Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr. Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique

THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme

Doctorat en Mathématiques

Spécialité : Analyse et Modélisation Mathématiques

ÉTUDE DES b-(SOMMET OU ARÊTE)-COLORATIONS DANS LES GRAPHES ET LEURS COMPORTEMENTS VIS À VIS DE CERTAINES OPÉRATIONS

Présentée par

Amel BENDALI-BRAHAM

Soutenue devant le jury composé de :

S. KOUADIK, Prof., UYFM, Médéa ..... Président

M. BLIDIA, Prof., USTB, Blida 1 ..... Directeur de thèse

N. IKHLEF ESCHOUF, MCA, UYFM, Médéa ..... Co-directeur de thèse

A. BERRACHEDI, Prof., USTHB, Alger ..... Examinateur

I. BOUCHEMAKH, Prof., USTHB, Alger ..... Examinatrice

M. CHELLALI, Prof., USTB, Blida 1 ..... Examinateur

D. LAISSAOUI, MCA, UYFM, Médéa ..... Examinateur

2017-2018

Table des matières

REMERCIEMENTS **6**

RÉSUMÉ **8**

ABSTRACT **9**

INTRODUCTION **11**

1 Définitions et notations basiques **15**

1.1 Définitions et notations 15

1.1.1 Terminologie 15

1.1.2 Voisinages et degrés 16

1.1.3 Chaînes et cycles 16

1.1.4 Sous-graphes et graphes partiels 17

1.1.5 Ensemble maximal (resp., minimal) / maximum (resp., minimum) . . . 17

1.1.6 Graphes particuliers 17

1.1.7 Cliques, stables et couplages 19

1.2 Quelques opérations sur les graphes 19

1.3 Complexité algorithmique 21

1.3.1 Problème de décision 22

1.3.2 Classes de complexité 22

1.4 Coloration des sommets d'un graphe 24

1.4.1 Coloration propre et nombre chromatique 24

1.4.2 a-coloration et nombre a-chromatique 26

1.4.3 b-coloration et nombre b-chromatique 26

2 Quelques résultats existants sur la b-coloration **28**

2.1 Encadrement et valeurs exactes du nombre b-chromatique de quelques classes de graphes 28

2.2 Quelques applications de la b-coloration 32

2.3 Notions liées à la b-coloration 33

2.3.1 Graphes b-continus 33

2.3.2 Graphes b-monotones 34

2.3.3 Graphes b-parfaits 34

2.3.4 Graphes b-critiques 35

2.3.5 Graphes b_e-critiques 37

3 Caractérisation des graphes arête b-critiques et des arbres b_e-critiques **39**

3.1 Graphes arête b-critiques 39

3.1.1 Résultats préliminaires 39

3.1.2 Caractérisation des graphes arête b-critiques 40

3.2 Arbres b_e-critiques 43

3.2.1 Résultats préliminaires sur les arbres b_e-critiques 43

3.2.2 Caractérisation des arbres b_e-critiques 49

4 La b-coloration du prisme complémentaire de certains graphes particuliers **54**

4.1 Définition du prisme complémentaire d'un graphe 54

4.2 Nombre b-chromatique du prisme complémentaire de certains graphes 55

4.3 Graphes sans triangle avec $b\left(G\overline{G}\right) = |V(G)|$ 63

5 b-coloration des arêtes **65**

5.1 État de l'art 65

5.2 L'indice b-chromatique de certains graphes classiques 69

5.3 L'indice b-chromatique du graphe milieu et total d'une chaîne et d'un cycle . . 70

Conclusion et Perspectives **83**

Table des figures

1.1 Une chenille $C(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$. 18

1.2 Une chenille et son graphe adjoint. 19

1.3 Exemple de la suppression d'un sommet v d'un graphe. 20

1.4 Exemple de la suppression d'une arête uv d'un graphe 20

1.5 Exemple de la subdivision d'une arête uv d'un graphe 20

1.6 Exemple de la contraction d'une arête uv d'un graphe 21

1.7 $\chi(C_8) < b(C_8) < \psi(C_8)$ 27

2.1 Un graphe non b-continu. 34

2.2 Un graphe non b-monotone, avec $b(G) = 3$ tandis que $b(2D) = 4$ ($D = K_4 - e$). . 34

2.3 Un graphe b_e-critique avec $b(G) = 4$ et $b(G_e) = 3$. 38

3.1 Exemples d'un arbre qui appartient à $\mathscr{T}_1^4$ 51

3.2 Exemples d'un arbre qui appartientà $\mathscr{T}_2^4$ 51

3.3 L'arbre T_0^4 51

4.1 Prisme complémentaire d'un cycle d'ordre 5. 55

4.2 Exemple d'un prisme complémentaire de C_8 avec $b(G_8) = 6$ où l'entier entre parenthèses représente la couleur du sommet. 57

5.1 Un graphe avec $\chi'(G) = 6$. 66

5.2 Une b-coloration des arêtes de W_4 avec 5 couleurs. 70

5.3 Exemple d'un graphe milieu et d'un graphe total d'une chaîne. 71

5.4 Une b-coloration des arêtes de $M(P_n)$ pour $n \in \{5,6,7\}$. 72

5.5 Une b-coloration des arêtes de $M(P_n)$ pour $n \in \{8,9,10\}$. 72

5.6 Une b-coloration des arêtes de $M(P_{11})$. 73

5.7 Une b-coloration des arêtes de $T(P_3)$. 73

5.8 Une b-coloration des arêtes de $T(P_4)$. 74

5.9 Une b-coloration des arêtes de $T(P_5)$ avec 6 couleurs. 74

5.10 Une b-coloration des arêtes de $T(P_5)$. 74

5.11 Une b-coloration des arêtes de $T(P_n)$ avec 6 couleurs pour $n \in \{6,7\}$. 75

5.12 Une b-coloration des arêtes de $T(P_8)$. 75

5.13 Une b-coloration des arêtes avec 5 couleurs de $M(C_n)$ pour $n \in \{3,4,5\}$. 76

5.14 Une b-coloration des arêtes de $M(C_6)$. 76

5.15 Une b-coloration des arêtes de $M(C_n)$ pour $n \in \{7,8\}$. 77

5.16 b-coloration d'arêtes de $T(C_3)$ avec 6 couleurs. 77

5.17 b-coloration d'arêtes de $T(C_4)$ avec 6 couleurs. 78

5.18 b-coloration d'arêtes de $T(C_4)$ avec 7 couleurs. 79

5.19 b-coloration d'arêtes de $T(C_4)$ avec 7 couleurs. 80

5.20 b-coloration d'arêtes de $T(C_4)$ avec 7 couleurs. 80

5.21 b-coloration d'arêtes de $T(C_4)$ avec 7 couleurs. 81

5.22 b-coloration d'arêtes de $T(C_4)$ avec 7 couleurs. 81

5.23 Une b-coloration des arêtes de $T(C_5)$ et $T(C_6)$. 82

REMERCIEMENTS

En premier lieu et tout d'abord, je tiens à exprimer mes sincères remerciements et ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse Monsieur *BLIDIA Mostafa*, Professeur à l'Université Saâd Dahlab de Blida 1, et à mon co-directeur de thèse Monsieur *IKHLEF-ESCHOUF Noureddine*, Maître de conférences à l'Université Dr. Yahia Farès de Médéa, de n'avoir jamais douté de mes capacités et de m'avoir fait l'honneur d'être encadrée par des chercheurs aussi brillants comme vous. Je tiens à vous remercier pour votre disponibilité, votre soutien permanent, votre écoute, vos conseils, votre aide, votre patience, votre respect, votre bonne humeur... La liste est encore longue. Ces années à travailler ensemble resterons pour moi une très bonne expérience, tant au niveau scientifique qu'au niveau humain.

Je tiens à exprimer également mes plus vifs remerciements et toute ma gratitude à :

— Monsieur *S. KOUADIK*, Professeur à l'Université Dr. Yahia Farès de Médéa, de m'avoir fait l'honneur de présider ce jury.
— Monsieur *A. BERRACHEDI* Professeur à l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene d'Alger, Madame *I. BOUCHEMAKH* Professeur à l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene d'Alger, Monsieur *M. CHELLALI* Professeur à l'Université de Saâd Dahlab de Blida et Monsieur *D. LAISSAOUI* Maître de Conférence à l'Université Dr. Yahia Farès de Médéa pour avoir accepté d'assister en qualité d'examinateurs à la soutenance de cette thèse.

J'exprime tous mes remerciements à Monsieur *BOUCHOU Ahmed*, Maître de Conférence à l'Université de Médéa, Monsieur *ZEMIR Mohamed*, Maître Assistant à l'Université de Médéa, et Monsieur *ZAMIME Mohamed*, Maître de Conférence à l'Université de Médéa, pour vos nombreux conseils scientifiques et vos encouragements.

J'adresse un grand merci à mon collègue Monsieur *BOUDJEBBOUR Abdelmadjid*, Maître de Conférence à l'Université de Médéa, merci pour vos encouragement et vos conseils judicieux, et surtout pour votre aide pendant les moments difficiles.

J'adresse mes vifs remerciements à tous les membres de l'équipe du département Sciences de la Nature et de la Vie (SNV), sans exception, ma deuxième famille, pour la bonne humeur et pour les moments de partage d'expériences.

Je présente aussi mes sincères remerciements à Madame *AYADI Souad*, je te suis profondément reconnaissant pour ce que tu as fait pour moi. Une chose est sure : je ne t'oublierais jamais.

Je remercie chaleureusement mes plus proches amies *AIOULA Soumia*, *BELHADJER Amina*, *YOUSSEF ETTOUMI Kaouthar*, *MOSTFAOUI Soumia* et *SEMRANI Soumia* pour les moments inoubliables. Merci d'être à côté de moi dans les moments difficiles, de m'écouter et de me motiver lorsque j'ai besoin. Merci, d'être vous et d'être des amies à moi.

Un merci spécial à ma famille. À mes *parents* pour votre soutien inconditionnel depuis toujours. Merci du cœur à mes sœurs *Souad* et *Wahiba* pour votre compréhension et de m'avoir toujours soutenu et encouragé dans mes choix. Merci à mon frère *Abderrahmane* de ne jamais me laisser seule, mes remerciements ne pourront jamais égaler ton grand cœur qui m'a apporté du soutien au moment où j'avais besoin d'aide. Tu es mon ange gardien.

Merci...c'est un mot trop simple. Ce que je souhaiterai exprimer est au dessus de cela. Je suis à la fois touché et reconnaissant pour l'aide que vous m'avez apportée...et je ne pourrai jamais vous remercier assez.

RÉSUMÉ

Dans cette thèse, nous nous intéressons essentiellement à la notion de b-coloration dans les graphes.

Soit G = (V, E) un graphe. Une b-coloration des sommets (resp., d'arêtes) est une coloration propre de sommets (resp., arêtes) de G telle que chaque classe de couleur possède au moins un sommet (resp. une arête) adjacent(e) à au moins un sommet (resp., une arête) dans chaque classe de couleur autre que la sienne. Le nombre b-chromatique (resp., l'indice b-chromatique), noté $b(G)$ (resp., $b'(G)$) est le nombre maximum de couleurs pour lequel le graphe G admet une b-coloration des sommets (resp., arêtes).

Dans la première partie de cette thèse, nous nous intéressons à la b-coloration des sommets d'un graphe. Tout d'abord, nous caractérisons tous les graphes dont la suppression d'une arête quelconque fait diminuer le nombre b-chromatique, un tel graphe est dit arête b-critique. Ensuite, nous donnons une caractérisation des arbres dits b_e-critiques, c'est-à-dire les arbres dont la contraction d'une arête quelconque fait diminuer leur nombre b-chromatique. Enfin, nous déterminons la valeur exacte du nombre b-chromatique du prisme complémentaire de certains graphes, ainsi nous donnons une borne supérieure de ce paramètre et une caractérisation du prisme complémentaire des graphes sans triangle dont cette borne est atteinte.

Dans la deuxième partie, nous nous intéressons à la b-coloration des arêtes, où nous donnons la valeur exacte de l'indice b-chromatique de certains graphes particuliers.

ABSTRACT

In this thesis, we are mainly interested in the notion of b-coloring in graphs.

Let G = (V, E) be a graph. A b-vertex (resp., b-edge) coloring of a graph G is a proper vertex (resp., edge) coloring of G such that each color class contains a vertex (resp., edge) that has at least one neighbor in every other color classes. The b-chromatic number (resp., b-chromatic index), denoted $b(G)$ (resp., $b'(G)$) of a graph G is the largest integer k for which G has a b-vertex (resp., b-edge) coloring with $b(G)$ (resp., $b'(G)$) colors.

In the first part of this thesis, we are interested of b-vertex coloring of a graph. At first, we characterize the family of graphs whose the removal of any edge decreases the b-chromatic number, such graph is called edge b-critical. Then, we give a characterization of b_e-critical trees, that is, the trees whose b-chromatic number decreased by contracting any edge. Finally, we determine the exact value of the b-chromatic number of some complementary prism of some graphs, moreover we give an upper bound of this parameter and a characterization of the complementary prism of triangle-free graphs reaches this bound.

In the second part, we are interested in the b-edges coloring of graph, from where we give the exact value of the b-chromatic index of some particular graphs.

مُلَخَص

فِي هَذِه الأُطرُوحَة نُرَكِزُ علَى دِرَاسَةِ مَفهُوم ب – تلوِين فِي البَيَانَات.

لِيَكُن $G = (V,E)$ بَيَان. اَلتَلوِين ب – لونِي لِرُؤُوس (حَوَاف عَلَى التوَالِي) لبَيَان G هو تلوِين أجود لِرُؤُوس (حَوَاف عَلَى التوَالِي) اَلبيَان G حيث كل فئِة لونِية تحتوِي عَلَى الأقل عَلَى رأَس (حَافة عَلَى التوَالِي) مجَاور لرأَس (حَافة عَلَى التوَالِي) عَلَى الأقل من جمِيعَ الفئِات اللّونيَة.

اَلعَدَد ب – لونِي (المُؤشر ب – لونِي عَلَى التوَالِي) لبيَان G ، يرمز له ب $b(G)$ ($b'(G)$ عَلَى التوَالِي)، هو أَكبر عَدَد من الأَلوَان، بحيث من أَجله البيَان G يقبل ب – تلوِين لِرُؤُوسه (حَوَافه عَلَى التوَالِي).

فِي القسم الأَول من هذه الأُطرُوحَة، نهتم بَال ب – تَلوِين رُؤُوس بيَان مَا. فِي البدَاية نقُوم بتمِيز كل مجمُوعَة البيَانَات التِي من أَجلهَا ينخفض العَدَد ب – لونِي عند تعَدِيل البيَان بوَاسِطة حذف أَي حَافة، هَذَا النوعَ من البَيَانَات يسمَى حَافة ب – حرجة. ثم نعطِي تمِيز لأَشجَار تسمَى e ب – حرجة، و هي الأَشجَار التِي من أَجلهَا ينخفض العَدَد ب – لونِي عَند تعَدِيل البيَان بوَاسِطة تقلِيص أَي حَافة e . و أَخِيرًا، نقُوم بتحدِيد القِيمة الصحِيحة للّعدَد ب – لونِي للّمنشُور التكمِيلِي لبعض البَيَانَات، كمَا سنقدم قِيمة حدية عليًا للّعدَد ب – لونِي لهَذَا النوع من البيَانَات ، و سنميز المنشُورَات التكمِيلية للّبيَانَات الغير المثلثية التِي من أَجلهَا يكُون العَدَد ب – لونِي مسَاو للّقِيمة الحَدية السَابقة.

فِي القِسم الثَانِي، نركز عَلَى ال ب – تلوِين حوَاف بيَان، حيث سنقدم القيم الصحِيحة للّمُؤشر ب – لونِي لبعض البيَانَات.

INTRODUCTION

Souvent, le schématisme d'un problème concret est nécessaire pour l'éclairer et simplifier la compréhension, et en conséquence obtenir des solutions efficaces. Donc, parfois

"Un bon dessin vaut mieux qu'un long discours"

Napoléon Bonaparte

Ce schéma représente les différents objets du problème sous forme de points et les relations existantes entre eux sous forme de lignes (peuvent être orientées). Ce schéma est appelé *graphe* et les points et les lignes sont appelés *sommets* et *arêtes* (*arcs* si les lignes sont orientées) respectivement. Alors, un graphe est une manière de pensé qui permet la modélisation d'une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude des sommets et des arêtes.

Ce type de problèmes fait le but d'un très vaste domaine qui s'appelle "*la théorie de graphes*". Ce domaine s'est développé dans des divers disciplines comme la chimie, la biologie, la sociologie, l'économie ... Cela explique pourquoi la théorie des graphes devient le domaine le plus populaire des mathématiques discrètes malgré son jeune âge.

Historiquement, la théorie des graphes a été commencée depuis $18^{\text{ème}}$ siècle, et trouve son origine dans l'étude du problème des sept ponts de la ville russe de Königsberg, posé par le mathématicien suisse *Leonhard Euler*, lorsqu'il a pensé à la possibilité de traverser chacun des ponts, une et une seule fois et de revenir à son point de départ.

Actuellement, la théorie des graphes comprend plusieurs domaines les uns aussi intéressant que les autres, à titre d'exemple la coloration, la domination, la stabilité, le couplage, etc....

Le problème de coloration des sommets d'un graphe est l'une des origines de la théorie des graphes. Il remonte au $19^{\text{ème}}$ siècle, lorsque le problème des quatre couleurs est posé

pour la première fois par Francis Guthrie, quand il a observé que tous les comtés de l'Angleterre peuvent se colorer avec seulement quatre couleurs, sous la condition que tous deux comtés voisins sont colorés différemment, ce qui l'a incité à réfléchir à la possibilité de colorer n'importe quelle carte géographique qu'avec quatre couleurs, de manière à éviter que deux pays voisins aient la même couleur. La solution de ce problème, n'a été donnée qu'en 1976, où deux chercheurs américains, K. Appel et W. Haken [2, 3] ont pu le résoudre. Et depuis, les problèmes de coloration sont au cœurs de la théorie des graphes et font l'objectif de plusieurs recherches. Ils apparaissent dans plusieurs domaines pour modéliser de nombreux problèmes pratiques, nous citons par exemple les problèmes d'ordonnancement, de planning de la vie de tous les jours, et dans le domaine des réseaux/télécom, etc.... Il existe plusieurs types de coloration, comme la coloration des sommets, la coloration des arêtes, la coloration totale, etc. A ceci peuvent s'ajouter des différentes contraintes pour obtenir ainsi de nouveaux paramètres de coloration ; parmi ces paramètres nous trouvons le *nombre chromatique*. Ce paramètre peut être obtenu à partir d'une affectation d'un nombre minimum de couleurs aux sommets d'un graphe de telle sorte que deux sommets adjacents ne peuvent pas avoir la même couleur. Lorsque les couleurs de sommets adjacents sont différents, la coloration est dite *propre*. Une classe de couleur i est un ensemble de sommets stable colorés avec la même couleur i. Le problème de décision lié à ce paramètre est NP-complet. Pour cette raison, plusieurs travaux ont été menés pour borner ce paramètre en fonction d'autres paramètres de graphe.

Le nombre chromatique a permis d'introduire de nombreux paramètres de coloration. La plupart de ces derniers cherchent à minimiser le nombre de couleurs nécessaires à la coloration d'un graphe. Cependant, il existe d'autres paramètres qui ont pour objet l'utilisation du plus grand nombre possible de couleurs, on cite par exemple le nombre *b-chromatique* qui fait l'un des objets de notre étude dans cette thèse.

Une b-coloration des sommets d'un graphe G est une coloration propre telle que toute classe de couleur i contient au moins un sommet qui possède au moins un voisin dans chaque classe de couleur $j \neq i$. Un tel sommet est appelé *b-sommet*. Le nombre b-chromatique, noté b(G), est le nombre maximum de classes de couleurs dans une b-coloration. Ce paramètre a été introduit, en 1999, par les chercheurs Irving et Manlove [53, 74].

Le problème de coloration des arêtes a été posé en relation avec la conjecture des quatre couleurs, en 1880. Le premier article traitant le problème de coloration des arêtes a été écrit par Tait en 1880, où il a prouvé que le problème des quatre couleurs est équivalent au problème de coloration d'arêtes des graphes planaires cubiques avec trois couleurs [81]. Ce type de coloration consiste à affecter des couleurs aux arêtes d'un graphe à condition que chaque pair d'arêtes ayant une extrémité commune ne peuvent pas avoir la même couleur. Cette coloration est, donc, *propre*. L'*indice chromatique* est le plus petit entier k tel que G admet une coloration d'arêtes avec k couleurs. Beaucoup de paramètres sont dérivés de l'indice chromatique, la plupart de ces paramètres cherchent à minimiser le nombre de couleurs dans une coloration des arêtes d'un graphe, et d'autres cherchent à maximiser le nombre de couleurs. Parmi ces derniers, nous citons l'*indice b-chromatique,* qui fait l'objet de notre étude dans le dernier chapitre de cette thèse. Une b-coloration des arêtes d'un graphe est une coloration propre de ses arêtes de telle sorte que pour toute couleur i il existe au moins une arête, de cette couleur, adjacente à au moins une arête de toutes les autres couleurs différentes de i. Une telle arête est dite *b-arête*. L'indice b-chromatique d'un graphe est le nombre maximum de couleur pour lequel le graphe admet une *b-coloration des arêtes*. L'étude de ce paramètre n'a été commencée que dans les dix derniers années.

Il convient de mentionner que toutes les colorations considérées dans ce manuscrit sont propres, même si ce n'est pas toujours précisé.

Dans cette thèse nous nous intéressons principalement à la b-coloration des sommets et la b-coloration des arêtes.

Cette thèse comporte cinq chapitres dont voici une description.

Chapitre 1 : Définitions et notations basiques.

Nous rappelons les principales définitions nécessaires à la compréhension du contenu de cette thèse, et nous exposons un aperçu de la coloration classique, la a-coloration et la b-coloration.

Chapitre 2 : Quelques résultats existants sur la b-coloration.

Nous donnons un recueil des principaux résultats existants sur la b-coloration des sommets d'un graphe, bornes et valeurs exactes du nombre b-chromatique pour certaines classe de graphes. En outre, nous définissons quelques notions liées à la b-coloration, comme la

b-continuité, la b-perfection, la b-monotonie, les graphes arête (resp., sommet) b-critiques et nous introduisons aussi une nouvelle notion lié à la b-coloration, à savoir les graphes b_e-critiques.

Chapitre 3 : Caractérisation des graphes arête b-critiques et des arbres b_e-critiques.

Dans la première partie de ce chapitre, nous étudions les graphes dont la suppression d'une arête quelconque fait diminuer leur nombre b-chromatique, un tel graphe est dit arête b-critique. Nous présentons, d'abord, un résultat fondamental caractérisant les graphes arête b-critiques établi par Ikhlef Eschouf [54], ensuite, en se basant sur ce résultat, nous caractérisons toute la famille des graphes arête b-critiques. La deuxième partie de ce chapitre est consacré à l'étude des arbres dont la contraction d'une arête quelconque fait diminuer son nombre b-chromatique, un tel arbre est dit b_e-critique. En effet, nous caractérisons la famille des arbres b_e-critiques après avoir donné quelques propriétés fondamentales de ces arbres.

Chapitre 4 : b-coloration du prisme complémentaire de certains graphes particuliers.

On s'intéresse, dans ce chapitre, à la détermination de la valeur exacte du nombre b-chromatique du prisme complémentaire de certains graphes particuliers, comme le cycle, la chaîne et le graphe biparti complet. Nous donnons, également, une borne supérieure du nombre b-chromatique du prisme complémentaire d'un graphe quelconque en fonction de son ordre. Enfin, nous caractérisons le prisme complémentaire des graphes sans triangle d'ordre n ayant pour nombre b-chromatique égal à n.

Chapitre 5 : Indice b-chromatique de certains graphes.

Ce chapitre est consacré à la b-coloration des arêtes de certains graphes particuliers. Nous donnons la valeur exacte de l'indice b-chromatique de certains graphes, comme la chaîne, le cycle, la roue, la double étoile, le graphe milieu d'une chaîne et d'un cycle, ainsi que le graphe total d'une chaîne et d'un cycle.

La thèse s'achève par une conclusion sur l'ensemble des travaux réalisés et sur les perspectives futures dans ce domaine.

Chapitre 1

Définitions et notations basiques

Dans ce chapitre, nous donnons la terminologie utilisée dans cette thèse. Nous commençons par introduire quelques concepts de base de la théorie des graphes, ainsi que les notations nécessaires à la bonne compréhension de ce document. Ensuite, nous présentons quelques opérations sur les graphes qui nous seront utiles dans la suite. Enfin, nous exposons un aperçu de la coloration classique, la a-coloration et la b-coloration.

1.1 Définitions et notations

Dans cette section, nous rappelons les principales notions nécessaires à la compréhension du contenu de cette thèse.

1.1.1 Terminologie

— Un *graphe fini* G est un couple (V, E) composé d'un ensemble fini et non vide de points V dits *sommets*, et d'un ensemble E de lignes reliant certains de ces sommets dites *arêtes*.

— Si u et v sont deux sommets reliés par une arête e, alors u et v sont dits *adjacents* ou *voisins*, et e est dite *incidente* à u et v, de plus u et v sont appelés les *extrémités* de e, on écrit donc $e = uv$ ou $e = vu$.

— Un sommet u est dit *isolé* s'il n'existe aucune arête dans E incidente à u.

— Une arête reliant le même sommet est dite *boucle*. Un ensemble d'arêtes est dits *multiples* s'ils ont les mêmes extrémités.

— Un graphe *simple* est un graphe sans boucles et sans arêtes multiples.

— Le nombre de sommets et d'arêtes d'un graphe G sont appelés l'*ordre* de G, noté n, et la *taille* de G, notée m, respectivement.

— Deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$. G et G′ sont dits *isomorphes* s'il existe une bijection f de V vers V′ telle que pour tous u, $v \in V$, on a $uv \in E$ si et seulement si $f(u) f(v) \in E'$.

Notons que tous les graphes considérés dans cette thèse sont non-orientés, finis, simples et sans sommets isolés.

1.1.2 Voisinages et degrés

— Le *voisinage ouvert* d'un sommet v d'un graphe $G = (V, E)$ est défini par l'ensemble suivant $N_G(v) = \{u \in V : uv \in E\}$.

— Le *voisinage fermé* d'un sommet v d'un graphe $G = (V, E)$, noté $N_G[v]$, est $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.

— Le nombre de voisins d'un sommet v d'un graphe G est appelé *degré* de v, noté $d_G(v)$ (ie. $d_G(v) = |N_G(v)|$).

— Le degré d'une arête uv d'un graphe $G = (V, E)$, noté $d_G(uv)$, est défini comme suit $d_G(uv) = |N(u)| + |N(v)| - 2$.

— Les sommets isolés sont de degré nul.

— Un sommet de degré 1 est dit sommet *pendant*, et tout sommet adjacent à un sommet pendant est appelé *support*.

— Le degré minimum et le degré maximum d'un graphe G sont notés par $\delta(G)$ et $\Delta(G)$ respectivement.

1.1.3 Chaînes et cycles

— Une *chaîne* d'ordre k (avec $k \geq 2$), notée P_k, est une suite finie d'arêtes $v_i v_{i+1}$, avec $i \in \{1, ..., k-1\}$. Les sommets v_1 et v_k sont les *extrémités* de P_k. La *longueur* de la chaîne P_k est le nombre de ses arêtes, donc c'est $k-1$. Une chaîne passant une et une seule

fois par chacune de ses arêtes est dite *simple*. Une chaîne passant une et une seule fois par chacun de ses sommets est dite *élémentaire*. Une arête reliant deux sommets non succéssifs dans une chaîne est dite une *corde*.

— La *distance* entre deux sommets u et v d'un graphe G, notée $d(u,v)$, est la longueur de la plus petite chaîne les reliant. *L'excentricité* de v , noté $exc(v)$, est définie par $exc(v) = \max\{d(v,w) : w \in \mathrm{V}\}$. Le *diamètre* de G est $diam(\mathrm{G}) = \max\{exc(v) : v \in \mathrm{V}\}$. Le *rayon* de G est $r(\mathrm{G}) = \min\{exc(v) : v \in \mathrm{V}\}$. Un sommet de G ayant une excentricité minimale est appelé *centre*.

— Un *cycle* d'ordre k (avec $k \geq 3$), noté C_k, est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues. Un cycle élémentaire C_n induit par n sommets est un cycle dont les sommets sont distincts. Le nombre d'arêtes d'un cycle représente sa *longueur*.

— La longueur du plus petit cycle d'un graphe G est appelée *maille* de G, notée $g(\mathrm{G})$.

1.1.4 Sous-graphes et graphes partiels

— $\mathrm{H} = (\mathrm{V}', \mathrm{E}')$ est un *sous-graphe* de $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ si $\mathrm{V}' \subseteq \mathrm{V}$ et $\mathrm{E}' \subseteq \mathrm{E}$. En outre, si $\mathrm{E}' = \{uv \in \mathrm{E} : u, v \in \mathrm{V}'\}$, alors H est dit sous-graphe induit (ou engendré) par V', dans ce cas H est noté par $\mathrm{G}[\mathrm{V}']$.

— $\mathrm{H} = (\mathrm{V}', \mathrm{E}')$ est un *graphe partiel* d'un graphe $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ si $\mathrm{V}' = \mathrm{V}$ et $\mathrm{E}' \subseteq \mathrm{E}$.

1.1.5 Ensemble maximal (resp., minimal) / maximum (resp., minimum)

Soit $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ un graphe.

— Un sous-ensemble A de V est dit *minimal* (resp., *maximal*) par rapport à une propriété $\mathscr{P}$ s'il n'existe pas d'ensemble $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$ (resp., $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$) tel que $\mathrm{G}[\mathrm{B}]$ vérifie $\mathscr{P}$.

— Un sous-ensemble A de V est dit *minimum* ou de *taille minimale* (resp., *maximum* ou de taille *maximale*) par rapport à une propriété $\mathscr{P}$ s'il n'existe pas d'ensemble $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{V}$ tel que $\mathrm{G}[\mathrm{B}]$ vérifie $\mathscr{P}$ et $|\mathrm{A}| \geq |\mathrm{B}|$ (resp., $|\mathrm{A}| \leq |\mathrm{B}|$).

1.1.6 Graphes particuliers

— Un graphe $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ est dit *connexe* si pour toute paire de sommets, il existe une chaîne les reliant. Une *composante connexe* de G est un sous-graphe de G qui est

maximal pour la propriété d'être connexe. Un graphe qui n'est pas connexe est dit *non connexe*.

— Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle. Tout arbre à n sommets contient exactement $n-1$ arêtes. Et, tout sommet de degré 1 dans un arbre est appelé une *feuille*.

— Une *forêt* est un graphe non connexe où chaque composante connexe est un arbre.

— Une *chenille*, notée $C(t_1, t_2, ..., t_n)$, est un arbre dont la suppression des sommets pendants adjacents aux sommets $t_1, t_2, ..., t_n$ produira une chaîne t_1-t_2-...-t_n (Voir Figure 1.1). Si $n = 2$, alors $C(t_1, t_2)$ est dite double étoile, et on la note par $S_{k,l}$.

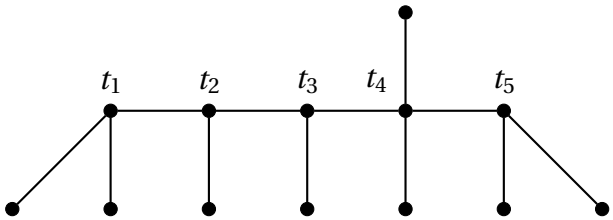


FIGURE 1.1 – Une chenille $C(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$.

— *Graphe complet* d'ordre n, noté K_n, est un graphe dont tous ses sommets sont deux à deux adjacents.

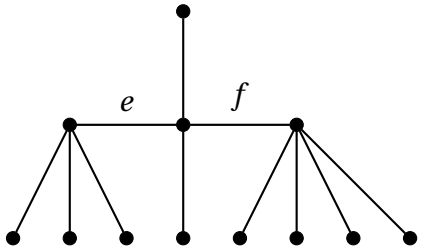
— *Graphe complémentaire* d'un graphe $G = (V, E)$, noté $\overline{G}$, est un graphe d'ensemble de sommets V et ensemble d'arêtes $E\left(\overline{G}\right) = \{uv : u, v \in V \text{ et } uv \notin E(G)\}$.

— Un graphe $G = (V, E)$ est dit *d-régulier* (resp., *d-arête régulier*) si tous ses sommets (resp., arêtes) sont de degré d. Si $d = 3$, alors G est dit *cubique*.

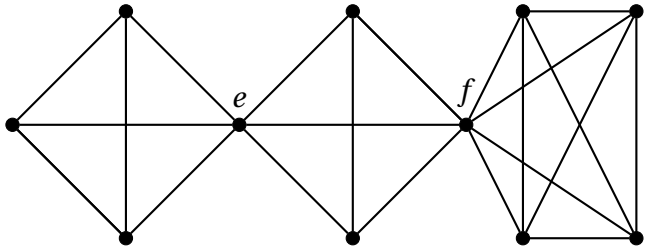
— Un graphe $G = (V, E)$ est dit *biparti* si l'ensemble de ses sommets V peut être partitionné en deux sous-ensembles disjoints V_1 et V_2 de sorte que deux sommets de V_i ne soient jamais adjacents pour tout $i \in \{1, 2\}$. Si tous les sommets de V_1 sont adjacents à tous les sommets de V_2, alors G est dit *biparti complet*, noté $K_{m,n}$ avec $m = |V_1|$ et $n = |V_2|$. Le graphe $K_{1,n}$ est dit *étoile*.

— Un graphe est dit *sans griffe* s'il ne contient pas $K_{1,3}$ comme sous-graphe induit.

— Le *graphe adjoint* (ou *graphe adjoint*) d'un graphe G est le graphe obtenu en associant un sommet à chaque arête de G et en reliant deux sommets par une arête si les arêtes de G correspondant à ces deux sommets sont adjacentes (Voir Figure 1.2).



Une chenille $C(t_1, t_2, t_3)$.



Graphe adjoint de $C(t_1, t_2, t_3)$.

FIGURE 1.2 – Une chenille et son graphe adjoint.

1.1.7 Cliques, stables et couplages

Nous définissons ci-après quelques invariants de graphes intervenant dans cette thèse.

Soit G = (V, E) un graphe.

— Une *clique* de G est un sous-ensemble de sommets de G deux à deux adjacents. La taille d'une clique est le nombre de ses sommets. On note par $\omega(G)$ la taille de la clique maximum dans G.

— Un *stable* de G est un sous-ensemble de sommets de G deux à deux non adjacents. Le nombre de sommets d'un stable maximum dans G est appelé nombre de stabilité et noté par $\alpha(G)$.

— Un *couplage* M dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes. Un sommet x de G est dit *saturé* par M, s'il existe une arête de M incidente à x. Un couplage est dit *parfait*, s'il sature tous les sommets de G. On note par $\beta(G)$ la taille du couplage maximum dans G.

1.2 Quelques opérations sur les graphes

Nous donnons, ci-après, les différentes opérations de base sur les graphes.

— Soient $v \in V$ et $S \subseteq V$. Le graphe $G \setminus \{v\}$ est le graphe obtenu à partir de G en supprimant le sommet v et toutes les arêtes incidentes à v (Voir Figure 1.3). Le graphe $G \setminus S$ est le sous-graphe engendré par $V \setminus S$.

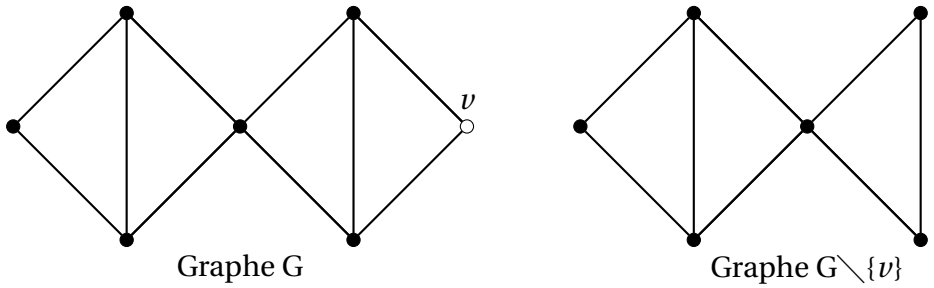


FIGURE 1.3 – Exemple de la suppression d'un sommet v d'un graphe.

— Soit $e = uv$ une arête de G. Le graphe G$\setminus\{e\}$ est le graphe obtenu à partir de G en supprimant l'arête e (les extrémités de e ne sont pas supprimées) (Voir Figure 1.4).

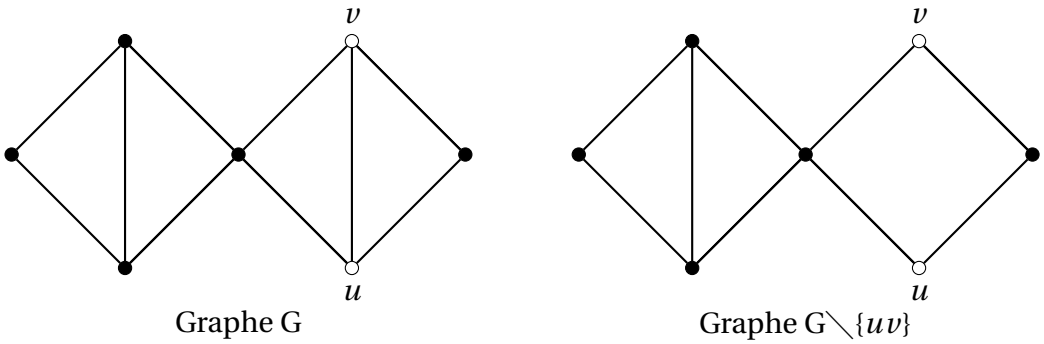


FIGURE 1.4 – Exemple de la suppression d'une arête uv d'un graphe .

— La *subdivision* d'une arête uv d'un graphe G = (V, E) consiste à supprimer l'arête uv et rajouter un sommet w et deux arêtes uw et wv (Voir Figure 1.5).

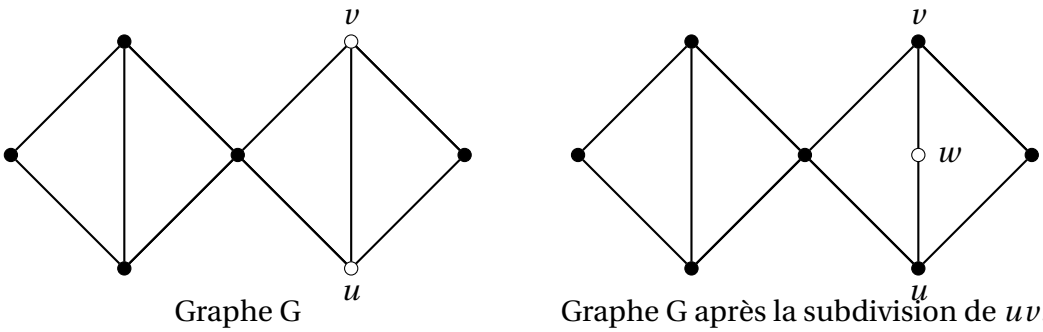


FIGURE 1.5 – Exemple de la subdivision d'une arête uv d'un graphe .

— La *contraction* d'une arête uv d'un graphe G = (V, E) consiste à supprimer l'arête uv et à fusionner les extrémités de l'arête uv. Le sommet résultant est adjacents à tous

les voisins de u et de v. Le graphe obtenu à partir de la contraction de uv est noté par G_{uv} (Voir Figure 1.6).

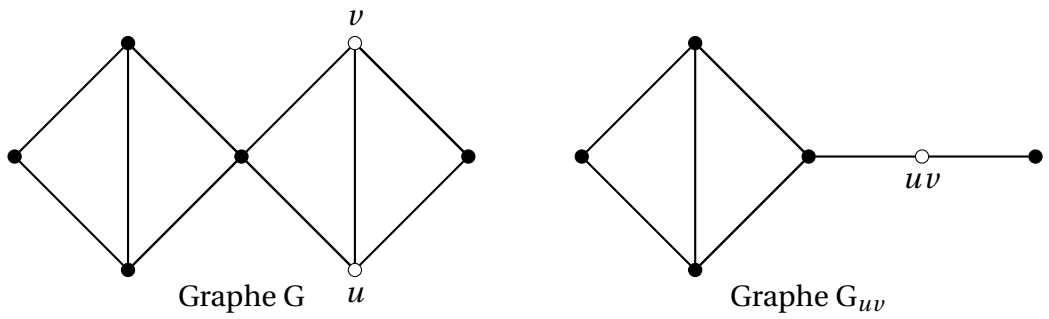


FIGURE 1.6 – Exemple de la contraction d'une arête uv d'un graphe .

— L'*union* de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, notée $G_1 + G_2$, est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V_1 \cup V_2$ et ensemble d'arêtes $E_1 \cup E_2$. On note par kG l'union de $k \geq 1$ copies de G.

— Le *joint* de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, noté $G_1 \vee G_2$ est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V_1 \cup V_2$ et ensemble d'arêtes $(E_1 \cup E_2) \cup \{uv : u \in V_1 \text{ et } v \in V_2\}$. Autrement dit, $G_1 \vee G_2$ est le graphe obtenu à partir de $G_1 + G_2$ en ajoutant toutes les arêtes entre tous les sommets de G_1 et G_2.

— Le *produit cartésien* (ou somme cartésienne) de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, noté $G_1 \square G_2$, est le graphe ayant pour ensemble de sommets $\{(u, v) : u \in V_1 \text{ et } v \in V_2\}$. Deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont adjacents si $u_1 = u_2$ et $v_1 v_1 \in E_2$ ou $v_1 = v_2$ et $u_1 u_2 \in E_1$.

Ces définitions peuvent être retrouvées avec plus de détails dans [10].

1.3 Complexité algorithmique

La théorie de la compléxité s'intéresse à l'étude formelle de la difficulté des problèmes en informatique et plus précisément à leur résolution de façon éfficace, en tenant compte le temps de calcul et les données stoquées en mémoire.

1.3.1 Problème de décision

Chaque problème informatique peut se réduire à un problème de *décision*, c'est-à-dire un problème formulé comme une question dont la réponse est Oui ou Non. Un problème qui n'est pas formulé de cette manière peut être très simplement transformé en un problème de décision équivalent. Le problème du voyageur de commerce qui cherche, dans un graphe, à trouver la taille du cycle le plus court passant une fois par chaque sommet, peut s'énoncer en un problème de décision ainsi : Existe-t-il un cycle passant une et une seule fois par chaque sommet tel que la somme des coûts des arcs utilisés soit inférieure à k, avec $k \in \mathbb{N}$. Ce problème est équivalent au problème du voyageur de commerce au sens où si l'on sait résoudre efficacement l'un, on sait aussi résoudre efficacement l'autre.

1.3.2 Classes de complexité

La théorie de la complexité repose sur la définition de classes de complexité qui permettent de classer les problèmes en fonction de la complexité des algorithmes qui existent pour les résoudre.

Classe P

Un problème p est dit Polynomial (ie. $p \in$P), s'il peut être résolu par un algorithme déterministe en un temps polynomial.

Prenons par exemple le problème de la connexité dans un graphe. Étant donné un graphe à n sommets, il s'agit de savoir si toutes les paires de sommets sont reliées par une chaîne. Pour le résoudre, on dispose de l'algorithme de parcours en profondeur qui va construire un arbre couvrant du graphe à partir d'un sommet. Si cet arbre contient tous les sommets du graphe, alors le graphe est connexe. Le temps nécessaire pour construire cet arbre est au plus n^2, donc le problème est bien dans la classe P.

Les problèmes dans P correspondent en fait à tous les problèmes facilement solubles.

Classe NP

Un problème p est NP, s'il est résoluble par un algorithme Non déterministe en un temps polynomial par rapport à la taille de l'instance.

De façon équivalente, c'est la classe des problèmes qui admettent un algorithme dans P qui, étant donné une solution du problème NP, est capable de répondre oui ou non.

Intuitivement, les problèmes dans NP sont tous les problèmes qui peuvent être résolus en énumérant l'ensemble des solutions possibles et en les testant avec un algorithme polynomial.

Par exemple, la recherche de cycle hamiltonien dans un graphe peut se faire avec deux algorithmes :

— le premier génère l'ensemble des cycles (ce qui est exponentiel) ;

— le second teste les solutions (en temps polynomial).

On constate, immédiatement, que P⊂NP.

Problème NP-Complet

Un problème est NP-difficile si ce problème est au moins aussi dur que tous les problèmes dans NP. Formellement, on définit une notion de réduction : Soient p et p' deux problèmes. Une réduction de $p^{'}$ à p est un algorithme transformant toute instance de $p^{'}$ en une instance de p. Ainsi, si l'on a un algorithme pour résoudre p, on sait aussi résoudre $p^{'}$. p est donc au moins aussi difficile à résoudre que $p^{'}$. Les problèmes les plus étudiés sont les problèmes NP -complets, parce qu'on ne sait pas les résoudre éfficacement à cause de leur indéterminisme. Il est clair que P∈NP, puisqu'un algorithme déterministe est un algorithme non déterministe particulier.

p est alors NP-difficile si pour tout problème $p^{'}$ de NP, $p^{'}$ se réduit à p. Quand on parle de problèmes NP-difficiles on s'autorise uniquement des réductions dans P, c'est-à-dire que l'algorithme qui calcule le passage d'une instance de $p^{'}$ à une instance de p est polynomial.

Classe NP-complet :

Le problème étant dans NP et NP-difficile, il est NP-complet ; en d'autres termes, les problèmes NP-complets sont les plus difficiles de la classe NP.

1.4 Coloration des sommets d'un graphe

Dans cette section, nous nous intéressons uniquement à la coloration des sommets d'un graphe. Tout d'abord, nous donnons un aperçu sur l'un des problèmes les plus étudié dans la théorie des graphes et qui a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs à savoir "*la coloration de graphes*". Tout d'abord, nous présentons brièvement l'historique de la coloration dans les graphes, ensuite nous donnons sa définition ainsi que le paramètre lié à cette notion. Puis, nous définissons la χ-coloration, la a-coloration et la b-coloration avec leurs paramètres qui sont dérivées de la coloration classique.

1.4.1 Coloration propre et nombre chromatique

La notion de la coloration des graphes est apparue en 1852, quand le problème des quatre couleurs a été posé pour la première fois par Francis Guthrie, lorsqu'il s'est demandé s'il est toujours possible de colorer n'importe quelle carte géographique en n'utilisant que quatre couleurs, de manière à éviter que deux pays voisins aient la même couleur. C'est qu'en 1976, que deux chercheurs américains, K. Appel et W. Haken [2, 3] ont pu répondre affirmativement à cette question.

Définition 1.4.1 *Une coloration propre de sommets d'un graphe* $G = (V, E)$ *consiste à affecter une couleur à chaque sommet de* V *de telle manière que deux sommets adjacents ne reçoivent pas la même couleur. Une classe de couleur est un sous-ensemble stable de sommets de* V *qui sont de même couleur.*

Dans le domaine de la coloration, de nombreux paramètres ont été définis ; parmi les paramètres fondamentaux nous trouvons le nombre chromatique.

Définition 1.4.2 *Le nombre chromatique de* G, *noté* $\chi(G)$, *est le nombre minimum de classes de couleur qui partitionnent l'ensemble de sommets* V.

Le calcul du nombre chromatique est NP-complet dans le cas général [41]. De ce fait, beaucoup de travaux ont été consacrés à la recherche des bornes du nombre chromatique en fonction d'autres paramètres de graphe. Un des vieux résultats établi sur le nombre chromatique est celui R. Brooks [17].

Théorème 1.4.1 *[17] Pour tout graphe* G *de degré maximum* $\Delta(G)$,

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Avec égalité si et seulement si on est dans l'un des deux cas suivants :

1. *soit* $\Delta(G) \neq 2$ *et* G *admet* $K_{\Delta(G)+1}$ *comme composante connexe ;*
2. *soit* $\Delta(G) = 2$, *et* G *admet un cycle d'ordre impair comme composante connexe.*

Il est bien connu aussi que, tout graphe G admet une coloration avec au moins $\omega(G)$ couleurs, et donc $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Le résultat suivant a été établi par C. Berge [10].

Théorème 1.4.2 *[10] Soit* G *un graphe d'ordre n. Alors,*

$$\chi(G)\alpha(G) \geq n \;\; et \;\; \chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1.$$

Gaddum et Nordhaus [75] ont prouvé le résultat suivant.

Théorème 1.4.3 *[75] Soit* G *un graphe d'ordre n et* $\overline{G}$ *son complémentaire. Alors*

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1.$$

1.4.2 *a*-coloration et nombre *a*-chromatique

En 1967, et dans le but d'obtenir une bonne coloration d'un graphe, Harary, Hedetniemi et Prins [45] ont parvenu à trouver une technique qui consiste à partir d'une coloration propre arbitraire de réduire le nombre de couleurs utilisées par la coloration initiale en unifiant des classes de couleurs différentes. S'il existe une arête entre deux classes de couleurs quelconques, la stratégie précitée n'est pas possible à appliquer. D'où l'introduction de la *a*-coloration.

Définition 1.4.3 *Une a-coloration d'un graphe* G *(également dite coloration complète) est une coloration propre de sommets de* G*, telle que pour toute paire de couleurs différentes i et j, le sous-graphe engendré par les deux classes de couleur i et j n'est pas un stable. Le nombre a-chromatique, noté* $\psi(G)$*, est le nombre maximum de classes de couleur dans une a-coloration.*

Le problème de décider si $\psi(G) \geq k$ pour un graphe G et un entier k donné est NP-complet en général [42]. Un état de l'art sur le nombre *a*-chromatique a été présenté dans [52].

Il est à noter que la *a*-coloration et le nombre *a*-chromatique ne font pas le but de cette thèse.

1.4.3 *b*-coloration et nombre *b*-chromatique

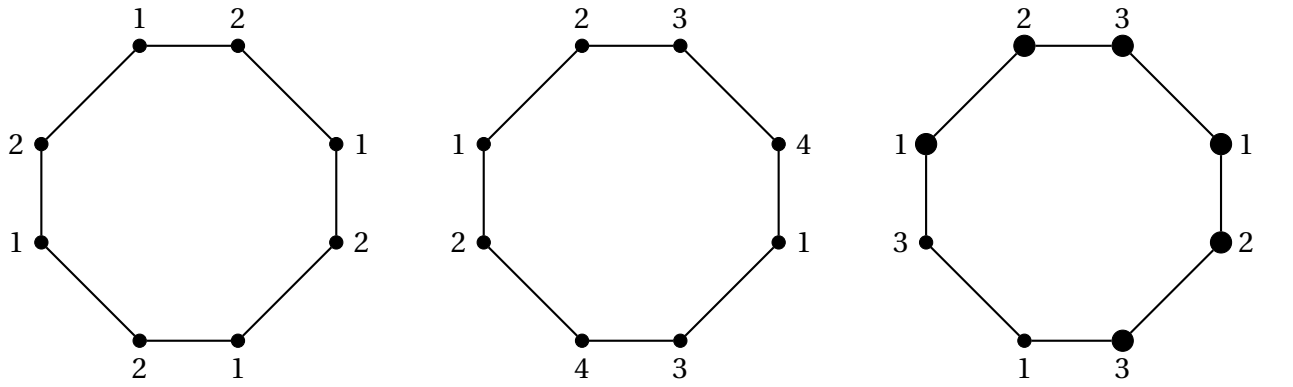
En 1999, Irving et Manlove [53, 74] ont défini une autre technique qui cherche à améliorer la coloration d'un graphe. Cette dernière consiste à partir d'une coloration propre donnée du graphe, de réduire le nombre de couleurs en transférant les sommets d'une certaine classe de couleur vers d'autres classes de couleur. Si chaque classe de couleur possède un sommet qui a un voisin dans toutes les autres classes de couleurs, il est impossible d'appliquer cette technique. D'où, la définition de la *b*-coloration.

Définition 1.4.4 *Une b-coloration, dite aussi coloration b-dominante, est une coloration propre de sommets d'un graphe* G*, telle que toute classe de couleur possède au moins un sommet qui a un voisin dans toutes les autres classes de couleurs. Un tel sommet est dit sommet b-dominant de couleur (ou en bref b-sommet). Le nombre b-chromatique est le nombre maximum de classes de couleur dans une b-coloration.*

Toute χ-coloration est une b-coloration, et cette dernière satisfait la définition de la a-coloration, par conséquent le résultat suivant est immédiat.

$$\chi(G) \leq b(G) \leq \psi(G).$$

Exemples



$\chi(C_8) = 2$ $\psi(C_8) = 4$ $b(C_8) = 3$, les b-sommets en gras

FIGURE 1.7 – $\chi(C_8) < b(C_8) < \psi(C_8)$

Chapitre 2

Quelques résultats existants sur la b-coloration

Dans la première section de ce chapitre, nous présentons quelques résultats obtenus sur la b-coloration, bornes et valeurs exactes du nombre b-chromatique pour certaines classes de graphes. Dans la deuxième section, nous exposons brièvement quelques applications de la b-coloration de graphes. Dans la troisième section, nous donnons la définition de quelques notions liées à la b-coloration et qui sont largement étudiées, comme la b-continuité, la b-perfection, la b-monotonie, les graphes arête (resp., sommet) b-critiques et graphes b_e-critiques.

2.1 Encadrement et valeurs exactes du nombre b-chromatique de quelques classes de graphes

Un b-sommet v d'une b-coloration d'un graphe G, doit avoir au moins un voisin dans chacune des autres classes de couleurs, différentes à sa propre couleur, ce qui implique que $d_{\mathrm{G}}(v) \geq b(\mathrm{G}) - 1$, et comme $d_{\mathrm{G}}(v) \leq \Delta(\mathrm{G})$, il en découle, donc, que $b(\mathrm{G}) \leq \Delta(\mathrm{G}) + 1$.

En outre, pour qu'un graphe G admette une b-coloration avec k couleurs, il doit avoir nécessairement au moins k sommets de degré au moins $k-1$. De cette observation, Irving et Manlove [53] ont défini le *m-degré* d'un graphe G, noté $m(\mathrm{G})$, comme le plus grand entier

m tel que G a au moins m sommets de degré au moins $m-1$. Les sommets de G de degré au moins $m-1$ sont dits sommets *denses*.

Évidemment, la définition du m-degré d'un graphe G implique que $m(G)$ est un majorant de $b(G)$, c'est-à-dire $b(G) \leq m(G)$ [53]. Cette borne peut être atteinte pour certains graphes, citons à titre d'exemple, le graphe complet K_n et le graphe biparti complet moins un couplage parfait, noté $K^*_{n,n}$. Néanmoins, la différence entre le m-degré et le nombre b-chromatique peut être large. En effet, Irving et Manlove ont remarqué que le m-degré d'un graphe biparti complet est $m\left(K_{n,n}\right) = n+1$, tandis que son nombre b-chromatique vaut 2 [53].

L'un des premiers résultats impliquant le m-degré est celui de Kratochvil et al. [69], ils ont montré que la décision que si $b(G) = m(G)$ est un problème NP-complet, même si G est un graphe biparti connexe avec $m(G) = \Delta(G)+1$. Cependant, dans [53, 74], Irving et Manlove ont montré que le nombre b-chromatique d'un arbre T est toujours compris entre $m(T)$ et $m(T)-1$.

Du point de vue de complexité, Irving et Manlove [53] ont prouvé que le problème de décision lié au nombre b-chromatique est NP-complet en général, tandis qu'il est polynomial pour les arbres. Ce problème reste NP-complet même si on se restreint aux graphes bipartis [69].

En présence de ces résultats de NP-complétude, beaucoup de travaux ont été menés pour définir des bornes pour le nombre b-chromatique d'un graphe arbitraire ou bien pour déterminer sa valeur exacte pour certaines classes de graphes. Dans un premier temps, Irving et Manlove [53, 74] ont prouvé que toute coloration minimale de G avec $\chi(G)$ couleurs est une b-coloration de G, et le voisinage de tout sommet de degré $\Delta(G)$ possède au plus $\Delta(G)$ couleurs et prend pour lui la couleur $\Delta(G)+1$.

Proposition 2.1.1 *[53, 74] Soit* $\chi(G)$ *le nombre chromatique d'un graphe* G. *Alors,*

$$\chi(G) \leq b(G) \leq \Delta(G)+1.$$

Ces résultats ont été un point de départ de plusieurs recherches intéressant au nombre b-chromatique qui a été étudié pour plusieurs classes de graphes, avec des valeurs exactes obtenues pour certaines classes et des bornes pour d'autres. À titre d'exemple, et dans un premier temps, Kouider et Mahéo [67] ont déterminé la valeur exacte du nombre b-chromatique

pour des graphes simples : pour le graphe stable $b(S_n) = 1$, pour le graphe complet $b(K_n) = n$, pour la chaîne et le cycle d'ordre au moins 5, $b(P_n) = b(C_n) = 3$ et pour le graphe biparti complet $b(K_{n,p}) = 2$.

D'autres résultats ont été obtenus de type Nordhaus-Gaddhum [67].

Théorème 2.1.1 *[67] Soient* G *un graphe d'ordre n et* $\overline{G}$ *son complémentaire. Alors,*

$$b(G) + b\left(\overline{G}\right) \leq n+1 \text{ et } b(G)\, b\left(\overline{G}\right) \leq n.$$

Dans [36], El Sahili et Kouider se sont intéressés aux graphes pour lesquels $b(G) = \Delta(G) + 1$.

Théorème 2.1.2 *[36] Soit* G *un graphe d-régulier sans cycle d'ordre* 6 *et de maille au moins* 5. *Alors,* $b(G) = d + 1$.

Les mêmes auteurs de [36] ont conjecturé que tout graphe d-régulier de maille au moins 5 satisfait $b(G) = d + 1$. Dans [14], Blidia et al. ont réfuté cette conjecture, tel qu'ils ont pris le graphe de Petersen comme un contre exemple, et ils ont la reformulé de la façon suivante :

Conjecture 1 *[14] Soit* G *un graphe d-régulier de maille au moins cinq différent du graphe de Petersen. Alors le nombre b-chromatique de* G *est* $d + 1$.

Ils ont également montré que la conjecture présentée dans [14] est vraie pour les petites valeurs de d ($d \leq 6$). Plusieurs résultats ont été obtenus pour les graphes réguliers [69, 36, 14, 18], aussi des valeurs exactes ont été données pour les hypercubes [67], et les graphes cubiques [57].

Un autre résultat concernant les graphes pour lesquels $b(G) = \Delta(G) + 1$ a été établi par Kratochvíl et al. [69], ils ont prouvé que pour tout graphe G admettant un ensemble de sommets de cardinalité $\Delta(G)+1$ et de degré $\Delta(G)$, tel que la distance entre deux sommets quelconques de cet ensemble est au moins quatre, a pour nombre b-chromatique $\Delta(G) + 1$. Effantin et Kheddouci [29, 26, 28] ont porté leur travail sur les graphes de puissance. Cette étude a permis de constater l'évolution du nombre b-chromatique selon la puissance du graphe.

Dans [67, 72, 62, 38], les auteurs fournissent des bornes et des valeurs exactes pour le produit cartésien de graphes, et pour d'autres produits dans [58]. Dans [47], Kouider et Mahéo ont déterminé la valeur exacte du nombre b-chromatique du joint de deux graphes.

Théorème 2.1.3 *[47] Soient* G_1, G_2 *deux graphes de sommets disjoints et* $G = G_1 \vee G_2$ *le joint de* G_1 *et* G_2. *Alors,*

$$b(G) = b(G_1) + b(G_2).$$

Dans [67], Kouider et Mahéo ont borné le nombre b-chromatique d'un graphe en fonction de son nombre de stabilité.

Proposition 2.1.2 *[67] Soient* G *un graphe connexe d'ordre n et* $\alpha(G)$ *son nombre de stabilité. Alors,*

$$b(G) \leq n + 1 - \alpha(G).$$

Les mêmes auteurs de [67] ont fourni d'autres bornes pour le nombre b-chromatique.

Proposition 2.1.3 *[67] Soient* G *un graphe de taille m et* $\alpha(G)$ *son nombre de stabilité. Alors,*

$$\frac{n}{\alpha(G)} \leq b(G) \leq \frac{1}{2}\sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

Proposition 2.1.4 *[67] Soient* G *un graphe non connexe et* C_1, C_2,..., C_p *ses composantes connexes, avec* $p \geq 2$. *Alors,*

$$b(G) \geq \max\{b(C_i),\ 1 \leq i \leq p\}.$$

Alkhateeb et Kohl [1] ont donné une borne du nombre b-chromatique d'un graphe G en fonction de son ordre, son degré maximum et son degré minimum.

Théorème 2.1.4 *[1] Soit* G *un graphe d'ordre n, de degré maximum* $\Delta(G)$ *et de degré minimum* $\delta(G)$. *Alors,*

$$b(G) \leq \left\lfloor \frac{2n - \Delta(G) - \delta(G) - 3}{3n - 2\Delta(G) - \delta(G) - 4} n \right\rfloor.$$

Une autre borne supérieure du nombre b-chromatique a été établie par Blidia et al. [12], mais cette fois dans le cas d'un graphe différent du graphe complet.

Théorème 2.1.5 *[12] Soient* G *un graphe d'ordre n différent du graphe complet et* $\omega(G)$ *la taille de sa clique maximum. Alors*

$$b(G) \leq \left\lfloor \frac{n + \omega(G) - 1}{2} \right\rfloor.$$

Kouider et Zaker ont borné ce paramètre, pour le graphe complémentaire d'un graphe biparti [68].

Théorème 2.1.6 *[68] Si* G *est le complémentaire d'un graphe biparti et* $\omega(G)$ *est la taille de sa clique maximum, alors*

$$b(G) \leq \frac{4\omega(G)}{3}.$$

Dans [68], Kouider et Zaker ont borné le nombre b-chromatique d'un graphe sans griffe (sans $K_{1,t}$).

Théorème 2.1.7 *[68] Si G est un graphe sans* $K_{1,t}$*, alors*

$$b(G) \leq (t-1)\left(\chi(G)-1\right)+1.$$

D'autres travaux intéressants au nombre b-chromatique ont été réalisés dans des classes de graphes généralisant les cographes (graphes sans P_4) [61, 43]. En outre, dans [16], Bonomo et al. ont donné un algorithme en temps polynomial qui calcule le nombre b-chromatique des cographes et des graphes P_4-sparses. Également, d'autres études ont été réalisées pour les graphes cactus [19, 77], les graphes planaires extérieurs [77, 79], et les produits cartésiens des arbres et autres classes de graphes [72, 77].

D'autres chercheurs ont porté leur travail sur l'aspect algorithmique et les bornes de différentes classes de graphe présentés dans [11, 20, 46, 63, 68, 71, 39].

Pour plus d'informations sur les résultats liés à la b-coloration, le lecteur est invité à lire l'article de Jakovac et Peterin [60].

2.2 Quelques applications de la b-coloration

Depuis plusieurs décennies, la coloration de graphes est un domaine très attractif de la théorie des graphes par ses nombreuses applications. En effet, de nombreux problèmes réels peuvent être modélisés comme des problème de coloration de graphes. Nous pouvons citer par exemple les problèmes d'ordonnancement et de planning de la vie de tous les jours.

La b-coloration a été injectée dans les problèmes de *Clustering*. Un tel problème consiste à regrouper les éléments d'un ensemble de données en classes (ou clusters) de façon que chaque classe comporte des éléments qui sont le plus similaires possible, et chaque deux éléments de chaque deux classes disjointes sont le plus dissemblables possible.

L'un des premiers résultats impliquant la b-coloration est celui de Effantin et Kheddouci [27] qui ont donné un algorithme distribué pour calculer le nombre b-chromatique d'un graphe, et afin d'illustrer leur algorithme, ils ont proposé une application au problème de routage dans les réseaux. El Ghazel et al. [32] ont également proposé une méthode de clustering avec une application dans le domaine médical. La b-coloration a été appliquée dans certains problèmes de classification des documents [40] et des services web [22]. D'autres travaux récents s'intéressant à cette approche sont présentés dans [23, 30, 33, 34, 35, 76, 31].

2.3 Notions liées à la b-coloration

Dans cette section, nous donnons brièvement un aperçu sur les travaux existants à propos des notions liées à la b-coloration comme les graphes b-continus, les graphes b-parfaits, les graphes b-monotone et les graphes b-critiques. En outre, et dans le dernier paragraphe, nous allons introduire une nouvelle notion liée à la b-coloration, les graphes b_e-critiques.

2.3.1 Graphes b-continus

Un graphe G est dit *b-continu* si et seulement si pour tout entier k, avec $\chi(G) \leq k \leq b(G)$, G admet une b-coloration avec k couleurs. L'intervalle $[\chi(G), b(G)]$ est dit le *b-spectre* du graphe G. Il est à noter qu'il existe des graphes qui ne sont pas b-continu, on donne par exemple le graphe de la Figure 2.1 qui admet une b-coloration avec 2 couleurs et avec 4 couleurs mais il est non b-colorable avec 3 couleurs.

Le problème de décision lié à la b-continuité d'un graphe G est NP-complet en général, même si $\chi(G)$ et $b(G)$ sont connus, et même si G est biparti [38, 4]. Dans [1], Alkhateeb et Kohl ont étudié les graphes non connexes b-continus et la relation entre la b-continuité et les trois paramètres $\omega(G)$, $\alpha(G)$ et $\delta(G)$. Parmi les classes de graphes b-continus on cite les

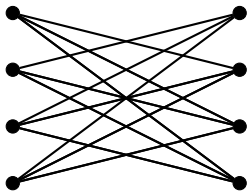


FIGURE 2.1 – Un graphe non b-continu.

graphes triangulés [65, 38, 37], les graphes P_4-tidy, les cographes et les graphes P_4-sparses [11, 16] et certains graphes planaires [65], et d'autres classes de graphes [38].

2.3.2 Graphes b-monotones

Dans [16], Bonomo et al. ont appelé tout graphe G vérifiant $b(H_1) \geq b(H_2)$, pour tout sous-graphe H_1 induit de G et tout sous-graphe H_2 de H_1, un graphe *b-monotone*. Et, ils ont montré que les cographes et les graphes P_4-sparses sont b-monotones. Il est à noter qu'il existe des graphes qui ne sont pas *b-monotone* (Voir Figure 2.2).

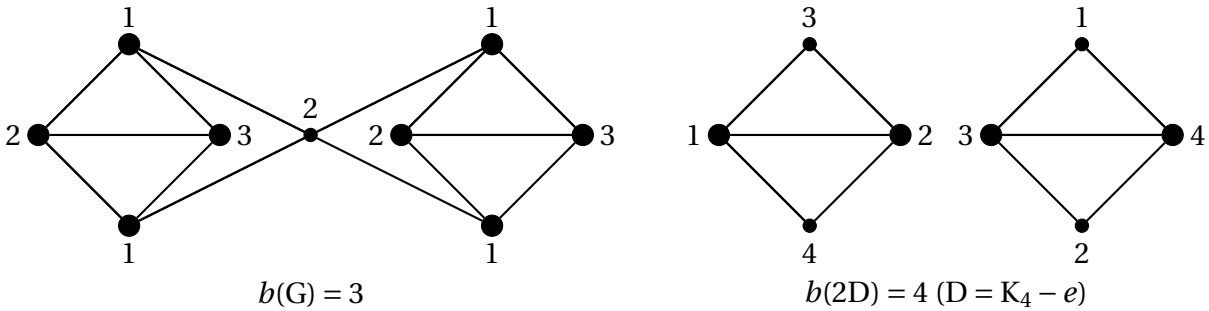


FIGURE 2.2 – Un graphe non b-monotone, avec $b(G) = 3$ tandis que $b(2D) = 4$ ($D = K_4 - e$).

2.3.3 Graphes b-parfaits

Tout graphe G vérifiant $b(H) = \chi(H)$, pour tout sous-graphe induit H de G, est dit *b-parfait*. Ce concept a été introduit par Hoang et Kouider, dans [47], où ils ont caractérisé les graphes bipartis qui sont b-parfaits. D'autres résultats ont été obtenus, à propos cette notions dans [73, 48] pour des classes particulières de graphes. Puis, un résultat plus général a été obtenu dans [50, 49] par C.T. Hoàng et al., où ils ont prouvé qu'un graphe est b-parfait si et seule-

ment s'il ne contient pas un membre d'une certaine liste de vingt-deux graphes comme sous-graphe induit.

2.3.4 Graphes b-critiques

Lorsqu'on modifie un graphe (réseau) par certaines opérations telles que la suppression ou l'ajout des sommets ou d'arêtes, il convient de regarder l'effet de ces modifications sur les différents invariants ou paramètres du graphe. Ce problème classique de la théorie des graphes a été largement étudié dans la littérature sous différents aspects. En pratique, l'étude de ce concept peut répondre aux problèmes de la vulnérabilité, la robustesse et la stabilité des systèmes quand certaines anomalies surgissent et sont détecter au niveau de leurs composantes.

Lorsque certaines modifications sont effectuées sur un système et celui-ci change par rapport à un aspect étudié, on dit qu'il est critique sinon on dit qu'il est stable ; d'où la notion de criticité dans les graphes.

En 1951, Dirac a étudié l'effet de la suppression d'un sommet quelconque d'un graphe G sur son nombre chromatique $\chi(G)$, d'où la notion d'un graphe *critique* [24, 25].

On appelle un sommet (resp., arête) *critique* d'un graphe G, un sommet (resp., l'arête) dont sa suppression fait diminuer le nombre chromatique de G. La suppression d'un sommet ou d'une arête de G fait diminuer le nombre chromatique par au plus un.

Le graphe dont tous ses sommets (resp., arêtes) sont critiques est dit un graphe *sommet* (resp., *arête*) critique. De plus, il est dit sommet (resp., arête) k-critique s'il est sommet (resp., arête) critique et son nombre chromatique est égal à k.

Évidemment, un graphe arête k-critique est, aussi, sommet k-critique. En effet, soit $e = uv$ une arête d'un graphe arête k-critique G, comme $\chi(G-e) = k-1$, donc $\chi(G-u) = k-1$ et $\chi(G-v) = k-1$. Pour plus de détails sur les graphes k-critiques, le lecteur est invité à lire [64].

Il est naturel, donc, de penser à étudier l'effet de la suppression d'un sommet ou d'une arête quelconque sur le nombre b-chromatique d'un graphe.

Contrairement au nombre chromatique, la suppression d'un sommet ou d'une arête d'un

graphe peut faire diminuer ou augmenter son nombre b-chromatique, comme il peut rester inchangé. Par conséquent, les graphes critiques par rapport au nombre b-chromatique peuvent se partitionnés en six classes. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

La classe des graphes sommet $b^{=}$-critiques : $\forall v \in V(G),\ b(G - v) = b(G)$.
La classe des graphes arête $b^{=}$-critiques : $\forall e \in V(G),\ b(G - e) = b(G)$.
La classe des graphes sommet b^{+}-critiques : $\forall v \in V(G),\ b(G - v) > b(G)$.
La classe des graphes arête b^{+}-critiques : $\forall e \in V(G),\ b(G - e) > b(G)$.
La classe des graphes sommet b^{-}-critiques : $\forall v \in V(G),\ b(G - v) < b(G)$.
La classe des graphes arête b^{-}-critiques : $\forall e \in V(G),\ b(G - e) < b(G)$.

Exemples

* Les chaînes P_n d'ordre $n \geq 8$ et les cycles C_m d'ordre $m \geq 6$ sont des graphes sommet $b^{=}$-critiques et si $n \leq 7$ et $m \leq 5$, alors ils sont arête $b^{=}$-critiques.

* Le graphe $C_3 \square C_3$ et le graphe de Petersen P sont des graphes sommet b^{+}-critiques, de plus $C_3 \square C_3$ est arête b^{+}-critique.

* Les graphes complets sont des graphes sommet b^{-}-critiques et arête b^{-}-critiques.

Dans [13], Blidia et al. ont caractérisé les arbres sommets b^{-}-critiques. Dans [55], Ikhlef Eschouf et al. ont étudié les graphes sommet b^{+}-critiques.

Dans cette thèse, on s'intéresse principalement à la classe des graphes arête b^{-}-critiques, qui fera l'objet du troisième chapitre, de ce fait et pour des raisons de simplicité nous allons appeler, dorénavant, la classe des graphes arête b^{-}-critiques par les graphes arête b-critiques.

Dans [38], Faik a prouvé que la suppression d'une arête quelconque peut faire diminuer le nombre b-chromatique par au plus un. Autrement dit, si e est une arête d'un graphe G, alors $b(G - e) \geq b(G) - 1$. De ce fait, la définition d'un graphe arête b-critique peut se reformuler comme suit.

Définition 2.3.1 *[54] Un graphe* $G = (V, E)$ *est dit arête b-critique si* $b(G - e) = b(G) - 1$, *pour toute arête* $e \in E$.

L'étude des graphes arête b-critiques a été débutée en 2010 par Ikhlef Eschouf [54], où il a donné des propriétés d'un tel graphe, ainsi qu'une caractérisation des graphes P_4-sparses arête b-critiques et les graphes quasi-adjoints arête b-critiques. Ensuite, dans [56], les auteurs ont caractérisé la classe des graphes sans P_5, les graphes d-réguliers et les arbres qui sont arête b-critiques, en outre, ils ont prouvé que le problème de savoir si un graphe est arête b-critique est NP-complet en général.

2.3.5 Graphes b_e-critiques

Dans cette section, nous allons introduire une nouvelle notion liée à la b-coloration, c'est les graphes b_e-critiques qui font l'objet du quatrième chapitre.

Définition 2.3.2 *Soient* $G = (V, E)$ *un graphe avec une b-coloration de* G *avec* $b(G)$ *couleurs. Le graphe* G *est dit* b_e*-critique, si la contraction d'une arête quelconque* $e \in E$ *fait changer son nombre b-chromatique.*

D'après la définition ci-dessus, on peut classer les graphes b_e-critique comme suit. Soient $G = (V, E)$ un graphe et G_e le graphe obtenu à partir de G en contractant une arête $e \in E$. Alors,

$$\begin{aligned}
&\text{La classe des graphes } b_e^{=}\text{-critiques :} \quad \forall e \in E,\ b(G_e) = b(G).\\
&\text{La classe des graphes } b_e^{+}\text{-critiques :} \quad \forall e \in E,\ b(G_e) > b(G).\\
&\text{La classe des graphes } b_e^{-}\text{-critiques :} \quad \forall e \in E,\ b(G_e) < b(G).
\end{aligned}$$

Exemple

* La chaîne P_n pour $n \notin \{2,5\}$ et le cycle C_n pour $n \notin \{3,5\}$ sont des graphes $b_e^{=}$-critiques.

* Le graphe $C_3 \square C_3$ et le graphe de Petersen P sont des graphes b_e^{+}-critiques.

* Le graphe dans la Figure 2.3 est b_e^{-}-critique.

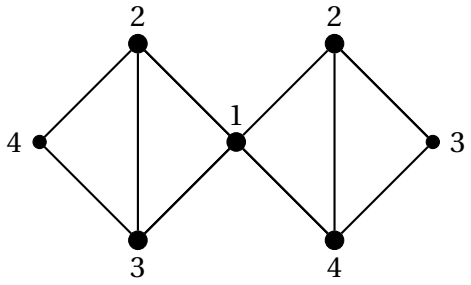


FIGURE 2.3 – Un graphe b_e-critique avec $b(G) = 4$ et $b(G_e) = 3$.

Il convient de souligner que dans cette thèse, nous nous intéressons uniquement à l'étude de la classe des graphes b_e^--critiques, et plus précisément la classe des arbres b_e^--critiques. Alors, pour des raisons de simplicité, nous proposons d'appeler la classe des graphes b_e^--critiques les graphes b_e-critiques.

Chapitre 3

Caractérisation des graphes arête b-critiques et des arbres b_e-critiques

Dans la première partie de ce chapitre, nous étudions les graphes arête b-critiques. Nous présentons, d'abord, un résultat fondamental caractérisant les graphes arête b-critiques établi par Ikhlef Eschouf [54], ensuite, en se basant sur ce résultat, nous caractérisons toute la famille des graphes arête b-critiques. La deuxième partie est consacrée à l'étude des arbres b_e-critique. En effet, nous caractérisons la famille des arbres b_e-critiques après avoir donné quelques propriétés fondamentales de ces arbres.

3.1 Graphes arête b-critiques

Dans cette section, nous caractérisons tous les graphes arête b-critiques.

Il est à noter que le contenu de cette section a été publié dans la revue Discrete Applied Mathematics [6].

3.1.1 Résultats préliminaires

Dans [54], Ikhlef Eschouf a prouvé le théorème fournissant des propriétés d'un graphe arête b-critique.

Théorème 3.1.1 *[54] Soit* G = (V,E) *un graphe arête b-critique, et soient c une b-coloration de* G *avec b*(G) *couleurs et* B *l'ensemble de tous les b-sommets de c. Alors,*

(*i*) *il n'existe pas deux b-sommets de c de même couleurs. Alors* |B| = *b*(G) *;*

(*ii*) V$\setminus$B *est un ensemble stable ;*

(*iii*) *tout sommet* $x \in$ V$\setminus$B *satisfait* $d_G(x) \leq |B| - 2$ *;*

(*iv*) $b(G) = \Delta(G) + 1$ *;*

(*v*) *Si* G *n'est pas un graphe complet, alors* B *n'est pas une clique.*

En se basant sur le théorème ci-dessus, nous sommes parvenus à caractériser toute la famille des graphes arête b-critiques.

3.1.2 Caractérisation des graphes arête b-critiques

Afin de caractériser les graphes arête b-critiques, nous définissons une famille de graphes $\mathscr{G}_k$ comme suit.

Définition 3.1.1 (classe $\mathscr{G}_k$) *Un graphe* G *est dans la classe* $\mathscr{G}_k$*, s'il existe un entier* $k \geq 2$ *tel que* G *peut être obtenu à partir d'un graphe simple* H_k *d'ensemble de sommet* $V(H_k) = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$*, en ajoutant k ensembles de sommets disjoints supplémentaires* A_1, A_2,...,A_k *avec les propriétés suivantes :*

1. $\cup_{i=1}^{k} A_i$ *est un ensemble stable ;*
2. *pour* $i = 1, ..., k$, $|A_i| \leq d_{H_k}(v_i) - 1$ *; en particulier,* $|A_i| = 0$ *lorsque* $d_{H_k}(v_i) = k - 1$*, et* $|A_i| \geq 2$ *quand* $d_{H_k}(v_i) = 0$*, sinon* $|A_i| \geq 1$ *;*
3. *pour* $i = 1, ..., k$*, si* v_i *n'est pas adjacent à* v_j*,* $j \neq i$*, alors* v_i *a exactement un voisin dans* A_j*, sinon* v_i *n'est adjacent à aucun sommet de* A_j*.*
4. *tout sommet* v_i *n'a aucun voisin dans* A_i *pour* $i \in \{1, 2, ..., k\}$ *;*
5. *pour* $i = 1, ..., k$*, tout sommet de* A_i *a un voisin et un non-voisin dans* $V(H_k) \setminus \{v_i\}$*.*

Remarquons que, par construction, G est sans sommets isolés et comporte exactement k sommets de degré exactement $k-1$. En outre, si H_k est un graphe complet, alors $\cup_{i=1}^{k} A_i = \emptyset$ et par conséquent $G = H_k$.

L'observation suivante est immédiate.

Observation 1 *Soit* G *un graphe. Si* $b(G) = 2$*, alors le seul graphe qui est arête b-critique est le graphe complet d'ordre deux.*

Notre résultat majeur dans cette section est le suivant.

Théorème 3.1.2 *Soit* G *un graphe avec* $b(G) \geq 3$*. Alors,* G *est arête b-critique si et seulement si* $G \in \mathscr{G}_{\Delta(G)+1}$.

Preuve. Soit G un membre de $\mathscr{G}_{\Delta(G)+1}$, avec les mêmes notations ci-dessus. Au vu de la définition de G, on peut facilement vérifier que $\Delta(G) = k-1$, tout sommet de $\cup_{i=1}^{k} A_i$ est de degré au plus $k-2$ dans G, et tout sommet de $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ a un degré égal à $k-1$ dans G. Afin de montrer que $b(G) = \Delta(G) + 1$, il suffit d'exhiber une b-coloration de G avec $\Delta(G) + 1$. Pour cela on colore les sommets de G comme suit. Pour tout $i \in \{1, 2, ..., k\}$, affectons la couleur i à tous les sommets de $A_i \cup \{v_i\}$. Il est facile de vérifier que cela donne une b-coloration de G, de telle sorte que les b-sommets sont $v_1, v_2, ..., v_k$. En conséquence $b(G) = \Delta(G) + 1$. Comme G a exactement $\Delta(G) + 1$ sommets de degré exactement $\Delta(G)$ (les sommets $v_1, v_2, ..., v_k$), et chaque sommet est adjacent à au moins un sommet dans $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$, il s'ensuit que $m(G) = \Delta(G) + 1$ et $m(G \setminus e) \leq m(G) - 1$ pour toute arête e, donc $b(G \setminus e) < b(G)$. D'où, G est arête b-critique.

Montrons maintenant la condition nécessaire. Soit G un graphe arête b-critique. Soit $k = b(G)$, et considérons une b-coloration c de G avec k couleurs. Soient B l'ensemble de tous les b-sommets de c et H_k le sous graphe induit par les sommets de B. D'après le Théorème 3.1.1 (i), il existe un unique b-sommet v_i de couleur i pour tout $i \in \{1, 2, ..., k\}$, et donc $B = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$. Théorème 3.1.1 (iv) implique que $k = \Delta(G) + 1$. Pour $i = 1, 2, ..., k$, soit $A_i \subseteq V(G) \setminus B$ l'ensemble des sommets de couleurs i. Il est facile de voir que pour tout $j \neq i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ et $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k = V(G) \setminus B$. Alors, par le Théorème 3.1.1 (ii), $\cup_{i=1}^{k} A_i$ est un ensemble stable, et donc la propriété (1) de la Définition 3.1.1 est vérifiée. La propriété (4) de la Définition 3.1.1 est aussi vérifiée, car les sommets de l'ensemble $A_i \cup \{v_i\}$ ont la même couleur i. Remarquons que tout sommet $u \in A_i$ a un non-voisin dans $B \setminus \{v_i\}$, il en résulte, donc, que la propriété (5) de la Définition 3.1.1 est vérifiée. Définition 3.1.1 (5) est vérifiée

car sinon u sera un b-sommet de même couleur que celle de v_i, ce qui contredit le Théorème 3.1.1 (i). Comme v_i a besoin de $k-1$ couleurs dans son voisinage, alors il doit être adjacent à au moins un sommet de $\mathrm{A}_j \cup \{v_j\}$, pour tout $j \neq i$. Si v_i est adjacent à v_j $(j \neq i)$ et à un autre sommet $u \in \mathrm{A}_j$, alors on peut supprimer l'arête $v_i u$ sans changer la valeur de $b(\mathrm{G})$, ce qui contredit le fait que G est arête b-critique. Avec un argument similaire, on montre que si v_i n'est pas adjacent à v_j, alors v_i a exactement un seul voisin dans A_j. Il s'ensuit de cet argument que chaque sommet v_i a exactement un voisin dans $\mathrm{A}_j \cup \{v_j\}$, $j \neq i$, et donc la propriété (3) de la Définition 3.1.1 est vérifiée. Cela signifie aussi que tout sommet v_i a besoin d'au plus une couleur dans A_j $(j \neq i)$, ce qui implique que $|\mathrm{A}_i| \leq k - d_{\mathrm{H}_k}(v_i) - 1$, pour tout $i \in \{1,2,...,k\}$. En particulier, si v_i est adjacent a tous les sommets de $\mathrm{B} \setminus \{v_i\}$, alors $\mathrm{A}_i = \emptyset$. Si v_i est isolé dans B, alors $|\mathrm{A}_i| \geq 2$, sinon l'unique sommet $u \in \mathrm{A}_i$ doit être adjacent à tous les sommets de $\mathrm{B} \setminus \{v_i\}$, mais dans ce cas u sera un b-sommet, contradiction. Cela implique que la propriété (2) de la Définition 3.1.1 est aussi vérifiée.

Par conséquent, nous avons établi que G est un membre de $\mathscr{G}_{\Delta(\mathrm{G})+1}$. ■

Notons que si $\mathrm{G} \in \mathscr{G}_{d+1}$ est un graphe d-régulier, alors $\cup_{i=1}^{k} \mathrm{A}_i = \emptyset$, puisque par la définition de G, chaque sommet A_i a un degré inférieur à d et tout sommet de $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ est de degré d. Donc, les sommets $v_1, v_2, ..., v_k$ induisent un sous-graphe complet de G et par la Remarque 1 on peut obtenir le corollaire suivant, qui a été déjà prouvé par Ikhlef Eschouf [54].

Corollaire 3.1.1 *[54] Un graphe d-régulier est arête b-critique si et seulement s'il est un graphe complet.*

Il est clair que la caractérisation des graphes arêtes b-critiques donnée dans le Théorème 3.1.2 ne fournit pas une reconnaissance des graphes arêtes b-critiques, même si le graphe est l'union de deux graphes scindés.

Théorème 3.1.3 *[56] Décider si un graphe est arête b-critique est NP-difficile, même dans la classe des graphes qui sont union de deux graphes scindés.*

3.2 Arbres b_e-critiques

Notre but au sein de cette section est de caractériser la classe des arbres b_e-critiques. Tout d'abord, nous étudions quelques propriétés des arbres b_e-critiques. À l'aide de ces propriétés et d'un résultat établi par Irving et Manlove [53], nous caractérisons les arbres b_e-critiques.

Le contenu de cette section a été publié dans la revue Comptes Rendus Mathématique [7].

3.2.1 Résultats préliminaires sur les arbres b_e-critiques

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions et résultats qui nous seront utiles dans la caractérisation des arbres b_e-critiques.

Dans [53, 74], Irving et Manlove ont introduit la notion d'un graphe pivoté, dans ce qui suit on fait rappel d'un tel arbre.

Définition 3.2.1 *[53, 74] Un arbre* T *est dit pivoté si* T *a exactement* $m(\mathrm{T})$ *sommets denses et* T *contient un sommet spécial et unique* v*, dit pivot, tel que :*

- *v n'est pas dense ;*
- *tout sommet dense de* T *est adjacent à v ou à un sommet dense adjacent à v ;*
- *tout sommet dense de* T *adjacent à v et à un autre sommet dense est de degré* $m(\mathrm{T})-1$.

D'après la définition d'un arbre pivoté, nous pouvons établir l'observation suivante.

Observation 2 *Tout sommet non-dense d'un arbre pivoté* T*, à l'exception du pivot, peut être adjacent à au plus un sommet dense de* T.

Dans [53], Irving et Manlove ont prouvé que le nombre b-chromatique d'un arbre T est toujours compris entre $m(\mathrm{T})$ et $m(\mathrm{T})-1$.

Théorème 3.2.1 *[53] Si* T *est un arbre pivoté, alors* $b(\mathrm{T}) = m(\mathrm{T})-1$ *; sinon* $b(\mathrm{T}) = m(\mathrm{T})$.

Nous allons commencer notre étude par l'observation suivante.

Observation 3 *Soit e une arête d'un arbre b_e-critique* T*, et soit* T_e *l'arbre obtenu à partir de* T *en contractant l'arête e. Alors,*

(i) $m(T_e) \leq m(T)$*, avec égalité si e est une arête non-pendante telle que l'une de ses extémités est un sommet non-dense.*

(ii) *Si* T_e *n'est pas un arbre pivoté, alors* $m(T_e) \leq m(T) - 1$.

Preuve. (i) Si la première partie n'est pas vraie, alors le Théorème 3.2.1 implique que $b(T_e) \geq m(T_e) - 1 \geq m(T) \geq b(T)$, contradiction. La seconde partie est immédiate car la contraction d'une telle arête ne fait pas diminuer le m-degré de T.

(ii) En utilisant Théorème 3.2.1, on obtient $m(T_e) = b(T_e) \leq b(T) - 1 = m(T) - 1$. ■

Dans la suite, on note par D et L l'ensemble des sommets denses et l'ensemble des feuilles dans T respectivement. Et, on note par D_e et L_e l'ensemble des sommets denses et l'ensemble des feuilles dans T_e respectivement.

Théorème 3.2.2 *Soient* $T = (V, E)$ *un arbre b_e-critique,* B *l'ensemble de tous les b-sommets d'une b-coloration c de* T *avec* $b(T)$ *couleur,* S *l'ensemble des supports de* T *et* D *l'ensemble des sommets denses de* T*. Alors :*

(i) T *n'est pas un arbre pivoté ;*

(ii) $S \subseteq B$. *De plus, il n'existe pas deux voisins d'un sommet support de même couleur de telle sorte que l'un des deux est une feuille ;*

(iii) *il n'existe pas deux b-sommets de même couleur.* $|B| = b(T)$ *;*

(iv) $b(T) = \Delta(T) + 1$ *;*

(v) $D = B$.

Preuve. Posons $b(T) = k$. Si $k = 2$, alors il est facile de voir que $T = P_2$ et le théorème est vérifié. Donc, supposons que $k \geq 3$. Soit e une arête quelconque de T, et soit T_e l'arbre obtenu à partir de T en contractant l'arête e en un nouveau sommet noté v_e.

(i) Supposons, au contraire, que T est un arbre pivoté avec un pivot v. Alors, le Théorème 3.2.1 implique que $b(T) = m(T) - 1$. Soit u un sommet dense adjacent à v. Posons $e = uv$. D'après l'Observation 3 (i), nous avons $m(T_e) = m(T)$. Donc, le Théorème 3.2.1 implique que $b(T_e) \geq m(T_e) - 1 \geq m(T) - 1 = b(T)$, contradiction.

(ii) Si une partie de (ii) n'est pas vérifiée, alors la contraction de certaine arête pendante incidente à un sommet support ne fait pas diminuer le nombre b-chromatique.

(iii) Soient x et y deux b-sommets de c tels que $c(x) = c\big(y\big)$. x et y ne sont pas des sommets supports, car sinon, la contraction d'une arête pendante incidente à x ou à y ne fait pas diminuer le nombre b-chromatique. Enracinons T en x. Soient u_1, u_2,..., u_h les voisins de x. Comme x est un b-sommet, alors $h \geq k-1$. Pour tout $i \in \{1,2,...,h\}$, soit T_i une composante de $\mathrm{T} \setminus \{x\}$ qui contient u_i. Puisque x n'est pas un sommet support, alors T_i a un sommet support z_i pour tout $i \in \{1,2,...,h\}$. La première partie de (ii) implique que z_i est un b-sommet de c. De ce fait, z_i est le seul b-sommet de c de couleur $c(z_i)$ dans T_i (en particulier, $c(z_i) \neq c(x)$), sinon la contraction d'une arête pendante incidente à z_i ne fait pas diminuer le nombre b-chromatique. Par conséquent, T contient exactement $k-1$ b-sommets supports z_1, z_2,..., z_h de couleurs distinctes. Alors, $h = k-1$ et pour tout $i \in \{1,2,...,k-1\}$, T_i contient exactement un seul sommet support z_i. Soit u un sommet quelconque de $\mathrm{V(T)} \setminus \{x, z_1, z_2, ..., z_{k-1}\}$. Supposons que $u \in \mathrm{T}_i$ pour certain entier $i \in \{1,2,...,k-1\}$. Le degré de u est au plus 2, car sinon T_i contient deux sommets supports de T, contradiction. Donc, $d_{\mathrm{T}}(u) \leq 2$; en particulier, on a aussi $d_{\mathrm{T}}\big(y\big) \leq 2$. Ceci implique que $k = 3$ et $d_{\mathrm{T}}(u) = d_{\mathrm{T}}\big(y\big) = d_{\mathrm{T}}(x) = 2$. De plus, d'après la seconde partie de (ii), on a $d_{\mathrm{T}}(z_1) = d_{\mathrm{T}}(z_2) = 2$. Il en découle alors que T est une chaîne. Puisque T contient au moins 4 b-sommets dont deux entre eux (x et y) ne sont pas des sommets supports de même couleur, il s'ensuit, alors, que T est une chaîne contenant au moins 7 sommets. Mais dans ce cas, T n'est pas b_e-critique, contradiction.

(iv) La borne supérieure est vérifiée pour tout graphe, donc il reste à prouver la borne inférieure. Pour cela, montrons que tout sommet $x \in \mathrm{V(T)}$ avec $d_{\mathrm{T}}(x) \geq 3$ satisfait le fait suivant :

$$\text{si } d_{\mathrm{T}}(x) \geq 3, \text{ alors chaque deux voisins de } x \text{ sont de couleurs distinctes.} \tag{3.1}$$

Supposons, au contraire, que x a deux voisins de même couleur. Soient u_1, u_2,..., u_p $\big(p \geq 3\big)$ les voisins de x. Supposons, sans perte de généralité, que u_1 et u_2 sont de même couleur t, et que u_3 est de couleur l. Enracinons T en x. Soient T_i une composante de $\mathrm{T} \setminus \{x\}$ qui contient u_i pour tout $i \in \big\{1,...,p\big\}$. Alors, deux cas sont à distinguer ; dans chaque cas, notre but est de modifier la b-coloration c et l'étendre à une b-coloration de T_e avec k couleurs. Pour cela, dans un premier temps, on fait un échange de deux couleurs de c dans certaines

composantes de T. Ceci peut rendre c une coloration impropre. Dans ce cas, si deux sommets adjacents x et y ont la même couleur, l'arête xy est dite une arête *conflictuelle*.

Cas 1 : x n'est pas un b-sommet.

On distingue deux sous-cas.

Cas 1.1 : $l = t$.

Alors, l'un de T_1, T_2, T_3, disons T_1, ne contient pas un b-sommet de couleur $c(x)$ ou t. Dans ce cas, on échange les couleurs t et $c(x)$ dans la composante T_1, tous les autres sommets de T conservent leurs couleurs. On obtient une coloration impropre c' de T avec k couleurs, dont $e = u_1x$ est l'unique arête conflictuelle (car u_1 et x ont la même couleur). Soit c_e la restriction de c' à $T \setminus \{u_1, x\}$. Comme $T \setminus \{u_1, x\}$ est un sous-graphe induit de T_e, alors c_e peut être étendue à une coloration propre de T_e en affectant la couleur $c(x)$ à v_e. Il est facile de vérifier que c_e est une b-coloration de T_e avec k couleurs, contradiction.

Cas 1.2 : $l \neq t$.

Si l'un de T_1 ou T_2 n'a pas de b-sommets de couleur $c(x)$ et t, alors on a la même contradiction du Cas 1.1. Donc, supposons que T_1 contient le b-sommet de couleur $c(x)$. Par suite, le b-sommet de couleur t appartient à T_2. Si T_3 n'a aucun b-sommet de couleur l, alors on échange les couleurs l et $c(x)$ dans T_3 ; sinon on échange les couleurs l et $c(x)$ dans $T_1 \cup T_3$. Dans chaque cas, on obtient une coloration impropre de T avec k couleurs tel que u_3 et x ont la même couleur $c(x)$. Par un raisonnement similaire à celui utilisé ci-dessus dans Cas 1.1 en prenant $e = u_3x$, on obtient une contradiction.

Cas 2 : x est un b-sommet.

Notons que, par la seconde partie de (ii), u_1 et u_2 ne sont pas des feuilles dans T. Par conséquent, par (iii), l'un de T_1 ou T_2, disons T_1, ne contient pas de b-sommets de couleur $c(x)$ et t. Dans ce cas, on peut faire un échange de couleurs entre t et $c(x)$ dans T_1 et tous les autres sommets de T conservent leurs couleurs. On obtient une coloration impropre de T avec k couleurs dont les sommets u_1 et x ont la même couleur. En prenant $e = u_1x$ et par un raisonnement similaire à celui utilisé dans le Cas 1.1, on obtient une contradiction.

Dans chaque cas, on a une contradiction ; d'où la preuve du Fait 3.1 est achevée. Par conséquent, chaque sommet dans T a au plus $k-1$ voisins, car sinon x a deux voisins de même

couleur avec $d_T(x) \geq k \geq 3$, ce qui contredit le Fait 3.1. Donc, $d_T(x) \leq k-1$ pour tout sommet x dans T, et en particulier, on a $\Delta(T) \leq k-1$.

(v) Il est trivial que $B \subset D$. Soit $x \in D$. Puisque, par (i) et (vi), $m(T) = \Delta(T)+1$, il s'ensuit que $d_T(x) = \Delta(T) = k-1$. Si $k = 3$, alors $T = P_5$ et donc (v) est prouvé. Supposons, alors, que $d_T(x) = k-1 \geq 3$. Alors, par le Fait 3.1, tous les voisins de x sont de couleurs différentes. Ce qui signifie que $x \in B$. Il en résulte donc que $D = B$. Ceci achève la preuve. ■

Dans le reste de cette section, on note par $\overline{D} = V(T) \setminus D$ l'ensemble des sommets non-denses dans T, et par $\overline{D_e} = V(T_e) \setminus D_e$ l'ensemble des sommets non-dense dans T_e.

Dans le but de caractériser les arbres b_e-critique, nous allons établir les deux lemmes suivants.

Lemme 3.2.1 *Soient* T *un arbre b_e-critique et $v \in \overline{D}$. Alors v n'est pas un sommet support, de plus il a au moins un voisin dans* D.

Preuve. Considérons une b-coloration c de T avec k couleurs. Tout d'abord, notons que si v est une feuille, alors, d'après le Théorème 3.2.2 (ii) et (v), v est adjacent à un sommet support qui appartient à D. Donc, on peut supposer que v n'est pas une feuille. En outre, le Théorème 3.2.2 (v) implique que v n'est pas un b-sommet de c. Alors, par le Théorème 3.2.2 (ii), v n'est pas un sommet support dans T. Supposons que v n'a pas de voisins dans D. Enracinons T en v. Soient v_1 et v_2 deux voisins de v, et soit T_i $(i = 1,2)$ une composante de $T \setminus \{v\}$ qui contient le sommet v_i. Comme v n'est pas un sommet support, alors $d_T(v_i) \geq 2$. Ceci signifie que chaque composante T_i a au moins un sommet support z_i. Donc, par le Théorème 3.2.2 (ii) et (v), z_i est un sommet dense dans T. Soit T_e l'arbre obtenu à partir de T en contractant de l'arête $e = vv_1$ en un nouveau sommet v_e. Il est clair que le sommet z_i reste un sommet support dans T_e. Alors, par l'Observation 3 (i) et (ii), on a $m(T_e) = m(T)$, et T_e est un arbre pivoté. Soit w l'unique pivot de T_e. Donc, $w = v_e$ ou v_2, sinon w sera un pivot de T, ce qui contredit le Théorème 3.2.2 (i). Dans ce cas, l'un de z_1, z_2 n'est pas adjacent à w, ceci contredit la Définition 3.2.1. Donc, T_e n'est pas un arbre pivoté, et c'est une contradiction aussi. ■

Lemme 3.2.2 *Soit* T *un arbre b_e-critique avec* $b(T) = k \geq 3$. *Alors* $\overline{D} \setminus L$ *est soit un ensemble vide ou bien a exactement deux sommets non-supports de degré* 2, *et à distance au plus* 2, *et* $k \geq 4$.

Preuve. Considérons une b-coloration c de T avec k couleurs. Supposons, tout d'abord, que $\overline{D} \setminus L$ est un ensemble vide. Alors, chaque sommet de V(T) est soit un sommet dense ou une feuille. Il est clair que la contraction d'une arête quelconque de T fait diminuer le m-degré de T, et donc son nombre b-chromatique. Par conséquent, un tel arbre existe. Supposons maintenant que $\overline{D} \setminus L$ un ensemble non vide. Si $k = 3$, le Théorème 3.2.2 $(i\,v)$ implique que tout sommet de D est de degré 2. Donc, tout sommet de $D \cup \left(\overline{D} \setminus L\right)$ est un sommet dense, contradiction. Par conséquent, $k \geq 4$. Soit $v_1 \in \overline{D} \setminus L$. Au vu du Lemme 3.2.1, v_1 n'est pas un sommet support, et il a un voisin $u \in D$. Soit e une arête quelconque de T et soit T_e l'arbre obtenu à partir de T en contractant l'arête e en un nouveau sommet v_e. Posons $e = uv_1$. Il est clair que $v_e \in D_e$ et $L_e = L$. Comme e n'est pas une arête pendante dans T, l'Observation 3 (i) et $(i\,i)$ impliquent que

$$m(T_e) = m(T) \text{ et } T_e \text{ est un arbre pivoté.} \tag{3.2}$$

Puisque $v_e \in D_e$ et tout sommet dense dans T différent de u reste un sommet dense dans T_e, il s'ensuit, alors, que $D_e = (D \cup \{v_e\}) \setminus u$ et $\overline{D_e} = \overline{D} \setminus v_1$. Si v_1 est l'unique sommet de $\overline{D} \setminus L$, alors $\overline{D_e} \setminus L_e = \emptyset$ (tout sommet non-dense dans T_e est une feuille). Ceci implique, par la Définition 3.2.1, que T_e n'est pas un arbre pivoté, ce qui contredit 3.2. D'où

$$\left|\overline{D} \setminus L\right| \geq 2. \tag{3.3}$$

Soit $v_1 \neq v_2$ un sommet de $\overline{D} \setminus L$. Alors $v_2 \in \overline{D_e} \setminus L_e$. Supposons, sans perte de généralité, que v_2 est le pivot de T_e. Alors, v_e est adjacent à v_2 ou à un sommet dense adjacent à v_2. Notons par D_1 l'ensemble des sommets denses dans T_e qui sont adjacent à v_2, et par D_2 le reste des sommets denses dans T_e. Donc $D_1 \cup D_2 = D_e$. Comme T_e est un arbre pivoté, la Définition 3.2.1 implique que D_i $(i = 1,2)$ est ensemble stable. De plus, tout sommet de D_2 est adjacent à exactement un seul sommet dans D_1 et non à v_2. Supposons que $\left|\overline{D} \setminus L\right| \geq 3$. Soit $v_3 \neq v_1, v_2$ un sommet de $\overline{D} \setminus L$. Donc, $v_3 \in \overline{D_e} \setminus L_e$. Par le Lemme 3.2.1 et l'Observation 3, le sommet v_3 a exactement un seul voisin, disons x_1, dans D, et donc dans D_e. Comme v_3 n'est pas une feuille dans T (et dans T_e), il a un voisin v_4 dans $\overline{D_e} \setminus L_e$. Alors, et encore par

le Lemme 3.2.1 et l'Observation 3, v_4 a exactement un seul voisin, disons x_2, dans D et par suite dans D_e. On a clairement $x_2 \neq x_1$. Les sommets x_1 et x_2 ne peuvent pas être ensemble dans D_1, car sinon les sommets v_3, v_4, x_2, v_2, x_1 induisent un cycle de longueur 5 dans T_e. De même, x_1, x_2 ne peuvent pas être ensemble dans D_2. En effet, si x_1 et x_2 ont un voisin commun y dans D_1, alors les sommets v_3, v_4, x_2, y, x_1 induisent un cycle de longueur 5 dans T_e ; sinon, x_1, v_3, v_4, x_2 avec v_2 et deux voisins de x_1, x_2 dans D_1 induisent un cycle de longueur 7 dans T_e. Si x_i $(i = 1,2)$ appartient à D_i, alors x_1, v_3, v_4, v_2 avec x_2 et ses voisins dans D_1 induisent un cycle de longueur 6 dans T_e, contradiction. Donc $\left|\overline{D} \setminus L\right| \leq 2$. Ceci signifie, par (3.3), que $\overline{D} \setminus L$ contient exactement deux sommets non-supports v_1 et v_2.

Maintenant, nous allons voir que les sommets v_1 et v_2 sont de degré 2. Comme v_1 n'est pas une feuille dans T (et dans T_e), alors il a un voisin $u' \neq u$. De ce fait, u' doit être adjacent à v_e dans T_e. Supposons que $u' \in D_e \setminus v_e$. Dans ce cas, v_e et u' ne peuvent pas être les deux dans D_i $(i = 1,2)$, car c'est un ensemble stable. Cela implique que soit $u' = v_2$ ou bien exactement l'un de v_e, u', disons u', appartient à D_1. Dans chaque cas, v_1 ne peut pas avoir un autre voisin dans D, car $\left|\overline{D} \setminus L\right| = 2$, sinon, considérons le troisième voisin de v_1 dans D, disons u''. Dans le premier, on a $v_e \in D_1$ et $u'' \in D_2$, donc v_e est adjacent au pivot et à u'', mais $d_{T_e}(v_e) \geq m(T_e)$, ce qui contredit la Définition 3.2.1. Dans le dernier cas, $v_e \in D_2$, comme D_i est un ensemble stable (pour $i = 1,2$) $u'' \in D_1$, alors v_e a deux voisins dans D_1, contradiction avec le fait que tout sommet de D_2 est adjacent à exactement un seul sommet dans D_1. Alors, v_1 est de degré 2 dans T. De même, v_2 a un degré égal à 2 dans T. Par un raisonnement similaire ci-dessus on conclut que $d_T(v_2) = 2$ dans T.

Finalement, il reste de prouver que $d_T(v_1, v_2) \leq 2$. Si ceci n'est pas vrai, alors v_e (sommet dense dans T_e) n'est pas adjacent au pivot v_2 de T_e, ou bien à un sommet dense adjacent à v_2, ce qui contredit (3.2). Alors, $d_T(v_1, v_2) \leq 2$. ■

3.2.2 Caractérisation des arbres b_e-critiques

Cette section a pour objet la caractérisation de tous les arbres dont la contraction d'une arête quelconque fait diminuer leur nombre b-chromatique. Pour cela, nous définissons deux familles d'arbres $\mathscr{T}_1^k$, $\mathscr{T}_2^k$ et un arbre spécial T_0^k comme suit.

Soit k un entier positive. Un arbre T est dans la famille $\mathscr{T}_1^k$ (avec $k \geq 3$) s'il possède k som-

mets de degré $k-1$, et les autres sommets sont des feuilles.

Un arbre T est dans la famille $\mathscr{T}_2^k$, (avec $k \geq 4$) s'il peut être obtenu à partir d'une double étoile $S_{k-2,k-2}$ avec des sommets centre w_1 et w_2, en subdivisant l'arête w_1w_2 deux fois par l'insertion de deux nouveaux sommets z_1 et z_2 (i.e. en ajoutant deux nouveaux sommets z_1, z_2 et des arêtes w_1z_1, z_1z_2 et z_2w_2 dans $G - w_1w_2$) et en attachant $k-2$ nouveaux sommets avec tous les $k-2$ feuilles de $S_{k-2,k-2}$.

L'arbre T_0^k (avec $k \geq 4$) est obtenu à partir de $k-1$ étoiles disjointes avec des sommets centres w_1, w_2,...,w_{k-1}, chacune d'elles est d'ordre $k-1$, en ajoutant un nouveau sommet z et en l'attachant avec w_i, pour tout $i \in \{1,...,k-1\}$, ensuite pour tout $i \in \{1,2\}$ en subdivisant l'arête zw_i une seule fois par l'insertion d'un nouveau sommet z_i.

Notons que tout arbre T dans $\{\mathscr{T}_1^k,\ k \geq 3\} \cup \{\mathscr{T}_2^k \cup \{T_0^k\},\ k \geq 4\}$ a exactement k sommets de degré $k-1$, mais aucun sommet de T est un pivot. Cela signifie que $|D| = k$ et T n'est pas pivoté. Alors, le Théorème 3.2.1 implique que $b(T) = k$.

Posons $\mathscr{T} = \{\mathscr{T}_1^k,\ k \geq 3\} \cup \{\mathscr{T}_2^k \cup \{T_0^k\},\ k \geq 4\}$ avec $k = b(T)$. Notons que le seul arbre appartenant à $\mathscr{T}$ avec $k = 3$ est P_5.

Dans les figures suivantes, nous donnons des exemples d'arbres appartenant à $\mathscr{T}_1^4$, $\mathscr{T}_1^4$ et $\{T_0^4\}$.

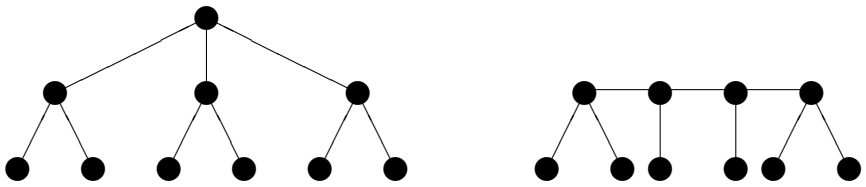


FIGURE 3.1 – Exemples d'un arbre qui appartient à $\mathscr{T}_1^4$

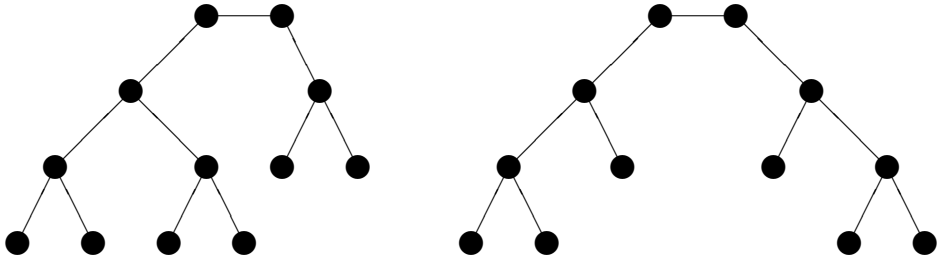


FIGURE 3.2 – Exemples d'un arbre qui appartientà $\mathscr{T}_2^4$

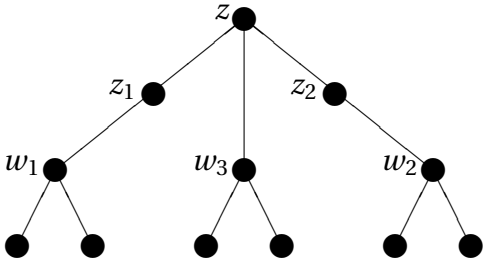


FIGURE 3.3 – L'arbre T_0^4

Théorème 3.2.3 *Un arbre* T *est* b_e*-critique si et seulement si* T *est un* P_2 *ou* $T \in \mathscr{T}$.

Preuve. En premier lieu, nous prouvons la condition suffisante. Soit T un membre de $\mathscr{T}$, avec les mêmes notations ci-dessus. Il est clair que P_2 est b_e-critique, donc on peut supposer que $T \neq P_2$. Par la remarque avant le Théorème, $b(T) = m(T) = k \geq 3$. Soit T_e l'arbre obtenu à partir de T par la contraction de l'arête e de T. Si $T \in \mathscr{T}_1^k$, alors la contraction de e fait diminuer le m-degré de T par une unité. Par conséquent, $m(T_e) = k-1$, ce qui implique

que $b(T_e) \leq k-1 < k = b(T)$. Supposons, maintenant, que $k \geq 4$ et $T \in \mathscr{T}_2^k \cup \{T_0^k\}$. Si l'une des extrémités de e est z_1 ou z_2, alors la contraction de e ne fait pas diminuer le m-degré de T, et T_e est un arbre pivoté. Donc, $m(T_e) = k$, ce qui signifie, par le Théorème 3.2.1, que $b(T_e) = k-1 < k = b(T)$. Si les extrémités de e sont des sommets denses ou bien l'une des deux est une feuille, alors la contraction de e fait diminuer le m-degré de T par une unité. Par conséquent, $m(T_e) = k-1$ et $b(T_e) \leq k-1 < k = b(T)$. D'où, T est un arbre b_e-critique.

Considérons un arbre T b_e-critique avec $k = b(T)$. Considérons une b-coloration c de T avec k couleurs. Soient B et D l'ensemble des b-sommets de c et l'ensemble de tous les sommets denses de T respectivement. Selon le Théorème 3.2.2 (iii) et (iv), on a $|B| = k = \Delta(T)+1$, et tout sommet de B est de degré $k-1$. Si $k \in \{2,3\}$, alors $\Delta(T) \in \{1,2\}$, dans ce cas il est facile de vérifier que $T = P_2$ ou $T = P_5 \in \mathscr{T}_1^3$. Donc, supposons que $k \geq 4$. Le Théorème 3.2.2 (v) implique que $D = B$. Soient $D = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ et $\overline{D} = V \setminus D$. Au vu du Lemme 3.2.2, soit $\overline{D} \setminus L$ est vide, ce qui signifie que tout sommet de T est une feuille ou bien il est de degré $k-1$, donc $T \in \mathscr{T}_1^k$; ou bien $\overline{D} \setminus L$ a deux sommets non-supports v_1 et v_2, et les deux sont de degré 2. Dans ce cas, $V = D \cup L \cup \{v_1, v_2\}$, et d'après le Lemme 3.2.2, on a deux cas à considérer.

Cas 1 : $d_T(v_1, v_2) = 2$.

Comme v_1 et v_2 sont des sommets non-supports, alors leurs voisins sont dans D. De ce fait, comme $d_T(v_1, v_2) = 2$, alors on peut supposer, sans perte de généralité, que $N_T(v_1) \cap N_T(v_2) = \{x_3\}$ et pour $i = 1,2$, $v_i \in N_T(x_i)$. Montrons que pour tout $t \in \{4, ..., k\}$, x_t n'a pas de voisins dans $\{x_1, x_2\}$. Supposons, au contraire, que x_t est adjacent à x_1. Posons $e = v_1 x_3$. Soit T_e l'arbre obtenu à partir de T en contractant l'arête e. Observons que tout sommet de T_e est soit une feuille ou un sommet dense. Comme e n'est pas une arête pendante dans T, l'Observation 3 (i) et (ii) implique que $m(T_e) = m(T)$ et T_e est un arbre pivoté dont le pivot est v_2 (puisque v_2 est l'unique sommet non-dense qui n'est pas une feuille dans T_e). Mais dans ce cas, x_t n'est pas adjacent à v_2 ou à un sommet dense adjacent à v_2, ce qui conduit à une contradiction avec le fait que T_e est un arbre pivoté. Par conséquent, x_1 n'est pas adjacent à x_t dans T_e, et donc dans T. De même x_2 n'est pas adjacent à x_t dans T. Dans ce cas, la Définition 3.2.1 implique que x_t doit être adjacent à x_3 dans T_e, et par conséquent dans T. Alors, T est isomorphe à T_0^k.

Cas 2 : $d_T(v_1, v_2) = 1$.

Pour $i = 1,2$, soit x_i l'unique sommet dense adjacent à v_i dans T. Posons $e = v_1 v_2$, et soit T_e

l'arbre obtenu à partir de T en contractant l'arête e en un nouveau sommet v_e. En utilisant un argument similire à celui du Cas 1, on conclut que T_e est un arbre pivoté de pivot v_e (car tout autre sommet dans T_e est soit un sommet dense ou une feuille). Par conséquent, tout sommet dense de T_e (et même dans T) différent à x_1 et x_2 est adjacent à x_1 ou à x_2. Alors, $T \in \mathscr{T}_2^k$. ■

Il est clair que le Théorème 3.2.3 fournit une reconnaissance en temps polynomial des arbres b_e-critiques, ceci est dû au fait que la description de la famille des arbres $\mathscr{T}$ donne une famille d'arbres reconnaissables en temps polynomial.

Chapitre 4

La b-coloration du prisme complémentaire de certains graphes particuliers

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la détermination du nombre b-chromatique du prisme complémentaire de certains graphes particuliers, comme celui du cycle, de la chaîne, du graphe complet et du graphe biparti complet. Ainsi nous donnons une borne supérieure à ce paramètre et nous caractérisons les prismes complémentaire des graphes sans triangles dont cette borne est atteinte.

Il est à noter que le contenu de ce chapitre été accepté à la publication dans la revue dans la revue RAIRO - Operations Research [8].

4.1 Définition du prisme complémentaire d'un graphe

Définition 4.1.1 *Soit* G *un graphe. On appelle prisme complémentaire de* G *le graphe formé à partir de l'union disjointe de* G *et son complémentaire* $\overline{\mathrm{G}}$ *en ajoutant les arêtes d'un couplage parfait entre les sommets correspondants de* G *et* $\overline{\mathrm{G}}$.

Exemple 4.1.1 *Le prisme complémentaire du cycle* C_5 *est le graphe de Petersen* P *(Voir Figure 4.1)*

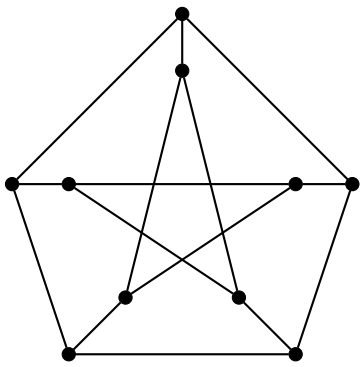


FIGURE 4.1 – Prisme complémentaire d'un cycle d'ordre 5.

Il est bien connu que le nombre b-chromatique d'un graphe quelconque G est minoré par $\omega(G)$, la taille de la clique maximum de G, et est majoré par le m-degré de G, $m(G)$.

$$\omega(G) \leq b(G) \leq m(G). \tag{4.1}$$

Notons que, dans la suite de ce chapitre, tous les sommets dessinés en gras représentent les b-sommets.

4.2 Nombre b-chromatique du prisme complémentaire de certains graphes

Dans cette section, nous donnons les valeurs exactes du nombre b-chromatique du prisme complémentaire de certains graphes classiques, comme le cycle, la chaîne, le graphe biparti complet et le graphe complet.

Dans [14], Blidia et al. ont prouvé que le nombre b-chromatique du graphe de Petersen $C_5\overline{C_5}$ est égal à 3. Dans le théorème suivant, nous déterminons le nombre b-chromatique de $C_n\overline{C_n}$ pour $n \geq 3$ ($n \neq 5$).

Théorème 4.2.1 *Soit C_n un cycle d'ordre $n \geq 3$. Alors,*

$$b\left(C_n\overline{C_n}\right) = \begin{cases} n \text{ si } n = 3,4 ; \\ n - \lceil \frac{n}{4} \rceil \text{ sinon.} \end{cases}.$$

Preuve. Soit C_n un cycle d'ordre $n \geq 3$ d'ensemble de sommets $V(C_n) = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ et d'ensemble d'arêtes $E(C_n) = \cup_{i=1}^{n-1} \{u_i u_{i+1}\}$, et soit $\overline{C_n}$ le complémentaire de C_n d'ensemble de sommets $V\left(\overline{C_n}\right) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ et d'ensemble d'arêtes $E(\overline{C_n}) = \{v_i v_j : 1 \leq i < j \leq n$ et $u_i u_j \notin E(C_n)\}$. Soit $G_n = C_n\overline{C_n}$ le prisme complémentaire de C_n d'ensemble de sommets $V(G_n) = V(C_n) \cup V\left(\overline{C_n}\right)$ et d'ensemble d'arêtes $E(G_n) = E(C_n) \cup E\left(\overline{C_n}\right) \cup \left(\cup_{i=1}^{n} \{u_i v_i\}\right)$. Commençons par prouver que l'assertion est vraie pour $n \in \{3,4\}$. Alors, quand $n \in \{3,4\}$, il n'est pas difficile de voir que le m-degré de G_n est égal à n, ce qui implique que $b(G_n) \leq n$. Alors, pour prouver l'égalité, nous donnons une b-coloration de G_n utilisant n couleurs, comme suit. Pour $n = 3$, nous affectons la couleur i au sommet u_i pour $i = 1,2,3$ et nous affectons les couleurs $2,1,1$ aux sommets v_1, v_2, v_3 respectivement. Pour $n = 4$, nous assignons la couleur i au sommet u_i pour $i = 1,2,3,4$ et nous assignons les couleurs $3,4,1,2$ aux sommets v_1, v_2, v_3, v_4 respectivement. Dans chaque cas, nous obtenons une b-coloration de G_n avec n couleurs. Par conséquent, $b(G_n) = n$ pour $n = 3,4$. En outre, l'assertion est vraie pour $n = 5$ comme il est prouvé dans [14]. Supposons alors que $n \geq 6$, et posons $k = b(G_n)$. Dans un premier temps, nous allons prouver que $k \geq n - \lceil \frac{n}{4} \rceil$. Pour cela, soit B un sous-ensemble de $V\left(\overline{C_n}\right)$ défini comme suit

$$B = \left\{ v_j \in V\left(\overline{C_n}\right) : j = 1 + 4m, m \in \mathbb{N} \right\}. \tag{4.2}$$

Il est clair que $|B| = \lceil \frac{n}{4} \rceil$.

Soient $A = V\left(\overline{C_n}\right) \setminus B$ et $t = |A|$. Alors, $t = n - \lceil \frac{n}{4} \rceil$. Donc, afin de montrer que $k \geq n - \lceil \frac{n}{4} \rceil$ pour $n \geq 6$, il suffit de donner une b-coloration c à G_n avec t couleurs. Nous commençons par la coloration des sommets de $V\left(\overline{C_n}\right)$ comme suit. Colorons chaque sommet de A avec une couleur différente, et donnons la couleur $c(v_{i+1})$ à tout sommet v_i de $B \setminus \{v_n\}$. Si $v_n \in B$, alors nous le colorons avec la couleur $c(v_{n-1})$. D'où, nous obtenons une coloration partielle de G_n avec t couleurs. Maintenant, nous colorons les sommets de $V(C_n)$ de telle sorte que tous les sommets de A deviennent des b-sommets de c de couleurs distinctes. Alors, pour tout sommet $v_j \in A \setminus \{v_n\}$, colorons son voisin u_j dans $V(C_n)$ comme suit. Si $j = 2 + 4m$ ou $j = 3 + 4m$, $(m \in \mathbb{N})$, alors nous colorons u_j par la couleur $c\left(v_{j+1}\right)$ et si $j = 4 + 4m$, $(m \in \mathbb{N})$, nous le colorons par $c\left(v_{j-1}\right)$. Lorsque $n = 4 + 4m$, nous affectons la couleur $c(v_{n-1})$ à u_n (voisin de v_n). Il est facile de voir que cette coloration est une b-coloration partielle avec t couleurs qui peut être facilement étendue à une b-coloration de G_n, cette extension est possible car le nombre de couleurs utilisé est au moins 4 est le degré des sommets non

colorés restants est au plus 3. Par conséquent,

$$k \geq n - \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil \text{ pour } n \geq 6. \tag{4.3}$$

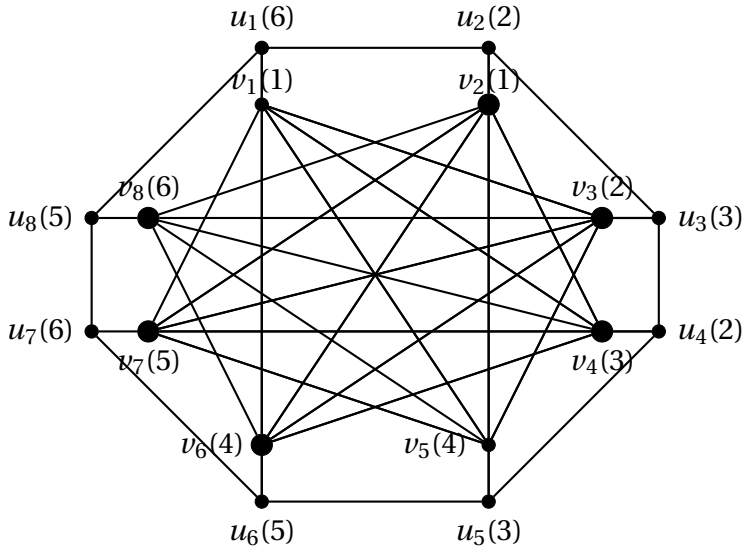


FIGURE 4.2 – Exemple d'un prisme complémentaire de C_8 avec $b(G_8) = 6$ où l'entier entre parenthèses représente la couleur du sommet.

Maintenant, considérons une b-coloration c de G_n avec k couleurs, et soit D l'ensemble des sommets denses de G_n. Il facile de vérifier que $D = V\left(\overline{C_n}\right)$. Alors, toutes les couleurs de c apparaissent dans $\overline{C_n}$. Notons que, la structure de G_n implique que

$$\text{tout sommet de } V\left(\overline{C_n}\right) \text{ a exactement deux non-voisins dans } V\left(\overline{C_n}\right). \tag{4.4}$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} V\left(\overline{C_n}\right) &= (N[v_j] \cup N[v_{j+1}]) \setminus \{u_j, u_{j+1}\} \text{ for } j \in \{1, ..., n-1\} \\ &= (N[v_1] \cup N[v_n]) \setminus \{u_1, u_n\}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Au vu de (4.4) et (4.5), chaque couleur de c peut se répéter au plus deux fois dans $V\left(\overline{C_n}\right)$, car sinon c ne sera plus une coloration propre. Soit T (resp., S) l'ensemble de tous les sommets de $V\left(\overline{C_n}\right)$ dont leur couleur apparaît deux fois (resp., une seule fois) dans $V\left(\overline{C_n}\right)$. Donc,

$$|T| \text{ est pair et } |T| + |S| = n. \tag{4.6}$$

En outre, il est facile de voir que

$$k = |S| + \frac{|T|}{2}. \tag{4.7}$$

En comparant la seconde partie de (4.6) avec (4.7), on obtient

$$k = n - \frac{|\mathrm{T}|}{2}. \tag{4.8}$$

En utilisant (4.3) et (4.8), nous aurons $|\mathrm{T}| \leq 2\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$.

Montrons que $|\mathrm{T}| = 2\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$. Supposons le contraire. Alors, comme $|\mathrm{T}|$ est pair, il en découle que $|\mathrm{T}| \leq 2\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - 2$. Ceci avec la seconde partie de (4.6) impliquent que

$$|\mathrm{S}| \geq n - 2\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 2. \tag{4.9}$$

Prouvons qu'il existe un sommet dans S adjacent à tous les sommets de T. Supposons le contraire. Alors, chaque sommet de S a un non-voisin dans T. Comme tout sommet $t \in \mathrm{T}$ a un non-voisin dans T, alors t a au plus un non-voisin dans S. Cela signifie que $|\mathrm{T}| \geq |\mathrm{S}|$. En comparant ceci avec (4.6) et (4.9), on obtient facilement

$$n \geq 2|\mathrm{S}| \geq 2n - 4\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 4. \tag{4.10}$$

Comme $\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - 1 < \frac{n}{4}$, il en découle d'après (4.10) que $n > n$, ce qui est implossible. Cette contradiction achève la preuve de l'assertion.

Par conséquent, il existe un sommet $s \in \mathrm{S}$ adjacent à tous les sommets de T. Rappelons qu'un tel sommet a exactement un voisin dans $\mathrm{V}(\mathrm{C}_n)$, et il a besoin de toutes les couleurs de c dans son voisinage (sauf la sienne). Alors, au vu de (4.4), s a deux non voisins dans S de différentes couleurs, disons j, l et qui apparaissent une seule fois dans $\mathrm{V}\left(\overline{\mathrm{C}_n}\right)$, l'une des deux est une couleur manquante dans $\mathrm{N}(s)$, ce qui est impossible. Cette contradiction achève la preuve du fait.

Par conséquent, $|\mathrm{T}| = 2\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$, et donc ,d'après (4.8), il en découle que $k = n - \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$. Cela achève la preuve du théorème. ■

Dans ce qui suit, nous déterminons la valeur exacte de $b\left(\mathrm{P}_n\overline{\mathrm{P}_n}\right)$ en utilisant les mêmes étapes du Théorème 4.2.1.

Théorème 4.2.2 *Soit* P_n *une chaîne d'ordre* $n \geq 2$. *Alors,*

$$b\left(\mathrm{P}_n\overline{\mathrm{P}_n}\right) = \begin{cases} n \text{ si } n = 2,3 ; \\ n - \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor \text{ sinon.} \end{cases}.$$

Preuve. Soit P_n une chaîne d'ordre $n \geq 2$ d'ensemble de sommets $V(P_n) = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ et d'ensemble d'arêtes $E(P_n) = \cup_{i=1}^{n-1}\{u_i u_{i+1}\}$, et soit $\overline{P_n}$ le complémentaire de P_n d'ensemble de sommets $V\left(\overline{P_n}\right) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ et d'ensemble d'arêtes $E\left(\overline{P_n}\right) = \left\{v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n \text{ et } u_i u_j \notin E(P_n)\right\}$. Soit $G_n = P_n\overline{P_n}$ le prisme complémentaire de P_n d'ensemble de sommets $V(G_n) = V(P_n) \cup V\left(\overline{P_n}\right)$ et d'ensemble d'arêtes $E(G_n) = E(P_n) \cup E\left(\overline{P_n}\right) \cup \left(\cup_{i=1}^{n}\{u_i v_i\}\right)$.

Tout d'abord, nous allons montrer que l'assertion est vraie pour $i \in \{2,3,4,5\}$. Donc, pour $n \in \{2,3\}$, on peut, aisément, voir que G_n est une chaîne P_4 ou $C_5 + e$, où e est une arête pendante incidente à un seul sommet de C_5. Dans de tels cas, l'assertion est clairement vérifiée. Pour $n = 4$, on a $m(G_4) = 4$ avec un ensemble de sommets denses $D = \{u_2, u_3, v_1, v_4\}$, ce qui signifie que $b(G_4) \leq 4$. Montrons que $b(G_4) \leq 3$. Supposons au contraire que $b(G_4) = 4$ et soit c une b-coloration de G_4 avec 4 couleurs. On doit souligner ici que chaque sommet de D est un b-sommet de c. Alors, on peut supposer, sans perte de généralité que v_1, v_4, u_2, u_3 sont colorés par $1,2,3$ et 4, respectivement. Comme v_1 a besoin de toutes les couleurs dans son voisinage (à l'exception de sa propre couleur), u_1 doit être coloré par la couleur 4. Mais dans ce cas, u_2 aura une couleur manquante dans son voisinage, ce qui contredit le fait que u_2 est un b-sommet de c. Donc $b(G_4) \leq 3$. Pour prouver l'égalité, nous donnons une b-coloration à G_4 avec 3 couleurs, comme suit. Assignons la couleur 1 à u_1, u_4, v_3, la couleur 2 à u_2, v_4, et la couleur 3 à v_1, v_2, u_3. Donc $b(G_4) = 3$. Pour $n = 5$, nous avons $m(G_5) = 4$, ce qui signifie que $b(G_5) \leq 4$. Afin de prouver que $b(G_5) = 4$ nous donnons une b-coloration de G_5 en utilisant 4 couleurs comme suit. Affectons la couleur 1 à v_5, u_4, la couleur 2 à v_1, u_2, u_5, la couleur 3 à u_1, u_3, v_2 et la couleur 4 à v_3, v_4. Alors, $b(G_5) = 4$. Supposons, maintenant, que $n \geq 6$ et soit $k = b(G_n)$. Comme dans le Théorème 4.2.1, nous allons commencer par montrer que $k \geq n - \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor$. Pour cela, on distingue deux cas selon la valeur de n.

Cas 1 : $n \neq 4m + 3$ $(m \geq 1)$.

Dans ce cas $\left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$. Soit B un sous-ensemble de $V\left(\overline{P_n}\right)$, défini comme suit

$$B = \left\{v_j \in V\left(\overline{P_n}\right) : j = 4 + 4m, m \in \mathbb{N}\right\}. \tag{4.11}$$

Il est clair que $|B| = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$. Soit $A = V\left(\overline{P_n}\right) \setminus B$ et $t = |B|$, donc $t = n - \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor$. Pour prouver que $k \geq n - \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor$, nous donnons une b-coloration de G_n avec t couleurs. Pour cela, nous commençons, comme dans le Théorème 4.2.1, par colorer chaque sommet de A avec une couleur différente, et assignons la couleur $c(v_{i-1})$ à $v_i \in B$. Alors, nous obtenons une colora-

tion partielle de G_n avec t couleurs. Maintenant, nous colorons le reste des sommets de G_n de telle sorte que chaque sommet de A sera un b-sommet de c de couleur distincte. Alors, pour tout sommet $v_j \in A \setminus \{v_n\}$, nous colorons son voisin u_j dans $V(P_n)$ comme suit. Si $j = 2+4m$ ou $j = 3+4m$, $(m \in \mathbb{N})$, alors nous colorons le sommet u_j avec la couleur $c\left(v_{j-1}\right)$ et si $j = 1+4m$, $(m \in \mathbb{N})$, alors nous le colorons avec la couleur $c\left(v_{j+1}\right)$. Dans le cas où $v_n \in A$ avec $n = 2+4m$ ou $n = 3+4m$, $(m \in \mathbb{N})$, nous colorons u_n avec la couleur $c(v_{n-1})$. Notons que si $n = 1+4m$, alors toutes les couleurs apparaissent dans le voisinage de v_n. Il n'est pas difficile de vérifier que cette coloration est une b-coloration partielle de G_n avec t couleurs qui peut être facilement étendue à une b-coloration de G_n. Alors, $k \geq n - \lceil \frac{n}{4} \rceil$.

Cas 2 : $n = 4m+3$ $(m \geq 1)$.

Dans ce cas, $\lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor = \lceil \frac{n}{4} \rceil$. Soit $C_n\overline{C_n}$ le prisme complémentaire de C_n avec $V(C_n) = V(P_n)$ et $V\left(\overline{C_n}\right) = V\left(\overline{P_n}\right)$. Constatons que, dans $C_n\overline{C_n}$, $u_1u_n \in E\left(C_n\overline{C_n}\right)$ et $v_1v_n \notin E\left(C_n\overline{C_n}\right)$, il en découle, donc, que G_n peut être obtenu à partir de $C_n\overline{C_n}$ en ajoutant l'arête v_1v_n et en supprimant l'arête u_1u_n. En conséquence, toute b-coloration de $C_n\overline{C_n}$ est une b-coloration de G_n, ce qui implique que $k \geq b\left(C_n\overline{C_n}\right) \geq n - \lceil \frac{n}{4} \rceil = n - \lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor$.

Alors dans chaque cas, nous avons

$$k \geq n - \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor. \tag{4.12}$$

Considérons une b-coloration de G_n avec k couleurs et soient S et T deux sous-ensembles de sommets disjoints de $V\left(\overline{P_n}\right)$ définis comme dans le Théorème 4.2.1 pour $\overline{C_n}$. Nous procédons de la même manière que dans le Théorème 4.2.1, on peut montrer que les clauses (4.5) - (4.8) restent vraies ici. Alors, d'après (4.8) et (4.12), on obtient $|T| \leq 2\lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor$.

Montrons que $|T| = 2\lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor$. Supposons le contraire. Puisque $|T|$ est pair, $|T| \leq 2\lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor - 2$. Ceci avec la second partie de (4.6) impliquent que

$$|S| \geq n - 2\left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + 2. \tag{4.13}$$

Comme dans le Théorème 4.2.1, nous montrons qu'il existe un sommet dans S ayant deux non-voisin dans S. Supposons le contraire. En utilisant la même preuve comme celle du Théorème 4.2.1, on peut montrer que $|T| \geq |S|$. Ceci avec (4.6) et (4.13) impliquent que

$$n \geq 2|S| \geq 2n - 4\left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + 4.$$

Comme $\lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor \leq \frac{n+1}{4}$, alors $n \geq n+3$, ce qui est impossible. Cette contradiction achève la preuve de l'assertion.

En suivant les mêmes arguments que dans le Théorème 4.2.1 (nous omettons les détails), on peut montrer que S possède un sommet avec une couleur manquante dans son voisinage, ce qui conduit à une contradiction. Cette contradiction achève la preuve du fait.

En conséquence, $|T| = 2\lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor$, et donc par la seconde partie de (4.6), on obtient $k = n - \lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor$. Cela achève la preuve du théorème. ■

Maintenant, nous allons déterminer le nombre b-chromatique du prisme complémentaire du graphe biparti complet $K_{p,q}$ $(p \geq q \geq 1)$.

Théorème 4.2.3 *Soit* $K_{p,q}$ *un graphe biparti complet avec* $p \geq q \geq 1$. *Alors,*

$$b\left(K_{p,q}\overline{K_{p,q}}\right)\begin{cases} 4 \text{ si } p = q = 2. \\ p \text{ si } p \geq q+2. \\ p+1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Il est facile de voir que l'assertion est vraie pour $p = 1$. Supposons que $p \geq 2$, soit $G_{p,q} = K_{p,q}\overline{K_{p,q}}$ $(p \geq q)$ le prisme complémentaire de $K_{p,q}$ avec un ensemble de sommets $V(G_{p,q})$ et ensemble d'arêtes $E(G_{p,q})$. Commençons par une description de la structure de $G_{p,q}$. Alors, $V(G_{p,q})$ peut être partitonné en quatre sous-ensembles disjoints $X = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$, $Y = \{y_1, y_2, ..., y_q\}$, $Z = \{z_1, z_2, ..., z_p\}$ et $T = \{t_1, t_2, ..., t_q\}$ tels que X et Y sont des stables, Z et T sont des cliques, $X \cup Y$ induit un graphe biparti complet avec une bipartition (X, Y) et

$$E(G_{p,q}) = E(G[X \cup Y]) \cup E(G[Z]) \cup E(G[T]) \cup (\cup_{i=1}^{p} \{x_i z_i\}) \cup (\cup_{i=1}^{q} \{y_i t_i\}).$$

Soient $k = b(G_{p,q})$ et D l'ensemble des sommets denses dans $G_{p,q}$. Nous distingons trois cas.

Cas 1 : $p = q$.

Si $p = q = 2$, alors $G_{2,2} = C_4\overline{C_4}$ et donc, d'après le Théorème 4.2.1 $b\left(C_4\overline{C_4}\right) = 4$. Supposons que $p \geq 3$, alors il immédiat de voir que $D = X \cup Y$ et $m(G_{p,p}) = p+2$. Nous allons montrer que $b(G_{p,p}) = p+1$. Supposons le contraire. Alors, (4.1) implique que $b(G_{p,p}) = p+2$. Soit c une b-coloration de $G_{p,p}$ utilisant $p+2$ couleurs. Par symétrie et sans perte de généralité,

supposons que x_1 est un b-sommet de couleur 1. Alors, il est clair que tous les sommets de $Y \cup \{z_1\}$ sont colorés différemment. Supposons que $c(z_1) = p+2$. Observons que, dans chaque coloration de $G[X \cup Y]$, aucune couleur ne peut appaître à la fois dans X et Y. Par conséquent, chaque sommet de $X \setminus \{x_1\}$ est coloré avec la couleur 1 ou $p+2$. Ceci conduit à une contradiction , car il n'y aura plus de b-sommet de c de couleur $i \in \{2,3,...,p+1\}$. Maintenant, nous allons montrer que $k = p+1$. Pour cela, il suffit de donner une b-coloration de $G_{p,p}$ avec $p+1$ couleurs. Nous colorons, d'abord, les sommets de X avec la couleur 1 et tous les sommets de Y avec la couleur $p+1$. Ensuite, pour $i \in \{1,...,p\}$, colorons z_i avec la couleur $i+1$ et colorons t_i avec la couleur i. Il est facile de voir que cela donne une b-coloration de $G_{p,p}$ avec $p+1$ couleurs, où $Z \cup \{t_1\}$ sont les b-sommets de cette coloration. Il en résulte donc que $b(G_{p,p}) = p+1$. Ceci achève la preuve du Cas 1.

Observons que si $p > q$, alors $\omega(G_{p,q}) = p$ et $m(G_{p,q}) = p+1$. Alors, selon (4.1), nous avons

$$p \leq k \leq p+1. \tag{4.14}$$

Cas 2 : $p = q+1$.

Nous allons montrer que $k = p+1$. Pour cela, il suffit, au vue de (4.14), de donner une b-coloration de $G_{p,q}$ avec k couleurs. Nous faisons ça comme suit. Dans un premier temps, nous colorons tous les sommets de X avec la couleur $p+1$, et pour $i \in \{1,2,...,p\}$, colorons z_i par la couleur i. Ensuite, pour $i \in \{1,...,q\}$, colorons y_i par la couleur $i+1$, et t_i par la couleur i. Il est facile de voir que cela donne une b-coloration de $G_{p,q}$ avec k couleurs, où $Z \cup \{x_1\}$ sont les b-sommets de cette coloration. Il en résulte donc que $k = p+1$.

Cas 3 : $p \geq q+2$.

Montrons que $k = p$. Supposons le contraire. Alors, par (4.14) nous avons $k = p+1$. Soit c une b-coloration de $G_{p,q}$ avec k couleurs. Il est facile de voir que $D = Y \cup Z$. Comme Z est une clique, alors tous ses sommets sont colorés différemment. Alors, supposons, sans perte de généralité, que pour $i \in \{1,2,...,p\}$, z_i est coloré avec i. Comme $|Y| = q \leq p-2 < k$, alors Z doit comporter au moins un b-sommet de c, disons sans perte de généralité z_1 est un tel sommet. Comme z_1 a besoin de toutes les couleurs dans son voisinage, x_1 doit être coloré par $p+1$ et donc aucun sommet de $Y \cup Z$ est coloré par cette couleur, contradiction. Par conséquent, $k = p$. Ceci achève la preuve du Théorème. ■

Dans le cas spécial où G ou $\overline{\mathrm{G}}$ est un graphe complet, le nombre b-chromatique de $\mathrm{G}\overline{\mathrm{G}}$ est égale à n. Cela découle de (4.1), comme $\omega\left(\mathrm{G}\overline{\mathrm{G}}\right) = m\left(\mathrm{G}\overline{\mathrm{G}}\right) = n$.

Proposition 4.2.1 *Si* G *ou* $\overline{\mathrm{G}}$ *est un graphe complet, alors* $b\left(\mathrm{G}\overline{\mathrm{G}}\right) = n$.

4.3 Graphes sans triangle avec $b\left(\mathrm{G}\overline{\mathrm{G}}\right) = |\mathrm{V}(\mathrm{G})|$

Dans cette section, nous montrons que tout graphe G d'ordre $n \geq 2$, satisfait $b\left(\mathrm{G}\overline{\mathrm{G}}\right) \leq n$, et nous caractérisons les graphes sans triangle atteignant cette borne. Notons qu'un graphe est dit *sans triangle* s'il ne possède pas de cycle d'ordre 3 comme sous-graphe induit.

Il est facile de voir que tout sommet de $\mathrm{G}\overline{\mathrm{G}}$ a pour degré au plus n, donc $\Delta\left(\mathrm{G}\overline{\mathrm{G}}\right) \leq n$. En outre, $\mathrm{G}\overline{\mathrm{G}}$ a n sommets de degré au moins n, et il n'a pas $n+1$ sommets de degré au moins n. Cela signifie que $m\left(\mathrm{G}\overline{\mathrm{G}}\right) \leq n$, et donc le résultat suivant est immédiat.

Observation 4 *Pour tout graphe* G *d'ordre* $n \geq 2$, $b\left(\mathrm{G}\overline{\mathrm{G}}\right) \leq n$.

Lorsque G est un graphe trivial, il est clair que $b\left(\mathrm{G}\overline{\mathrm{G}}\right) = 2$. Comme chaque graphe G satisfait $b(\mathrm{G}) \leq \Delta(\mathrm{G})+1$, alors $\Delta\left(\mathrm{G}\overline{\mathrm{G}}\right) = \max\left\{\Delta(\mathrm{G}), \Delta\left(\overline{\mathrm{G}}\right)\right\}+1$. Il s'ensuit que $b\left(\mathrm{G}\overline{\mathrm{G}}\right) \leq \max\left\{\Delta(\mathrm{G}), \Delta\left(\overline{\mathrm{G}}\right)\right\}+2$.

Théorème 4.3.1 *Soient* G *un graphe sans triangle d'ordre* $n \geq 2$ *et* $\mathrm{G}\overline{\mathrm{G}}$ *le prisme complémentaire de* G. *Alors* $b\left(\mathrm{G}\overline{\mathrm{G}}\right) = n$ *si et seulement si* G *ou* $\overline{\mathrm{G}}$ *est isomorphe à* P_2, P_3 *ou* C_4.

Preuve. La condition suffisante est simple à vérifier, montrons alors la nécessité.

Comme $\max\left\{\Delta(\mathrm{G}), \Delta\left(\overline{\mathrm{G}}\right)\right\} \leq n-1$, alors $n = b\left(\mathrm{G}\overline{\mathrm{G}}\right) \leq \max\left\{\Delta(\mathrm{G}), \Delta\left(\overline{\mathrm{G}}\right)\right\}+2 \leq n+1$. Nous distingons deux cas.

Cas 1 : $\max\left\{\Delta(\mathrm{G}), \Delta\left(\overline{\mathrm{G}}\right)\right\} = n-1$.

Supposons, sans perte de généralité, que $\Delta(\mathrm{G}) \leq \Delta\left(\overline{\mathrm{G}}\right) = n-1$. Soit x un sommet de G tel que $d_{\mathrm{G}}(x) = \Delta(\mathrm{G})$. Comme G est sans triangle, alors le sous-graphe $\mathrm{G}-x$ ne contient aucune arête, ce qui signifie que $\mathrm{G} = \mathrm{K}_{1,n-1}$. Selon le Théorème 4.2.3, $b\left(\mathrm{G}\overline{\mathrm{G}}\right) = n$ si et seulement si $n = 2$ ou 3. D'où G ou $\overline{\mathrm{G}}$ est isomorphe à P_2 ou P_3.

Cas 2 : $\max\left\{\Delta(G), \Delta\left(\overline{G}\right)\right\} = n-2$.

Supposons, sans perte de généralité, que $\Delta(G) \leq \Delta\left(\overline{G}\right) = n-2$. Alors, il est clair que ni G ni $\overline{G}$ contient un sommet isolé. Soient $V(G) = \{x_1, ..., x_n\}$ et $V\left(\overline{G}\right) = \{y_1, ..., y_n\}$. Alors, $V\left(G\overline{G}\right) = V(G) \cup V\left(\overline{G}\right)$ et $E\left(G\overline{G}\right) = E(G) \cup E\left(\overline{G}\right) \cup \left(\cup_{i=1}^{n} \{x_i y_i\}\right)$. Supposons que $d_G(x_n) = n-2$ et que x_{n-1} est l'unique non-voisin de x_n dans G. Soient $X_1 = \{x_n, x_{n-1}\}$, $X_2 = V(G) - X_1$, $Y_1 = \{y_n, y_{n-1}\}$ et $Y_2 = V\left(\overline{G}\right) - Y_1$. Si $n = 3$, alors $X_1 = \{x_2, x_3\}$ et $X_2 = \{x_1\}$. Dans ce cas, soit x_2 est un sommet isolé ou bien x_1 est de degré $n-1$ dans G, ce qui est impossible et donc ce cas ne peut pas se produire. Si $n = 4$, alors $X_1 = \{x_3, x_4\}$ et $X_2 = \{x_1, x_2\}$, et par suite G est un cycle C_4 $(x_1 - x_3 - x_2 - x_4 - x_1)$, ou bien une chaîne P_4 $(x_1 - x_3 - x_2 - x_4)$. Rappelons que selon les Théorèmes 4.2.1 et 4.2.2, $b\left(C_4\overline{C_4}\right) = 4$ et $b\left(P_4\overline{P_4}\right) = 3 \neq n$. Donc, G ou $\overline{G}$ est isomorphe au cycle C_4. Supposons, maintenant, que $n \geq 5$, et soit p le nombre de voisins de x_{n-1} dans X. Alors $1 \leq p \leq n-2$. Si $p = n-2$, alors $G = K_{2,n-2}$. Selon le Théorème 4.2.3, $b\left(G\overline{G}\right) = n$ si et seulement si $n = 4$, ce contredit le fait que $n \geq 5$. Supposons, maintenant, que $p \leq n-3$ et supposons sans perte de généralité que $x_1, ..., x_p$ sont les voisins de x_{n-1} dans X. Soit D l'ensemble des sommets denses de $G\overline{G}$. Rappelons que $|D| \geq m\left(G\overline{G}\right) \geq b\left(G\overline{G}\right) = n$. Si $p \geq 2$, alors $D = \{x_n, y_{p+1}, ..., y_{n-1}\}$ et lorsque $n = 1$, $D = \{x_n, y_2, ..., y_{n-2}, y_{n-1}\}$. Dans chaque cas, nous avons $|D| < n$, ce qui est impossible. De ce fait, ce cas ne peut pas se produire. ■

Nous allons conclure ce chapitre par le problème suivant.

Problème 1 *Chercher la valeur exacte du nombre b-chromatique du prisme complémentaire de la roue et des graphes réguliers.*

Chapitre 5

b-coloration des arêtes

Notre étude dans ce chapitre porte sur la b-coloration des arêtes. Nous donnons la valeur exacte de l'indice b-chromatique de certains graphes, comme la chaîne, le cycle, la roue, la double étoile, le graphe milieu et le graphe total d'une chaîne et d'un cycle.

Il est à noter que le contenu de ce chapitre est soumis au colloque COSI'2018 [9].

5.1 État de l'art

Le problème de *coloration des arêtes* d'un graphe est l'un des problèmes fondamentaux dans la théorie des graphes. Une coloration *propre* d'arêtes consiste à attribuer à chaque arête d'un graphe G = (V, E) une couleur de sorte que deux arêtes de E ayant une extrémité commune ne reçoivent pas la même couleur. Un ensemble d'arêtes qui ne sont pas adjacentes s'appelle un *couplage*. Puisque chaque ensemble d'arêtes colorées avec la même couleur est un couplage, une coloration des arêtes d'un graphe est en effet une partition de E en couplages. *L'indice chromatique*, noté $\chi'(G)$, est le plus petit entier k pour lequel le graphe G admet une coloration propre d'arêtes de G avec k couleurs. L'indice chromatique d'un graphe G est le nombre chromatique de son graphe adjoint, autrement dit si $\mathscr{L}(G)$ est le graphe adjoint de G, alors $\chi'(G) = \chi(\mathscr{L}(G))$.

La Figure 5.1 illustre une coloration des arêtes d'un graphe avec six couleurs.

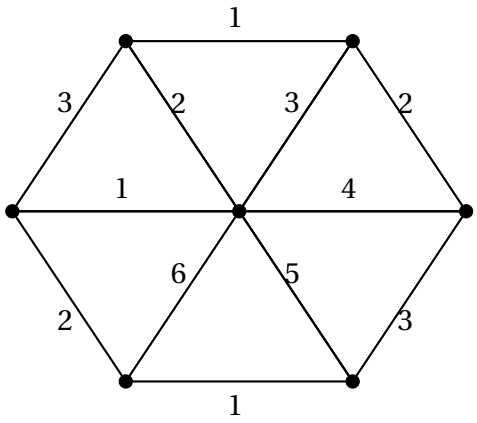


FIGURE 5.1 – Un graphe avec $\chi'(G) = 6$.

Historiquement, le problème de la coloration des arêtes a été posé en relation avec la conjecture des quatre couleurs, en 1880. Le premier article traitant le problème de la coloration des arêtes a été écrit par Tait en 1889, où il a prouvé que le problème des quatre couleurs est équivalent au problème de coloration des arêtes des graphes planaires cubiques avec trois couleurs [81].

Vizing [80] a montré que la coloration des arêtes d'un graphe G peut s'effectuer à l'aide d'au plus $\Delta(G) + 1$ couleurs. Et, donc

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Si $\chi'(G) = \Delta(G)$, alors G est dit de *classe* 1, sinon il est dit de *classe* 2. Un *problème de classification* est un problème de décider si un graphe est de la classe 1 ou de la classe 2. Du point de vue de la compléxité, Holyer [51] a prouvé que le problème de décision correspondant à l'appartenance d'un graphe simple à l'une des deux classes est NP-complet.

Il est assez naturel de refléchir à la version arête de la b-coloration d'un graphe. C'est ce que nous allons présenter dans la suite.

Définition 5.1.1 *Une b-coloration des arêtes d'un graphe* G *est une coloration propre des arêtes de* G *de telle sorte que chaque classe de couleur possède au moins une arête adjacente à*

au moins une arête dans chacune des autres classes de couleur. Une telle arête est dite b-arête. L'indice b-chromatique, noté $b'(G)$*, est le nombre maximum de couleurs pour lequel* G *admet une b-coloration d'arêtes avec* $b'(G)$ *couleurs.*

Soit $e = uv$ une arête d'un graphe $G = (V, E)$. Si $d_G(u) = d_G(v) = \Delta(G)$, alors il facile de voir que l'arête e peut avoir au plus $2\Delta(G) - 2$ couleurs dans son voisinage ($\Delta(G) - 1$ de chaque extrémité u et v). De plus, il évident que e peut prendre une couleur différente de celles qui apparaîssent dans son voisinage. D'où, il est immédiat de voir que $2\Delta(G) - 1$ est une borne supérieure de $b'(G)$.

Pour un graphe G, le paramètre $m'(G)$ est défini comme le plus grand entier m' tel que G a au moins m' arêtes de degré au moins $m'(G) - 1$. Cela signifie que $m'(G)$ est un majorant de $b'(G)$. En effet, pour que G admette une b-coloration avec k couleurs, il doit avoir nécessairement au moins k arêtes de degré au moins $k - 1$. D'où $b'(G) \leq m'(G)$. Une arête de degré au moins $m'(G) - 1$ est dite *arête dense*.

En outre, toute coloration propre d'arêtes d'un graphe G utilisant $\chi'(G)$ couleurs est une b-coloration d'arêtes de G. Donc,

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq b'(G) \leq m'(G) \leq 2\Delta(G) - 1. \tag{5.1}$$

Dans [70], Lima et al. ont prouvé que le problème de décider si $m'(G) = b'(G)$ est NP-complet. Tandis que Jakovac et Peterin [59] ont prouvé que le problème est résoluble en temps polynomial dans le cas d'un arbre. En effet, ils ont montré que l'indice b-chromatique d'un arbre est égal à $m'(T)$ ou bien à $m'(T) - 1$. En revanche, Silva a trouvé un contre exemple, où la valeur de $m'(T) - b'(T)$ peut être large [78]. Également, dans [21], Campos et Silva ont montré que cette différence peut être arbitrairement large dans le cas des graphes en blocs sans griffe qui sont des graphes de ligne des arbres. Cependant, pour certaines classes d'arbres la différence entre $m'(G)$ et $b'(G)$ peut prendre des petites valeurs.

Dans [70], les auteurs ont parvenu à établir le résultat suivant.

Théorème 5.1.1 *[70] Soit* G *un graphe adjoint d'une chenille. Alors,* $b(G)$ *est égal à* $m(G)$ *ou à* $m(G) - 1$*. De plus, la valeur de* $b(G)$ *peut être déterminée en temps polynomial.*

Également, les mêmes auteurs de [70] ont montré que si G est un graphe adjoint d'une chenille, alors une b-coloration des sommets de G avec $m(G) - 1$ couleurs existe et peut être trouvé en temps polynomial.

Jakovac et Peterin ont établi le résultat suivant.

Théorème 5.1.2 *[59] Soit* G *un graphe cubique et connexe. Alors* $b'(G) = 5$ *si et seulement si* G *n'est pas l'un des graphes suivant :* K_4, $K_3 \square K_2$, $K_{3,3}$, *ou* Q_3. *En outre,* $b'(K_4) = b'\left(K_{3,3}\right) = 3$ *et* $b'(K_3 \square K_2) = b'(Q_3) = 4$.

Les mêmes auteurs ont montré que $b'(K_n) < m'(K_n)$ pour tout $n \geq 4$ et $b'\left(K_{p,q}\right) = m'\left(K_{p,q}\right)$ pour $q \geq p \geq 3$ [59]. Dans le même papier, ils ont prouvé aussi que si G est un graphe 3-régulier contenant un cycle C_5 ou bien une chaîne P_6 comme un sous-graphe induit, alors $b'(G) = 5$.

Le résultat suivant a été établi par Jakovac et Peterin.

Théorème 5.1.3 *[59] Si* G *est un graphe d-arête régulier avec un degré minimum* $\delta(G) \geq 4$ *et* $b'(G) = d + 1$, *alors au plus deux arêtes de tout cycle d'ordre* 4 *de* G *et au plus deux arêtes de tout triangle de* G *qui peuvent être des b-arêtes dans une b-coloration d'arêtes de* G *avec* $d + 1$ *couleurs.*

Un autre papier s'intéressant à l'indice b-chromatique d'un graphe a été écrit par Koch et Peterin [66], où ils ont donné des bornes pour ce paramètre dans le cas du produit direct de deux graphes et ils ont fournis des résultats généraux pour de nombreux produits directs de graphes réguliers. Ainsi, ils ont introduit un modèle de programmation linéaire associé au problème de la b-coloration des arêtes, où il est utilisé pour calculer des valeurs exactes de l'indice b-chromatique du produit direct de certaines classes de graphes spéciaux comme le produit direct de deux chaînes et de deux cycles.

Notons que, dans la suite de ce chapitre, toutes les arêtes dessinées en lignes pointillées représentent les b-arêtes.

5.2 L'indice b-chromatique de certains graphes classiques

Dans cette section, nous déterminons la valeur exacte de l'indice b-chromatique dans le cas d'un cycle et d'une chaîne.

Théorème 5.2.1 *Soit* P_n *une chaîne à n sommets. Alors,*

$$b'(P_n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 2 ; \\ 2 \text{ si } n \in \{3,4,5\} ; \\ 3 \text{ si } n \geq 6. \end{cases}$$

Preuve. Il est facile de vérifier que le graphe adjoint d'une chaîne d'ordre n est une chaîne d'ordre $(n-1)$. Ainsi, vu que $b'(P_n) = b(\mathscr{L}(P_n)) = b(P_{n-1})$, il s'ensuit alors que $b'(P_2) = b(P_1) = 1$, $b'(P_n) = b(P_{n-1}) = 2$ pour $n \in \{3,4,5\}$, et $b'(P_n) = b(P_{n-1}) = 3$ pour $n \geq 6$. ■

Théorème 5.2.2 *Soit* C_n *un cycle d'ordre n. Alors,*

$$b'(C_n) = \begin{cases} 2 \text{ si } n = 4 ; \\ 3 \text{ si } n = 3 \text{ ou } n \geq 5. \end{cases}$$

Preuve. Puisque le graphe adjoint de C_n est un cycle à n sommets, alors $b'(C_n) = b(C_n)$. De ce fait $b'(C_n) = 2$ si $n = 4$ et $b'(C_n) = 3$ sinon. ■

Maintenant, nous allons déterminer la valeur exacte de l'indice b-chromatique de la roue W_n ($W_n = C_n \vee K_1$).

Théorème 5.2.3 *Soit* W_n *une roue d'ordre* $n+1 \geq 5$. *Alors,*

$$b'(W_n) = \begin{cases} 5 \text{ si } n = 4 ; \\ n \text{ si } n \geq 5. \end{cases}$$

Preuve. Pour $n = 4$, il est facile de vérifier que $m'(W_n) = 5$. En utilisant (5.1), on constate que $b'(W_n) \leq 5$, et l'égalité est obtenue en exhibant une b-coloration d'arêtes de W_4 utilisant 5 couleurs (Voir Figure 5.2).

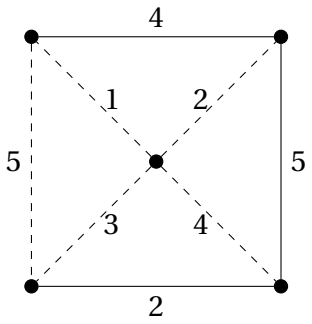


FIGURE 5.2 – Une b-coloration des arêtes de W_4 avec 5 couleurs.

Pour $n \geq 5$, on a $m'(W_n) = \Delta(W_n) = n$; par conséquent (5.1) donne $b'(W_n) = n$. ■

Théorème 5.2.4 *Soit* $S_{l,k}$ *une double étoile avec* $l \geq k \geq 1$. *Alors* $b'\left(S_{l,k}\right) = l+1$.

Preuve. Le résultat est immédiat d'après (5.1) puisque $m'\left(S_{l,k}\right) = \Delta\left(S_{l,k}\right) = l+1$. ■

5.3 L'indice b-chromatique du graphe milieu et total d'une chaîne et d'un cycle

Dans cette section, nous donnons les valeurs exactes de l'indice b-chromatiques du graphe milieu et du graphe total d'une chaîne P_n et d'un cycle C_n.

Dans un premier lieu, nous définissons le graphe milieu et le graphe total d'un graphe.

Définition 5.3.1 *(Hamada et Yoshimura)[44] Soit* $G = (V, E)$ *un graphe simple. Le graphe milieu de* G, *noté* $M(G)$ *est défini comme suit : L'ensemble des sommets de* $M(G)$ *est* $V(G) \cup E(G)$, *et deux sommets* x, y *de* $M(G)$ *sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

— $x, y \in E(G)$ *et* x *est adjacent à* y *dans* G.

— $x \in V(G)$, $y \in E(G)$ *et* x *est incident à* y *dans* G.

Définition 5.3.2 *(Behzad)[5] Le graphe total d'un graphe* $G = (V, E)$, *noté* $T(G)$, *est défini comme suit. L'ensemble des sommets de* $T(G)$ *est* $V(G) \cup E(G)$, *et deux sommets* x, y *de* $T(G)$ *sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

— $x, y \in V(G)$ *et* x, y *sont adjacents dans* G.

— $x, y \in E(G)$ *et x est adjacent à y dans* G.

— $x \in V(G)$, $y \in E(G)$ *et x est incident à y dans* G.

Exemples

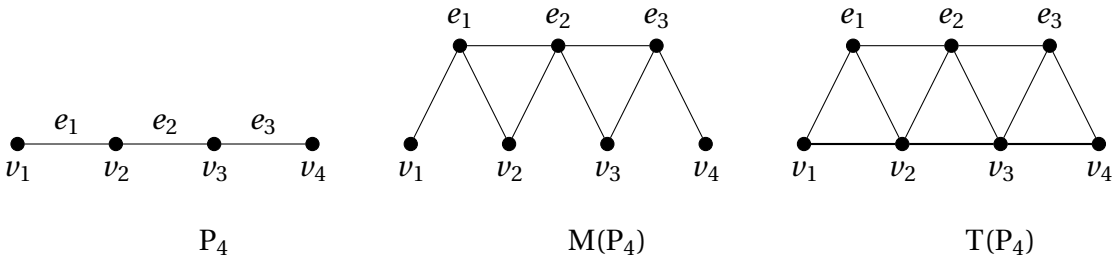


FIGURE 5.3 – Exemple d'un graphe milieu et d'un graphe total d'une chaîne.

Théorème 5.3.1 *Soit* P_n *une chaîne d'ordre n. Alors,*

$$i)\ b'(M(P_n)) = \begin{cases} n \text{ si } n \in \{2,3,4\}\ ; \\ 5 \text{ si } n \in \{5,6,7\}\ ; \\ 6 \text{ si } n \in \{8,9,10\}\ ; \\ 7 \text{ si } n \geq 11. \end{cases}, \quad ii)\ b'(T(P_n)) = \begin{cases} 3 \text{ si } n = 2\ ; \\ 4 \text{ si } n = 3\ ; \\ 5 \text{ si } n = 4\ ; \\ 6 \text{ si } n = 5\ ; \\ 6 \text{ ou } 7 \text{ si } n \in \{6,7\}\ ; \\ 7 \text{ si } n \geq 8. \end{cases}.$$

Preuve. Posons $V(P_n) = \{v_1, ..., v_n\}$ et $E(P_n) = \{e_1, ..., e_{n-1}\}$ tel que $e_j = v_j v_{j+1}$ pour tout j, $1 \leq j \leq n-1$. Soit $M(P_n)$ (resp., $T(P_n)$) le graphe milieu (resp., total) de P_n d'ensemble de sommets $V(M(P_n)) = V(P_n) \cup E(P_n)$ (resp., $V(T(P_n)) = V(M(P_n))$ et d'ensemble d'arêtes $E(M(P_n)) = \{e_i e_{i+1}, e_j v_j, e_j v_{j+1} : 1 \leq i \leq n-2 \text{ et } 1 \leq j \leq n-1\}$ (resp., $E(T(P_n)) = E(M(P_n)) \cup \{v_j v_{j+1} : 1 \leq j \leq n-1\}$). *i)* Soit c une b-coloration d'arêtes de $M(P_n)$ (resp., $T(P_n)$) avec k couleurs.

Pour $n = 2$, il est facile de voir que $M(P_2)$ est isomorphe à P_3, donc d'après le Théorème 5.2.1 $b'(M(P_2)) = 2$.

Pour $n \in \{3,4\}$, il n'est pas difficile de voir que $m'(M(P_n)) = n$ et que $\Delta(M(P_n)) = n$. Donc, d'après (5.1), il en résulte que $b'(M(P_n)) = n$.

Les trois graphes illustrés dans la Figure 5.4 montrent que $b'(M(P_n)) \geq 5$ pour $n \in \{5,6,7\}$. Vu que $m'(M(P_n)) = 5$, alors $b'(M(P_n)) = 5$.

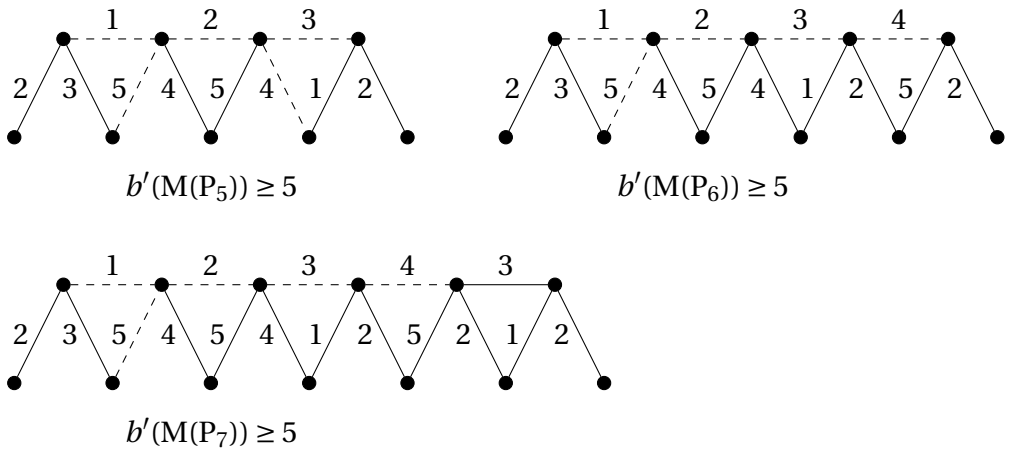


FIGURE 5.4 – Une b-coloration des arêtes de $M(P_n)$ pour $n \in \{5,6,7\}$.

Pour $n \in \{8,9,10\}$. Montrons que $b'(M(P_n)) \geq 6$. Pour cela, il suffit de donner une b-coloration d'arêtes de $M(P_n)$ avec 6 couleurs (Voir Figure 5.5). De plus, il est facile de voir que $m'(M(P_n)) = 6$, alors $b'(M(P_n)) = 6$.

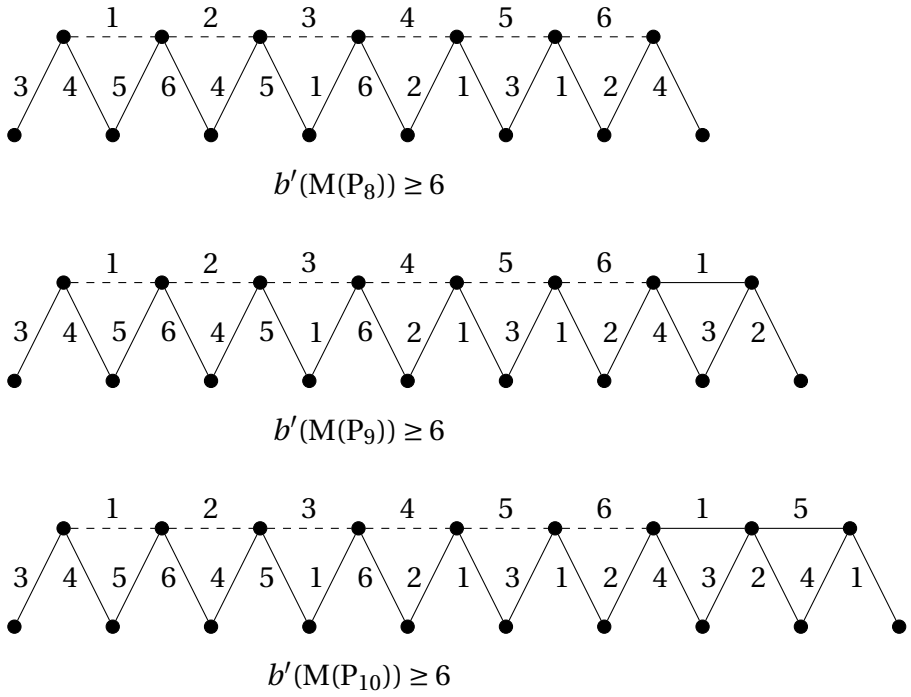


FIGURE 5.5 – Une b-coloration des arêtes de $M(P_n)$ pour $n \in \{8,9,10\}$.

Pour $n \geq 11$. Il est facile de voir que $m'(M(P_{11})) = 7$, alors (5.1) implique que $b'(M(P_{11})) \leq 7$. D'autre part, la Figure 5.6 présente une b-coloration des arêtes de $M(P_{11})$ avec 7 couleurs. Par conséquent, $b'(M(P_{11}) = 7$. Soit $H = M(P_{11})$ un sous-graphe de $M(P_n)$ pour $n \geq 12$ et considérons une b-coloration c d'arêtes de H avec 7 couleurs (coloration partielle de

$M(P_n)$). Comme pour $n \geq 11$, le degré maximum des arêtes est $2\Delta(G) - 2 = 6$ et $M(P_n)$ admet une b-coloration des arêtes avec $2\Delta(M(P_n)) - 1$ couleurs, alors c peut s'étendre à $M(P_n)$. Donc, $b'(M(P_n)) = 7$.

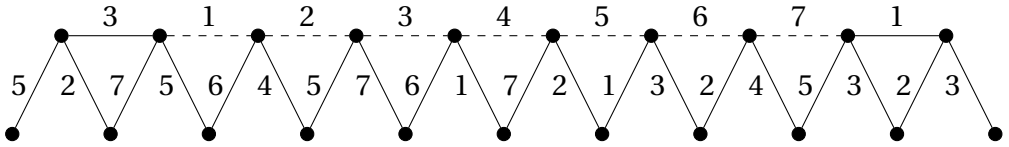


FIGURE 5.6 – Une b-coloration des arêtes de $M(P_{11})$.

ii) Pour $n = 2$, $T(P_2)$ est isomorphe à C_3, et donc d'après le Théorème 5.2.2, $b'(T(P_2)) = 3$. Pour $n = 3$, on a $m'(T(P_3)) = \Delta(T(P_3)) = 4$, et d'après (5.1), on obtient $b'(T(P_3)) = 4$.

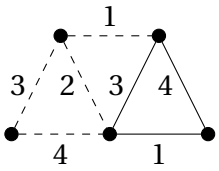


FIGURE 5.7 – Une b-coloration des arêtes de $T(P_3)$.

Pour $n = 4$, montrons d'abord que $b'(T(P_4)) \geq 5$. Pour cela, il suffit de donner une b-coloration d'arêtes de $T(P_4)$ avec 5 couleurs (Voir Figure 5.8). Il reste de montrer que $b'(T(P_n)) \leq 5$. Supposons au contraire que $b'(T(P_4)) \geq 6$. Vu que $m'(T(P_4)) = 6$, alors (5.1) donne $b'(T(P_4)) = 6$. Comme $T(P_4)$ comporte 7 arêtes denses parmi $|E(T(P_4))| = 11$ arêtes, alors il existe au moins une classe de couleur qui possède exactement une seule arête, disons e. Ceci signifie que e est une b-arête de couleur non répétée. Donc, toutes les autres b-arêtes, de couleur différentes à celle de e, sont adjacentes à e. Montrons que $e \in \{e_2v_2, e_2v_3\}$. Supposons le contraire. Alors, soit $e = v_2v_3$ ou bien $e \in \{e_1v_2, e_3v_3, e_1e_2, e_2e_3\}$. Si $e = v_2v_3$ ou $\{e_1e_2, e_2e_3\}$ (resp., $e \in \{e_1v_2, e_2v_3\}$), alors il existe deux (resp., trois) arêtes denses non adjacentes à e. Comme $b'(T(P_4)) = 6$, alors au moins l'une de ces arêtes est une b-arête, ce qui contredit le fait que toutes les b-arêtes sont adjacentes à e. Par conséquent, $e \in \{e_2v_2, e_2v_3\}$. Par symétrie et sans perte de généralité, supposons que $e = e_2v_2$ est une b-arête de couleur 1 et $c(e_1v_2) = 2$, $c(e_1e_2) = 3$, $c(e_2e_3) = 4$, $c(e_2v_3) = 5$ et $c(v_2v_3) = 6$. Vu que les arêtes denses adjacentes à e sont des b-arêtes, alors e_1v_2 et e_1e_2 sont des b-arêtes de couleurs 2 et 3 respectivement. Alors, les arêtes e_1v_1 et v_1v_2 peuvent prendre les couleurs 4 et 5 respectivement,

mais dans ce cas e_1e_2 aura une couleur manquante dans son voisinage, contradiction. En conséquence, $b'(\mathrm{T}(\mathrm{P}_4)) = 5$.

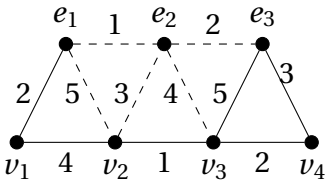


FIGURE 5.8 – Une b-coloration des arêtes de $\mathrm{T}(\mathrm{P}_4)$.

Pour $n = 5$, la Figure 5.9 présente une b-coloration d'arêtes de $\mathrm{T}(\mathrm{P}_5)$ avec 6 couleurs. De ce fait $b'(\mathrm{T}(\mathrm{P}_5)) \geq 6$.

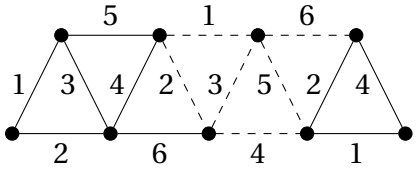


FIGURE 5.9 – Une b-coloration des arêtes de $\mathrm{T}(\mathrm{P}_5)$ avec 6 couleurs.

Il reste de prouver que $b'(\mathrm{T}(\mathrm{P}_5)) \leq 6$. Il est facile de voir que $m'(\mathrm{T}(\mathrm{P}_5)) = 7$, car $\mathrm{T}(\mathrm{P}_5)$ a exactement 7 arêtes de degré 6, mais il n'a pas 8 arêtes de degré 7. Puisque $\mathrm{T}(\mathrm{P}_5)$ possède une b-coloration d'arêtes avec 6 couleurs, alors $6 \leq b'(\mathrm{T}(\mathrm{P}_5)) \leq 7$. Supposons que $b'(\mathrm{T}(\mathrm{P}_5)) = 7$. Alors, dans ce cas $\mathrm{T}(\mathrm{P}_5)$ possède exactement 7 b-arêtes. Ces arêtes (dessinées en gras dans la Figure 5.10) sont colorées différemment.

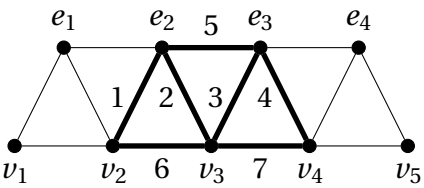


FIGURE 5.10 – Une b-coloration des arêtes de $\mathrm{T}(\mathrm{P}_5)$.

L'arête v_3v_4 doit avoir dans son voisinage la couleur 5, mais dans ce cas l'arête e_3v_4 aura dans son voisinage deux arêtes colorées avec la même couleir 5, donc l'arête e_3v_4 ne peut pas être une b-arête, contradiction. D'où, $b'(\mathrm{T}(\mathrm{P}_5)) = 7$.

Pour $n \in \{6,7\}$, la Figure 5.11 présente une b-coloration d'arêtes de $\mathrm{T}(\mathrm{P}_n)$ avec 6 couleurs. De ce fait $b'(\mathrm{T}(\mathrm{P}_7)) \geq 6$.

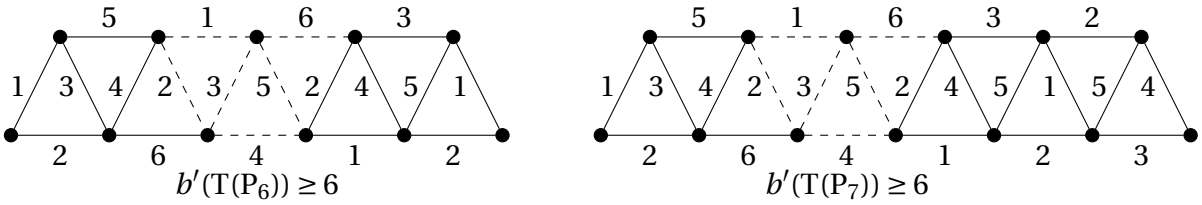


FIGURE 5.11 – Une b-coloration des arêtes de $T(P_n)$ avec 6 couleurs pour $n \in \{6,7\}$.

Pour $n = 8$, on a $m'(T(P_8)) = 7$, et d'après (5.1), on constate que $b'(T(P_8)) \leq 7$. D'autre part, la Figure 5.12 présente une b-coloration des arêtes de $T(P_8)$ avec 7 couleurs. Par conséquent, $b'(T(P_8) = 7$. Supposons maintenant que $n \geq 9$ et soit $H = T(P_8)$ un sous-graphe de $T(P_n)$. Considérons une b-coloration c des arêtes de H avec 7 couleurs (coloration partielle de $T(P_n)$). Comme le degré maximum des arêtes de $T(P_n)$ est $2\Delta(T(P_n)) - 2 = 6$, alors c peut s'étendre à $T(P_n)$ avec 7 couleurs. D'où, $b'(T(P_n)) = 7$.

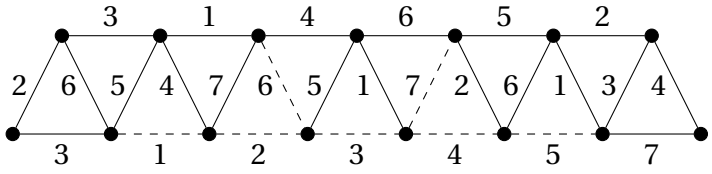


FIGURE 5.12 – Une b-coloration des arêtes de $T(P_8)$.

■

Théorème 5.3.2 *Soit C_n un cycle d'ordre n. Alors,*

$$i)\ b'(M(C_n)) = \begin{cases} 5\ si\ n \in \{3,4,5\}\ ; \\ 6\ si\ n = 6; \\ 7\ si\ n \geq 7. \end{cases} \quad , ii)\ b'(T(C_n)) = \begin{cases} 6\ si\ n \in \{3,4\}\ ; \\ 7\ si\ n \geq 5. \end{cases}.$$

Preuve. Posons $V(C_n) = \{v_1, ..., v_n\}$ et $E(C_n) = \{e_1, ..., e_n\}$ tel que $e_j = v_j v_{j+1}$ pour tout $j, \leq j \leq n-1$. Soit $M(C_n)$ (resp., $T(C_n)$) le graphe milieu (resp., total) de C_n d'ensemble de sommets $V(M(C_n)) = V(C_n) \cup E(C_n)$ (resp., $V(T(C_n)) = V(M(C_n))$ et d'ensemble d'arêtes $E(M(C_n)) = \{e_i e_{i+1}, e_i v_i, e_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{e_1 e_n, e_n v_1\}$ (resp., $E(T(C_n)) = E(M(C_n)) \cup \{v_i v_{i+1} : 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{v_1 v_n\}$).

i) Soit c une b-coloration d'arêtes de $M(C_n)$ (resp., $T(C_n)$) avec k couleurs.

Pour $n \in \{3,4,5\}$. Pour montrer que $b'(\mathrm{M}(\mathrm{C}_n)) \geq 5$, il suffit de donner une b-coloration d'arêtes de $\mathrm{M}(\mathrm{C}_n)$ en utilisant 5 couleurs (Voir Figure 5.13). Il reste à montrer que $b'(\mathrm{M}(\mathrm{C}_n)) \leq 5$. En effet, vu que $m'(\mathrm{M}(\mathrm{C}_n)) = 5$, (5.1) donne $b'(\mathrm{M}(\mathrm{C}_n)) \leq 5$, et par conséquent $b'(\mathrm{M}(\mathrm{C}_n)) = 5$.

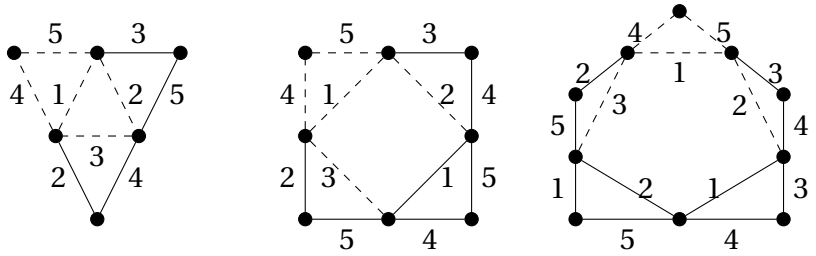


FIGURE 5.13 – Une b-coloration des arêtes avec 5 couleurs de $\mathrm{M}(\mathrm{C}_n)$ pour $n \in \{3,4,5\}$.

Pour $n = 6$, en exhibant une b-coloration d'arêtes de $\mathrm{M}(\mathrm{C}_n)$ avec 6 couleurs (Voir Figure 5.14), on constate que $b'(\mathrm{M}(\mathrm{C}_n)) \geq 6$. D'autre part, puisque $m'(\mathrm{M}(\mathrm{C}_n)) = 6$, on conclut que $b'(\mathrm{M}(\mathrm{C}_n)) = 6$.

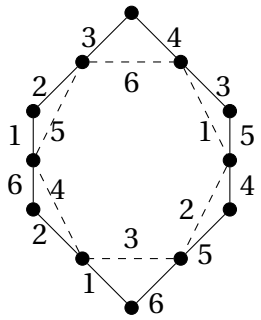


FIGURE 5.14 – Une b-coloration des arêtes de $\mathrm{M}(\mathrm{C}_6)$.

Pour $n \in \{7,8\}$. Pour prouver que $b'(\mathrm{M}(\mathrm{C}_n)) \geq 7$, nous donnons une b-coloration d'arêtes de $\mathrm{M}(\mathrm{C}_n)$ avec 7 couleurs (Voir Figure 5.15 pour $n \in \{7,8\}$).

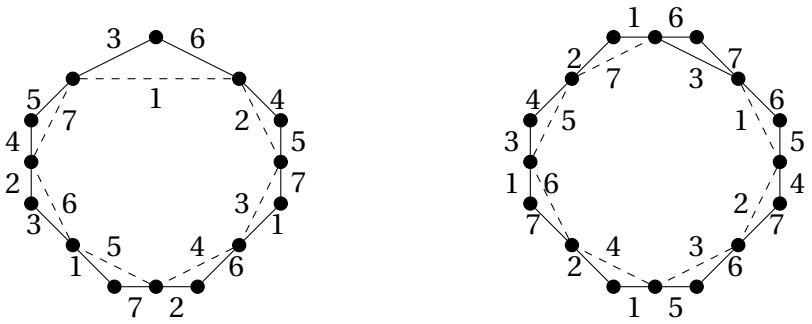


FIGURE 5.15 – Une b-coloration des arêtes de $M(C_n)$ pour $n \in \{7,8\}$.

Pour $n \geq 9$, on commence d'abord par une coloration partielle d'arêtes de $M(C_n)$ avec 7 couleurs ensuite on étend cette coloration à toutes les arêtes de $M(C_n)$; cette extension est possible puisque le degré maximum des arêtes de $M(C_n)$ est égal à 6. Pour cela, considérons le sous-graphe H de $M(C_n)$ engendré par l'ensemble $A = \{e_i, v_j : 1 \leq i \leq 8,\ 1 \leq j \leq 9\}$. Nous colorons les arêtes de H comme suit. On affecte la couleur i aux arêtes $e_i e_{i+1}$ pour tout $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$, et les autres arêtes sont colorées comme suit. $c(e_4v_4) = c(e_6v_6) = c(e_8v_8) = 1$, $c(e_5v_5) = c(e_7v_8) = c(v_1e_n) = 2$, $c(e_1e_n) = c(e_6v_7) = c(e_8v_9) = 3$, $c(e_2v_3) = c(e_7v_7) = 4$, $c(e_1v_2) = c(e_3v_3) = c(e_8e_9) = 5$, $c(e_2v_2) = c(e_4v_5) = 6$, $c(e_1v_1) = c(e_3v_4) = c(e_5v_6) = 7$. Notons que les b-arêtes de c sont $\{e_i e_{i+1} : i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}\}$. En conséquence, $b'(M(C_n)) \geq 7$. Vu que $m'(M(C_n)) = 7$, alors $b'(M(C_n)) = 7$.

ii) Pour $n = 3$, la Figure 5.16 présente une b-coloration d'arêtes de $T(C_3)$ avec 6 couleurs. Alors, $b'(T(C_n)) \geq 6$.

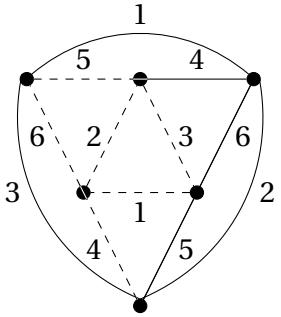


FIGURE 5.16 – b-coloration d'arêtes de $T(C_3)$ avec 6 couleurs.

Montrons maintenant que $b'(T(C_3)) \leq 6$. Supposons, au contraire, que pour $b'(T(C_3)) \geq 7$. Comme $m'(T(C_3)) = 7$, alors d'après (5.1), on a $b'(T(C_3)) = 7$. Soit c une b-coloration de

$T(C_3)$ avec 7 couleurs, et soit C_i une classe de couleur i, pour $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Puisque $T(C_3)$ possède 12 arêtes, alors il existe au moins deux classes de couleur, disons C_1 de couleur 1 et C_2 de couleur 2, telles que $|C_1| = |C_2| = 1$. Clairement les arêtes de C_1 et de C_2 sont des b-arêtes de couleurs non répétées 1 et 2 respectivement, donc elle sont adjacentes. De plus, toutes les autres b-arêtes de couleurs $3,4,5,6$ et 7 sont adjacentes à ses deux arêtes. Par conséquent, les 7 b-arêtes de couleurs distinctes ont une extrémité commune de degré 7, contradiction car $\Delta(T(C_3)) = 4$. Alors, $b'(T(C_3)) = 6$.

Pour $n = 4$, la Figure 5.17 présente une b-coloration d'arêtes de $T(C_4)$ avec 6 couleurs. Par concéquent, $b'(T(C_4)) \geq 6$.

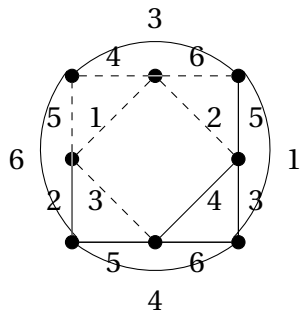


FIGURE 5.17 – b-coloration d'arêtes de $T(C_4)$ avec 6 couleurs.

D'autre part, il est clair que $b'(T(C_4)) \leq m'(T(C_4)) = 7$. Nous allons montrer que $b'(T(C_4)) = 6$. Supposons au contraire que $b'(T(C_4)) = 7$. De ce fait, puisque $T(C_4)$ est un graphe 6-arête-régulier, alors

toutes les arêtes adjacentes à une b-arête sont colorées différemment. (5.2)

Soit c une b-coloration des arêtes de $T(C_4)$ avec 7 couleurs. Alors c partitionne l'ensemble des arêtes de $T(C_4)$ en couplages où chaque couplage est une classe de couleur. On peut voir facilement que chaque classe de couleur (couplage) contient au moins deux arêtes car sinon on aura une b-arête qui contient dans son voisinage deux arêtes colorées avec a même couleur, ce qui contredit (5.2). Vu que $\beta(T(C_4)) = 4$ (couplage maximum de $T(C_4)$), alors toute classe contient au plus 4 arêtes. De ce fait, puisque le nombre des arêtes de $T(C_4)$ est égal à 16, alors il y a au moins 5 classes de couleur qui contiennent exactement 2 arêtes. Soit n_i le nombre des arêtes de couleur i pour $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Il y a deux cas qui se présentent. Sans perte de généralité, soit $n_1 = 4$ et $n_i = 2$ pour $i \in \{2,3,4,5,6,7\}$ ou bien

$n_1 = n_2 = 3$ et $n_i = 2$ pour $i \in \{3,4,5,6,7\}$. Dans le premier cas, toute arête de couleur j va être adjacente à deux arêtes de même couleur $i \neq j$. Dans ce cas, c ne peut pas avoir des b-arêtes de couleur j en vertu de (5.2), contradiction. D'où le premier cas est à éliminer. Il ne reste que le deuxième cas. Posons $V(T(C_4)) = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ et soient C_1 et C_2 deux classes de couleurs 1 et 2 respectivement telles que $C_1 = \{A_1, A_1', A_1''\}$ $C_2 = \{A_2, A_2', A_2''\}$. Supposons que A_1 et A_2 sont des b-arêtes.

Cas 1 : A_1 est adjacente à A_2.

Sans perte de généralité, posons $A_1 = ab$ et $A_2 = bc$. Alors (5.2) implique qu'aucune arête de $C_2 \setminus A_2$ est adjacente à A_1 et aucune arêtes de $C_1 \setminus A_1$ est adjacente à A_2. Soit $H = (V', E')$ un sous-graphe partiel de $T(C_4)$ tel que $V' = V(T(C_4)) \setminus \{a,b,c\}$ et $E' = \{A_1', A_1'', A_2', A_2''\}$. Puisque $|V(T(C_4))| = 8$, alors il est facile de voir que H est une chaîne alternée ou bien un cycle alterné de couleurs 1 et 2.

Si $H = P_5$, alors sans perte de généralité, supposons que $A_1' = de$, $A_2' = ef$, $A_1'' = fg$ et $A_2'' = gh$ (Voir Figure 5.18). Dans ce cas, (5.2) implique que les arêtes qui peuvent être des b-arêtes de c sont ac, cd, dh et ah (les arêtes candidates sont dessinées en gras dans la Figure 5.18). Par conséquent, il n'existe pas une b-arête pour la septième couleur de c, ce qui contredit le fait que $b'(T(C_4)) = 7$.

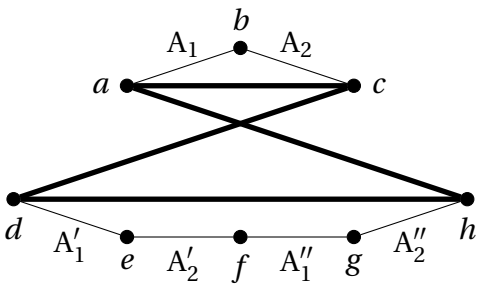


FIGURE 5.18 – b-coloration d'arêtes de $T(C_4)$ avec 7 couleurs.

Si $H = C_4$, alors sans perte de généralité, supposons que $A_1' = de$, $A_2' = ef$, $A_1'' = fg$ et $A_2'' = gd$. Dans ce cas, les seules arêtes candidates d'être des b-arêtes de c sont ac et les quatre arêtes incidentes au sommet h. Les sommets a, b et c induisent un triangle, et comme $A_1 = ab$ et $A_2 = bc$ sont des b-arêtes, alors le Théorème 5.1.3 implique que ac ne peut pas être une b-arête. Alors, il n'existe que les quatre arêtes incidentes à h qui peuvent être des b-arêtes (les arêtes candidates sont dessinées en gras dans la Figure 5.19). Par conséquent, il n'existe pas une b-arête pour la septième couleur de c, contradiction.

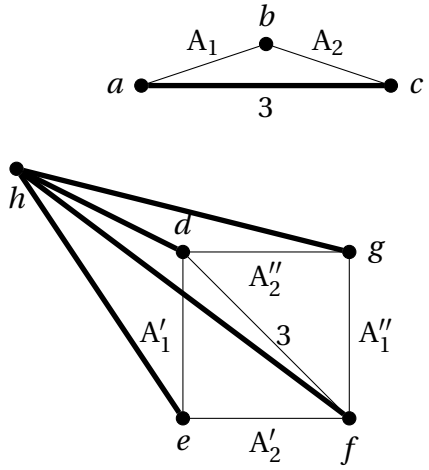


FIGURE 5.19 – b-coloration d'arêtes de $T(C_4)$ avec 7 couleurs.

Cas 2 : A_1 n'est pas adjacente à A_2.

Comme A_1 et A_2 sont deux b-arêtes de couleurs 1 et 2, alors chacune d'elles a besoin de la couleur de l'autre, alors sans perte de généralité supposons que A_1 est adjacente à A'_2 et A_2 est adjacente à A'_1. On distingue deux sous-cas selon l'adjacence entre les arêtes A''_1 et A''_2.

Cas 2.1 : Si A''_1 n'est pas adjacent à A''_2.

Comme $|V(T(C_4))| = 8$, alors il est clair que l'arête A''_1 est adjacente à A'_2 et l'arête A''_2 est adjacente à A'_1. Dans ce cas, (5.2) implique qu'il n'existe que quatre arêtes qui peuvent être des b-arêtes de c (Voir Figure 5.20 les arêtes sont dessinées en gras). Par conséquent, il n'existe pas une b-arête pour la septième couleur de c, ce qui contredit le fait que $b'(T(C_4)) = 7$.

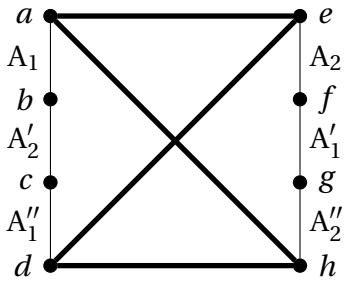


FIGURE 5.20 – b-coloration d'arêtes de $T(C_4)$ avec 7 couleurs.

Cas 2.2 : Si A''_1 est adjacente à A''_2.

Si les arêtes A''_1 et A''_2 ne sont pas adjacentes à A'_2 et A'_1 respectivement, alors (5.2) implique qu'il n'existe que quatre arêtes qui peuvent être des b-arêtes de c (Voir Figure 5.21 où les arêtes candidates sont dessinées en gras). Il en résulte donc qu'il n'existe pas une b-arête

pour la septième couleur de c, contradiction avec le fait que $b'(T(C_4)) = 7$.

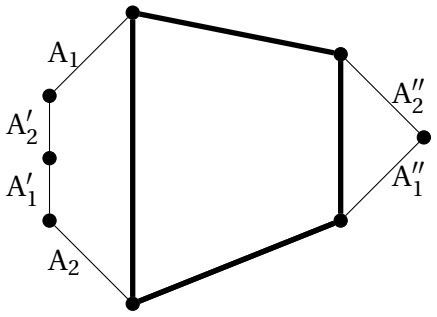


FIGURE 5.21 – b-coloration d'arêtes de $T(C_4)$ avec 7 couleurs.

Supposons maintenant et sans perte de généralité que A''_1 est adjacente à A'_2 et A''_2 n'est pas adjacente à A'_1. Alors, (5.2) implique qu'il n'existe que quatre arêtes qui peuvent être des b-arêtes de c (Voir Figure 5.22 les arêtes sont dessinées en gras). Alors il n'existe pas une b-arête pour la septième couleur de c, ce qui contredit le fait que $b'(T(C_4)) = 7$.

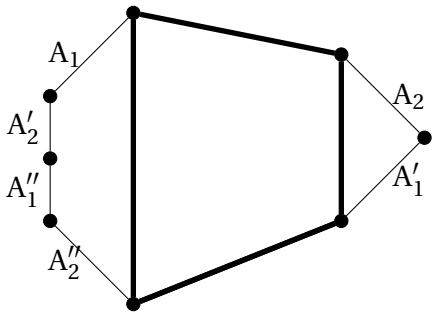


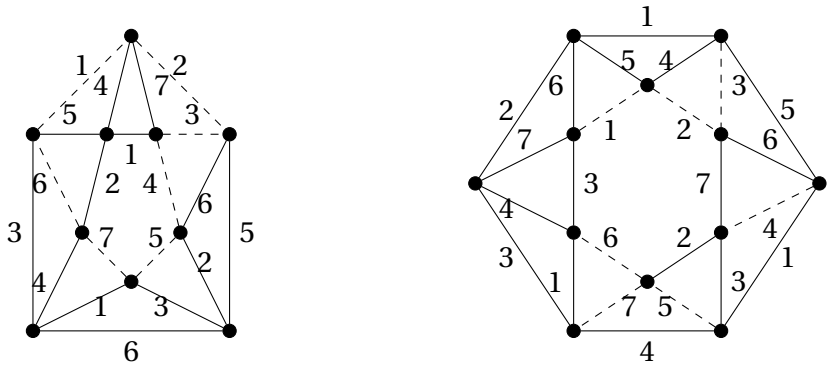
FIGURE 5.22 – b-coloration d'arêtes de $T(C_4)$ avec 7 couleurs.

Supposons maintenant et sans perte de généralité que A''_1 est adjacente à A'_2 et A''_2 est adjacente à A'_1 et que $A_1 = ab, A'_2 = bc, A''_1 = cd, A''_2 = de, A'_1 = ef$ et $A_2 = fg$. Puisque $|V(T(C_4))| = 8$, alors h n'est incident à aucune arêtes de $C_1 \cup C_2$. Donc, (5.2) implique qu'il existe cinq arêtes qui peuvent être des b-arêtes de c tel que le sommet h est incident à quatre parmi elles et l'autre arête c'est ag. Sans perte de généralité, supposons que l'arête ag est une b-arête de couleur 3. Comme $n_3 = 2$ et $d_{T(C_4)}(h) = 4$, alors la couleur 3 n'apparait pas dans le voisinage de toutes les arêtes incidentes à h, contradiction car ces dernières sont des b-arêtes.

Dans chaque cas, nous avons obtenu une contradiction, donc $b'(T(C_4)) = 6$.

Pour $n \geq 5$. Afin de prouver que $b'(\mathrm{T}(\mathrm{C}_n)) \geq 7$, nous donnons une b-coloration de $\mathrm{T}(\mathrm{C}_n)$ avec 7 couleurs.

Pour $n \in \{5,6\}$, voir Figure 5.23.



$b'(\mathrm{T}(\mathrm{C}_5)) \geq 7$ $\qquad$ $b'(\mathrm{T}(\mathrm{C}_6)) \geq 7$

FIGURE 5.23 – Une b-coloration des arêtes de $\mathrm{T}(\mathrm{C}_5)$ et $\mathrm{T}(\mathrm{C}_6)$.

Pour $n \geq 7$, on a $\mathrm{V}(\mathrm{M}(\mathrm{C}_n)) = \mathrm{V}(\mathrm{T}(\mathrm{C}_n))$ et $\mathrm{T}(\mathrm{C}_n)$ peut être obtenu à partir de $\mathrm{M}(\mathrm{C}_n)$ en ajoutant les arêtes $\cup_{i=1}^{n-1}\{v_i v_{i+1}\} \cup \{v_1 v_n\}$. Soit π une b-coloration d'arêtes de $\mathrm{M}(\mathrm{C}_n)$ avec 7 couleurs. Clairement π est une coloration partielle de $\mathrm{T}(\mathrm{C}_n)$. Puisque le degré maximum de $\mathrm{T}(\mathrm{C}_n)$ est égal à 6, alors on peut étendre π aux autres arêtes de $\mathrm{T}(\mathrm{C}_n)$. D'où $b'(\mathrm{T}(\mathrm{C}_n)) \geq 7$. Sachant que $m'(\mathrm{T}(\mathrm{C}_n)) = 7$, on conclut que $b'(\mathrm{T}(\mathrm{C}_n)) \leq 7$, et par conséquent, $b'(\mathrm{T}(\mathrm{C}_n)) = 7$.

■

Conclusion et Perspectives

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés en particulier à la b-coloration dans les graphes.

Nous avons structuré notre travail en deux parties. Dans la première partie, nous nous sommes intéressés à la b-coloration des sommets d'un graphe. Dans un premier temps, nous avons caractérisé la famille des graphes dite arête b-critiques, c'est-à-dire les graphes dont la suppression d'une arête quelconque fait diminuer leur nombre b-chromatique. Ensuite, nous avons caractérisé la famille des arbres dite b_e-critiques, c'est-à-dire les arbres dont la contraction d'une arête quelconque fait diminuer leur nombre b-chromatique. Enfin, nous avons déterminé la valeur exacte du nombre b-chromatique du prisme complémentaire de certains graphes particuliers comme celui du cycle, de la chaîne et du graphe biparti complet. En outre, nous avons montrer que tout graphe $G = (V, E)$ satisfait $b(G\overline{G}) \leqslant |V(G)|$, et nous avons caractérisé les graphes sans triangles pour lesquels cette borne est atteinte. Dans la deuxième partie, nous nous sommes focalisés sur la b-coloration des arêtes d'un graphe. Dans cette partie, nous avons déterminé la valeur exacte de l'indice b-chromatique de certains graphes comme la chaîne, le cycle, la roue, double étoile, et le graphe milieu et le graphe total d'une chaîne et d'un cycle.

Nos différents travaux de recherche dans cette thèse, que ce soit la b-coloration des sommets ou bien la b-coloration des arêtes, nous ont amené à envisager de nombreuses perspectives de recherche qui nous semblent intéressantes pour chaque type de problème étudié. Nous citons quelques unes de ces perspectives dans ce qui suit. Concernant les arbres b_e-critiques, il serait intéressant de poursuivre l'étude de ce problème sur d'autres classes de graphes. En ce qui concerne l'indice b-chromatique, il serait intéressant aussi de déterminer la valeur exacte ou bien des bornes de ce paramètre pour d'autres graphes notamment le graphe milieu et le graphe total d'une étoile et d'un graphe complet, etc. Aussi, il

est intéressant d'étudier les graphes critique par rapport l'indice b-chromatique en utilisant l'une des opérations sur les sommets ou les arêtes que nous les avons défini dans le premier chapitre.

Bibliographie

[1] M. Alkhateeb, A. Kohl, Upper bounds on the b-chromatic number and results for restricted graph classes, Discucciones Math. Graph Theory 31 (2011) 709-735.

[2] K. Appel et W. Haken. Every planar map is four colorable : Part 1, discharging. Illinois. J. Maths., 21 : 429 – 490, 1977.

[3] K. Appel et W. Haken. Every planar map is four colorable : Part 2, reducibility. Illinois. J. Maths., 21 : 491 – 567, 1977.

[4] D. Barth, J. Cohen and T. Faik. Complexity of determining the b-continuity property of graphs, PRiSM Technical Report, 2003.

[5] M. Behzad : A criterion for the planarity of the total graph of a graph. Proc. Camb.Philos. Soc. 63 : 679 - 681 ; 1967.

[6] A. Bendali-Braham, N. Ikhlef Eschouf, M. Blidia. A characterization of edge b-critical graphs, Discrete Applied Mathematics 238 (2018) 158-160.

[7] A. Bendali-Braham, N. Ikhlef Eschouf, M. Blidia. A characterization of b_e-critical trees. Comptes rendus Mathematique C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 356 (2018) 115-120.

[8] A. Bendali-Braham, N. Ikhlef Eschouf, M. Blidia. Some results on the b-chromatic number in complementary prism graphs. A paraître dans RAIRO - Operations Research.

[9] A. Bendali-Braham, N. Ikhlef Eschouf, M. Blidia. b-coloration des arêtes de certains graphes. Soumis au Colloque sur l'Optimisation et les Systèmes d'Information 3-6 septembre 2018-COSI'2018.

[10] C. Berge. *Graphs*. North Holland, 1985.

[11] C.I. Betancur Velasquez, F. Bonomo, I. Koch. On the b-coloring of P_4-tidy graphs. Discrete Applied Mathematics 159 (2011) 60–68.

[12] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf F. Maffray. b-coloring of some bipartite graphs, Aus- tralasian J. Combin 53 (2012) 67-76.

[13] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf, F. Maffray. On vertex b-critical trees. Opuscula Math. 33, n :1 (2013) 19-28.

[14] M. Blidia, F. Maffray, Z. Zemir. On b-colorings in regular graphs. Discrete Applied Mathematics 157 : 1787 – 1793, 2009.

[15] J. A. Bondy, U. S. R. Murty. Graph theory with applications, North-Holland, New York, 1979.

[16] F. Bonomo, G. Duràn, F. Maffray, J. Marenco, M. Valencia-Pabon. On the b-coloring of cographs and P_4-sparse graphs. Graphs and Combinatorics 25 : 153 – 167, 2009.

[17] R. Brooks. On coloring the nodes of a network. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 37 : 194 – 197, 1941.

[18] S. Cabello, M. Jakovac. On the b-chromatic number of regular graphs. Discrete applied mathematics, vol. 159, no 13, pp. 1303 – 1310, 2011.

[19] V. Campos, C. Linhares Sales, F. Maffray, A. Silva. b-chromatic number of cacti. Electronic Notes in Discrete Mathematics 35 (2009) 281–286.

[20] V. Campos, C. Linhares Sales, A. Maia, R. Sampaio. On b-coloring of graphs with few $P_4's$. Dans 8th French Combinatorial Conference, 2010.

[21] V. Campos. A. Silva. Edge-b-Coloring Trees. Algorithmica DOI 10.1007/s00453-016-0240-x. Springer Science+Business Media New York 2016.

[22] L. Dekar, H. Kheddouci. A Graph b-Coloring Based Method for Composition-Oriented Web Services Classification. A. An et al. (Eds.) : ISMIS, LNAI 4994, pp. 599 – 604, 2008.

[23] L. Dekar, H. Kheddouci. Distance-2 Self-stabilizing Algorithm for a b-Coloring of Graphs. S. Kulkarni and A. Schiper (Eds.) : SSS, LNCS 5340, pp. 19 – 31, 2008.

[24] G. A. Dirac. Note on the colouring of graphs. Math. Z.54 : 347-353, 1951

[25] G. A. Dirac. Property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. J. London, Math. Soc. 27 : 85 – 92, 1952.

[26] B. Effantin. The b-chromatic number of power graphs of complete caterpillars. Journal of Discrete Mathematical Science and Criptography 8 (2005) 483 – 502.

[27] B. Effantin, H. Kheddouci. A distributed algorithm for a b-coloring of a graph. In : Guo, M., Yang, L.T., Di Martino, B., Zima, H.P., Dongarra, J., Tang, F. (eds.) ISPA. LNCS, vol. 4330, pp. 430 – 438, 2006.

[28] B. Effantin, H. Kheddouci. Exact values for the b-chromatic number of a power complete k-ary tree. Journal of Discrete Mathematical Science and Criptography 8 (1) (2005) 117 – 129.

[29] B. Effantin, H. Kheddouci. The b-chromatic number of some power graphs. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 6 : 45 – 54, 2003.

[30] H. Elghazel, K. Benabdeslem, A.Dussauchoy. Constrained Graph b-Coloring Based Clustering Approach. I.Y. Song, J. Eder, and T.M. Nguyen (Eds.) : DaWaK, LNCS 4654, pp. 262 – 271, 2007.

[31] H. Elghazel, K. Benabdeslem. Towards b-coloring of SOM. In : P. Perner (Ed.). MLDM, LNAI 5632, pp. 322 – 336, 2009.

[32] H. Elghazel, V. Deslandres, M. S. Hacid, A. Dussauchoy, H. Kheddouci. A New Clustering Approach for Symbolic Data and Its Validation : Application to the Healthcare Data. F. Esposito et al. (Eds.) : ISMIS, LNAI 4203, pp. 473 – 482, 2006.

[33] H. Elghazel, H. Kheddouci, V. Deslandres, A. Dussauchoy. A Graph b-coloring Framework for Data Clustering. J. Math Model Algor 7 : 389 – 423, 2008.

[34] H. Elghazel, H. Kheddouci, V. Deslandres, A. Dussauchoy. A Partially Dynamic Clustering Algorithm for Data Insertion and Removal. V. Corruble, M. Takeda, and E. Suzuki (Eds.) : DS 2007, LNAI 4755, pp. 78 – 90, 2007.

[35] H. Elghazel, T. Yoshida, V. Deslandres, M.S Hacid, A. Dussauchoy. A New Greedy Algorithm for Improving b-Coloring Clustering. F. Escolano and M. Vento (Eds.) : GbRPR, LNCS 4538, pp. 228 – 239, 2007.

[36] A. El Sahili, M. Kouider. About b-colorings of regular graphs, Res. Rep. 1432, LRI, Univ. Orsay, France, 2006.

[37] T. Faik. About the b-continuity of graphs, Elect. Notes in Discrete Mathematics 17 : 151 – 156, 2004.

[38] T. Faik. La b-continuité des b-colorations : complexité, propriétés structurelles et algorithmes. Thèse de Doctorat, Université Paris XI Orsay, 2005.

[39] S. François, R. Balakrishnan Raj. Bounds for the b-chromatic number of vertex-deleted subgraphs and the extremal graphs. Electronic Notes in Discrete Mathematics 34 : 353 – 358, 2009.

[40] D. Gaceb, V. Eglin, F. Lebourgeois, H. Emptoz. Graph b-coloring for automatic recognition of documents. Dans International Conference on Analysis and Recognition (2009) 261-265.

[41] M. R. Garey, D. S., Johnson. Computers and Intractibility : A guide to the Theory of NP-completeness, W. H. Freman and Company, New York, 1979.

[42] F. Gavril, M. Yannakakis, Edge dominating sets in graphs, SIAM Journal of Applied Mathematics, 38(3)(1980), 364-372.

[43] V. Giakoumakis, F. Roussel, H. Thuillier. On P4-tidy graphs. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 1 : 17 – 41, 1997.

[44] T. Hamada, I. Yoshimura : Traversability and connectivity of the middle graph of a graph. Discrete Math. 14 : 247 – 256 ; 1976.

[45] F. Harary, S. Hedetniemi and G. Prins. An Interpolation theorem for graphical homomorphisms, Port. Math. 26 : 453 – 462, 1967.

[46] F. Havet, C. Linhares Sales, L. Sampaio. b-coloring of tight graphs. Discrete Applied Mathematics. 160 (2012) 2709-2715.

[47] C.T. Hoàng, M. Kouider. On the b-dominating coloring of graphs. Discrete Appl. Math. 152 : 176 – 186, 2005.

[48] C.T. Hoàng, C. Linhares Sales, F. Maffray. On minimally b-imperfect graphs. Discrete Applied Mathematics 157 : 3519 – 3530, 2009.

[49] C.T. Hoàng, F. Maffray, M. Mechebbek. A characterization of b-perfect graphs. CoRR, Vol. abs/1004.5306, 2010.

[50] C.T. Hoàng, F. Maffray, M. Mechebbek. A characterization of b-perfect graphs. Journal of Graph Theory 71 (2012) 95-122.

[51] I. Holyer. The NP-completeness of edge-coloring, SIAM J. Comput, pp. 718-720, 10 (1981)

[52] F. Huges, G. MacGillivay. The achromatic number of graphs : a survey and some new results. Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications 19 (1997) 27–56.

[53] R.W. Irving, D.F. Manlove. The b-chromatic number of graphs. Discrete Appl. Math. 91, 127 – 141, 1999.

[54] N. Ikhlef Eschouf. Characterization of some b-chromatic edge critical graphs. Australasian Journal of Combinatorics 47 : 21 – 35, 2010.

[55] N. Ikhlef Eschouf, M. Blidia. On b-vertex and edge b-critical graphs. Opuscula Math. 35, no. 2 (2015), 171-180.

[56] N. Ikhlef Eschouf, M. Blidia, F. Maffray. On edge b-critical graphs. Discrete Applied Mathmatics 180 (2015) 176-180.

[57] M. Jakovac, S. Klavžar. The b-Chromatic Number of Cubic Graphs. Graphs and Combinatorics 26 : 107 – 118, 2010.

[58] M. Jakovac, I. Peterin. On the b-chromatic number of some graph products. Studia Sci. Math. Hungar. 49 (2012) 156-169.

[59] M. Jakovac, I. Peterin. The b-chromatic index of a graph. Bulletin of the Malaysian Math. Sc. Society 38 (4) (2014) 1375–1392.

[60] M. Jakovac, I. Peterin. The b-chromatic number and related topics-a survey. Priprint.

[61] B. Jamison, S. Olarui. A tree representation for P_4-sparse graphs. Discrete Appl. Math. 35 : 115 – 129, 1992.

[62] R. Javadi, B. Omoomi. On b-coloring of cartesian product of graphs. A paraître dans Ars Combinatoria, 2010.

[63] R. Javadi, B. Omoomi. On b-coloring of the Kneser graphs. Discrete Mathematics 309 : 4399 – 4408, 2009.

[64] T.R. Jensen, B. Toft. Graph Coloring Problems. John Wiley & Sons, New York, 1994.

[65] J. Kara, J. Kratochvil, M. Voigt. b-continuity. Technical Report M 14/04, Technical University Ilmenau, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, 2004.

[66] I. Koch, I. Peterin. The b-chromatic index of direct product of graphs. Discrete Applied Mathematics 190–191 (2015) 109–117.

[67] M. Kouider, M. Mahéo. Some bounds for the b-chromatic number of a graph. Discrete Math. 256 : 267 – 277, 2002.

[68] M. Kouider, M. Zaker. Bounds for the b-chromatic number of some families of graphs. Discrete mathematics, vol. 306, no 7, pp. 617 – 623, 2006.

[69] J. Kratochvíl, Z. Tuza, M. Voigt. On the b-chromatic number of graphs. Lecture Notes in Computer Science (Graph-Theoretic Concepts in Computer Science : 28th International Workshop, WG 2002) 2573, 310 – 320, 2002.

[70] C. V. G. C. Lima, N. A. Martins, L. Sampaio, M. C. Santos, A. Silva, b-chromatic index of graphs. Discrete Mathematics. 338 (2015) 2072-2079.

[71] C. Linhares Sales, L. Sampaio. b-coloring of m-tight graphs. Electronic Notes in Discrete Mathematics 35 (2009) 209-214.

[72] F. Maffray, A. Silva. A b-colouring the cartesian product of trees and some other graphs. A paraître dans Discrete Applied Mathematics.

[73] F. Maffray, M. Mechebbek. On b-perfect chordal graphs. Graphs and Combinatorics 25 : 365 – 375, 2009.

[74] D.F. Manlove. Minimaximal and maximinimal optimization problems : a partial order-based approach. PhD thesis, technical report tr-1998 – 27 of the Computing Science Department of Glasgow University, 1998.

[75] E. A. Nordhaus, J. W. Gaddum. On complementary graphs. Ann. Math. Monthly, 63 : 175 – 177, 1956.

[76] H. Ogino, T. Yoshida. Toward improving re-coloring based clustering with graph b-coloring. Lecture Notes in Computer Science 6320 (2010) 206-218.

[77] A. Silva. Le nombre b-chromatique de quelques classes de graphes généralisant les arbres. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2010.

[78] A. Silva. Trees with small b-cromatic index. arXiv :1511.05847v1 [cs.DM] 18 Nov 2015.

[79] A. Silva, F. Maffray. b-colouring outerplanar graphs with large girth. Discrete Mathematics. vol. 312 (2012) 1796 – 1803.

[80] V.G. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a graph, Diskret. Anal.,pp. 25-30, 3 (1964).

[81] P.G. Tait. On the coloring of maps. Proc. Royal Soc. Edinburgh, 10 : 501 – 503, (1880).