République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique
Université Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Par

Hachemane Nassima

Solutions distributionnelles de l'équation de Burgers de dimension une.

Soutenu publiquement le 23 juin 2024, devant le jury composé de

Mohamed KRIMI	Univ. Médéa	Président
Mohamed BENCHAA	Univ. Médéa	Encadreur
Mohamed ALIANE	Univ. Médéa	Examinateur

Année universitaire 2023/2024

Remerciement

Tout d'abord, je voudrais remercier **Allah**, tout puissant, qui m'a donné la force de mener à bien ce travail.

Je remercie tout particulièrement Monsieur **M. BENCHAA**, qui a dirigé ce travail. Son enthousiasme, sa bienveillance et sa compétence m'a conduit bien plus loin que je n'aurais pu l'imaginer. J'ai énormément appris auprès de lui et je tiens à lui faire part de toute ma gratitude.

Mes remerciements vont également à Monsieur **M. KRIMI**, président du jury qui a accepté de relire ce travail.

Je remercie vivement Monsieur **M. ALIANE**, qui m'a fait honneur en acceptant d'examiner et de juger ce travail.

Je souhaite aussi remercier tous les enseignants du département de mathématiques et informatique de la faculté des sciences de l'université Yahia Farès Médéa.

Je remercie également ma famille, surtout mes parents qui m'ont soutenu tout au long de mon parcours.

Je tiens énormément à remercier mes amis et mes camarades de promotion pour leur soutien pendant toute la période de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

À mon père, à celui qui m'a appris que le monde est un combat et que son arme est la connaissance. À celle qui n'a rien épargné pour mon confort et ma réussite. À la source de sécurité où je puise ma force. .

À ma mère, la source de tendresse et la lumière qui guide mes route et qui m'emmène aux chemins de la réussite, pour tous ses sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie.

À ma chère sœur **Yousra**, et mon chère frère **Abd kader**.

À mon mari, et ma belle-famille.

À toutes mes amies sans exception.

Résumé

L'équation de Burgers est une équation aux dérivées partielles (EDP) non linéaire qui apparaît dans divers domaines de la physique et des mathématiques appliquées, tels que la dynamique des fluides et la théorie des ondes de choc. Les solutions à cette équation peuvent être traitées de différentes manières, notamment en termes de solutions classiques et de solutions distributionnelles (ou faibles).

L'équation de Burgers en une dimension est donnée par :

$$u_t + u\,u_x = \nu u_{xx}.$$

Une solution classique de l'équation de Burgers est une fonction $u(x,t)$ qui est continûment différentiable en x et t et qui satisfait l'équation en chaque point du domaine considéré. Cela signifie que u doit posséder des dérivées partielles continues d'ordre suffisant pour que tous les termes de l'équation aient un sens.

Une solution faible de l'équation de Burgers est une fonction $u(x,t)$ qui satisfait l'équation en un sens intégral. C'est-à-dire que pour toute fonction test $\phi(x,t)$ qui est suffisamment régulière et à support compact.

Abstract

The Burgers' equation is a nonlinear partial differential equation (PDE) that appears in various fields of physics and applied mathematics, such as fluid dynamics and shock wave theory. Solutions to this equation can be approached in different ways, particularly in terms of classical solutions and distributional (or weak) solutions.

The one-dimensional Burgers' equation is given by :

$$u_t + u\,u_x = \nu u_{xx}.$$

A classical solution to the Burgers' equation is a function $u(x,t)$ that is continuously differentiable in x and t and that satisfies the equation at every point in the considered domain. This means that u must possess continuous partial derivatives of sufficient order for all the terms in the equation to make sense.

A weak solution to the Burgers' equation is a function $u(x,t)$ that satisfies the equation in an integral sense. That is, for any test function $\phi(x,t)$ that is sufficiently regular and has compact support.

Notations

u_x	La dérivée partielle de la fonction f par rapport $\grave{a}$ la variable x
u_{xx}	La dérivée partielle seconde de la fonction f par rapport $\grave{a}$ la variable x
Ω	un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$
$\partial\Omega$	frontière topologique de Ω
$x=(x_1,\cdots,x_N)$	point générique de $\mathbb{R}^N$
$dx=dx_1dx_2\cdots dx_N$	mesure de Lebesgue sur Ω
$Q=\Omega\times]0,T[$	variable du temps, $T>0$
$\Sigma=\partial\Omega\times]0,T[$	
$\overline{\Omega}$	l'adhérence de l'ensemble Ω
$\rightharpoonup$	la convergence faible
p.p.	presque partout
V	espace de Banach
H	espace de Hilbert
V'	le dual topologique de V
$\langle .,. \rangle_{V'\times V}$	le crochet de dualité entre l'espace V et son dual topologique V'
$\|.\|$	la norme sur l'espace de Banach V
$(.,.)$	le produit scalaire sur l'espace de Hilbert H
$\|.\|$	la norme sur l'espace de Hilbert H
$\mathbb{R}^{m\times N}$	l'espace des matrices réelles.
Id	désigne la matrice d'identité.
$\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$	l'espace des fonctions continues
$L^p(\Omega)$	espace de Lebesgue
$\mathscr{D}(\Omega)=\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$	espace des fonctions différentiables et à support

	compact dans Ω
	compact dans Q
	différentiables dans Ω, Q
$\mathscr{D}'(\Omega) = (\mathscr{D}(\Omega))'$	l'espace des distributions
$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \quad \nabla u \in L^p(\Omega)\}$	un espace de Sobolev, $1 \leq p \leq \infty$
$W_0^{1,p}(\Omega)$	la fermeture de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$
$W^{-1,p'}(\Omega)$	le dual topologique de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ $\quad (\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$
$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$	un espace de Sobolev
$\mathscr{C}([0,T];V)$	espace des fonctions continues à valeurs dans l'espace de Banach V
$\mathscr{D}([0,T];V)$	espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact et à valeurs dans V.
$\mathscr{D}(\Omega)$	espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact

TABLE DES MATIÈRES

Résumé iii

Abstract iv

Notations v

Introduction 2

1 Équations de Burgers est ses applications 5
1.1 Un modèle de trafic : 5
1.2 Équations de coagulation : 10

2 Préliminaires 11
2.1 Rappels sur Distributions 11
2.2 Rappel sur la transformation de Fourier : 15

3 Solution classique 16
3.1 Cas 1 :($\nu = 0$) 16
3.2 Cas 2 :($\nu \neq 0$) 18

4 Solutions distributionnelles (solution faible) 21
4.1 La solution de l'équation de Burgers avec une viscosité non nulle 21
4.2 Vitesse du choc 23
4.3 Caractéristiques de l'équation de Burgers 24
4.4 solution faible 25

Introduction

L'équation de Burgers, une équation aux dérivées partielles, occupe une place prépondérante dans plusieurs branches de la physique appliquée, notamment la mécanique des fluides, la théorie des ondes et la dynamique des gaz. Son origine remonte au début du 20 siècle.

La première formulation de l'équation de Burgers est attribuée au mathématicien britannique Harry Bateman en 1915. Il l'a développée comme un cas spécifique de l'équation de la chaleur non linéaire, en introduisant une certaine non-linéarité dans l'équation.

Le physicien néerlandais Johannes Martinus Burgers a approfondi l'étude de cette équation en 1948. Il a proposé une version plus généralisée décrivant le mouvement d'un fluide visqueux incompressible, désormais connue sous le nom d'équation de Burgers.

Depuis les travaux de Bateman et Burgers, l'équation de Burgers a fait l'objet d'une analyse approfondie de la part des mathématiciens et des physiciens. Elle est devenue un outil essentiel pour appréhender les phénomènes non linéaires dans les milieux fluides, les ondes et les gaz, ainsi qu'un modèle fondamental pour étudier des phénomènes complexes tels que la formation de chocs et la turbulence.

Aujourd'hui, l'équation de Burgers est largement utilisée dans divers domaines, allant de la météorologie à l'ingénierie aérospatiale en passant par la modélisation des écoulements sanguins. Elle trouve également des applications en mathématiques appliquées, en particulier dans le domaine des équations aux dérivées partielles non linéaires.

En résumé, l'équation de Burgers possède une histoire riche et variée, et demeure un sujet de recherche actif dans de nombreux domaines de la science et de l'ingénierie.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier les solutions distributionnelles de l'équation de Burgers alors :

L'équation de Burgers est une équation aux dérivées partielles (EDP) non linéaire qui apparaît dans divers domaines de la physique, comme la mécanique des fluides, l'acoustique non linéaire et la théorie des ondes de choc. Elle est souvent utilisée comme modèle simplifié pour étudier les phénomènes de turbulence et de formation de chocs. L'équation de Burgers est donnée par :

$$u_t + u\,u_x = \nu u_{xx}$$

$u(t,x)$ est la fonction inconnue de temps t et de l'espace x, et ν est le coefficient de viscosité.

•Solutions Distributionnelles :

Les solutions distributionnelles ou solutions faibles d'une EDP sont des solutions définies dans le cadre des distributions (ou des fonctions généralisées), ce qui permet d'étendre la notion de solution à des fonctions qui ne sont pas nécessairement différentiables au sens classique. Pour l'équation de Burgers, cela permet de traiter des solutions qui peuvent contenir des discontinuités, comme les ondes de choc.

•Cas de Viscosité Nulle :

Dans le cas particulier où la viscosité ν est nulle, l'équation de Burgers devient :

$$u_t + u\,u_x = 0$$

Ceci est une forme simplifiée et est connue sous le nom d'équation de Burgers inviscide. Dans ce cas, les solutions faibles peuvent développer des discontinuités même si les conditions initiales sont lisses. Une telle solution est souvent décrite à l'aide de la méthode des caractéristiques ou de la théorie des ondes de choc, où les chocs sont traités comme des discontinuités dans la solution faible.

Le premier chapitre, nous parlons de certaines applications de l'équation de Burgers.

Dans le deuxième chapitre, présente des préliminaires des rappels sur les distributions et sur la transformation de Fourier.

Dans le troisième chapitre, nous étudions la solution classique de l'équation de Burgers

Dans le quatrième chapitre, nous étudions les solution distributionnelle (solution faible) de l'équation de Burgers.

Chapitre 1

Équations de Burgers est ses applications

Sommaire

1.1 Un modèle de trafic : 5
1.2 Équations de coagulation : 10

L'équation de Burgers a des applications comprennent une variété de domaines, parmi lesquels :

1.1 Un modèle de trafic :

Il existe diverses situations où le flux de la circulation est un sujet de discussion. Les cas les plus simples impliquent le déplacement d'une entité le long d'un seul axe. Cette entité peut être une entité macroscopique, ou des entités microscopiques ou submicroscopiques, telles que des cellules sanguines ou des molécules .

Malgré les différences de physique sous-jacente entre ces situations, elles partagent toutes en commun le mouvement le long d'un seul axe. Cette simplicité est délibérément exploitée lors de l'élaboration d'un modèle mathématique pour décrire le mouvement de ces entités. Dans la suite, nous nous pencherons sur le cas du flux de la circulation des voitures dans une rue à une seule voie, mais ces concepts peuvent également s'appliquer à d'autres systèmes, tels que le déplacement unidimensionnel des cellules sanguines et des molécules.

Pour passer d'une situation de la vie réelle, à un modèle mathématique, plusieurs hypothèses générales de modélisation sont nécessaires. Dans cette section, nous supposons que les entités sont suffisamment nombreuses pour ne pas nécessiter un suivi individuel, et nous pouvons donc utiliser une valeur moyenne.

1.1.1 Densité :

Dans le modèle que nous présenterons, la densité de trafic $\rho(x,t)$ est une variable cruciale, définissant le nombre de véhicules par unité de longueur à la position x et au temps t. Pour évaluer cette densité à un moment précis $t = t_0$ et à une position donnée $x = x_0$ le long de l'autoroute, nous optons pour un petit intervalle spatial de longueur $2\Delta x$ centré autour de cette position, où $x_0 - \Delta x < x < x_0 + \Delta x$, puis nous procédons au comptage des véhicules présents dans cet intervalle. Lorsque Δx est suffisamment réduit pour que seules les voitures immédiatement voisines de x_0 soient

prises en compte dans le calcul de la densité à ce point, nous obtenons :

$$\rho(x_0,t_0)\approx \frac{Le\ \ nombre\ \ de\ \ voitures\ \ de\ \ x_0-\Delta x\ \ à\ \ x_0+\Delta x\ \ à\ \ t=t_0.}{2\Delta x} \tag{1.1}$$

Cependant, il est important de souligner que Δx ne peut pas être tellement réduit que sa taille soit de l'ordre de la longueur des voitures individuelles (et de l'espacement entre elles), sinon la moyenne calculée ci-dessus n'aurait aucun sens. Dans la perspective du continuum, les voitures sont uniformément réparties le long de l'axe des x, et la valeur de $\rho(x_0;t_0)$ représente la limite de la partie droite de l'équation (1.1) lorsque Δx tend vers 0.

Pour illustrer la détermination de la densité, prenons le cas simple où toutes les voitures ont une longueur $\ell > 0$ et sont espacées d'une distance constante $d \geq 0$ les unes des autres.

Supposons un intervalle $2\Delta x$ le long de l'autoroute, alors le nombre de voitures dans cet intervalle est, approximativement,$2\Delta x/(\ell+d)$. En insérant cela dans l'équation (1.1), nous obtenons :

$$\rho = \frac{1}{\ell+d}$$

Une conclusion tirée de cette formule est l'existence d'une densité maximale : étant donné que la distance entre les voitures est non négative et finie,$0 \leq d < \infty$; alors $\ell+d>\ell$et donc : $\rho = \dfrac{1}{\ell+d} < \dfrac{1}{\ell} =: \rho M$

Il est à noter queρMa une interprétation naturelle et simple : c'est la densité qui correspond à toutes les voitures étant alignées sans aucun espace entre elles (une situation qui, naturellement, en termes pratiques, ne peut se produire que si les voitures ne bougent pas).

1.1.2 Le flux

Pour évaluer le flux $J(x;t)$ en $x=x_0$ et $t=t_0$, nous prenons un court intervalle de temps $t_0-\Delta t < t < t_0+\Delta t$ et comptons le nombre net de voitures passant par $x=x_0$ durant cette période. Nous adoptons la règle selon laquelle les voitures se déplaçant vers la droite sont comptées comme $+1$, tandis que celles se déplaçant vers la gauche sont comptées comme -1. L'assomption sous-jacente est que Δt est suffisamment petit pour que seules les voitures passant par x_0 à, ou près de, $t=t_0$ soient prises en compte pour évaluer le flux à t_0. Cependant, d'un point de vue expérimental, Δt ne peut pas être si petit que aucun véhicule ne puisse passer cet endroit pendant cet intervalle de temps. Ainsi, dans ces conditions, le flux J répond aux exigences mentionnées.

$$J(x_0,t_0)\approx \frac{Le\ nombre\ net\ de\ voitures\ qui\ passent\ à\ x_0\ De\ t=t_0-\Delta t\ à\ t=t_0+\Delta t}{2\Delta t} \tag{1.2}$$

Comme mentionné précédemment, dans une perspective continue, les véhicules sont répartis de manière uniforme le long de l'axe temporel, et la valeur de $J(x_0;t_0)$ représente la limite de la partie droite de l'équation (1.2) lorsque $\Delta t \longrightarrow 0$. Revenons maintenant au cas simple évoqué précédemment, celui de véhicules également espacés sur une autoroute. Si l'on suppose que tous les véhicules se déplacent avec une vitesse positive

constante v, alors les véhicules qui démarrent à une distance de $2v\Delta t$ *de* x_0 passeront par x_0 dans l'intervalle de temps de $t_0-\Delta t$ à $t_0+\Delta t$. Le nombre de véhicules correspondant est approximativement égal à $2v\Delta t/(l+d)$. En substituant cette expression dans l'équation (1.2), on obtient

$$\begin{aligned} J &= \frac{v}{(l+d)} \\ &= \rho v \end{aligned} \tag{1.3}$$

Cette relation entre la densité, la vitesse et le flux constitue un aspect fondamental du modèle, comme nous le verrons par la suite.

1.1.3 La loi de bilan

Pour établir une équation pour la densité de voitures, nous allons utiliser l'argument du volume de contrôle, une méthode déjà employée auparavant. La loi de bilan pour les voitures dans l'intervalle de l'autoroute $I := [x_0-\Delta x, x_0+\Delta x]$ est

$$\begin{aligned} &\{Le\ nombre\ de\ voitures\ dans\ I\ à\ t=t_0+\Delta t\} \\ &-\{Le\ nombre\ de\ voitures\ dans\ I\ à\ t=t_0-\Delta t\} \\ &=\{Le\ nombre\ de\ voitures\ qui\ traversent\ x_0 \\ &-\Delta x\ dans\ l'intervalle\ de\ temps\ [t_0-\Delta t, t_0+\Delta t]\} \\ &-\{Le\ nombre\ de\ voitures\ qui\ traversent\ x_0 \\ &+\Delta x\ dans\ l'intervalle\ de\ temps\ [t_0-\Delta t, t_0+\Delta t]\}. \end{aligned}$$

En réécrivant cette relation en utilisant les équations (1.1) et (1.2), nous obtenons :

$$\Delta x\left(\rho(x_0, t_0+\Delta t)-\rho(x_0, t_0-\Delta t)\right)=\Delta t\left(J(x_0-\Delta x, t_0)-J(x_0+\Delta x, t_0)\right)$$

En supposant que les fonctions sont suffisamment régulières, nous pouvons développer en utilisant le théorème de Taylor. Cela donne :

$$\Delta x\left(\rho+\rho_t\Delta t+\tfrac{1}{2}\rho_{tt}(\Delta t)^2+\tfrac{1}{6}\rho_{ttt}(\Delta t)^3+\ldots-\rho+\rho_t\Delta t-\tfrac{1}{2}\rho_{tt}(\Delta t)^2+\tfrac{1}{6}\rho_{ttt}(\Delta t)^3+\ldots\right)$$

$$=\Delta t\left(J-J_x\Delta x+\tfrac{1}{2}J_{xx}(\Delta x)^2-\tfrac{1}{6}J_{xxx}(\Delta x)^3+\ldots-J-J\Delta x-\tfrac{1}{2}J_{xx}(\Delta x)^2-\tfrac{1}{6}J_{xxx}(\Delta x)^3+\ldots\right)$$

En rassemblant les termes de l'équation précédente, où ρ et J sont évalués à $(x_0; t_0)$, nous obtenons :

$$\rho_t+O((\Delta t)^2)=-J_x+O((\Delta x)^2)$$

En prenant la limite lorsque $\Delta x \longrightarrow 0$ et $\Delta t \longrightarrow 0$, nous déduisons que $\rho_t=-J_x$ ou

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial J}{\partial x}=0 \tag{1.4}$$

Cette équation (1.4) représente notre loi de bilan. En utilisant la relation entre la vélocité et le flux ρv établie dans la sous-section précédente, nous pouvons reformuler (1.4) comme

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(v\rho)=0 \tag{1.5}$$

Il est évident que pour étudier cette équation, il est nécessaire de supposer que la densité initiale est connue

$$\rho(x,0)=f(x) \tag{1.6}$$

où f est donné (éventuellement connu par l'observation ou par les archives historiques). Notons cependant que (1.5) possède deux inconnues : la densité ρ et la vitesse v. Afin d'étudier le modèle mathématique (1.5) ;(1.6), nous devons savoir comment ces deux les quantités sont liées. Une relation du type $v = v(\rho)$ est appelée une loi constitutive et n'est pas une relation qui peut être obtenue à partir des seules mathématiques : c'est une relation qui exprime le problème réel considéré et doit être obtenu, selon les cas, soit à partir de mesures d'observation, d'expériences ou de données plus fondamentales (physiques) théories. Dans le cas de voitures roulant sur une autoroute, la loi de comportement $v = v(\rho)$ a été étudiée par plusieurs auteurs et quelques données expérimentales sont présentés .

Remarquez qu'il y a fondamentalement deux scénarios distincts : lorsque la densité est basse, la vitesse reste constante, équivalente à la vitesse maximale permise par la loi. En revanche, à mesure que la densité augmente, la vitesse diminue de manière monotone, suivant presque une progression linéaire, pour finalement sembler atteindre une vitesse nulle autour d'une densité d'environ 220 voitures/kilomètre. Nous allons maintenant examiner brièvement ces deux scénarios.

1.1.4 Le modèle de vitesse constante :

L'équation (1.4) nous amène à la conclusion que la supposition la plus simple et valable pour les faibles densités de voitures est que la vitesse v est constante en fonction de sa dépendance de la densité ρ, c'est-à-dire $v = a$. Cette hypothèse conduit à l'équation d'advection :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + a\frac{\partial \rho}{\partial x} \tag{1.7}$$

Il s'agit d'un exemple d'une équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre qui peut être entièrement résolue en utilisant la méthode des caractéristiques. Actuellement, il n'y a rien de plus vraiment intéressant à ajouter sur ce modèle.

1.1.5 Le modèle de Greenshields :

Une phase beaucoup plus intéressante est celle de la densité élevée mentionnée précédemment. L'une des lois constitutives les plus utilisées dans les études sur le flux de trafic tente de saisir ce comportement de la manière la plus simple possible. C'est le modèle de Greenshields, exprimé par

$$v(\rho)=v_M\left(1-\frac{\rho}{\rho_M}\right) \tag{1.8}$$

où v_M et ρ_M représentent respectivement la vitesse maximale et la densité maximale.

Il s'avère que pour prendre en compte le fait que les conducteurs réduisent leur vitesse pour faire face à une densité croissante devant eux, nous devrions supposer que J est également une fonction du gradient de densité :

$$J = \rho v - D\frac{\partial \rho}{\partial x} \tag{1.9}$$

où D est une constante. En substituant les équations (1.8) et (1.9) dans (1.4), nous obtenons ceci

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\left[\frac{v_M}{\rho_M}(\rho_M - \rho)\rho\right] = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + a(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \tag{1.10}$$

o ù

$$a(\rho) = v_M\left(1 - \frac{2\rho}{\rho_M}\right)$$

La fonction $a(\rho)$ est appelée vitesse d'onde et l'équation (1.10) est une équation de conservation non linéaire pourρ. Dans le cas où $a(\rho) = \rho$, alors l'équation (1.10) devient l'équation de Burgers visqueuse, qui peut être résolue par la transformation de Cole-Hopf.

1.1.6 Une application pour une situation de circulation dense :

Dans la section précédente, nous avons considéré que la vitesse est constante et dans cette section, nous allons considérons la situation où la vitesse $v$est une fonction qui dépend de la densité ρ, en supposant que

$$v = F(\rho) \tag{1.11}$$

D'après (1.4), la formule générale du flux est

$$\begin{aligned} J &= \rho v \\ &= \rho F(\rho). \end{aligned}$$

En supposant que F est une fonction lisse de ρ, en utilisant la règle de la chaîne, il s'ensuit que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = J'(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

en remplacement de (1.4), on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + a(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{1.12}$$

où $a(\rho) = J'(\rho)$ ou de manière équivalente

$$a(\rho) = F(\rho) + \rho F'(\rho) \tag{1.13}$$

L'équation ci-dessus ressemble à la version avec une vitesse constante en (1.7). Cependant, une différence significative réside dans la possibilité pour la vitesse d'onde,$a(\rho)$, de dépendre du paramètre inconnu ρ. Dans de tels cas, l'équation (1.12) devient non linéaire. En général, résoudre des équations aux dérivées partielles non linéaires est difficile. Cependant, lorsque la vitesse est exprimée comme $a(\rho) = \rho$, nous rencontrons l'équation de Burgers (1.12), qui offre des avenues de solution en utilisant la méthode des caractéristiques.

1.2 Équations de coagulation :

Dans ce paragraphe, nous examinons une équation de coagulation dans un grand récipient contenant un nombre très élevé de particules de tailles indexées par la variable réelle positive x. Les particules peuvent subir des réactions de coagulation où une particule de taille x et une particule de taille y se combinent pour former une particule de taille $x+y$. La densité des particules de taille x au temps t, notée $c(x,t)$, est modélisée par une version continue des équations de coagulation de Smoluchowski :

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^x a(x-y,y)c(x-y,t)c(y,t)dy-c(x,t)\int_0^\infty a(y,t)c(y,t)dy, x\in\mathbb{R}^+, t\in\mathbb{R}^+ \tag{1.14}$$

où $a(x,y)$ est le taux de réaction, supposé symétrique et non négatif. Cette équation est complétée par une condition initiale

$$c(x,0)=c_0(x)$$

En multipliant cette équation par une fonction test lisse et à support compact ϕ et en intégrant par rapport à x de 0 à 1, on obtient une version faible de l'équation de coagulation :

$$\int_0^1 \phi(x)c(x,t)dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty[\phi(x+y)-\phi(x)-\phi(y)]a(x,y)c(x,t)c(y,t)dxdy \tag{1.15}$$

Cette version faible permet d'étudier des classes de solutions plus larges. Dans la section suivante, nous examinerons des coefficients de réaction solvables $a(x,y)=1$, $a(x,y)=x+y$ et $a(x,y)=xy$, et nous montrerons que, dans deux de ces cas, on aboutit à une équation de Burgers.

Chapitre 2

Préliminaires

Sommaire

2.1 Rappels sur Distributions 11
2.2 Rappel sur la transformation de Fourier : 15

En ce chapitre,nous parlons des rappels sur distributions et sur la transformation de Fourier :

2.1 Rappels sur Distributions

2.1.1 Définition des distributions

Définition 2.1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une distribution T sur Ω est une application linéaire $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$ telle que :
pour tout compact K de Ω il existe $C_k > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$\left|\left\langle T, \varphi \right\rangle\right| \leq C_k \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in k} |\partial^\alpha \varphi(x)| \tag{2.1}$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(K)$.

Remarque 2.1. Compte tenu de la topologie des espaces $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ et $\mathscr{C}_0^\infty(K)$ il est facile d'interpréter la définition (1.1). En effet on a équivalence entre les quatre propriétés suivantes :

1. T est une distribution sur Ω.
2. T est une forme linéaire sur $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que pour tout compact K de Ω, la restriction de T à $\mathscr{C}_0^\infty(K)$ est continue.
3. T est une forme linéaire continue sur $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$.
4. Pour toute suite (φ_j) de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que
   •Il existe K compact de Ω tel que $supp\varphi_j \subset K, \forall j \in \mathbb{N}$
   • $(\varphi_j) \longrightarrow 0$ dans $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$,
   alors $\lim_{j \longrightarrow +\infty} \left\langle T, \varphi_j \right\rangle = 0$

Définition 2.2

Les formes linéaires continues sur $\mathscr{D}(\Omega)$ sont appelées distributions sur l'ouvert Ω.
L'espace vectoriel de toutes les distributions sur Ω sera noté $\mathscr{D}'(\Omega)$.

- L'espace $\mathscr{D}'(\Omega)$ est le dual topologique de l'espace fonctionnel $\mathscr{C}_c^{\infty}(\Omega)$.

2.1.2 La convergence dans $\mathscr{D}'(\Omega)$:

Définition 2.3

Soit (T_j) une suite de distributions, et soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$.
On dit que (T_j) converge vers T dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ si

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \langle T_j, \varphi \rangle \xrightarrow{j \longrightarrow +\infty} \langle T, \varphi \rangle$$

On écrit $(T_j) \xrightarrow{\mathscr{D}'(\Omega)} T$.

Theorem 2.1. Soit $f_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$ une suite vérifiant :

1. $supp f_j \subset \bar{B}(0, \varepsilon_j)$ avec $\varepsilon_j \longrightarrow 0$.
2. $\forall j \in \mathbb{N} : \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) dx = 1$.
3. $\forall j \in \mathbb{N} : f_j \geq 0$.

Alors :

$$f_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)} \delta$$

Theorem 2.2. Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $T_f \in \mathscr{D}'(\Omega)$.
Alors,les deux problèmes suivantes sont équivalentes :

1. $T_f = 0$ (c'est-à-dire,$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f \varphi = 0$).
2. f=0 p.p sur Ω.

Lemme 2.1. Soit (f_j) une suite de fonctions de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.Supposons que :

1. $f_j \xrightarrow{p.p} f$.
2. $\exists g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) : |f_j(x)| \leq g(x)$.

Alors

$$T_{f_j} \equiv f_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)} f \in L^1_{loc}.$$

Remarque 2.2.

$$\mathscr{D}(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc} \hookrightarrow \mathscr{D}'(\Omega).$$

2.1.3 La dérivation dans $\mathscr{D}'(\Omega)$:

Définition 2.4

Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ nous avons :

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : \langle \partial_i T, \varphi \rangle = -\langle T, \partial_i \varphi \rangle$$

Theorem 2.3. Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ que se soit (T_j) une suite de $\mathscr{D}'(\Omega)$ nous avons :

$$T_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\Omega)} T \Rightarrow \mathscr{D}^\alpha T_j \longrightarrow \mathscr{D}^\alpha T, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$$

Theorem 2.4. (Théorème du saut) :

Soit f dépendant de classe $\mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}\backslash\bigcup_{i=1}^{p}\right)$ où $a_1, \ldots, a_p$ point de $\mathbb{R}$.

supposons que $\lim_{x \longrightarrow a_i^-} f(x)$ et $\lim_{x \longrightarrow a_i^+} f(x)$ il existent et sont finis a chaque $(a_i)_{i=1,\ldots,p}$.

On met $\sigma_i = \lim_{x \longrightarrow a_i^+} f(x) - \lim_{x \longrightarrow a_i^-} f(x)$ alors

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=1}^{p} \sigma_i \delta_{a_i},$$

où f' est la dérivée de f.

Appelée σ_i une saut f on a_i.

Remarque 2.3. Nous remarquons que les conditions de la théorème sont suffisantes et non nécessaires.Cela signifie que les conditions de la théorème peuvent ne pas $\hat{e}tre$ remplies tant que son résultat est correct. En revanche,la constitution des sauts n'est pas correcte dans tous les cas.

2.1.4 Support d'une distribution :

Définition 2.5

Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ et ωun ouvert contenu dans Ω.
On dit que T est nulle dans ω si $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\omega)$.
On a alors le résultat suivant.

Lemme 2.2. Soit $(\omega_i)_{i \in \mathbf{I}}$ une famille d'ouverts de Ω et $\omega = \bigcup_{i \in \mathbf{I}} \omega_i$. Si $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ est nulle dans chaque ω_i ; alors T est nulle dans Ω.

Définition 2.6

Pour $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, le support de T, que l'on note $supp\, T$, est le complémentaire du plus grand ouvert ou T est nulle.

Remarquons que $supp T$ est un fermé.

Theorem 2.5. Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ et $x_0 \in \Omega$. Supposons que $supp T = x_0$.
II existe alors un entier k et des nombres complexes a_α pour $|\alpha| \leq k$, tels que

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq k} a^\alpha \partial^\alpha \varphi(x_0)$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$.

Proposition 2.1

Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ tels que $supp T \cap supp \varphi = 0$.
Alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$

Proposition 2.2

Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $T \in \mathscr{D}'^{(k)}(\Omega)$ et $\varphi \in \mathscr{C}_0^k(\Omega)$ telles que
$\partial^\alpha \varphi(x) = 0$ pour $x \in supp T$ et $|\alpha| \leq k$.
Alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

2.1.5 Distributions à support compact :

Définition 2.7

On note$\varepsilon'(\Omega)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des distributions à support compact.

Theorem 2.6. Il existe une application linéaire bijective ϕ de $\varepsilon'(\Omega)$ dans le dual de $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ qui permet d'identifier $\varepsilon'(\Omega)$ à $(\mathscr{C}^\infty(\Omega))'$.

Proposition 2.3

Soit $T \in \varepsilon'(\Omega)$ et $K_0 = supp T$.
Il existe une unique application linéaire $\tilde{T}$ de $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$ telle que
- $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ si $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$.
- $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = 0$ si $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$, $supp \varphi \cap K_0 = \emptyset$
- Il existe $k \in \mathbb{N}$, un compact $K \subset \Omega$ (voisinage arbitraire de K_0) et $C > 0$ tels que

$$\left|\langle \tilde{T}, \varphi \rangle\right| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_K |\partial^\alpha \varphi|, \quad \varphi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega). \tag{2.2}$$

On note ϕ l'application $T \longrightarrow \tilde{T}$.

Proposition 2.4

Soit $\tilde{T} \in (\mathscr{C}^{\infty}(\Omega))'$.
La restriction de $\tilde{T}$ à $\mathscr{C}_0^{\infty}(\Omega)$ est une distribution à support compact.

2.2 Rappel sur la transformation de Fourier :

Définition 2.8

La transformation de Fourier $\mathscr{F}$ est une opération qui transforme une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ en une autre fonction, décrivant le spectre fréquentiel de cette dernière. Si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, sa transformée de Fourier est la fonction $\mathscr{F}(f) = \hat{f}$ donnée par la formule :

$$\mathscr{F}(f) : \xi \mapsto \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} \, dx.$$

Chapitre 3

Solution classique

Sommaire

3.1 Cas 1 :($\nu = 0$) 16
3.2 Cas 2 :($\nu \neq 0$) 18

En ce chapitre, nous étudions la solution classique de l'équation de Burgers. :

$$u_t + u\,u_x = \nu u_{xx}$$

3.1 Cas 1 :($\nu = 0$)

Trouver la solution classique de cette équation,peut être faire par la méthode de caractéristique :

Soit $u_0 \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on suppose u_0 et u_0' bornées.

Il existe alors $T > 0$ et $u :]-T, T[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 qui soit solution du problème

$$(\mathscr{P}) : \begin{cases} u_t + u\,u_x = 0 \\ u(0,.) = u_0 \quad sur\mathbb{R} \end{cases}$$

Etape 1 :courbes caractéristique

Soit u une solution de $(\mathscr{P})$, $x \in \mathbb{R}$. On considère la courbe caractéristique :

$$(C_x) : (t, y(t))/y'(t) = u(t, y(t)), y(0) = x$$

sur (C_x), on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u(t, y(t))] = [u(t, y(t))]_t + y'(t)[u(x, y(t))]_x$$

alors,

$$= (u_t + u\,u_x)(t, y(t)) = 0.$$

Donc

u est constante sur (C_x),on déduit y' est constante, alors

$$y(t) = y(0) + t\,y'(0) = x + t\,c(x).$$

Etape 2 :détermination de T

En dérivant c, $c' = u_0'$. $u' \circ u_0$, on :
u_0 est bornée et u' est continue donc $u' \circ u_0$ est bornée, u_0' est bornée.

Remarque 3.1. $u' \circ u_0$ inclus dans un compact.

On pose alors :

$$M := \sup |c'| < +\infty$$

et

$$T := \begin{cases} +\infty & si \quad M = 0 \\ 1/M & sinon \end{cases}$$

Etape 3 :inversion

On considère $f :]-T, T[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
$(t,x) \longmapsto (t, y = x + t\,c(x))$.
On a alors :

$$J_f(t,x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c(x) & 1 + t\,c'(x) \end{pmatrix}$$

de déterminons $1 + t \cdot c'(x) \neq 0$ car $|t \cdot c'(x)| \leq |t| \cdot M < 1$ sur $]-T, T[\times\mathbb{R}$.
De plus, si $f(t_1, x_1) = f(t_2, x_2)$,
$t_1 = t_2 = t$ et $x_1 + t\,c(x_1) = x_2 + t\,c(x_2)$,
donc $|x_1 - x_2| = |t| \left| \int_{x_1}^{x_2} c'(x)\,dx \right| \leq M \cdot |t| |x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|$ i.e $x_1 = x_2$.
Donc f est injective.
Soit à t fixé, $\psi_t : x \longmapsto x + t \cdot c(x)$.On veut montrer que $\psi_t(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, (pour montrer que f est surjective) on a :

$$\psi_t'(x) = 1 + t\,c'(x) > 0, \psi_t(x) \xrightarrow{x \longrightarrow +\infty} +\infty \quad et \quad \psi_t(x) \xrightarrow{x \longrightarrow -\infty} -\infty, \ \psi_t \ continue.$$

Donc $\psi_t(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et f est surjective.
Ainsi, par la théorème d'inversion globale, f est un C^1 difféomorphisme de $]-T, T[\times\mathbb{R}$, $g := f^{-1}$.
Or; $u \circ f(t,x) = u_0(x)$ donc $u(t,x) = u_{0(\varphi(t,x))}$.

Remarque 3.2. $g$est de la forme $(t, \varphi(t,y))$ pour une fonction $\varphi \in C^1$.

On a :

$$(0, \varphi(0,x)) = g(0,x) = g(f(0,x)) = (0,x)$$

et

$$u(x,t) = u(f \circ g(t,x)) = u(f(t, \varphi(t,x))) = u_0(\varphi(t,x)).$$

Etape 4 : Existence et unicité

La fonction φ ne dépend que de u et de u_0, donc $u = u_0 \circ \varphi$ montre l'unicité d'une éventuelle équation.

Vérifione que u ainsi est bien définie équation :

on a $\varphi(f(t,x)) = \varphi(t, x + t\,c(x)) = x$ d'où :

$$[\varphi(f(t,x))]_t + C(x)[\varphi(f(t,x))]_x = [\varphi(t,y)]_t + c(\varphi(t,y)) \cdot [\varphi(t,y)]_x = 0$$

donc :

$$u_t + u\,u_x = (u_0' \circ \varphi)(\varphi_t + u\varphi_x) = (u_0' \circ \varphi)(\varphi_t + (c \circ \varphi) \cdot \varphi_x) = 0$$

3.2 Cas 2 :($\nu \neq 0$)

Trouver la solution classique de l'équation de Burgers :

$$(\mathscr{A}) : \begin{cases} u_t + u\,u_x = \nu u_{xx} \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

se fait, généralement en appliquent la transformation de Hopf-Cole :

la transformation de Hopf-Cole est définie comme suit :

$$u(x,t) = -2\,\nu(\ln \phi(x,t)).$$

En substituant cette transformation dans l'équation de Burgers,on obtient une équation pour $\phi(x,t)$.

Calculons d'abord les dérivées nécessaires.Posons $u = -2\,\nu(\ln \phi)_x$.Alors,

1/Terme de dérivée temporelle :

$$\begin{aligned} u_t &= -2\,\nu((\ln \phi)_x)_t \\ &= -2\,\nu\left(\frac{\phi_x}{\phi}\right)_t \\ &= -2\,\nu\left(\frac{\phi_{xt}\phi - \phi_x\phi_t}{\phi^2}\right) \\ &= -2\,\nu\left(\frac{1}{\phi}\phi_{xt} - \frac{\phi_x\phi_t}{\phi^2}\right) \end{aligned}$$

2/Terme de dérivée spatiale :

$$\begin{aligned} u_x &= -2\,\nu((\ln \phi)_x)_x \\ &= -2\,\nu\left(\frac{\phi_x}{\phi}\right)_x \\ &= -2\,\nu\left(\frac{\phi_{xx}\phi - \phi_x\phi_x}{\phi^2}\right) \\ &= -2\,\nu\left(\frac{1}{\phi}\phi_{xx} - \left(\frac{1}{\phi}\phi_x\right)^2\right) \end{aligned}$$

3/Terme non linéaire :

$$\begin{aligned}(-2\nu(\ln\phi)_x)(-2\nu(\ln\phi)_x)_x &= 4\nu^2\frac{\phi_x}{\phi}\left(\frac{1}{\phi}\phi_{xx}-\left(\frac{1}{\phi}\phi_x\right)^2\right)\\ &= 4\nu^2\left(\frac{1}{\phi^2}\phi_{xx}\phi_x-\left(\frac{1}{\phi}\phi_x\right)^3\right)\end{aligned}$$

4/Terme de diffusion :

$$\begin{aligned}\nu u_{xx} &= \nu\left(-2\nu\left(\frac{\phi_x}{\phi}\right)_x\right)_x\\ &= -2\nu^2\left(\frac{1}{\phi}\phi_{xx}-\left(\frac{1}{\phi}\phi_x\right)^2\right)_x\end{aligned}$$

Substituons ces dans l'équation :

$$-2\nu\left(\frac{1}{\phi}\phi_{xt}-\frac{\phi_x\phi_t}{\phi^2}\right)+4\nu^2\left(\frac{1}{\phi^2}\phi_{xx}\phi_x-\left(\frac{1}{\phi}\phi_x\right)^3\right)=-2\nu^2\left(\frac{1}{\phi}\phi_{xx}-\left(\frac{1}{\phi}\phi_x\right)^2\right)_x.$$

Résolution de l'équation de la chaleur :

$$\phi_t = \nu\phi_{xx}.$$

Peut être résolue en utilisant des méthodes classiques comme la transformée de Fourier :

$$\phi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}\right)f(y)\,dy$$

Cette formule représente la solution exacte de l'équation de la chaleur en fonction du temps t et de la position x, où ν est la diffusivité thermique

• Transformée de Fourier de l'équation de la chaleur :

Appliquons la transformée de Fourier. $\hat{\phi}(k,t)$ à l'équation de la chaleur. Soit $\mathscr{F}[\phi(x,t)]=\hat{\phi}(k,t)$ et$\mathscr{F}[\phi_t]=\hat{\phi}_t$, $\mathscr{F}[\phi_{xx}]=-(k^2)\hat{\phi}$.

En appliquant la transformée de Fourier, l'équation de la chaleur devient :

$$\hat{\phi}_t = -\nu k^2\hat{\phi}$$

•Résolution de l'équation différentielle :

Cette équation différentielle est une équation de type premier ordre homogène. Sa solution est de la forme :

$$\hat{\phi}(k,t)=\hat{\phi}(k,0)\exp(-\nu k^2 t).$$

La condition initiale $\phi(x,0)=f(x)$ nous donne $\hat{\phi}(k,0)=\hat{f}(k)$ où $\hat{f}(k)$ est la transformée de Fourier de $f(x)$. Donc,

$$\hat{\phi}(k,t)=\hat{f}(k)\exp(-\nu k^2 t).$$

•Transformée de Fourier inverse :

Pour obtenir $\phi(x,t)$, nous appliquons la transformée de Fourier inverse :

$$\phi(x,t)=\mathscr{F}^{-1}[\hat{\phi}(k,t)]=\mathscr{F}^{-1}[\hat{f}(k)\exp(-\nu k^2 t)].$$

La transformée de Fourier inverse est donnée par :

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\exp(-\nu k^2 t)\exp(ikx)\,dk.$$

•Utilisation de la propriété de convolution :

La solution de la forme ci-dessus est équivalente à la convolution de $f(x)$ avec le noyau gaussien. Le noyau gaussien est :

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\nu t}\right).$$

Donc, $\phi(x,t)$ peut être écrit comme :

$$\phi(x,t) = (G * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t)f(y)\,dy.$$

•Solution finale :

En substituant le noyau gaussien $G(x-y,t)$, nous obtenons :

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}\right) f(y)\,dy.$$

Ainsi, la solution exacte de l'équation de la chaleur avec la condition initiale $\phi(x,0) = f(x)$ est :

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}\right) f(y)\,dy.$$

Cette formule décrit comment la température $\phi(x,t)$ évolue au fil du temps en fonction de la position x et de la condition initiale $f(x)$.

Chapitre 4

Solutions distributionnelles (solution faible)

Sommaire

4.1 La solution de l'équation de Burgers avec une viscosité non nulle 21
4.2 Vitesse du choc 23
4.3 Caractéristiques de l'équation de Burgers 24
4.4 solution faible 25

En ce chapitre, nous étudions la solution faible de l'équation de Burgers. :

$$u_t + u\,u_x = \nu u_{xx} \tag{4.1}$$

Ceci représente un modèle mathématique efficace, bien qu'il soit simplifié, décrivant le mouvement d'un gaz visqueux compressible, où :

- u = la vitesse du gaz,
- ν = la viscosité cinématique,
- x = la coordonnée spatiale,
- t = le temps.

4.1 La solution de l'équation de Burgers avec une viscosité non nulle

Nous cherchons une solution de l'équation (4.1) sous la forme d'une onde voyageante.

$$u(x,t) = w((x-x_0) - s\,t) \equiv w(y)$$

Alors $u_t = -s\,w'$, $u_x = w'$, et $u_{xx} = w''$. En insérant ceci dans l'équation (4.1), nous obtenons :

$$-s\,w' + w\,w' = \nu w''$$

$$-s\,w' \left(\tfrac{w^2}{2}\right)' = \nu w''$$

$$-s\,w + \tfrac{w^2}{2} = \nu w' + C$$

Nous imposons également des conditions aux points $\pm\infty$: $w(-\infty) = u_L$, $w(\infty) = u_R$ où $u_L > u_R$, et $w(\pm\infty) = 0$.Ensuite, nous avons

$$-s\,u - L + \frac{u_L^2}{2} = C = -s\,u_R + \frac{u_R^2}{2}.$$

Par conséquent, s'avère être $(u_L + u_R)/2$. Par conséquent, la vitesse de choc reste identique à celle du cas de viscosité nulle. Donc, $C = -u_L * u_R/2$. Nous pouvons alors poursuivre avec

$$\begin{aligned}
\nu w' &= \frac{w^2}{2} - \frac{u_L + u_R}{2} w + \frac{u_L u_R}{2} \\
\frac{\mathrm{d}y}{2\nu} &= \frac{\mathrm{d}w}{w^2 - (u_L + u_R)w + u_L u_R} \\
\frac{\mathrm{d}y}{2\nu} &= \frac{\mathrm{d}w}{w^2 - (u_L + u_R)w + \frac{(u_L+u_R)^2}{4} - \frac{(u_L-u_R)^2}{4}} \\
\frac{\mathrm{d}y}{2\nu} &= \frac{\mathrm{d}w}{\left(w - \frac{u_L-u_R}{2}\right)^2 - \frac{(u_L-u_R)^2}{2}}
\end{aligned}$$

Intégration des deux parties en utilisant

$$\int \frac{\mathrm{d}w}{(w-a)^2 - b^2} = \frac{1}{2b} \log \left| \frac{w-a-b}{w-a+b} \right|$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{y}{2\nu} + C &= \frac{1}{u_L - u_R} \log \left| \frac{w - \frac{u_L+u_R}{2} - \frac{u_L-u_R}{2}}{w - \frac{u_L+u_R}{2} + \frac{u_L-u_R}{2}} \right| \\
&= \frac{1}{u_L - u_R} \log \left| \frac{w - u_L}{w - u_R} \right| \\
&= \frac{1}{u_L - u_R} \log \frac{u_L - w}{w - u_R}
\end{aligned}$$

Dans la dernière égalité, nous avons utilisé le fait que $u_L > w > u_R$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{u_L - w}{w - u_R} &= \exp^{\frac{y(u_L-u_R)}{2\nu} + C} \\
u_L - w &= w \exp^A - u_R \exp^A, \quad o\grave{u} \quad A = y(u_L - u_R)/(2\nu) + C \\
w(\exp^A + 1) &= (u_L + u_R \exp^A) \\
w = \frac{u_L + u_R \exp^A}{\exp^A + 1} &= u_R + \frac{u_L - u_R}{2} \frac{2}{\exp^A + 1}
\end{aligned}$$

Multiplier et diviser par $\exp(-A/2)$ et utiliser l'identité

$$\frac{2\exp^{-A/2}}{\exp^{A/2} + \exp^{-A/2}} = 1 - \frac{\exp^{A/2} - \exp^{-A/2}}{\exp^{A/2} + \exp^{-A/2}} = 1 - \tanh \frac{A}{2}$$

on a

$$w(y) = \frac{u_R + u_L}{2} - \frac{u_L - u_R}{2} \tanh \left(\frac{y(u_L - u_R)}{4\nu} + C \right)$$

Ainsi,

$$u(x,t) = \frac{u_R + u_L}{2} - \frac{u_L - u_R}{2} \tanh \left(\frac{([x - x_0] - st)(u_L - u_R)}{4\nu} \right) \tag{4.2}$$

Les courbes de w(y) pour différentes valeurs de ν sont affichées dans la Figure 1. À mesure que $\nu \longrightarrow 0$, u(x, t) converge vers une fonction escalier de l'argument $x - st$.

Figure 1. Les profils de la solution de l'équation de Burgers visqueuse pour $u_R = 0$, $u_L = 1, x_0 = 0$, et ν égal à $0.25, 0.1 et 0.02$. Remarquez que $w(y)$ tend vers une fonction escalier lorsque $\nu \longrightarrow 0$

4.2 Vitesse du choc

Si la viscosité = 0, ou est négligée, l'équation (4.1) peut être récrite comme suit :

$$u_t + \left[\frac{1}{2}u^2\right]_x = 0 \tag{4.3}$$

L'équation (4.3) est plus abordable tant du point de vue théorique que numérique que l'équation (4.1). À partir de maintenant, sauf mention contraire, nous utiliserons le terme "équation de Burgers" pour désigner l'équation (4.3). Cette dernière admet une solution exprimée sous la forme d'une onde se déplaçant.

$$u(x,t) = V(x - x_0 - st) \tag{4.4}$$

"où $V(y)$ est une fonction en escalier

$$V(y) = \begin{cases} u_L & y < 0 \\ u_R & y > 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

Lorsque $u_L > u_R$, cela engendre ce que l'on nomme une onde de choc. La vitesse de propagation de cette onde, représentée par s, peut être déterminée en suivant le raisonnement suivant : en prenant M comme un nombre arbitrairement grand, considérons l'intégrale.

$$\int_{-M}^{M} u(x,t)dx.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-M}^{M} u(x,t)dx &= \int_{-M}^{M} -u\,u_x\,dx \\ &= -\frac{u^2}{2}|_{-M}^{M} \\ &= \frac{u_L^2}{2} - \frac{u_R^2}{2} \end{aligned}$$

D'autre part

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-M}^{M} u(x,t)dx = (M + st)u_L + (M - st)u_R$$

Donc,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-M}^{M} u(x,t)dx = s(u_L - u_R)$$

La vitesse de propagation de l'onde est donc

$$s\left(\frac{u_L^2}{2} - \frac{u_R^2}{2}\right)/(u_L - u_R) = \frac{u_L + u_R}{2} \tag{4.6}$$

Remarque 4.1. L'argument ci-dessus est valable pour une équation plus générale de la forme

$$u_t + [f(u)]_x = 0 \tag{4.7}$$

*É*quations sont appelées lois de conservation hyperboliques. La vitesse de l'onde de choc est donnée par :

$$\begin{aligned} s &= \frac{f(u_L)-f(u_R)}{u_L-u_R} \\ &= \frac{jump \;\; dans \;\; f(u)}{jump \;\; dans \;\; u}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Cette équation est appelée la condition de Rankine-Hugoniot.

4.3 Caractéristiques de l'équation de Burgers

Les caractéristiques de l'équation (4.3) sont données par :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u(x,t) \tag{4.9}$$

Montrons que u est constant le long des caractéristiques. Soit $(x(t);t)$ une caractéristique. Alors

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(x(t),t) &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ &= u_t + u\,u_x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, la solution de l'équation. (4.9) est donné par :

$$x(t) = u(x(0),0)t + x_0 = u_0(x_0)t + x_0 \quad o\grave{u} \quad x_0 = x(0), \quad u_0(x) = u(x,0) \tag{4.10}$$

L'équation (4.10) révèle plusieurs caractéristiques uniques :
•Les caractéristiques se présentent sous forme de droites.
•Elles ont la possibilité de s'entrecroiser.
•Elles ne sont pas obligées de recouvrir entièrement l'espace $(x;t)$.
Ceci constitue un phénomène distinct par rapport aux équations linéaires du premier ordre telles que $u_t + a(x;t)u_x = 0$. Dans le cas des équations linéaires du premier ordre, chaque point de l'espace $(x;t)$ est traversé par une seule caractéristique. Ainsi, ces caractéristiques ne se croisent jamais et couvrent tout l'espace.

En outre, même avec une distribution initiale de vitesse lisse $u_0(x)$, la solution de l'équation de Burgers peut devenir discontinue dans un laps de temps fini. Ce phénomène se manifeste lorsque $u_0'(x)$ est négatif en certains points. Cela conduit à l'intersection des caractéristiques, ce qui équivaut à la rupture de l'onde. Pour déterminer le moment de cette rupture, il est nécessaire de considérer deux caractéristiques $x(t) = u_0(x_1)t + x_1$ et $x(t) = u_0(x_2)t + x_2$.Ensuite, nous équations

$$x(t) = u_0(x_1)t + x_1 = u_0(x_2)t + x_2$$

Alors, le moment où ils se croisent est

$$t = -\frac{x_2 - x_1}{u_0 x_2 - u_0 x_1}$$

Par conséquent, le temps de pause est

$$\begin{aligned} T_B &= \min_{x_1,x_2\in\mathbb{R}}\left(-\frac{x_2-x_1}{u_0(x_2)-u_0(x_1)}\right) \\ &= -\frac{1}{\min_{x_1,x_2\in\mathbb{R}}\left(\dfrac{u_0(x_2)-u_0(x_1)}{x_2-x_1}\right)} \\ &= -\frac{1}{\min_{x_1,x_2\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} u_0'(x)\,dx\right)} \\ &= -\frac{1}{\min_{x\in\mathbb{R}} u_0'(x)} \end{aligned}$$

4.4 solution faible

Nous avons vu dans cet partie précédente qu'une solution de l'équation de Burgers peut devenir discontinue même si les données initiales sont lisses. Ensuite, la discontinuité se déplace avec une certaine vitesse, la vitesse du choc s, donnée par l'équation (4.6). Dans la partie 2 (Vitesse du choc), nous avons déterminé s en utilisant la loi de conservation intégrale sous-jacente. Cependant, à ce stade, nous ne pouvons considérer la fonction en escalier définie par les équations (4.4), (4.5) et (4.6) que comme une solution de la loi de conservation intégrale, plutôt que comme la solution de l'équation (4.3). Afin de valider les solutions discontinues des équations différentielles, le concept de solutions faibles a été introduit. Cette extension du concept de solution doit satisfaire les exigences suivantes :

•une fonction lisse est une solution faible si et seulement si elle est une solution régulière,

•une fonction discontinue peut être une solution faible,

• seules les fonctions discontinues qui satisfont l'équation intégrale associée peuvent être des solutions faibles.

Motivation :

Soit $\phi(x,t)$ une fonction infiniment lisse avec un support compact, c'est-à-dire qu'elle est différente de zéro uniquement dans un certain sous-ensemble compact de l'espace $(x,t) = \mathbb{R}[0,+\infty[$. Soit (u,t) une solution lisse d'une loi de conservation

hyperbolique donnée par l'Équation (4.7).Alors,on a :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u_t + [f(u)]_x \phi \, dx \, dt &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u_t \phi + [f(u)]_x \phi \, dx \, dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty \left[\int_0^\infty u_t \phi \, dt \right] dx + \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty [f(u)]_x \phi \, dx \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty u\phi_t \, dx - \int_{-\infty}^\infty \left[u\phi \right]_0^\infty \, dx + \int_0^\infty f(u)\phi_x \, dt \\ &\quad - \int_0^\infty \left[f(u)\phi \right]_{-\infty}^\infty \, dt \\ &= -\int_{-\infty}^\infty \left[u\phi \right]_0^\infty \, dx + \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty u\phi_t + f(u)\phi_x \, dx \, dt.\end{aligned}$$

Donc,

$$0 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u_t + [f(u)]_x \phi \, dx \, dt = -\int_{-\infty}^\infty \left[u\phi \right]_0^\infty \, dx + \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty u\phi_t + f(u)\phi_x \, dx \, dt. \tag{4.11}$$

Définition 4.1

$u(x,t)$ est une solution faible de la loi de conservation $u_t + f(u)_x = 0$ si pour toute fonction $\phi(x,t)$ infiniment différentiable avec un support compact.

On a

$$-\int_{-\infty}^\infty \left[u\phi \right]_0^\infty \, dx + \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty u\phi_t + f(u)\phi_x \, dx \, dt = 0$$

alors

$$\int_{-\infty}^\infty \left[u\phi \right]_0^\infty \, dx = \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty u\phi_t + f(u)\phi_x \, dx \, dt$$

est comme $u_t + [f(u)]_x + 0$ alors

$$\int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty u\phi_t + f(u)\phi_x \, dx \, dt = -\int_{-\infty}^\infty \phi(x,0)u(x,0) \, dx \tag{4.12}$$

Une telle fonction $\phi(x,t)$ est appelée une fonction test.

le problème de Rieman :

Dans cette partie, nous considérons le problème de valeur initiale suivant pour l'équation de Burgers :

$$u(x,0) = \begin{cases} u_L & x > 0 \\ u_R & x < 0 \end{cases}$$

Ce problème est appelé le problème de Riemann. Nous examinons deux cas :

Cas 1 :

$u_L > u_R$.Dans ce cas, les caractéristiques couvrent l'ensemble de l'espace (x,t) mais se croisent également. Ainsi, la construction de la solution en utilisant uniquement les caractéristiques devient ambiguë. Montrons que, dans ce cas, il existe une unique solution faible définie par

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L & x < st \\ u_R & x > st \end{cases} \tag{4.13}$$

Où $\quad s = \dfrac{u_L + u_R}{2}$.

Preuve :

Soit $\phi(x,t)$ une fonction de test. Supposons d'abord que le support U soit entièrement contenu dans l'un des ensembles $x < st$ ou $x > st$.

Puisque $u(x,t)$ est constant dans chacun de ces ensembles, il satisfait l'équation de Burgers sur le support de ϕ.

En utilisant l'équation (4.11), nous concluons que l'équation (4.12) est vérifiée.

Maintenant, supposons que le support U de ϕ soit divisé par la ligne $x = st$ en deux ensembles U_L et U_R. Alors, nous avons :

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \phi_t u + \phi_X f(u)\,dx\,dt = \int\int_{u_L} \phi_t u + \phi_X f(u)\,dx\,dt + \int\int_{U_R} \phi_t u + \phi_X f(u)\,dx\,dt$$

En appliquant l'identité de Green :

$$\int_{\partial D} P\,dt + Q\,dx = \int\int_D (P_x - Q_t)\,dx\,dt \tag{4.14}$$

En observant que u est constant à l'intérieur de U_L et de U_R, nous avons donc $(\phi u)_t = \phi_t u$ et $(\phi f(u))_x = \phi_x f(u)$.

En utilisant cette observation, poursuivons :

$$\begin{aligned}
&= \int_{\partial U_L} \phi\left(\frac{u_L^2}{2s}\,dt - u_L\,dx\right) + \int_{\partial U_R} \phi\left(\frac{u_R^2}{2s}\,dt - u_R\,dx\right) \\
&= \int_{x=st} \phi\left(\frac{u_L^2}{2s} - u_L\right)dx - \int_{x=st} \phi\left(\frac{u_R^2}{2s} - u_R\right)dx - \int_{-\infty}^0 \phi\,u_L\,dx - \int_0^\infty \phi\,u_R\,dx \\
&= \int_{x=st} \left(\frac{u_L^2 - u_R^2}{2s} - (u_L - u_R)\right)\phi\,dx - \int_{-\infty}^\infty \phi(x,0)u(x,0)\,dx
\end{aligned}$$

La première intégrale dans la dernière égalité est nulle pour toute fonction de test ϕ si et seulement si $s = (u_L + u_R)/2$.

Ainsi, la solution donnée par l'équation (4.13) est l'unique solution faible pour le problème de Riemann dans le cas où $u_L > u_R$.

La discussion dans la partie 1 indique que la solution donnée l'équation (4.13) par la solution de viscosité nulle, c'est-à-dire la limite des solutions de l'équation (4.1) lorsque $\nu \longrightarrow 0$.

Cas 2 :

$u_L < u_R$. Alors, les caractéristiques ne se croisent pas mais ne couvrent pas tout l'espace (x,t). Il existe de nombreuses solutions faibles.

Deux d'entre, appelée le ventilateur de raréfaction ou la rareté transsonique, est donnée par :

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x < u_L t \\ x/t, & u_L t \le x \le u_R t \\ u_R, & u_R t \end{cases} \tag{4.15}$$

Une autre solution, est appelée le choc de raréfaction. Bien qu'il existe de nombreuses solutions faibles, une seule d'entre elles est physique, c'est-à-dire la solution avec viscosité nulle.

C'est la solution du ventilateur de raréfaction. On peut rejeter toutes les solutions faibles non physiques en analysant l'équation (4.1). Cependant, l'analyse de l'équation avec une viscosité non nulle est plus difficile que celle avec une viscosité nulle.

Une condition supplémentaire, plus simple à vérifier, appelée condition d'entropie, a donc été introduite pour éliminer les solutions faibles non physiques. Il existe plusieurs variations de la condition d'entropie. Nous n'énoncerons que la plus simple.

Définition 4.2

Une discontinuité se propageant à la vitesse s, donnée par l'équation (4.8), satisfait la condition d'entropie si $f'(u_L) > s > f'(u_R)$.
Pour l'équation de Burgers, cette condition d'entropie se réduit à l'exigence que si une discontinuité se propage à la vitesse s, alors : $u_L > u_R$.

conclusion

Les solutions distributionnelles de l'équation de Burgers jouent un rôle crucial dans la compréhension des phénomènes non linéaires où les solutions classiques échouent à décrire des réalités physiques comme les chocs et les discontinuités.

Elles permettent de modéliser des comportements réalistes dans divers contextes scientifiques et d'ingénierie, en fournissant un outil robuste pour analyser et prédire les dynamiques complexes des systèmes non linéaires.

Bibliographie

[1] Me. KHANKAN VONGSAVANG. *Burger's Equations and Some Applications*. Thesis started in september, 2016.

[2] C. ZUILY. *È léments de distributions et d'équations aux dérivées partielles :Cours et problèmes résolus*. Professeur à l'université de Paris XI-Orsay,Dunod, Paris, 2002.

[3] M. CAMERON. *Notes on Burger's équation*.

[4] A. HITTA. *Distributions et EDP Espaces vectoriels topologiques*. Univ, 8 Mai 1945, Guelma, Janvier 2010.

[5] A. SALIH. *Burgers Equation*. Depatment of Aerospace Engineering Indian Institute of space and technology, Thiruvananthapuram, 18 February 2016.

[6] F. BARBARESCO. *Calcul des variations et analyse spectrale : équations de Fourier et de Burgers pour modèle autorégréssifs régularisés*.

[7] J. Coulombel. *Equations hyperboliques non-lin ´eaires*. 23 septembre 2009.

[8] A. BIGOT. *Équation de Burgers généralisée*. Objectif Agrégation Beck, Malick, Peyré.