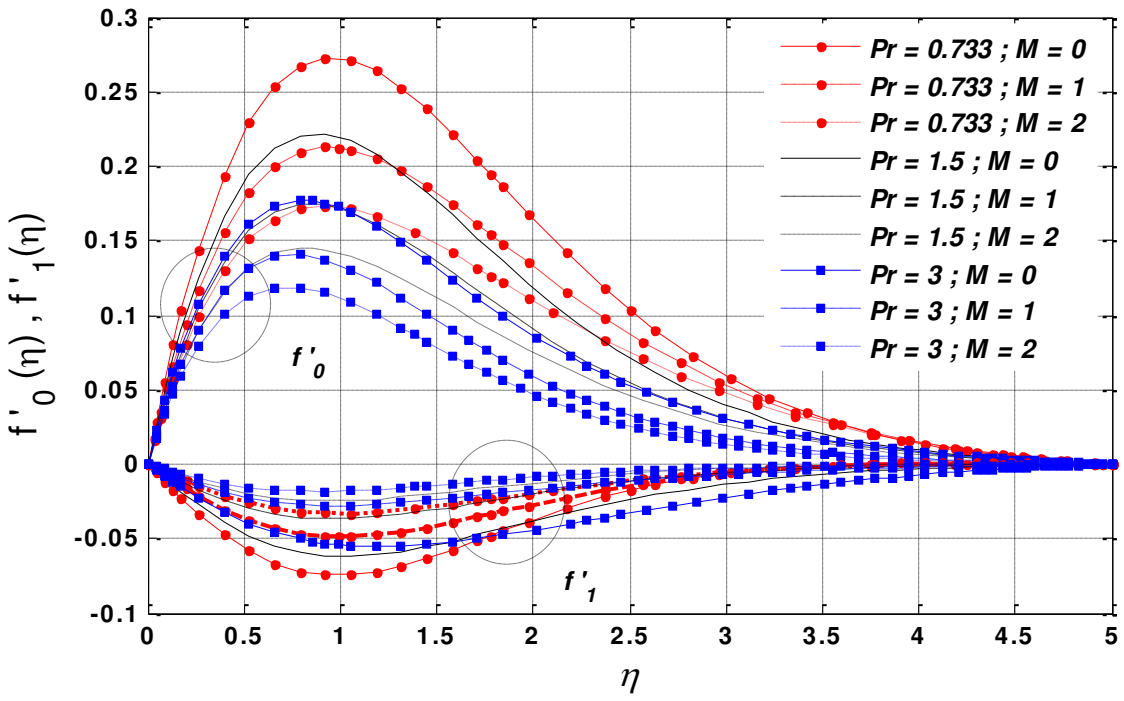


Figure V.9: Variation de profils de vitesse avec η pour **surface isotherme** (n=0.0, Re=1, Ec=0.01)

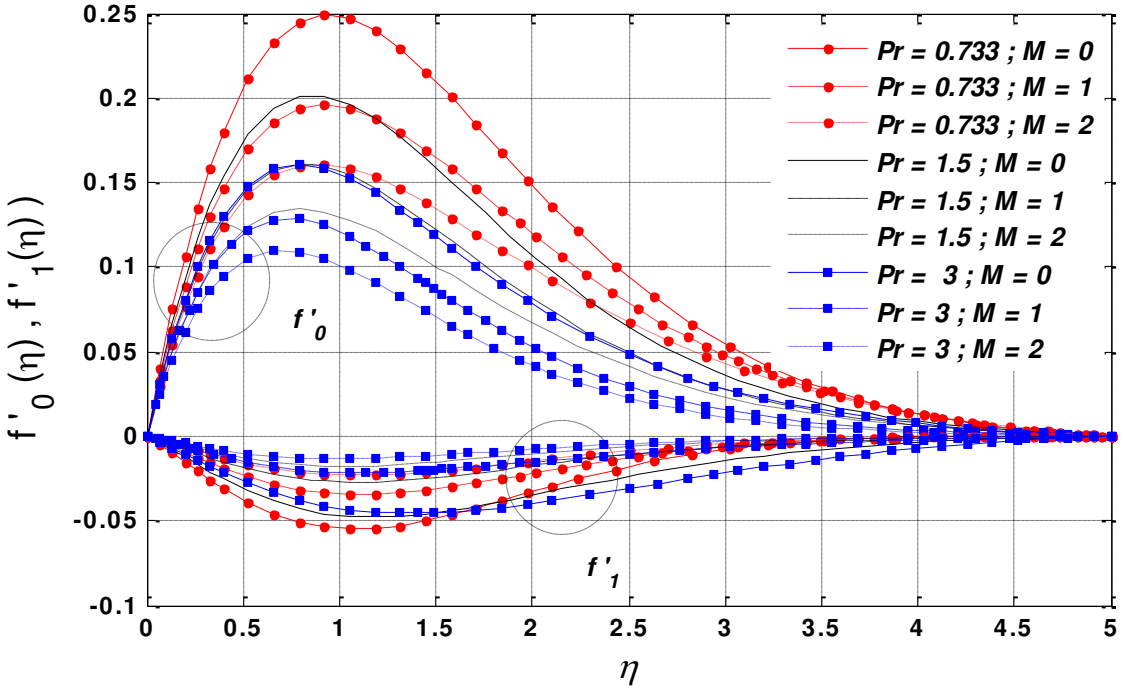


Figure V.10: Variation de profils de vitesse avec η pour **surface de flux constant** (n=0.2, Re=1, Ec=0.01)

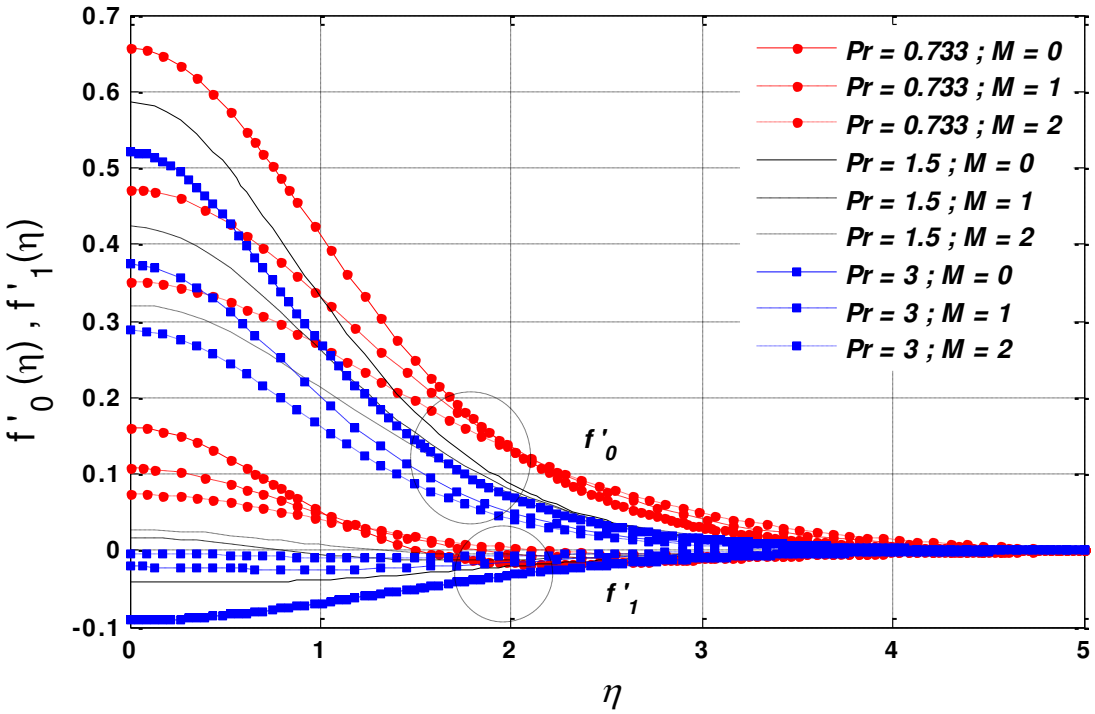


Figure V.11: Variation de profils de vitesse avec η pour **panache plan** (n= -0.6, Re=1, Ec=0.01)

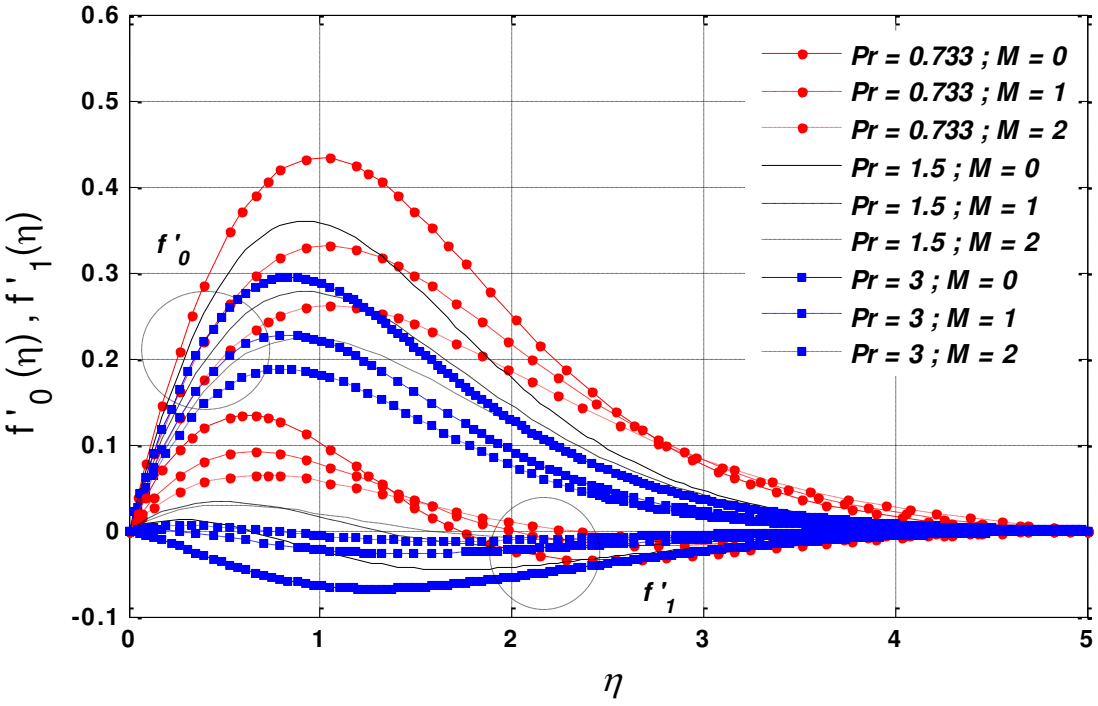


Figure V.12: Variation de profils de vitesse avec η pour **panache mur plan** (n= -0.6, Re=1, Ec=0.01)

Les Figures V.13, V.14, V.15, V.16 présentent l'effet du champ magnétique M et le nombre de Prandtl Pr sur les profils de température avec la variable de similarité η le long de la plaque, nous remarquons que la température augmente avec l'augmentation du champ magnétique et diminue quand le nombre de Prandtl augmente, donc l'épaisseur de la couche limite thermique est diminuée tant que Pr augmente. Ce nombre explique physiquement l'obtention de ces résultats, du fait que un fluide caractérisé par une chaleur spécifique plus grande ou encore une conductivité thermique moins importante correspond à un raccordement plus rapide de la couche limite thermique avec le fluide hors de cette couche. On constate les mêmes tendances quant aux rapports des températures principales et perturbatrices en relation aux configurations. A ce stade, notons que si pour la surface isotherme, la température perturbatrice n'est perceptible qu'au centre de la couche limite, elle l'est près de la paroi pour la surface à flux constant.

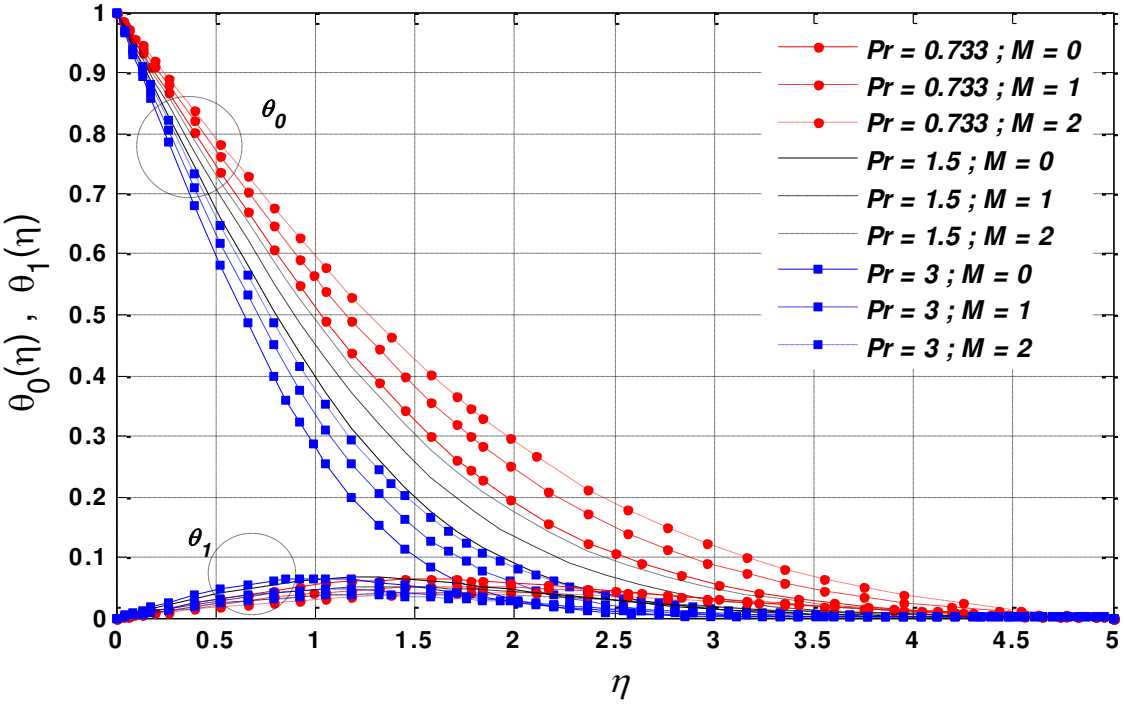


Figure V.13: Variation de profils de température avec η pour **surface isotherme** (n=0.0, Re=1, Ec=0.01)

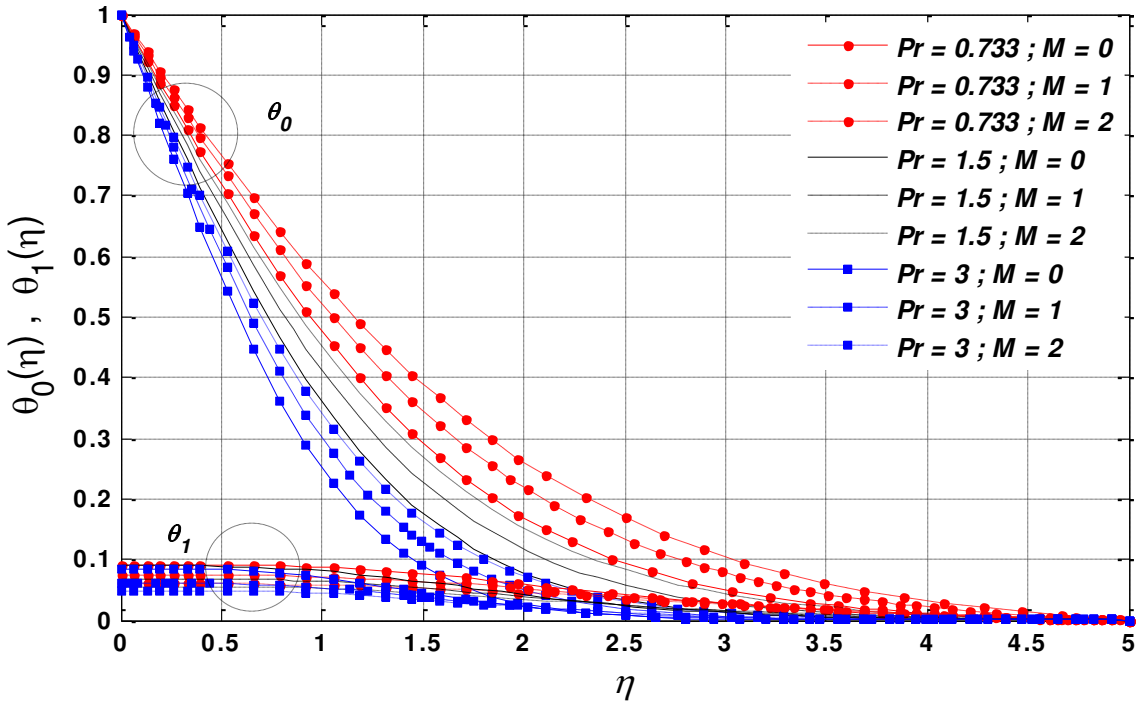


Figure V.14: Variation de profils de température avec η pour **surface de flux constant** (n=0.2, Re=1, Ec=0.01)

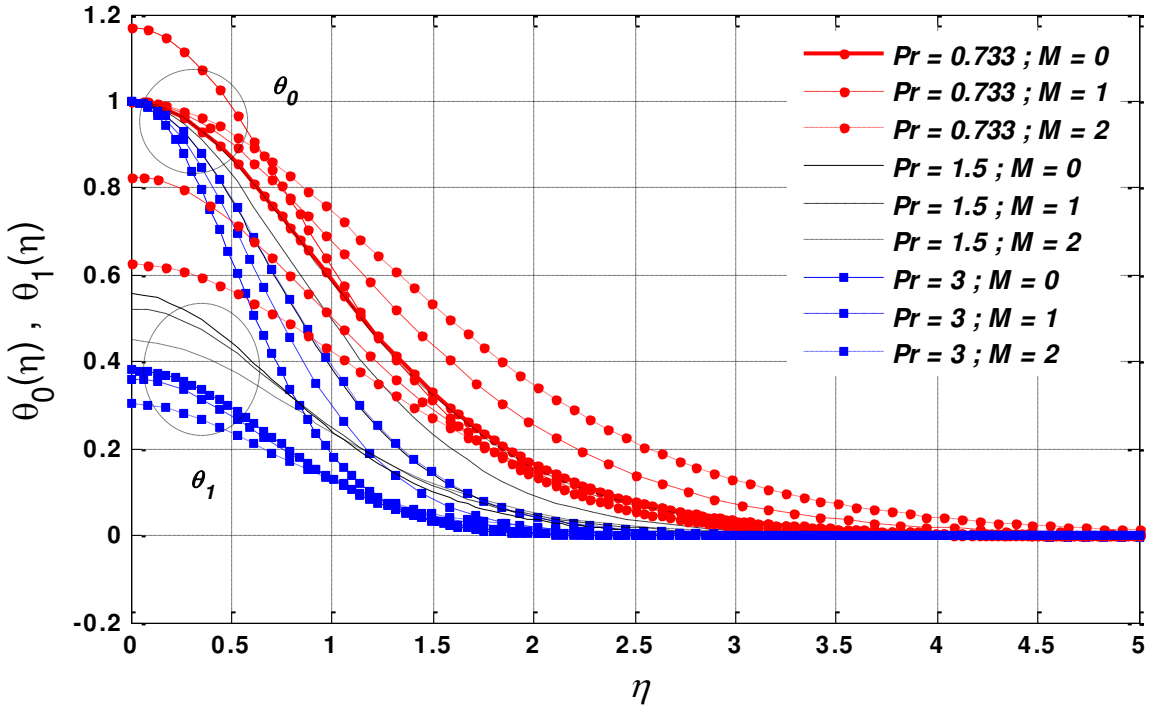


Figure V.15: Variation de profils de température avec η pour **panache plan** (n= -0.6, Re=1, Ec=0.01)

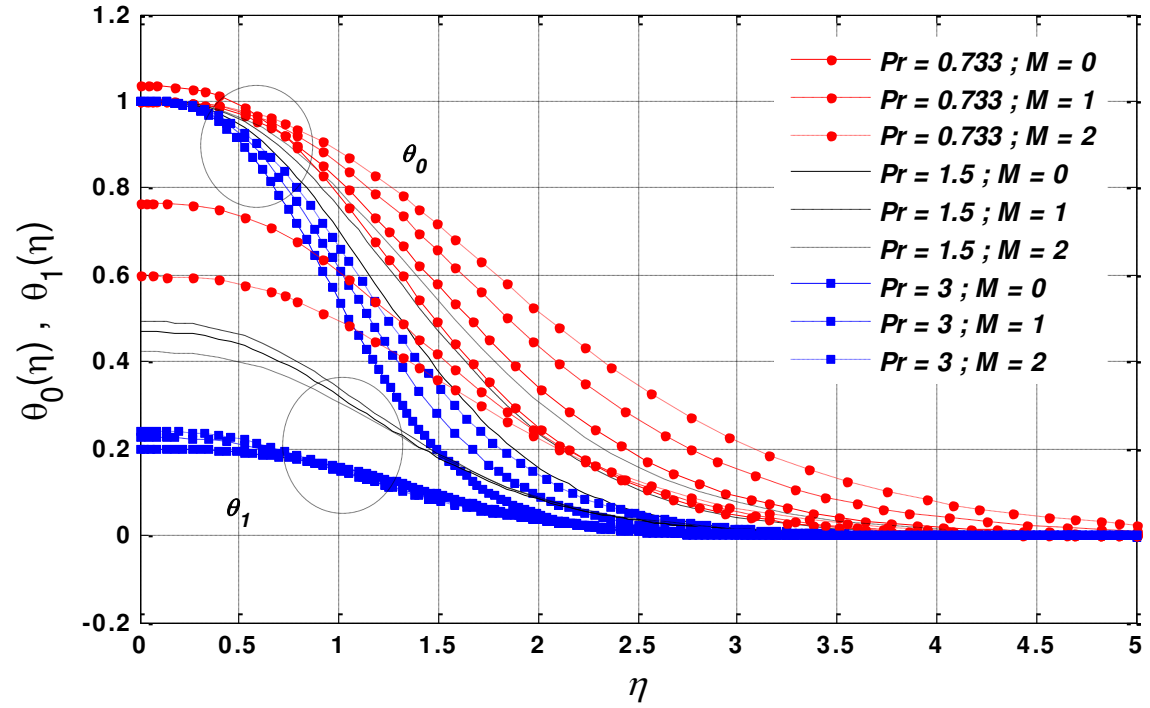


Figure V.16: Variation de profils de température avec η pour **panache mur plan** (n= -0.6, Re=1, Ec=0.01)

Les résultats numériques de la technique de perturbation suivant l'intensité du champ magnétique et le nombre de Prandtl correspondant aux valeurs indiquées de dérivation de vitesse et de température sont calculés dans les Tableaux V.6 -V.9 pour les différents cas d'écoulement.

Tableau V.6: Grandeurs déterminantes pour surface isotherme (n=0.0, Re=1, Ec=0.01)

n	M	Pr	$f_0''(0)$	$-f_1''(0)$	$-f_2''(0)$	$-\theta_0'(0)$	$\theta_1'(0)$	$\theta_2'(0)$
0.0	*0*	*0.733*	*0.6725*	*0.1321*	*0.0264*	*0.5073*	*0.0616*	*0.0178*
		1.5	*0.6003*	*0.1084*	*0.0172*	*0.6499*	*0.0780*	*0.0181*
		3	*0.5307*	*0.0895*	*0.0111*	*0.8133*	*0.0940*	*0.0172*
0.0	*1*	*0.733*	*0.5661*	*0.0855*	*0.0135*	*0.4538*	*0.0453*	*0.0105*
		1.5	*0.5148*	*0.0681*	*0.0087*	*0.5840*	*0.0553*	*0.0104*
		3	*0.4623*	*0.0534*	*0.0054*	*0.7371*	*0.0623*	*0.0094*
0.0	*2*	*0.733*	*0.4949*	*0.0593*	*0.0076*	*0.4145*	*0.0336*	*0.0065*
		1.5	*0.4578*	*0.0479*	*0.0051*	*0.5357*	*0.0417*	*0.0066*
		3	*0.4176*	*0.0379*	*0.0033*	*0.6828*	*0.0471*	*0.0061*

TableauV.7: Grandeurs déterminantes pour surface de flux constant (n=0.2, Re=1, Ec=0.01)

n	M	Pr	$f_0''(0)$	$-f_1''(0)$	$-f_2''(0)$	$-\theta_0'(0)$	$\theta_1'(0)$	$\theta_2'(0)$
0.2	*0*	*0.733*	*0.6362*	*0.0726*	*0.0207*	*0.5785*	*0*	*0*
		1.5	*0.5671*	*0.0577*	*0.0141*	*0.7380*	*0*	*0*
		3	*0.5009*	*0.0470*	*0.0095*	*0.9201*	*0*	*0*
0.2	*1*	*0.733*	*0.5416*	*0.0436*	*0.0104*	*0.5205*	*0*	*0*
		1.5	*0.4911*	*0.0337*	*0.0070*	*0.6680*	*0*	*0*
		3	*0.4401*	*0.0263*	*0.0045*	*0.8400*	*0*	*0*
0.2	*2*	*0.733*	*0.4775*	*0.0291*	*0.0058*	*0.4770*	*0*	*0*
		1.5	*0.4398*	*0.0227*	*0.0040*	*0.6162*	*0*	*0*
		3	*0.3999*	*0.0179*	*0.0027*	*0.7825*	*0*	*0*

Tableau V.8: Grandeurs déterminantes pour panache plan (n= -0.6, Re=1, Ec=0.01)

n	M	Pr	$f_0'(0)$	$-f_1'(0)$	$-f_2'(0)$	$\theta_1(0)$	$\theta_2(0)$
-0.6	*0*	*0.733*	*0.6568*	*- 0.1610*	*0.0162*	*1.1700*	*0.3230*
		1.5	*0.5863*	*0.0407*	*0.0030*	*0.5555*	*0.3164*
		3	*0.5200*	*0.0920*	*- 0.0024*	*0.3804*	*0.3024*
-0.6	*1*	*0.733*	*0.4714*	*- 0.1073*	*0.0087*	*0.8255*	*0.1706*
		1.5	*0.4232*	*-0.0167*	*0.0028*	*0.5227*	*0.1567*
		3	*0.3742*	*0.0214*	*1.0e-003 **	*0.3616*	*0.1387*
-0.6	*2*	*0.733*	*0.3507*	*- 0.0736*	*0.0048*	*0.6248*	*0.0960*
		1.5	*0.3208*	*- 0.0274*	*0.0020*	*0.4494*	*0.0878*
		3	*0.2880*	*0.0037*	*1.0e-003 **	*0.3021*	*0.0770*

Tableau V.9: Grandeurs déterminantes pour panache mur plan (n= -0.6, Re=1, Ec=0.01)

n	M	Pr	$f_0''(0)$	$-f_1''(0)$	$-f_2''(0)$	$\theta_1(0)$	$\theta_2(0)$
-0.6	*0*	*0.733*	*0.9224*	*- 0.4857*	*- 0.0433*	*1.0349*	*0.1699*
		1.5	*0.8367*	*- 0.0993*	*- 0.0378*	*0.4685*	*0.1399*
		3	*0.7520*	*0.0523*	*- 0.0292*	*0.2001*	*0.1105*
-0.6	*1*	*0.733*	*0.7361*	*- 0.3313*	*- 0.0236*	*0.7640*	*0.0963*
		1.5	*0.6824*	*- 0.1605*	*- 0.0190*	*0.4918*	*0.0764*
		3	*0.6252*	*- 0.0194*	*- 0.0136*	*0.2263*	*0.0573*
-0.6	*2*	*0.733*	*0.6160*	*- 0.2368*	*- 0.0135*	*0.5971*	*0.0585*
		1.5	*0.5829*	*- 0.1377*	*- 0.0109*	*0.4228*	*0.0473*
		3	*0.5445*	*- 0.0473*	*- 0.0079*	*0.2402*	*0.0360*

V.4 L'influence de champ magnétique *M* et le paramètre injection/aspiration *F*

Les Figures V.17, V.18, V.19, V.20 décrivent l'influence combinée de paramètre de champ magnétique M et le paramètre injection/aspiration F sur le profil de vitesse avec la variable de similarité η le long de la plaque verticale et poreuse, pour les quatre cas de flux, nous notons que la vitesse diminue avec l'augmentation de champ magnétique et augmente avec augmentation de F.

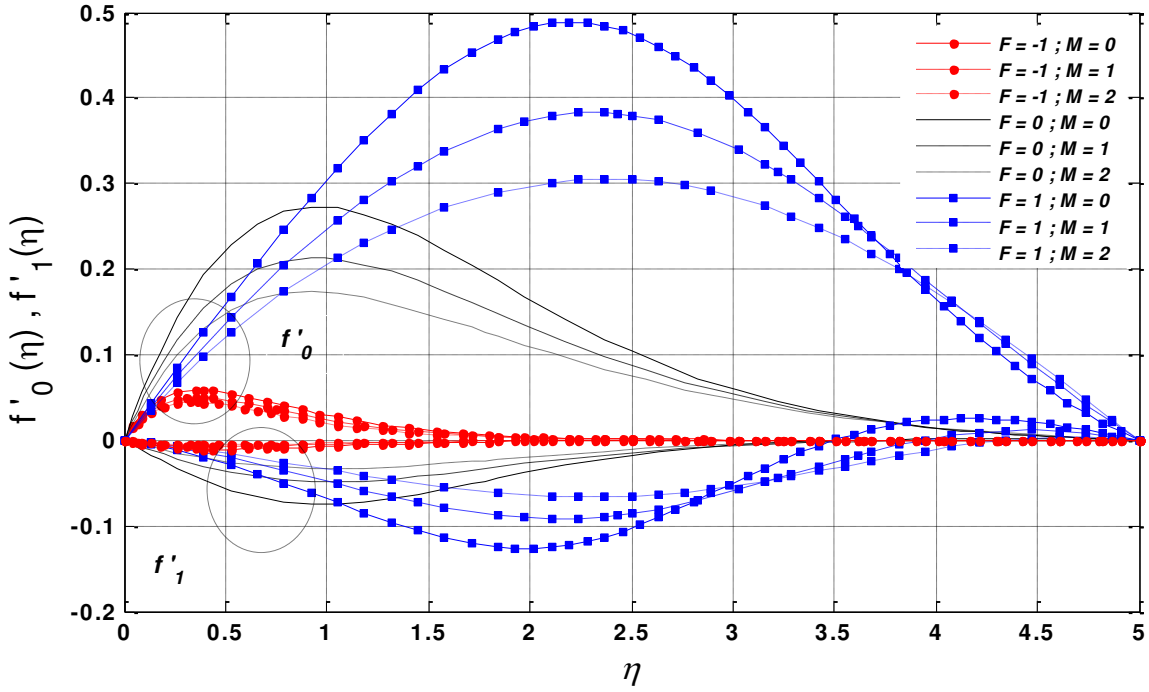


Figure V.17: Variation de profils de vitesse avec η pour **surface isotherme**

(n=0.0, Pr=0.733, Re=1, Ec=0.01)

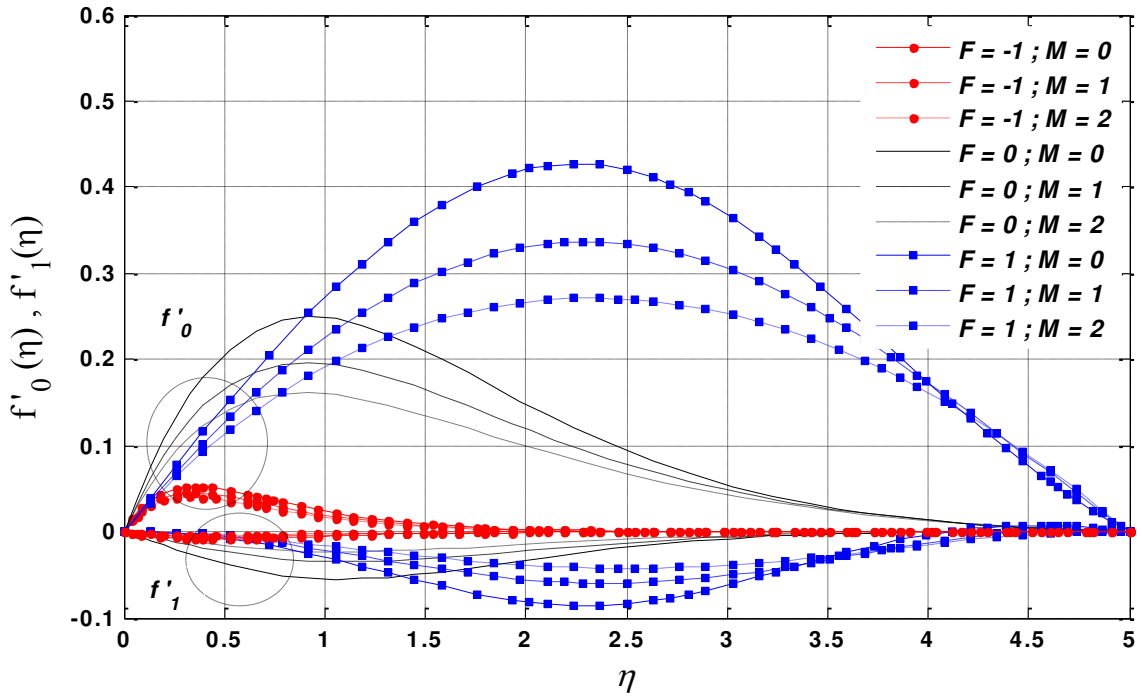


Figure V.18: Variation de profils de vitesse avec η pour **surface de flux constant**

(n=0.2, Pr=0.733, Re=1, Ec=0.01)

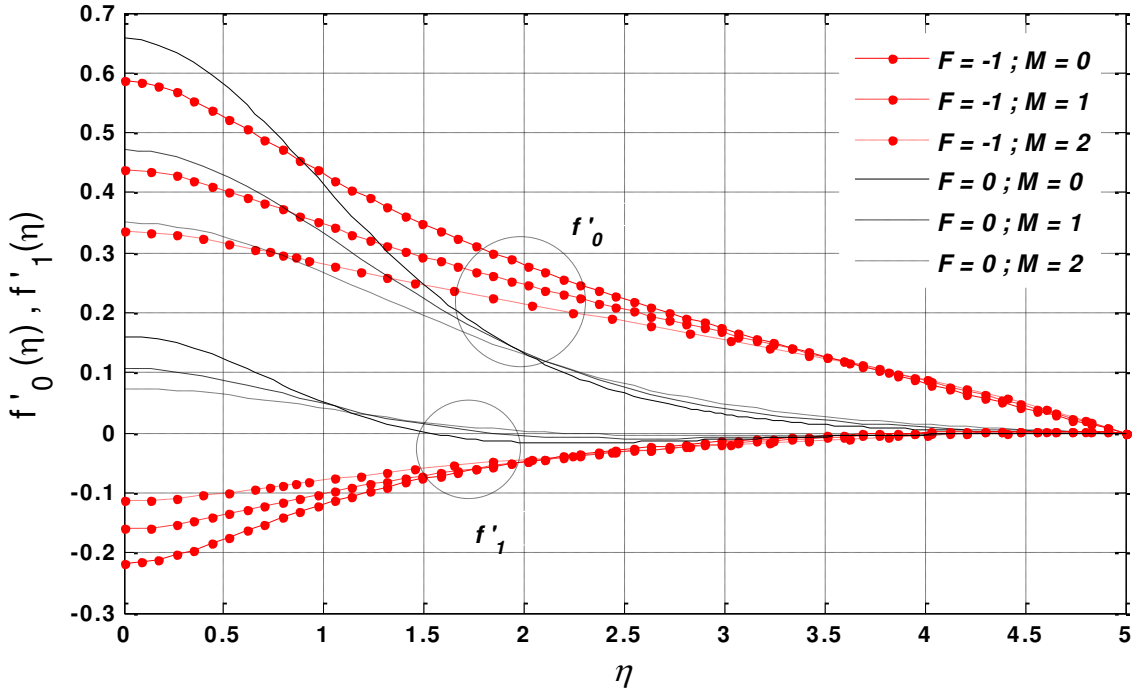


Figure V.19: Variation de profils de vitesse avec η pour **panache plan** (n= -0.6, Pr=0.733, Re=1, Ec=0.01)

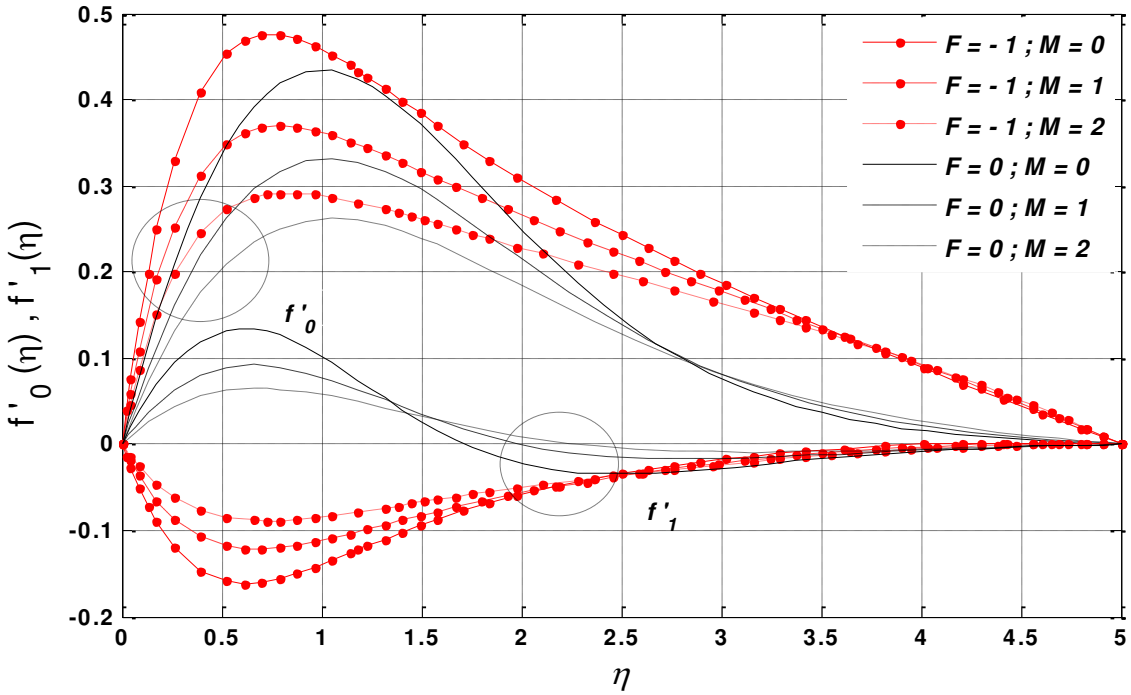


Figure V.20: Variation de profils de vitesse avec η pour **panache mur plan**

(n= -0.6, Pr=0.733, Re=1, Ec=0.01)

Globalement, l'injection ou l'aspiration du fluide permet de contrôler la couche limite mécanique jusqu'à une réduction quasi-nulle de la vitesse ou au contraire d'accélérer le fluide, ce qui se traduira nécessairement au niveau de la réduction des frottements ou au contraire l'augmentation de ces frottements.

Les Figures V.21, V.22, V.23 et V.24 montrent l'effet de paramètre *M* et *F*, on constate que les profils de température augmentent quand le paramètre de champ magnétique et le paramètre injection/aspiration augmente.

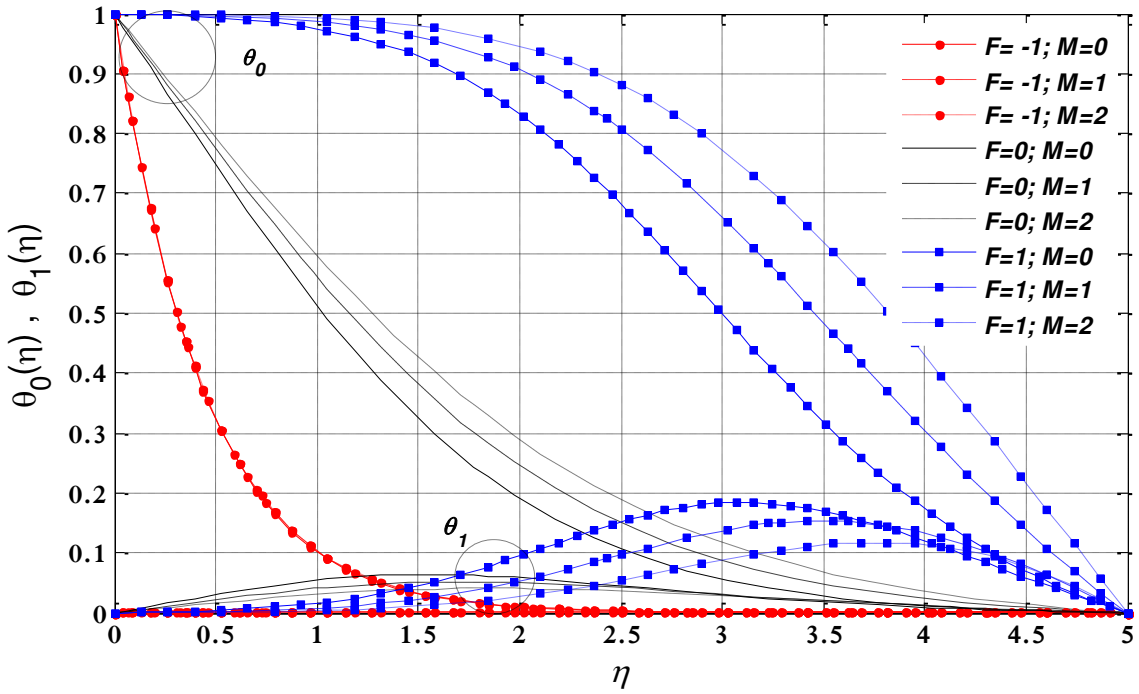


Figure V.21: Variation de profils de température avec η pour **surface isotherme**
(n=0.0, Pr=0.733, Re=1, Ec=0.01)

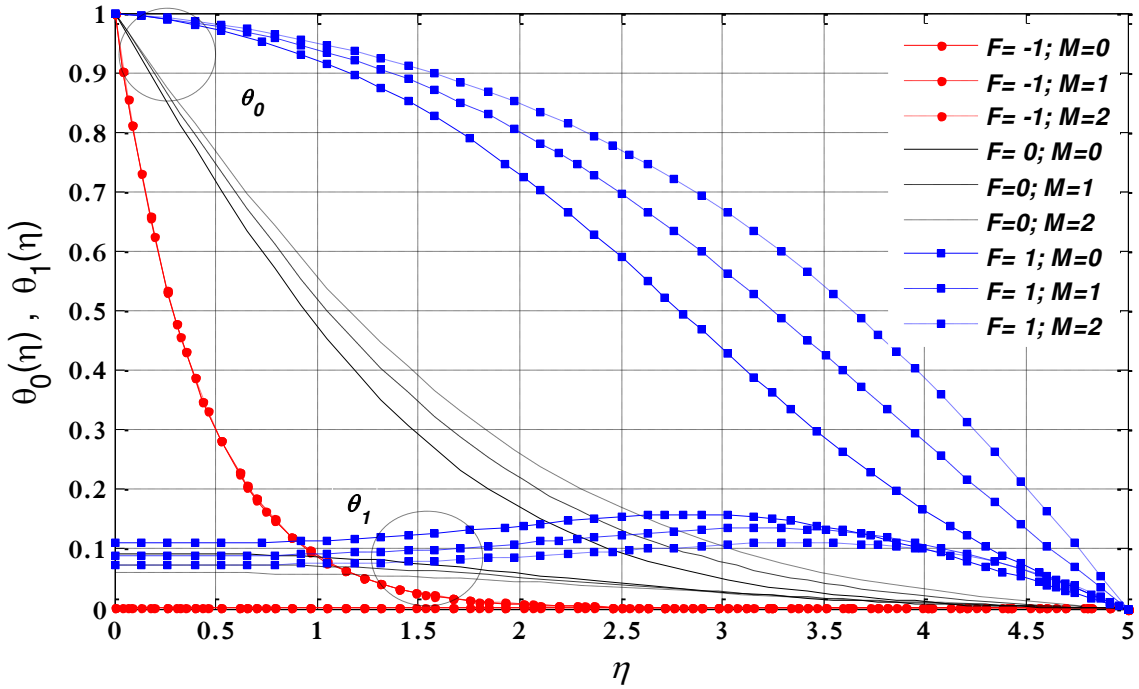


Figure V.22: Variation de profils de température avec η pour **surface de flux constant**

(n=0.2, Pr=0.733, Re=1, Ec=0.01)

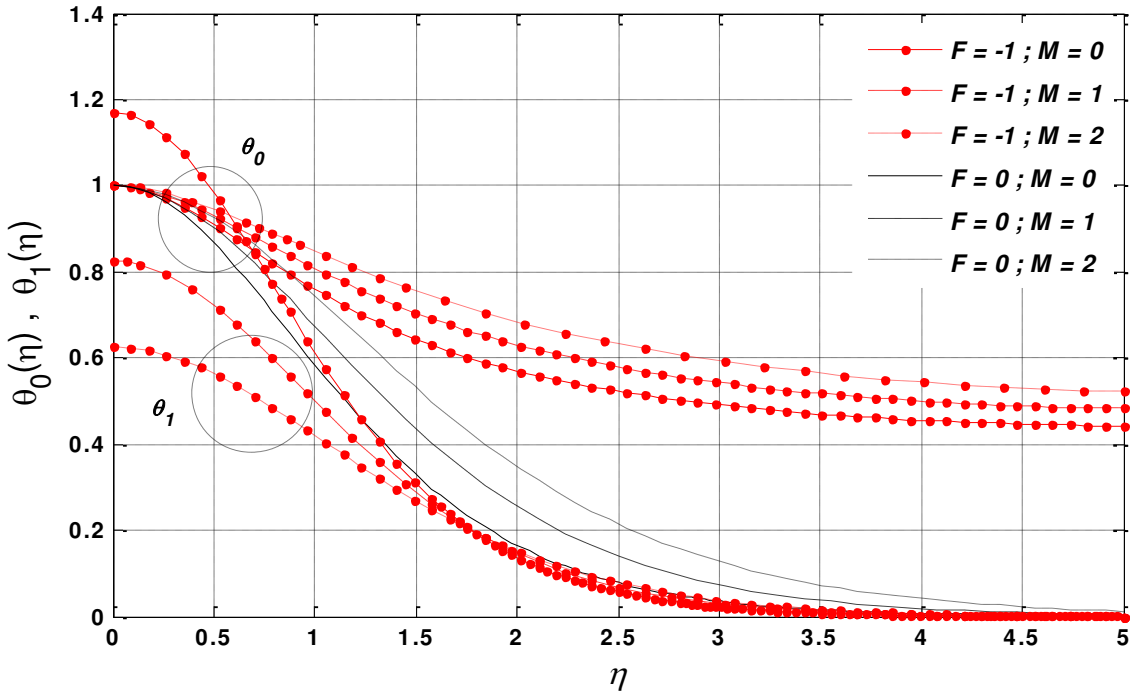


Figure V.23: Variation de profils de température avec η pour **panache plan**

(n= -0.6, Pr=0.733, Re=1, Ec=0.01)

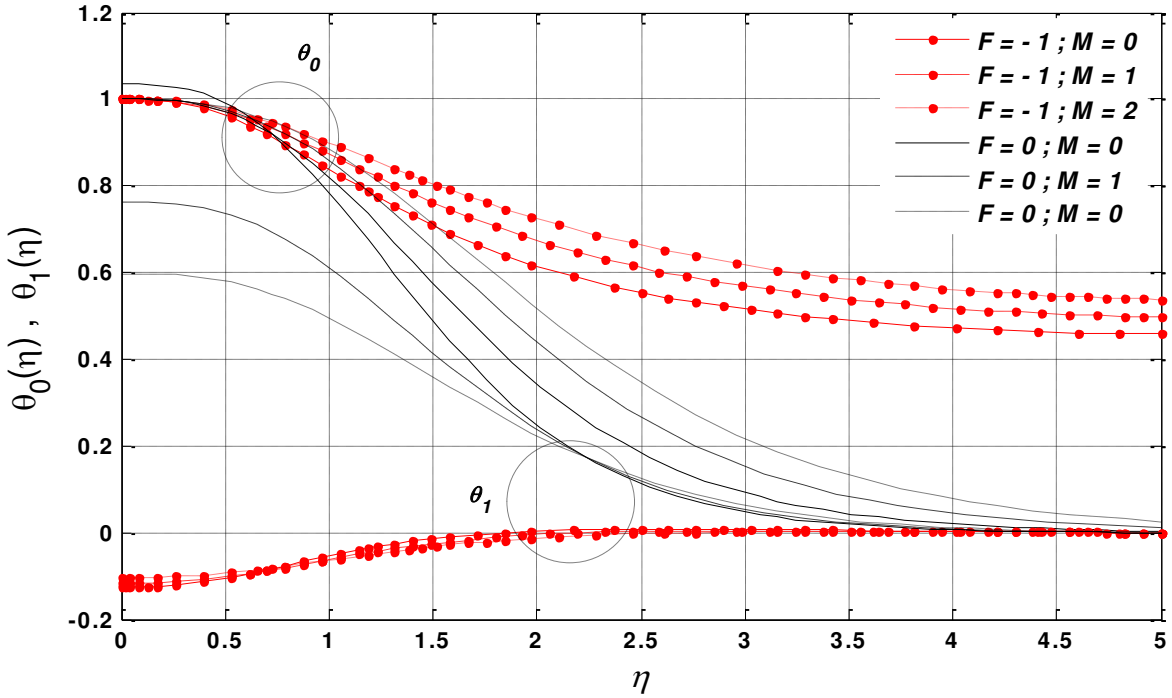


Figure V.24: Variation de profils de température avec η pour **panache mur plan**
(n= -0.6, Pr=0.733, Re=1, Ec=0.01)

Les résultats numériques de la technique de perturbation suivant l'intensité du champ magnétique et injection/aspiration correspondant aux valeurs indiquées de dérivation de vitesse et de température sont calculés dans les Tableaux V.10-V.13.

Tableau V.10: Grandeurs déterminantes pour la surface isotherme

(n =0,0, Pr = 0,733, Re = 1, Ec = 0,01)

n	M	F	$f_0''(0)$	$-f_1''(0)$	$-f_2''(0)$	$-\theta_0'(0)$	$\theta_1'(0)$	$\theta_2'(0)$
0	*0*	*-1*	*0.4281*	*0.0527*	*0.0021*	*2.2375*	*0.0065*	*1.0e-003 **
		0	*0.6725*	*0.1321*	*0.0264*	*0.5073*	*0.0616*	*0.0178*
		1	*0.3264*	*0.0315*	*0.0052*	*0.0070*	*0.0047*	*0.0043*
0	*1*	*-1*	*0.3839*	*0.0371*	*0.0013*	*2.2321*	*0.0045*	*1.0e-003 **
		0	*0.5661*	*0.0855*	*0.0135*	*0.4538*	*0.0453*	*0.0105*
		1	*0.2994*	*0.0234*	*0.0030*	*0.0035*	*0.0023*	*0.0022*
0	*2*	*-1*	*0.3517*	*0.0280*	*1.0e-003 **	*2.2282*	*0.0033*	*1.0e-003 **
		0	*0.4949*	*0.0593*	*0.0076*	*0.4145*	*0.0336*	*0.0065*
		1	*0.2788*	*0.0182*	*0.0019*	*0.0018*	*0.0011*	*0.0012*

Tableau V.11: Grandeurs déterminantes pour surface de flux constant

(n=0.2, Pr=0.733, Re=1, Ec=0.01)

n	M	F	$f_0''(0)$	$-f_1''(0)$	$-f_2''(0)$	$-\theta_0'(0)$	$\theta_1'(0)$	$\theta_2'(0)$
0.2	*0*	*-1*	*0.4035*	*0.0436*	*0.0016*	*2.3883*	*0*	*0*
		0	*0.6362*	*0.0726*	*0.0134*	*0.5785*	*0*	*0*
		1	*0.3019*	*- 0.0072*	*- 0.0052*	*0.0344*	*0.0002*	*0.0001*
0.2	*1*	*-1*	*0.3655*	*0.0317*	*0.0010*	*2.3828*	*0*	*0*
		0	*0.5416*	*0.0436*	*0.0063*	*0.5205*	*0*	*0*
		1	*0.2802*	*- 0.0053*	*- 0.0032*	*0.0282*	*0.0002*	*0.0002*
0.2	*2*	*-1*	*0.3372*	*0.0244*	*1.0e-003 **	*2.3788*	*0*	*0*
		0	*0.4775*	*0.0291*	*0.0034*	*0.4770*	*0*	*0*
		1	*0.2632*	*- 0.0037*	*- 0.0020*	*0.0239*	*0.0001*	*0.0001*

Tableau V.12: Grandeurs déterminantes pour panache plan (n= -0.6, Pr=0.733, Re=1, Ec=0.01)

n	M	Pr	$f_0''(0)$	$-f_1''(0)$	$-f_2''(0)$	$\theta_1(0)$	$\theta_2(0)$
-0.6	*0*	*-1*	*0.5871*	*0.2178*	*0.0731*		*0.0558*
		0	*0.6568*	*- 0.1610*	*0.0162*	*1.1700*	*0.3230*
		1					
-0.6	*1*	*-1*	*0.4394*	*0.1603*	*0.0403*		*0.0360*
		0	*0.4714*	*- 0.1073*	*0.0087*	*0.8255*	*0.1706*
		1					
-0.6	*2*	*-1*	*0.3365*	*0.1133*	*0.0219*		*0.0226*
		0	*0.3507*	*- 0.0736*	*0.0048*	*0.6248*	*0.0960*
		1					

Tableau V.13: Grandeurs déterminantes pour panache mur plan (n= -0.6, Pr=0.733, Re=1, Ec=0.01)

n	M	F	$f_0'(0)$	$-f_1'(0)$	$-f_2'(0)$	$\theta_1(0)$	$\theta_2(0)$
-0.6	*0*	*-1*	*0.5871*	*0.2178*	*0.0731*		*0.0558*
		0	*0.6568*	*- 0.1610*	*0.0162*	*1.1700*	*0.3230*
		1					
-0.6	*1*	*-1*	*0.4394*	*0.1603*	*0.0403*		*0.0360*
		0	*0.4714*	*- 0.1073*	*0.0087*	*0.8255*	*0.1706*
		1					
-0.6	*2*	*-1*	*0.3365*	*0.1133*	*0.0219*		*0.0226*
		0	*0.3507*	*- 0.0736*	*0.0048*	*0.6248*	*0.0960*
		1					

V.5 Conclusion

L'effet de magnétohydrodynamique de convection naturelle devant une plaque verticale poreuse dans un milieu poreux saturé de fluide incompressible avec un effet injection/aspiration est étudié. La vitesse et la température sont observées et sont régis par des interactions complexes entre le paramètre de champ magnétique M, le nombre de Reynolds Re, le nombre de Prandtl Pr, le paramètre injection/aspiration F. Nos résultats ont montré que:

- Le paramètre de champ magnétique réduit la vitesse et augmente les champs de température.
- Lorsque le nombre de Reynolds de référence augmente, la vitesse diminue et la température augmente.
- Une augmentation du nombre de Prandtl Pr diminue la vitesse et la température.
- La vitesse et la température augmentent avec l'augmentation de paramètre injection/aspiration F.

  Ces paramètres constituent donc une panoplie d'outils diversifiés- en interne et externe- à la disposition de l'utilisateur pour contrôler à bon escient les différentes couches limites mécanique et thermique et aboutir à une optimisation des échanges thermiques, dans le cas des écoulements complexes en milieu poreux considéré originalement comme élément perturbateur à l'écoulement.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Dans cette thèse, nous avons présenté une étude de flux de la couche limite lors de la convection naturelle d'un fluide saturé dans un milieu poreux Darcéen-Fochheimer en présence d'un champ magnétique (MHD), sur une plaque verticale avec effet injection/aspiration.

En premier lieu, les notions de base sur la convection naturelle, les milieux poreux, ainsi que sur magnétohydrodynamique ont été rapportées brièvement. En second lieu et en se basant sur le modèle Brinkman- Forchheimer pour décrire le comportement structurel du milieu poreux en présence de l'intensité du champ magnétique.

Nous avons développé des modèles mathématiques appropriés décrivant le phénomène de la convection naturelle et magnétohydrodynamique en milieu poreux. Pour résoudre numériquement les équations régissant le mouvement on a choisi une méthode basée sur la technique des différences finies pour la solution du système BVP (Boundary value problem) déduit. Cette approche nous a permis de cerner les effets de différents paramètres sur la structure des couches limites et de les distinguer en rapport aux effets combinés sollicités.

Les paramètres de contrôle du problème sont : paramètre de champ magnétique M, le nombre de Reynolds Re, le nombre de Prandtl Pr et paramètre injection /aspiration F.

D'après cette étude, on peut présenter les conclusions suivantes :

- L'effet du paramètre magnétique M réduit le profil de vitesse et augmente les champs de température.
- Le nombre de Reynolds diminue la vitesse et augmente la température.
- Le nombre de Prandtl Pr réduit la vitesse et les champs de température.
- L'effet du paramètre injection/aspiration F augmente la vitesse et la température.

Il serait également intéressant d'étudier les autres effets qui sont rencontrés dans les milieux poreux lors de l'écoulement de fluide en présence de la convection massique.

REFERENCES

BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] Hakan F. Oztop, Khaled Al-Salem, Yasin Varol and Ioan Pop, Natural convection heat transfer in a partially opened cavity filled with porous media, Internat. J. Heat Mass Transf. 54 (2011), 2253-2261.

[2] M. M. Khader and Ahmed M. Megahed, A numerical simulation using finite difference method with the theoretical study for the problem of the flow and heat transfer over an unsteady stretching sheet embedded in a porous medium in the presence of a thermal radiation, J. King Saud University – Engrg. Sci. 25 (2013), 29-34.

[3] J. C. Umavathi, Free convective flow in a vertical rectangular duct filled with porous matrix for viscosity and conductivity variable properties, Internat. J. Heat Mass Transf. 81 (2015), 383-403.

[4] C. Revnic, T. Grosan, I. Pop and D. B. Ingham, Magnetic field effect on the unsteady free convection flow in a square cavity filled with a porous medium with a constant heat generation, Internat. J. Heat Mass Transf. 54 (2011), 1734-1742.

[5] Rajesh Sharma, Effect of viscous dissipation and heat source on unsteady boundary layer flow and heat transfer past a stretching surface embedded in a porous medium using element free Galleria method, Appl. Math. Comput. 219 (2012), 976-987.

[6] A. Afify, Effects of variable viscosity on non-Darcy MHD free convection along a non-isothermal vertical surface in a thermally stratified porous medium, Appl.Math. Model. 31 (2007), 1621-1634.

[7] O. Anwar Bég, Joaquín Zueco, R. Bhargavac and H. S. Takhar, Magnetohydrodynamic convection flow from a sphere to a non-Darcian porous medium with heat generation or absorption effects, Internat. J. Thermal Sci. 48(2009), 913-921.

[8] R. C. Chaudhary and Arpita Jain, An exact solution of magnetohydrodynamic convection flow past an accelerated surface embedded in a porous medium, Internat. J. Heat Mass Transf. 53 (2010), 1609-1611.

[9] Rajesh Sharma, R. Bhargava and I. V. Singh, Combined effect of magnetic field and heat absorption on unsteady free convection and heat transfer flow in a micropolar fluid past a semi-infinite moving plate with viscous dissipation using element free Galerkin method, Appl. Math. Comput. 217 (2010), 308-321.

[10] Nield, D., Bejan, A., "convection in porous media", 3rd Third Edition, Springer, 2006.

[11] Bories, S., Mojtabi, A., Prat, M., Quintard, M., "Transferts de chaleur dans les milieux poreux", Techniques de L'Ingénieur, BE 8250, (2008).

[12] Danquigny, C., "étude expérimentale du transfert de masse en milieu poreux hétérogène",thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, (2003).

[13] Nicolas, M.,"Ecoulements dans les milieux poreux", Cours, Université de Provence, Marseille (2003).

[14] Joseph, D. D., Nield, D. A., Papanicolaou, G.," Nonlinear equation governing flow in a saturated porous medium", Water Resources Research, 18 pp. 1049–1052(1982).

[15]P. M. Knupp and J. L. Lage, Generalization of the Forchheimer-extended Darcy flow model to the tensor permeability case via a variational principle, J. Fluid Mech. 299, 97–104. (1995)

[16] WARD, J. C. Turbulent flow in porous media. J. Hydraul. Div.Am.Soc.Civ.Eng, 90 (HY5), 1-12. (1964)

[17] Lundgren, T. S.,"Slow flow through stationary random beds and suspensions of spheres", Journal of Fluid Mechanics, 51 pp. 273–299 (1972).

[18] Martys, N., Bentz, D. P. and Garboczi, E. J.,"Computer simulation study of the effective viscosity in Brinkman equation", Physics of Fluids, 6 pp. 1434–1439 (1994).

[19] Manole, D. M., Lage, J. L.,"The inertial effect on the natural convection flow within a fluid saturated porous medium", International Journal of Heat Fluid Flow, 14 pp. 76–384 (1993).

[20] Vafai, K., Tien, C.L.,"Boundary and inertia effects on flow and heat transfer in porous media", International Journal of Heat Transfer, 24, 195–203 (1981).

[21] Nield, D. A.,"Estimation of the stagnant thermal conductivity of saturated porous media", Int. J. Heat Mass Transfer, 34, 1575–1576 (1991).

[22] Prasad, V., Kladias, N., Bandyopadhaya, A., Tian, Q. "Evaluation of correlations for stagnant thermal conductivity of liquid-saturated porous beds of spheres", International Journal of Heat and Mass Transfer, 32, 1793–1796 (1989).

[23] Ene, H. J., Sanchez-Palencia, E.,"On thermal equation for flow in porous media", International Journal of Engineering Sciences, 20, 623–630 (1982).

[24] Polyaev, V. M., Mozhaev, A. P., Galitseysky, B. A., Lozhkin, A. L.,"A study of internal heat transfer in non-uniform porous structures", Experimental Thermal and Fluid Science, 12, 426–432 (1996).

[25] Padet, J., "Principes des transferts convectifs", 1st edition, polytechenica, (1997).

[26] Bergman, T. L., Lavine, A. S., Incropera, F. P., Dewitt, D. P., "Fundamentals of Heat and Mass Transfer", 7th edition, John Wiley & Sons, (2011)

[27] Padet, J.,"Fluides en écoulement: Méthodes et Modèles", 1stÉdition Masson, (1991).

[28] Sacadura, J. F., "Initiation aux transferts thermiques", 6thÉdition, Technique & Documentation (2000).

[29] Ostrach, S., "An Analysis of Laminar Free Convection Flow and Heat Transfer about a Flat Plate Parallel to the Direction of the Generating Body Force", National Advisory Committe for Aeronautics, Report 1111, (1953).

[30] Ben Amara, S.,"Ecoulements et transferts thermiques en convection naturelle dans les milieux macro-poreux alimentaires", thèse de doctorat, Institut National Agronomique, Paris-Grignon, (2005).

[31] Cheng, P., "Natural convection in a porous medium: external flows. Natural Convection: Fundamentals and Applications", 1stedition, Hemisphere, Washington, DC, pp. 475–513 (1985).

[32] Pop, I., Ingham, D. B., "Convective boundary layers in porous media: external flows", Handbook of Porous Media (K. Vafai, ed.), Marcel Dekker, New York., pp.313–356 (2000).

[33] Pop, I., Ingham, D. B., "Convection Heat Transfer: Mathematical and Computational Modelling of Viscous Fluids and Porous Media", Elsevier, Oxford; (2001).

[34] Pop, I., "Some boundary-layer problems in convective flows. In Emerging Technologies and Techniques in Porous Media", Kluwer Academic, Dordrecht, pp. 65–91(2004).

[35] Buongiorno, J. "Convective Transport in Nanofluids", Journal of heat transfer, 128 pp. 240–250 (2006).

[36] Jean-Loup Delcroix, Abraham Bers, ”Physique des plasmas ”. Edition : EDP Sciences, France (1994).

[37] Christophe TROPHIME, Modélisation numérique du couplage Magnétohydrodynamique (M.H.D.) fort, Thèse de grade Docteur en énergétique physique de l’institut de polytechnique de Grenoble, France, hal.archives,tel-01340645. (1995)

[38] El Gallaf, A., "Etude de la dynamique non-linéaire des écoulements chauffes et soumis à des champs magnétiques", thèse, Ecole Centrale de Lyon, juillet 2010.

[39] Moreau, R., "Écoulement d’un métal liquide en présence d’un champ magnétique", technique de l'Ingénieur, D 2950, (1992).

[40] Berhanu, M., "Turbulent magnetohydrodynamics in liquid metals", thèse, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, French (2008).

[41] Lister, D. H., "Corrosion Products in Power Generating Systems", Atomic Energy of Canada Limited, 6877, pp.1-65 (1980).

[42] Irfan Anjum Badruddin, Z. A. Zainal, Zahid A. Khan and Zulquernain Mallick, Effect of viscous dissipation and radiation on natural convection in a porous medium embedded within vertical annulus, Internat. J. Thermal Sci. 46 (2007), 221-227.

[43] A. Taklifi, C. Aghanajafi and H. Akrami, The effect of MHD on a Porous fin attached to a vertical isothermal surface, Transp. Porous. Med. 85 (2010), 215-231.

[44] M. A. El-Hakiem, MHD oscillatory flow on free convection-radiation through a porous medium with constant suction velocity, J. Magnetism and Magnetic Materials 220 (2000), 271-276.576 .

[45] M. A. Mansour and N. A. El-Shaer, Effect of magnetic field on non-Darcy axisymmetric free convection in a power-law fluid saturated porous medium with variable permeability, J. Magnetism and Magnetic Materials 250 (2002), 57-64.

[46] Navin Kumar and Sandeep Gupta, MHD free-convective flow of micropolar and Newtonian fluids through porous medium in a vertical channel, Meccanica 47 (2012), 277 291.

[47] Mohammed Gueddaa and Abdellatif Ouahsine, Similarity solutions of MHD flow in a saturated porous medium, Eur. J. Mech. B Fluids 33 (2012), 87-94.

[48] B. Pekmen and M. Tezer-Sezgin, DRBEM solution of free convection in porous enclosures under the effect of a magnetic field, Internat. J. Heat Mass Transf. 56(2013), 454-468.

[49] Sameh E. Ahmed, Ahmed Kadhim Hussein, H. A. Mohammed, I. K. Adegun,Xiaohui Zhang, Lioua Kolsi, Arman Hasanpour and S. Sivasankaran, Viscous dissipation and radiation effects on MHD natural convection in a square enclosure filled with a porous medium, Nuclear Engineering and Design 266 (2014), 34-42.

[50] M. S. Dada and A. B. Disu, Heat transfer with radiation and temperature dependent heat source in MHD free convection flow in a porous medium between two vertical wavy walls, J. Nigerian Math. Soc. 34 (2015), 200-215.

[51] Ajay Kumar Singh, Rajiv Kumar, Usha Singh, N. P. Singh and Atul Kumar Singh,Unsteady hydromagnetic convective flow in a vertical channel using Darcy Brinkman-Forchheimer extended model with heat generation/absorption: Analysis with asymmetric heating/cooling of the channel walls, Internat. J. Heat MassTransf. 54 (2011), 5633-5642.

[52] Gilbert Makanda, Sachin Shaw and Precious Sibanda, Effects of radiation on MHD free convection of a Casson fluid from a horizontal circular cylinder with partial slip in non-Darcy porous medium with viscous dissipation, Bound Value Probl. 2015 (2015), 1-14.

[53] Asma Khalid, Ilyas Khan, Arshad Khan and Sharidan Shafie, Unsteady MHD free convection flow of Casson fluid past over an oscillating vertical plate embedded in a porous medium, Engineering Science and Technology, an International Journal 18 (2015), 309-317.

[54] R. Kandasamy, I. Muhaimin, N. Siva Ram and K. K. Sivagnana Prabhu, Thermal stratification effects on Hiemenz flow of nanofluid over a porous wedge sheet in the presence of suction/injection, Transp. Porous. Med. 94 (2012), 399-416.

[55] Haliza Rosali, Anuar Ishak and Ioan Pop, Micropolar fluid flow towards a stretching/shrinking sheet in a porous medium with suction, Internat. Commun. Heat Mass Transf. 39 (2012), 826-829.

[56] N. Siva Raman, K. K. Sivagnana Prabhu and R. Kandasamy, Heat transfer effects on Hiemenz flow of nanofluid over a porous wedge sheet in the presence of suction/injection, J. Engrg. Thermophysics 23 (2014), 66-78.

[57] Susanta Maity, Thermocapillary flow of thin liquid film over a porous stretching sheet in presence of suction/injection, Internat. J. Heat Mass Transf. 70 (2014),819-826.

[58] Youn J. Kim, Unsteady MHD convective heat transfer past a semi-infinite vertical porous moving plate with variable suction, Internat. J. Engrg. Sci. 38 (2000),833-845.

[59] C. Israel-Cookey, A. Ogulu and V. B. Omubo-Pepple, Influence of viscous dissipation and radiation on unsteady MHD free-convection flow past an infinite heated vertical plate in a porous medium with time-dependent suction, Internat. J.Heat Mass Transf. 46 (2003), 2305-2311.

[60] T. Grosan, C. Revnic, I. Pop and D. B. Ingham, Magnetic field and internal heat generation effects on the free convection in a rectangular cavity filled with a porous medium, Internat. J. Heat Mass Transf. 52 (2009), 1525-1533.

[61] S. Mukhopadhyay, Unsteady boundary layer flow and heat transfer past a porous stretching sheet in presence of variable viscosity and thermal diffusivity, Internat.J. Heat Mass Transf. 52 (2009), 5213-5217.578.

[62] Krishnendu Bhattacharyya and G. C. Layek, Magneto hydrodynamic slip flow and diffusion of a reactive solute past a permeable flat plate with suction/injection, Front. Chem. Sci. Eng. 5 (2011), 471-476.

[63] Alireza Taklifi and Cyrus Aghanajafi, MHD non-Darcian flow through a non-isothermal vertical surface embedded in a porous medium with radiation, Meccanica 47 (2012), 929-937.

[64] V. Ravikumar, M. C. Raju and G. S. S. Raju, Combined effects of heat absorption and MHD on convective Rivlin-Ericksen flow past a semi-infinite vertical porous plate with variable temperature and suction, Ain Shams Engrg. J. 5 (2014),867-875.

[65] M. A. Mansour and N. A. El-Shaer, Radiative effects on magnetohydrodynamic natural convection flows saturated in porous media, J. Magnetism and Magnetic Materials 237 (2001), 327-341.