République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Yahia Fares de Médéa
Faculté des Sciences
Département des Mathématiques et de l'Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

par

MEBARKI Djelloul

Etude de quelques problèmes elliptiques avec un potentiel de Hardy

---

Membres du jury :

Encadreur :	H. Ayadi	M.C.B	Université de Médéa
Examinateur1 :	R. Souilah	M.C.B	Université de Médéa
Examinateur2 :	N. Benaichouche	M.A.A	Université de Médéa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2019-2020

Table des matières

1 Préliménaires **11**

1.1 Espaces de Lebesgue 11

1.1.1 Définitions 11

1.1.2 Séparabilité, réflexivité et dual de $L^p(\Omega)$ 11

1.1.3 Inégalité de Young 12

1.1.4 Inégalité de Hölder 12

1.1.5 Convergence forte, convergence faible dans $L^p(\Omega)$ 12

1.1.6 Lemme de Fatou 13

1.1.7 Théorème de convergence dominée 13

1.1.8 Théorème de Vitali 13

1.1.9 Fonction de Carathéodory 13

1.1.10 Opérateur de Nemytskii 14

1.2 Espaces de Sobolev 14

1.2.1 Définitions 14

1.2.2 Convergence faible, convergence forte dans $W^{1,p}(\Omega)$ 15

1.2.3 Dual topologique de $W^{1,p}(\Omega)$ 16

1.2.4 Injections de Sobolev-Rellich-Kondrachov 16

1.2.5 Inégalité de Poincaré 16

1.2.6 Inégalité de Sobolev 16

1.2.7 Théorème de composition 17

1.2.8 Théorème de Stampacchia 17

1.2.9 Truncations du Functions dans $W^{1,p}(\Omega)$ 18

1.3 Inégalité de Hardy 19

1.4 Intégrabilité de la fonction $\frac{1}{|x|^s}$ 19
1.5 Théorème du point fixe de Schauder 19
1.6 Théorème de Lax-Milgram 19
1.7 0pérateurs monotones 20
1.7.1 Opérateurs du calcul des variations 22

2 Quelques résultats d'existence et régularité 24
2.1 Position du problème 24
2.2 Existence de solutions faibles 25
2.2.1 Existence via le théorème de Lax-Milgram : 26
2.2.2 Existence via la méthode de monotonie 27
2.3 Régularités de solutions faibles du problème (2.1.1) 30
2.4 Propriétés qualitatives de solutions faibles du problème (2.1.1) 34
2.4.1 Principe maximum faible 34
2.4.2 Inégalité de Harnack faible 35
2.4.3 Principe de maximum fort 35
2.5 Problèmes de Dirichlet dans les espaces de Sobolev plus grand que $H_0^1(\Omega)$ . . 35

3 Résultats d'existence et de régularité 39
3.1 Position du problème 39
3.2 Existence des solutions faibles 40
3.2.1 Approximation 41
3.2.2 Estimations a priori 44
3.2.3 Passage à la limite 46
3.3 Existence des solutions distributionnelles 48
3.3.1 Passage à la limite 51
3.4 Non existence dans le cas où $f \in L^1(\Omega)$ 52
3.5 Le cas où $f \in L^m(\Omega)$ avec $m \geq \frac{N}{2}$ 54

Remerciements

Tout d'abord je remercie « **Allah** » le tout puissant, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce présent travail.

Je tiens à remercier Mesieurs **Ayadi** d'avoir accepté d'encadrer ce mémoire avec beaucoup de patience, de sérieux et de compétence. Ils ont su motiver chaque étape de mon travail par des remarques pertinentes.

Mes sincères remerciements à mes parents dont le travail n'aurait pu aboutir sans leur inépuisable soutien et encouragement.

De tous mon coeur je remercie ma famille, qui par leur affection et bienveillance m'ont permis d'accomplir ce travail dans la sérénité.

Enfin je tiens à remercier tous mes amis pour toute leur compréhension et encouragement dans la réalisation de ce travail.

Résumé

Dans ce mémoire, on étudiera quelque problèmes elliptiques avec un terme d'ordre zéro et un potentiel de Hardy.

Mots-clés : Problèmes elliptiques, potentiel de Hardy, régularité, solutions faibles, solutions au sens des distributions.

Abstract

In this memoir, we will study an elliptic problem with the zero-order term involving a Hardy potential.

Key word : Elliptic problems, Hardy potential, regularity, weak solutions, distributional solutions.

Notation

$\mathbb{R}^N$: espace ecludien de dimension N,N un nombre naturel non nul.

Ω : un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

$\partial\Omega$: frontière topologique de Ω.

$x = (x_1, \cdots, x_N)$: point générique de $\mathbb{R}^N$.

$dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_N$: mesure de Lebesgue sur Ω.

$div = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}$: la divergence.

$\Delta f = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$: le laplacien.

$\rightharpoonup$: la convergence faible .

p.p. : presque partout.

V : un espace de Banach.

H : un espace de Hilbert.

V' : le dual topologique de V.

$\langle ., . \rangle_{V' \times V}$: le crochet de dualité entre l'espace V et son dual topologique V'.

$\|.\|$: la norme sur l'espace de Banach V.

$(.,.)$: le produit scalaire sur l'espace de Hilbert H.

$|.|$: la norme sur l'espace de Hilbert H.

$\nabla v = (\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial v}{\partial x_N})$: gradient de $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. $\nabla u = (\nabla u^1, \nabla u^2, \cdots, \nabla u^m) \in \mathbf{M}^{m \times N}$: matrice, où $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

$\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$: l'espace des fonctions continues.

$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mesurable}, \quad \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\}$: espace de Lebesgue

$L^\infty(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{mesurable}, \exists M > 0 \text{tel que} |u(x)| \leq M \text{p.p.}\}$.

$\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$: espace des fonctions différentiables et à support compact dans Ω .

$\mathcal{D}(Q) = \mathcal{C}_0^\infty(Q)$: espace des fonctions différentiables et à support compact dans Q .

$\mathcal{C}^k(\Omega)$, $\mathcal{C}^k(Q)$: espace des fonctions k-fois continûment différentiables dans Ω, Q.

$\mathcal{D}'(\Omega) = (\mathcal{D}(\Omega))'$: l'espace des distributions .

$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \quad \nabla u \in L^p(\Omega)\}$: un espace de Sobolev, $1 \leq p \leq \infty$.

$W_0^{1,p}(\Omega)$: la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

$W^{-1,p'}(\Omega)$: le dual topologique de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega) \quad (\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$.

$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$: un espace de Sobolev.

$\mu(E)$: ou $mes(E)$ mesure de Lebesgue d'un ensemble d'un ensemble E.

Introduction

L'objectif de ce mémoire est l'étude d'un problèmes elliptique avec le terme d'ordre zéro impliquant un potentiel de Hardy, plus précisément, on étudiera le problème suivant :

$$(\mathcal{P})\begin{cases} -\text{div}\,(M(x)\nabla u) = \lambda\dfrac{u}{|x|^2} + f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Où Ω est un ouvert borné de R^N $N > 2$ contenant l'origine O, et M est une matrice elliptique bornée ; c-à-d., il existe $\alpha > 0$ et β tels que

$$\alpha|\xi|^2 \leq M(x)\xi \cdot \xi, \qquad |M(x)| \leq \beta, \tag{0.0.1}$$

pour tout $\xi \in R^n$ et $x \in \Omega$ presque partout. De plus, on suppose que

$$0 < \lambda < \alpha\left(\frac{N-2}{2}\right)^2, \tag{0.0.2}$$

et

$$f \in L^m(\Omega), \quad 1 < m < \frac{N}{2}. \tag{0.0.3}$$

Ce type de potentiel singulier apparaît, par exemple, dans le contexte de la théorie de la combustion (voir [13, 15]), ainsi dans la mécanique quantique (voir [4, 36, 15]).
Les approches classiques telles que le théorème du point fixe de Schauder 1.5.1 ou le théorème de surjectivité de Leray-Lions 1.7.3, ne peuvent pas être directement appliquées au problème $(\mathcal{P})$ à cause du terme $\frac{\lambda u}{|x|^2}$. Pour surmonter cette difficulté, on va raisonner par approximation, en régularisant le problème $(\mathcal{P})$ par une suite de problèmes réguliers qui peuvent se traiter par l'une des approches citées ci-dessus. Ensuite, on va montrer des estimations à priori sur les solutions d'approximation. Enfin, on va prouver la convergence de solutions d'approximation à une fonction qui résout le problème $(\mathcal{P})$.

Ce mémoire est organisé en trois chapitres. Le premier chapitre contient un rappel sur certaines notions utilisées tout au long de ce mémoire (les espaces de Lebesgue et de Sobolev ...) , et on va citer quelques théorèmes principaux pour l'existence et quelques méthodes de résolution pour aborder la suite de mémoire.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'existence et de la régularité de solutions pour le problème $(\mathcal{P})$ sous la condition $\lambda = 0$. On discutera la régularité selon la sommabilité de la fonction f.

Dans le troisième chapitre, on étudiera l'existence et la régularité de la solutions pour le problème $\mathcal{P}$.

Chapitre 1

Préliménaires

1.1 Espaces de Lebesgue

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace de Lebesgue par*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \textit{mesurable,tel que :} \quad \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

on not

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.1.2 *On pose*

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \textit{ ;mesurable et ixiste une constante } C \textit{ telle que } |f(x)| \leq C \textit{p.p. sur } \Omega \}.$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ C; |f(x)| \leq C \textit{p.p. sur } \Omega \}.$$

1.1.2 Séparabilité, réflexivité et dual de $L^p(\Omega)$

Théorème 1.1.1 *$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour tous $p \in \mathbb{R}$, réflexif pour tous $1 < p < \infty$ et séparable pour tout $1 \leq p < \infty$.*

Preuve. Voir [10] ■

Théorème 1.1.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$,le dual topologique de $L^p(\Omega)$ est noté par $L^{p'}(\Omega)$ ou p' est le nombre conjugué de p,ce qui signifie :*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

.

Preuve. Voir [10] ■

1.1.3 Inégalité de Young

Théorème 1.1.3 *Soit $a, b \geq 0$, $p > 1$ et $q < \infty$ deux exposants cojuqués.Alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Preuve. Voir [10] ■

1.1.4 Inégalité de Hölder

Théorème 1.1.4 *Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec .Alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega f g \, dx \leq \left[\int_\Omega |f|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_\Omega |g|^{p'} \, dx\right]^{\frac{1}{p'}}.$$

Preuve. Voir [10] ■

1.1.5 Convergence forte, convergence faible dans $L^p(\Omega)$

Définition 1.1.3 (Convergence forte) .

Soient $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$,et f_n une suite de $L^p(\Omega)$. On dit que f_n converge fortement vers f dans $L^p(\Omega)$ et on note $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ si

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Définition 1.1.4 (Convergence faible) *Soient $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$,et f_n une suite de $L^p(\Omega)$. On dit que f_n converge faiblement vers f dans $L^p(\Omega)$ et on note $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$ si*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega (f_n - f) g \, dx = 0, \forall g \in L^{p'}(\Omega).$$

1.1.6 Lemme de Fatou

Théorème 1.1.5 *Soit (E, Ω, μ) un espace métrique, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et f_n une suite dans E alors*

$$\int_\Omega (\liminf_{n\to+\infty} f_n)\, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

Preuve. Voir [10] ■

1.1.7 Théorème de convergence dominée

Théorème 1.1.6 *Soient $p \in [1, +\infty[$, f_n une suite de fonctions mesurables tel que :*

(1) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ pour presque partout dans (Ω) ,

(2) Il existe une fonction g dans $L^p(\Omega, m)$ telle que :$f(x) \leq g(x)$ p.p. $x \in (\Omega)$.

Alors $f(x)$ est dans $L^p(\Omega)$ et on a

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{L^p(\Omega)} \to 0 \ quand, \ n \to \infty.$$

Preuve. Voir [12] ■

1.1.8 Théorème de Vitali

Définition 1.1.5 (Equi-intégrabilité) *Soit $(X_i)_{i\in I}$ est dit equi-intégrable si et seulement si*

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall A' \in A \ et P(A') < \alpha \Rightarrow \forall i \in I \int_{A'} |X_i|\, dP \leq \varepsilon. \\ \exists M > 0 \ tel \ que \ \forall i \in I \ on \ a \ \|X_i\|_1 \leq M. \end{cases}$$

Théorème 1.1.7 *Soient $(X_n) \in L^1(\Omega, k)^N$ et $X \in L^0(\Omega, k)$ on a*
$X_n \to X$ et X_n est Equi-intégrable $\Leftrightarrow$ $X \in L^1(\Omega, k)$ et

$$\|X - X_n\|_1 = 0.$$

Preuve. Voir [8, Theorem B.101, page 674] ■

1.1.9 Fonction de Carathéodory

Définition 1.1.6 *Soit Ω un borélien de $\mathbb{R}^N$ et $f : \Omega.\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que*

$$\begin{cases} f(., x) & : est \ mesurable \ sur \ A \ pour \ tous x \in \mathbb{R}, \\ f(u, .) & : est \ continu \ sur \mathbb{R} pour \ tout \ u \in \Omega. \end{cases}$$

Alors f est de Carathéodory.

1.1.10 Opérateur de Nemytskii

Définition 1.1.7 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f : \Omega * \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaisante les condition de carathèodory .*
Soit $u \in L^p(\Omega)$ on peut définire une autre fonction par composition

$$F(u)(x) = f(s, u(x)).$$

L'opérateur de composition F est appelé l'opérateur de Nemytskii engendré par $\mathbb{R}$.

1.2 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels et ses éléments sont des fonctions,qui sont intégrables au sens de Lebesgue.

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $m \geq 0$ et $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$, l'espace Sobolev est noté $W^{m,p}(\Omega)$ est constitué des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre m au sens des distributions identifient à des fonctions de $L^p(\Omega)$.*
La définition précédente est s'écrite donc :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ avec } |\alpha| \leq m : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \right\},$$

Tel que $D^\alpha u$ la dérivée au sens de distribution. Cet espace est munit de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.2.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ on pose*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \nabla u \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Définition 1.2.3 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .On note $W_0^{m,p}(\Omega)$ l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ au sens de la norme $\|.\|_{m,p}$.*

Proposition 1.2.1 *L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W_0^{m,p}(\Omega)$,donc $W_0^{m,p}(\Omega) = W_0^{m,p}(\Omega)$.*

Lemme 1.2.1 *Soient $u, v \in W^{m,p}(\Omega)$ et $|\alpha| \leq m$ .Alors*

(1) $D^\alpha u \in W^{m-|\alpha|,p}(\Omega)$,

(2) $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u)$ pour tout multi-indice α, β tel que $|\beta| + |\alpha| \leq m$,

(3) Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,alors $\lambda u + \mu v \in W^{m,p}(\Omega)$ et $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$.

Proposition 1.2.2 *Pour toute $m \geq 0$ et $1 \leq p \leq \infty$,$W^{m,p}(\Omega)$est un espace de Banach et séparable si $1 \leq p < \infty$ et réflexive uniformément convexe si $1 < p < \infty$.*

Proposition 1.2.3 *Pour toute $m \geq 0$ et $p = 2$,$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable qui est définit par :*

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ avec } |\alpha| \leq m : D^\alpha u \in L^2(\Omega)\right\},$$

On le munit de la norme naturelle :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u| \, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 1.2.4 *soient Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p \leq \infty$,par conséquent*

(1) si $1 \leq p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \circlearrowleft L^{p^*}(\Omega)$ ou $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$,

(2) si $p = N$, $W^{1,p}(\Omega) \circlearrowleft L^q(\Omega), \forall q \in [p, \infty[$,

(3) si $p > N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \circlearrowleft L^\infty(\Omega)$.

1.2.2 Convergence faible, convergence forte dans $W^{1,p}(\Omega)$

Soient $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, et f_n une suite de $W^{1,p}(\Omega)$.

Définition 1.2.4 (Convergence forte) *On dit que f_n converge fortement vers f dans $W^{1,p}(\Omega)$ et on note $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ si $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ et $\nabla f_n \to \nabla f$ dans $L^p(\Omega)$.*

Définition 1.2.5 (Convergence faible) *On dit que f_n converge faiblement vers f dans $W^{1,p}(\Omega)$ et on note $f_n \rightharpoonup f$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ si $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$ et $\nabla f_n \rightharpoonup \nabla f$ dans $L^p(\Omega)$*

.

1.2.3 Dual topologique de $W^{1,p}(\Omega)$

Théorème 1.2.1 *Soit $p > 1$ on dit que T est un élément de $(W^{1,p}(\Omega))'$ s'il existe $F \in (L^p(\Omega))^N$ tel que*

$$\langle T, u \rangle = \int_\Omega F \cdot \nabla u \, dx, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Le dual $W^{1,p}(\Omega)$ de est noté $W^{-1,p'}(\Omega)$,et le dual de $H_0^1(\Omega)$ est $H^{-1}(\Omega)$.

Preuve. Voir [40] ∎

1.2.4 Injections de Sobolev-Rellich-Kondrachov

Théorème 1.2.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière lipcshiziénne.On a l'injection compact de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ relativement à la topologie forte. Autrement toute suite bornée dans $L^p(\Omega)$ admit une sous suite convergente fortement dans $L^p(\Omega)$.*

Preuve. Voir [40] ∎

1.2.5 Inégalité de Poincaré

Théorème 1.2.3 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $N \geq 1$ alors il existe $C(\Omega)$ ne dépendant que de (Ω) tel que :*

$$\left[\int_\Omega |u|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[C(\Omega) \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega). \tag{1.2.1}$$

Preuve. Voir [40] ∎

1.2.6 Inégalité de Sobolev

Théorème 1.2.4 *Soit u une fonction de $H_0^1(\Omega)$, alors $u \in L^{2^*}(\Omega)$, où $2^* = \frac{2N}{N-2}$. De plus, on a*

$$\left[\int_\Omega |u|^{2^*} \, dx\right]^{\frac{1}{2^*}} \leq S^2 \left[\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.2.2}$$

où S est une constante positive dépend de N.

Preuve. Voir [40] ∎

1.2.7 Théorème de composition

Théorème 1.2.5 (Produit de deux fonctions appartenant à un espace de Sobolev) *Soit $u, \varphi \in W^{m,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ alors le produit $u\varphi \in W^{m,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ et*

$$\nabla(u\varphi)(x) = \nabla u(x)\varphi(x) + \nabla\varphi(x)u(x).$$

Preuve. Voir [27, Theorem 4], [8, Exercise 11.51, page 339] ∎

1.2.8 Théorème de Stampacchia

Théorème 1.2.6 (Dérivée d'un produit de composition) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction continue lipschizienne et $u \in W^{m,p}(\Omega)$,alors*

$$\nabla(f * u)(x) = \nabla u(x) f^{'}(u(x)).$$

Preuve. D'aprés le théorème (1.18) il existe une suite de fonctions
$u_i \in C^{\infty}(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega), i = 1, 2, \cdots$, tel que $u_i \to u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ comme $i \to \infty$. Laisser $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$.
Claim : $\int_{\Omega} (f \circ u) D_j \varphi dx = \lim_{i\to\infty} \int_{\Omega} f(u_i) D_j \varphi dx.$
Raison. $1 < p < \infty$ En utilisant l'inégalité de Hölder ,on trouve

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega} (f \circ u) D_j \varphi dx - \int_{\Omega} f(u_i) D_j \varphi dx \right| &\leq \int_{\Omega} |f(u) - f(u_i)||D\varphi| dx \\
&\leq \left(\int_{\Omega} |f(u) - f(u_i)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |D\varphi|^{p^{'}} dx \right)^{\frac{1}{p^{'}}} \\
&\leq \| f^{'} \|_{\infty} \left(\int_{\Omega} |u - u_i|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |D\varphi|^{p^{'}} dx \right)^{\frac{1}{p^{'}}} \to 0.
\end{aligned}$$

Sur la dernière ligne, nous avons utilisé le fait que

$$|f(u) - f(u_i)| = \left| \int_{u_i}^{u} f^{'}(t) dt \right| \leq \| f^{'} \|_{\infty} |u - u_i|.$$

Enfin, la convergence vers zéro suit, car le premier et le dernier terme sont bornés et $u_i \to u$ dans $L^p(\Omega)$.
$p = 1, p = \infty$
Ensuite, nous utilisons la revendication ci-dessus, intégration par pièces pour des fonctions

fluides et la règle de la chaîne pour obtenir des fonctions lisses

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f\circ u)D_j\varphi dx &= \lim_{i\to\infty}\int_\Omega f(u_i)D_j\varphi dx\\ &= -\lim_{i\to\infty}\int_\Omega D_j(f(u_i))\varphi dx\\ &= -\lim_{i\to\infty}\int_\Omega f^{'}(u_i)D_j u_i\varphi dx\\ &= -\int_\Omega f^{'}(u)D_j u\varphi dx\\ &= -\int_\Omega (f^{'}\circ u)D_j u\varphi dx, \qquad j=1,\cdots,n\end{aligned}$$

ou chaque $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Nous la laissons comme un exercice pour montrer la quatrième inégalité de l'affichage ci-dessus. Enfin, nous devons montrer que $f(u)$ et $f^{'}(u)\frac{\partial u}{\partial x_j}$ sont dans $L^p(\Omega)$. Puisque

$$\mid f(u)\mid = \mid f(u)-f(0)\mid = \left|\int_0^u f^{'}(t)dt\right| \leq \parallel f^{'}\parallel_\infty |u|.$$

on a

$$\left(\int_\Omega |f(u)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \parallel f^{'}\parallel_\infty \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

et de même,

$$\left(\int_\Omega |f(u)D_j u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \parallel f^{'}\parallel_\infty \left(\int_\Omega |Du|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

■

1.2.9 Truncations du Functions dans $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.2.6 (Fonction de troncature) *Soit $T_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tell que :*

$$T_k(s) = \begin{cases} k & si\ |s| \leq -k,\\ s & si\ |s| \leq k,\\ k & si\ |s| \geq k.\end{cases}$$

Et on définit aussi la fonction G_k tel que :

$$G_k(s) = s - T_k(s)$$

.

1.3 Inégalité de Hardy

Théorème 1.3.1 *Soit* (Ω) *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *et* $u \in H_0^1(\Omega)$ *alors*

$$A_{N,2} \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}\, dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \qquad ,\forall\ u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \tag{1.3.1}$$

où $A_{N,2} = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$.

Preuve. Voir [?] ■

1.4 Intégrabilité de la fonction $\frac{1}{|x|^s}$

Théorème 1.4.1 *Soit* $B(0,R)$ *la boule de centre* 0 *et de Rayon* R *alors pour tout* $0 < s < N$*, la fonction* $\frac{1}{|x|^s}$ *est intégrable au sens de Lebsgue, et de plus on a :*

$$\int_{B(0,R)} \frac{1}{|x|^s}\, dx = \frac{\omega_{N-1}}{s-N} R^{N-s},$$

où $\omega_{N-1} = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(\frac{N}{2})}$.

Preuve. Voir [17] ■

1.5 Théorème du point fixe de Schauder

Théorème 1.5.1 *soit* E *un espace de Banach ,*C *un convexe fermé de* E *et* T *une application continue de* C *dans* C *tel que* $T(C)$ *soit relativement compact.Alors* T *admet un point fixe.*

Preuve. Voir [19] ■

1.6 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 1.6.1 *Soit* H *un espace de Hilbert réel et* A *une forme bilinéaire sur* H *continue et coercive c'est-à-dire tel qu'il existe* $C, \alpha > 0$ *tel que* $\forall x, y \in H$

$$|A(x,y)| \leq C\|x\|\|y\| \text{ et } A(x,x) \geq \alpha\|x\|^2.$$

Alors pour tout forme linéaire continue L de H il existe un unique $u \in H$ tel que $\forall x \in H$

$$A(x, y) = L(x).$$

Preuve. Voir [19] ∎

1.7 0pérateurs monotones

Dans ce qui suit, V est un espace de Banach réflexif et séparable, A est un opérateur de V dans V' (en général non linéaire).

Définition 1.7.1 (Opérateur borné) *On dit que l'opérateur A est borné, s'il transforme les bornés de V en bornés de V'.*

Définition 1.7.2 (Opérateur monotone) *On dit que l'opérateur A est monotone si*

$$\forall u, v \in V, \qquad \langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0. \tag{1.7.1}$$

On dit que A est strictement monotone si de plus $\langle A(u) - A(v), u - v \rangle = 0$ implique $u = v$.

Définition 1.7.3 (Opérateur hémicontinu) *On dit que l'opérateur A est hémicontinu si*

$\forall u, v, w \in V$, l'application $t \mapsto \langle A(u + tv), w \rangle$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.7.4 (Opérateur fortement continu) *On dit que l'opérateur A est fortement continu (ou totalement continu) si A est continu de V faible dans V', c-à-d., si $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans V, alors $A(u_n) \longrightarrow A(u)$ fortement dans V'.*

Théorème 1.7.1 *Soit A un opérateur borné, hémicontinu et monotone. Alors A est continu de V fort dans V' faible.*

Preuve. Voir [16] ∎

Définition 1.7.5 (Opérateur coercitif) *On dit que l'opérateur A est coercitif si*

$$\exists \zeta : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ : \lim_{s \longrightarrow +\infty} \zeta(s) = +\infty \text{ et } \langle A(u), u \rangle \geq \zeta\left(\|u\|\right) \|u\|. \tag{1.7.2}$$

En d'autres termes, A est coercitif si :

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \frac{\langle A(u), u \rangle}{\|u\|} = +\infty. \tag{1.7.3}$$

Théorème 1.7.2 *Soit $A : V \longrightarrow V'$ un opérateur borné, hémicontinu, monotone et coercitif. Alors A est surjectif.*

Preuve. Voir [16] ∎

Définition 1.7.6 (Opérateur pseudo-monotone) *On dit que l'opérateur A est pseudo-monotone si :*

(1) A est borné,

(2) lorsque $u_n \rightharpoonup u$ dans V faiblement et $\limsup_{n\to+\infty}\langle A(u_n), u_n - u\rangle \leq 0$ alors

$$\liminf_{n\to+\infty}\langle A(u_n), u_n - v\rangle \geq \langle A(u), u - v\rangle \qquad \forall v \in V. \tag{1.7.4}$$

La proposition suivante donne une caractérisation de la pseudo-monotonie.

Proposition 1.7.1 *Soit $A : V \longrightarrow V'$. l'opérateur A est pseudo-monotone si et seulement si A est borné et satisfait la condition suivante :*

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } V \\ \\ \text{et } \limsup_{n\to+\infty}\langle A(u_n), u_n - u\rangle \leq 0 \end{array}\right\} \text{ alors } \left\{\begin{array}{l} A(u_n) \rightharpoonup A(u) \text{ faiblement dans } V' \\ \\ \text{et } \lim_{n\to+\infty}\langle A(u_n), u_n - u\rangle = 0. \end{array}\right. \tag{1.7.5}$$

Preuve. Voir [16] ∎

Proposition 1.7.2 *Si $A : V \longrightarrow V'$ est un opérateur pseudo-monotone, alors les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i) Si $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans V et $A(u_n) \rightharpoonup \psi$ faiblement dans V' avec

$$\limsup_{n\to+\infty}\langle A(u_n), u_n\rangle \leq \langle \psi, u\rangle,$$

alors $\psi = A(u)$.

(ii) Si $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans V, alors $A(u_n) \rightharpoonup A(u)$ faiblement dans V'.

Proposition 1.7.3 *Soit $A, B : V \longrightarrow V'$ deux opérateurs. Les assertions suivantes sont vraies*

1. *Si A est borné, hémicontinu et monotone, alors A est pseudo-monotone.*
2. *Si A et B sont pseudo-monotones, alors $A + B$ est pseudo-monotone.*

3. *Si A est pseudo-monotone et B est fortement continu, alors $A+B$ est pseudo-monotone.*

Preuve. Voir [16] ■

Théorème 1.7.3 (Leray-Lions) *Tout opérateur A pseudo-monotone et coercitif est surjectif; cela signifie, pour tout $f \in V'$, il y a au moins une solution à l'équation*

$$A(u) = f. \tag{1.7.6}$$

Preuve. Voir [16] ■

1.7.1 Opérateurs du calcul des variations

Définition 1.7.7 *Soit V un espace de Banach réflexif séparable. Un opérateur $A: V \longrightarrow V'$ est dite du type "calcul des variations" s'il est borné et si on peut le représenter par*

$$(H1): \quad A(v) = \mathcal{A}(v,v), \quad \forall v \in V,$$

où $\mathcal{A}: V \times V \longrightarrow V'$ est un opérateur satisfait les hypothèses suivantes :

$$(H2): \begin{cases} \forall u \in V, \quad v \longmapsto \mathcal{A}(u,v) \text{ est un opérateur borné et hemi-continu de } V \\ \text{dans } V', \text{ et } \quad \langle\, \mathcal{A}(u,u) - \mathcal{A}(u,v), u-v \,\rangle \geq 0. \end{cases} \tag{1.7.7}$$

$$(H3): \begin{cases} \forall v \in V, \quad u \longmapsto \mathcal{A}(u,v) \text{ est un opérateur borné et hemi-continu de } V \\ \text{dans } V'. \end{cases} \tag{1.7.8}$$

$$(H4): \begin{cases} \text{si } u_n \longrightarrow u \text{ faiblement dans } V \text{ et } \langle\, \mathcal{A}(u_n,u_n) - \mathcal{A}(u_n,u), u_n - u \,\rangle \longrightarrow 0 \\ \text{alors, } \forall v \in V, \ \mathcal{A}(u_n,v) \longrightarrow \mathcal{A}(u,v) \text{ faiblement dans } V'. \end{cases} \tag{1.7.9}$$

$$(H5):\begin{cases} si\ u_n \longrightarrow u\ faiblement\ dans\ V\ et\ \mathcal{A}(u_n,v) \longrightarrow \psi\ faiblement\ dans\ V' \\ alors\ \langle\, \mathcal{A}(u_n,v), u_n \,\rangle \longrightarrow \langle\, \psi, w \,\rangle. \end{cases} \tag{1.7.10}$$

Remarque 1.7.1 *Les hypothèses* $(H1)$*–*$(H2)$ *entraînent que* A *est hémicontinu.*

Proposition 1.7.4 *Si* A *est un opérateur du calcul des variations, alors* A *est pseudo-monotone.*

Preuve. Voir [16, Proposition 2.6, page 181] ∎

Chapitre 2

Quelques résultats d'existence et régularité pour un problème elliptique linéaire de type Dirichlet

2.1 Position du problème

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\text{div}\,(M(x)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N > 2$, et M est une matrice elliptique bornée ; c-à-d., il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\alpha|\xi|^2 \leq M(x)\xi \cdot \xi, \qquad |M(x)| \leq \beta, \tag{2.1.2}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et presque partout $x \in \Omega$. De plus, on suppose que f est une fonction de $L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$.

Définition 2.1.1 *On dit que $u \in H^1(\Omega)$ est une sur-solution faible du problème (2.1.1), si pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ avec $\varphi \geq 0$ dans Ω, on a :*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \nabla\varphi \, dx \geq \int_\Omega f\varphi \, dx.$$

Remarque 2.1.1 *l'intégrale* $\int_\Omega fu\,dx$ *est bien définit pour tout* $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$.

Preuve. Comme on a $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ dans ce cas on a

$$2^* = \frac{2N}{N-2}$$

et comme

$$(2^*)' = \frac{2^*}{2^*-1} = \frac{\frac{2N}{N-2}}{\frac{2N}{N-2}-1} = \frac{2N}{N+2}.$$

Et on a $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ .Alors gras l'injection de Sobolev $H_0^1(\Omega) \circlearrowleft L^{2^*}(\Omega)$,et par conséquant d'inégalité de Hölder

$$\int_\Omega f\varphi\,dx \leq \left[\int_\Omega |f|^{2^{*'}}\,dx\right]^{\frac{1}{2^{*'}}} \left[\int_\Omega |\varphi|^{2^*}\,dx\right]^{\frac{1}{2^*}}.$$

Donc l'intégral est bien définie . ■

Définition 2.1.2 *On dit que* $u \in H^1(\Omega)$ *est une sous-solution faible du problème* (2.1.1)*, si pour tout* $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ *avec* $\varphi \geq 0$ *dans* Ω*, on a :*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u\nabla\varphi\,dx \leq \int_\Omega f\varphi\,dx.$$

Définition 2.1.3 *On dit que* $u \in H_0^1(\Omega)$ *est une solution faible du problème* (2.1.1)*, si*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u\nabla\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx, \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

2.2 Existence de solutions faibles

Théorème 2.2.1 *On suppose que l'hypothèse* (2.1.2) *est satisfaite, et que* $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$*. Alors le problème* (2.1.1) *admet une unique solution faible.*

Preuve. Tout d'abord, on va commencer par l'existence. Pour cela on va utiliser deux méthodes : la première en utilisant le théorème de Lax-Milgram (représentation de Riesz), et la deuxième est dite méthode de monotonie (théorème de surjectivité de Leray-Lions), qui est basée sur la théorie des opérateurs monotones.

2.2.1 Existence via le théorème de Lax-Milgram :

On Considère le problème linéaire (2.1.1) , On définit les opérateurs A, L par

$$A, L : \ H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega) \ , \text{tel que}$$

$$L(v) = \int_\Omega f \cdot v \, dx,$$

$$A(w, v) = \langle \, S(w), v \, \rangle,$$

où $S : \ H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ est l'opérateur défini par :

$$S(w) = -\text{div} \, (M(x) \nabla w) \, .$$

Pour montrer que le problème (2.1.1) admet une solution faible il suffit de montrer que A et $L(\varphi)$ satisfait les conditions de théorème (1.6.1) .

(a) **La coercivité du l'opérateur A.**

soit $u \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$A(u, u) = \langle \, S(u), u \, \rangle$$

En utilisant l'hypothèse (2.1.2),

$$\begin{aligned} A(u, u) &= \langle -\text{div} \, (M(x) \nabla u) \, , u \rangle, \\ &= \int_\Omega M(x) \nabla u \cdot \nabla u \, dx, \\ &\geq \alpha \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

(b) **La continuité du l'opérateur A .**

soit $u, v \in H_0^1(\Omega)$,gras au l'hypothèse (2.1.2),et l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} |A(u, v)| &= |\langle \, S(u), v \, \rangle|, \\ &= \Big| \int_\Omega M(x) \nabla u \cdot \nabla v \, dx \Big|, \\ &\leq \int_\Omega |M(x)| |\nabla w| |\nabla v| \, dx, \\ &\leq \beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Donc l'opérateur A est continu.

(c) **La bilinéarité du l'opérateur A .**

Il est claire que A est une forme bilinéarité (gras à la linéarité de l'intégral et de gradient)et la linéarité de S.

(d) **La linéarité du l'opérateur L .**

Il est claire,gras à la linéarité de l'intégrale.

(e) **La continuité du l'opérateur L.**

Soit $w \in H_0^1(\Omega)$. en utilisant la remarque (2.3.4) , on en déduit que

$$\begin{aligned}
\big|L(v)\big| &= \Big| \int_\Omega f v \, dx \Big|, \\
&\leq \left[\int_\Omega |f|^{2^{*'}} \, dx \right]^{\frac{1}{2^{*'}}} \left[\int_\Omega |\varphi|^{2^*} \, dx \right]^{\frac{1}{2^*}}, \\
&\leq \|f\|_{L^{2^{*'}}(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{2^*}(\Omega)}. \\
&\leq C \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve bien que L est continu.

Alors ,les hypothèse du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites .Donc le problème (2.1.1) admit une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$.

2.2.2 Existence via la méthode de monotonie

On Considère l'opérateur A défini par :

$$\begin{aligned}
A : \ V = H_0^1(\Omega) &\longrightarrow V' = H^{-1}(\Omega). \\
u &\mapsto A(u),
\end{aligned}$$

avec :

$$\langle \, A(u), \varphi \, \rangle = \int_\Omega M(x) \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

— **Montrant que A est coercive .**

On a

$$\langle \, A(u), u \, \rangle = \int_\Omega M(x) \nabla u \cdot \nabla u \, dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

D'après (2.1.2) on a :

$$\langle \, A(u), u \, \rangle \geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq \alpha \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

— **Prouvons que A est pseudo-monotone :**

En utilisant la proposition (1.7.3) pour montrer que A est pseudo-monotone il suffit de prouver que il est borné ,monotone et hemi continu . **(1)La bornitude de A :** soit $u \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$\langle A(u), u\rangle = \int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla u \, dx.$$

En utilisant l'hypothèse (2.1.2) on a :

$$\begin{aligned}\langle A(u), u\rangle &\leq \beta \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, dx,\\ &\leq \beta \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx,\\ &\leq \beta \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Donc Aest bornée.

(2)La monotonie de A :

soit $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$ On a :

$$\langle A(u) - A(\varphi), u - \varphi\rangle = \langle -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) + \mathrm{div}(M(x)\nabla\varphi), u - \varphi\rangle,$$

Gras au la condition (2.1.2) ,la linéarité de l'intégrale et celle de produit scalaire

$$\begin{aligned}\langle A(u) - A(\varphi), u - \varphi\rangle &= \langle -\mathrm{div}(M(x)\nabla u), , u - \varphi\rangle - \langle -\mathrm{div}(M(x)\nabla\varphi), u - \varphi\rangle,\\ &= \langle M(x)\nabla u, \nabla(u - \varphi)\rangle - \langle M(x)\nabla\varphi, \nabla(u - \varphi)\rangle,\\ &= \langle M(x)\nabla(u - \varphi), \nabla(u - \varphi)\rangle,\\ &= \int_\Omega M(x)|\nabla(u - \varphi)|^2 \, dx,\\ &\geq \alpha \int_\Omega M(x)|\nabla(u - \varphi)|^2 \, dx,\\ &\geq \alpha \|u - \varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

d'où le résultat.

(3)La hémi-continu de A : soient u, v *et* $w \in H_0^1(\Omega)$ et $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\langle A(u + tv), w\rangle = \langle -\mathrm{div}(M(x)\nabla(u + tv), \omega\rangle$$

En utilisant, la linéarité de gradient et la condition (2.1.2) ,

$$\begin{aligned}\langle -\mathrm{div}(M(x)\nabla(u+tv), w\rangle &= \langle -\mathrm{div}(M(x)(\nabla u + t\nabla v), \nabla v\rangle,\\ &\leq \int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla w\,dx + t\int_\Omega M(x)\nabla v\cdot\nabla w\,dx,\\ &\leq \beta\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)} + t\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)},\end{aligned}$$

Alors,A est hémi-continu.

Comme l'opérateur A est borné, monotone et hémi-continue alors il est pseudo-monotone. De plus A est coercive, donc gras au théorème de Leray-Lions , A est surjectif. Ce que signifie qu'il existe au moins une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$A(u) = f.$$

Par conséquent u est une solution du problème (2.1.1).

■

— **Démonstration de l'unicité**.

Pour montrer que le problème (2.1.1) admet une unique solution faible on va supposer que il admet deux solutions u_1 et u_2 dans $H_0^1(\Omega)$,et par absurde on conclure le résultat.

Dans ce cas on utilise $(u_1 - u_2)$ comme fonction test.

Alors :

on pose :$\varphi \in H_0^1(\Omega)$ telle que : $\varphi = u_1 - u_2$

on a :

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_1\cdot\nabla\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx,$$
$$\int_\Omega M(x)\nabla u_2\cdot\nabla\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx,$$

Donc d'après (2.1.2) on a :

$$\alpha\int_\Omega \nabla u_1\cdot\nabla\varphi\,dx \leq \int_\Omega f\varphi\,dx,$$
$$\alpha\int_\Omega \nabla u_2\cdot\nabla\varphi\,dx \leq \int_\Omega f\varphi\,dx,$$

Puisque l'intégral est linéaire, on obtient

$$\alpha\int_\Omega \nabla(u_1 - u_2)\cdot\nabla\varphi\,dx \leq 0.$$

Donc,

$$\alpha \int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, dx \leq 0.$$

En fin,

$$\alpha \|u_1 - u_2\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq 0.$$

Comme on a α est strictement positif.Il faut remarquer que $u_1 = u_2$,qui implique que le problème admet une unique solution faible dans $H_0^1(\Omega)$.

2.3 Régularités de solutions faibles du problème (2.1.1)

Avant d'énoncer les résultats de régularité, on va rappeler un lemme d'analyse, dû à G. Stampacchia [9].

Lemme 2.3.1 (Lemme de Stampacchia.) *Soit $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction tel que*

$$\psi(h) \leq \frac{M\psi(k)^\delta}{(h-k)^\gamma}, \forall h > k > 0.$$

Si $M > 0, \delta > 1 et \gamma > 0$. Alors :$\psi(d) = 0$.

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$ et on définit $d_n = d(1 - 2^{-n})$,on va prouver que

$$\psi(d_n) \leq \psi(0) 2^{\frac{-n\gamma}{\delta-1}}, \tag{2.3.1}$$

On a (2.3.1) est vrai si $n = 0$ et on suppose que est vrai pour tout n ,alors

$$\psi(d_{n+1}) \leq \frac{M\psi(d_n)^\delta}{(d_{n+1} - d_n)^\gamma} \leq M\psi(0)^\delta 2^{\frac{-n\gamma\delta}{\delta-1}} 2^{(n+1)\gamma} d^{-\gamma} = \psi(0) 2^{\frac{-(n+1)\gamma}{\delta-1}}, \tag{2.3.2}$$

Pour $n + 1$, (2.3.1) revient

$$0 \leq \psi(d) \leq \liminf_{n \to +\infty} \psi(d_n) \leq \lim_{n \to +\infty} \psi(0)^{\delta-1} 2^{\frac{-n\gamma}{\delta-1}} = 0.$$

■

Théorème 2.3.1 *On suppose que l'hypothèse (2.1.2) est satisfaite, et que $f \in L^m(\Omega)$ avec $m > \frac{N}{2}$. Alors la solution u du problème (2.1.1) appartient à l'espace $L^\infty(\Omega)$.*

Preuve. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$,dans cette démonstration on utilise la fonction $G_k(u)$ comme fonction de test.

On considère le problème (2.1.1),on obtient :

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.3.3}$$

On remplace $\varphi = G_k(u)$ dans (2.3.3) ,alors

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \nabla G_k(u) \, dx = \int_\Omega f G_k(u) \, dx, \tag{2.3.4}$$

On définit l'ensemble A_K une partie de Ω tel que :

$$A_k = \{x \in \Omega : |u| \geq k\}. \tag{2.3.5}$$

Elle est claire que , $\forall x \in A_k$ on a : $\nabla u = \nabla G_k(u)$.

Alors (2.3.4) revient

$$\int_{A_k} M(x)|\nabla G_k(u)|^2 \, dx \leq \int_\Omega f G_k(u) \, dx = \int_{A_k} f G_k(u) \, dx. \tag{2.3.6}$$

D'après l'hypothèse (2.1.2) dans (2.3.6), on obtient

$$\alpha \int_{A_k} |\nabla G_k(u)|^2 \, dx \leq \int_{A_k} f G_k(u) \, dx. \tag{2.3.7}$$

Si on met en jeu l'inégalité de Sobolev à gauche et celle Hölder à droit de (2.3.7) ,on trouve

$$\frac{\alpha}{S^2}\left[\int_{A_k} |G_k(u)|^{2^*} \, dx\right]^{\frac{2}{2^*}} \leq \left[\int_{A_k} |G_k(u)|^{2^*} \, dx\right]^{\frac{1}{2^*}} . \left[\int_{A_k} |f|^{2_*} \, dx\right]^{\frac{1}{2_*}} \tag{2.3.8}$$

Alors,par conséquant ,

$$\frac{\alpha}{S^2}\left[\int_{A_k} |G_k(u)|^{2^*} \, dx\right]^{\frac{1}{2^*}} \leq \left[\int_{A_k} |f|^{2_*} \, dx\right]^{\frac{1}{2_*}} \tag{2.3.9}$$

Dans la suite ,on pose $\theta = \frac{m}{2_*}$ qui est facile à prouver que $\theta > 1$,donc en utilisant l'inégalité de Hölder , (2.3.9) revient

$$\left[\int_{A_k} |f|^{2_*} \, dx\right]^{\frac{1}{2_*}} \leq \left[\int_{A_k} |f|^m \, dx\right]^{\frac{1}{\theta.2_*}} . \left[\int_{A_k} |1|^{\theta'} \, dx\right]^{\frac{1}{\theta'.2_*}} \tag{2.3.10}$$

On peut voir que

$$\theta' = \frac{1}{2_*} - \frac{1}{m}, et \frac{1}{m} = \frac{1}{\theta.2_*}. \tag{2.3.11}$$

Si on remplace (2.3.12) dans (2.3.10) ,alors

$$\left[\int_{A_k} |G_k(u)|^{2_*}\,dx\right]^{\frac{1}{2_*}} \leq \frac{S^2}{\alpha}\left[\int_{A_k} |f|^m\,dx\right]^{\frac{1}{m}} . \left[\int_{A_k} |1|^{\theta'}\,dx\right]^{\frac{1}{\theta'.2_*}} \tag{2.3.12}$$

Donc :

$$\int_{A_k} |G_k(u)|^{2_*}\,dx \leq \left(\frac{S^2}{\alpha}\|f\|_{L^m(\Omega)}\right)^{2_*} . \left[\int_{A_k} |1|^{\theta'}\,dx\right]^{\frac{2^*}{\theta'.2_*}}, \tag{2.3.13}$$

Elle est claire que

$$\frac{2^*}{\theta'.2_*} = \frac{2^*}{2_*} - \frac{2^*}{m},$$

Donc (2.3.13) revient

$$\int_{A_k} |G_k(u)|^{2_*}\,dx \leq \left(\frac{S^2}{\alpha}\|f\|_{L^m(\Omega)}\right)^{2_*} . [mes(A_k)]^{\frac{2^*}{2_*}-\frac{2^*}{m}}, \tag{2.3.14}$$

Si on prend $h > k$ elle est claire que $A_h \subseteq A_k$ et $G_k(u) \geq h - k$ sur A_h .Alors :

$$(h-k)^{2^*}.mes(A_k) \leq \left(\frac{S^2}{\alpha}\|f\|_{L^m(\Omega)}\right)^{2_*} . [mes(A_k)]^{\frac{2^*}{2_*}-\frac{2^*}{m}}, \tag{2.3.15}$$

Alors

$$mes(A_k) \leq \left(\frac{S^2}{\alpha}\|f\|_{L^m(\Omega)}\right)^{2_*} \frac{[mes(A_k)]^{\frac{2^*}{2_*}-\frac{2^*}{m}}}{(h-k)^{2^*}}, \tag{2.3.16}$$

On définit

$$\psi(k) = mes(A_k)$$

alors (2.3.16) revient

$$\psi(h) \leq \frac{M\psi(k)^\delta}{(h-k)^\gamma},$$

Tels que

$$M = \left(\frac{S^2}{\alpha}\|f\|_{L^m(\Omega)}\right)^{2_*}, \delta = \frac{2^*}{2_*} - \frac{2^*}{m} \; et \; \gamma = 2^*.$$

Comme on a $m > \frac{N}{2}$ qui implique que $\delta > 1$ .Alors on utilise lemme de stampachia ,on obtient que $\psi(d) = 0$, si

$$\psi(k) = C(\Omega, N, m)M.$$

Si $mes(A_d) = 0$, alors $|u| \leq d$ qui implique que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\left(\Omega, N, m, \alpha\right)\|f\|_{L^m(\Omega)}$$

Ce qui montre que la solution u est dans $L^\infty(\Omega)$. ∎

Théorème 2.3.2 *On suppose que l'hypothèse* (2.1.2) *est satisfaite, et que* $f \in L^m(\Omega)$ *avec* $\frac{2N}{N+2} \leq m < \frac{N}{2}$. *Alors la solution* u *du problème* (2.1.1) *appartient à l'espace* $L^{m^{**}}(\Omega)$ *où* $m^{**} = \frac{Nm}{N-2m}$.

Preuve. Avant de faire cette démonstration on va prouver que si $m = 2_*$ alors $m^{**} = 2^*$.
On a

$$m^{**} = \frac{N_m}{N - 2m} = \frac{2_* N}{N - 2.2_*} = \frac{2N^2}{N^2 + 2N - 2N^2}$$

Donc

$$m^{**} = \frac{2N}{N-2} = 2^*$$

. Soient $k > 0$ fixé , $\theta > 1$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ .Gras au théorème (1.2.7)(Produit de deux fonctions appartenant à un espace de Sobolev) on utilise v comme une fonction test telle que

$$v = |T_k(u)|^{2\theta-2} T_k(u)$$

On va d'abord appliquer v dans le problème (2.1.1) ,on obtient

$$(2\theta - 1) \int_\Omega M(x) \nabla u \nabla (|T_k(u)|^{2\theta-2} T_k(u))\, dx = \int_\Omega f |T_k(u)|^{2\theta-2} T_k(u)\, dx$$

Alors

$$(2\theta - 1) \int_\Omega M(x) \nabla u \nabla T_k(u) |T_k(u)|^{2\theta-2}\, dx = \int_\Omega f |T_k(u)|^{2\theta-2} T_k(u)\, dx \tag{2.3.17}$$

Il est claire que $\nabla u = \nabla T_k(u)$ si $T_k(u) \neq 0$.Alors (2.3.17) revient

$$(2\theta - 1) \int_\Omega M(x) |\nabla T_k(u)|^2 |T_k(u)|^{2\theta-2}\, dx = \int_\Omega f |T_k(u)|^{2\theta-2} T_k(u)\, dx \tag{2.3.18}$$

En utilisant l'hypothèse (2.1.2) à gauche de (2.3.18) on voit que

$$\alpha(2\theta - 1) \int_\Omega |\nabla T_k(u)|^2 |T_k(u)|^{2\theta-2}\, dx \leq \int_\Omega f |T_k(u)|^{2\theta-1}\, dx \tag{2.3.19}$$

Il est facile de montrer que :

$$|\nabla T_k(u)|^2 |T_k(u)|^{2\theta-2} = \frac{1}{\theta^2} |\nabla |T_k(u)|^{2\theta}|^2$$

Alors (2.3.19) revient

$$\frac{\alpha(2\theta - 1)}{\theta^2} \int_\Omega |\nabla |T_k(u)|^\theta|^2, dx \leq \int_\Omega f |T_k(u)|^{2\theta-1}\, dx \tag{2.3.20}$$

Par conséquence d'utilisation de l'inégalité de Sobolev au couté gauche de (2.3.20) et celle de Hölder à droite ,on obtient

$$\frac{\alpha(2\theta-1)}{\theta^2 S^2}\left[\int_\Omega |T_k(u)|^{\theta 2^*}\,dx\right]^{\frac{2}{2^*}} \leq \|f\|_{L^m(\Omega)}\left[\int_\Omega |T_k(u)|^{(2\theta-1)m'}\,dx\right]^{\frac{1}{m'}} \tag{2.3.21}$$

On prend θ telle que :

$$\theta 2^* = (2\theta-1)m',$$

Alors :

$$\theta\frac{2N}{N-2} = (2\theta-1)\frac{m}{m-1},$$

donc

$$\theta = \frac{m^{**}}{2^*} = \frac{2_*}{2^*} > 1,$$

Alors

$$\left[\int_\Omega |T_k(u)|^{m^{**}}\,dx\right]^{\frac{2}{2^*}-\frac{1}{m'}} \leq \frac{S^2\theta^2}{\alpha(2\theta-1)}\|f\|_{L^m(\Omega)}, \tag{2.3.22}$$

Et on a aussi que

$$\frac{2}{2^*}-\frac{1}{m'} = \frac{2}{\frac{2N}{N-2}} - 1 + \frac{1}{m} = \frac{N-2m}{Nm} = m^{**}.$$

Par conséquent (2.3.22) revient

$$\|T_k(u)\|_{L^{p^{**}}(\Omega)} \leq \frac{S^2\theta^2}{\alpha(2\theta-1)}\|f\|_{L^m(\Omega)}, \tag{2.3.23}$$

Si k tend vers l'infini ,alors si on utilise lemme de Fatou

$$\int_\Omega (\liminf_{k\to+\infty} |T_k(u)|^{m^{**}})\,dx \leq \liminf_{k\to+\infty}\int_\Omega |T_k(u)|^{m^{**}}\,dx.$$

Alors

$$\|u\|_{L^{m^{**}}(\Omega)} \leq \frac{S^2\theta^2}{\alpha(2\theta-1)}\|f\|_{L^m(\Omega)}.$$

Donc ,on peut dire que la solution appartient à l'espace $L^{m^{**}}(\Omega)$. ∎

2.4 Propriétés qualitatives de solutions faibles du problème (2.1.1)

2.4.1 Principe maximum faible

Théorème 2.4.1 *Soit u une solution du problème (2.1.1). Les assertions suivantes sont vraies :*

1. *Si* $f \geq 0$, *alors* $u \geq 0$.

2. *Si* $f \leq 0$, *alors* $u \leq 0$.

3. *Si* $f = 0$, *alors* $u = 0$.

Preuve. Voir [18, Theorem 4.12, page 32] ■

2.4.2 Inégalité de Harnack faible

Théorème 2.4.2 (Inégalité de Harnack faible) *Soit* u *une sur-solution du problème* (2.1.1) *avec* $f \geq 0$ *dans* Ω, *et* $u \geq 0$ *dans la boule* $B_{4R}(x_0) \subset \mathbb{R}^N$. *Alors, pour tout* $1 \leq p < \frac{N}{N-2}$, *on a :*

$$R^{-n/p} \left(\int_{B_{2R}(x_0)} u^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \inf_{B_R(x_0)} u, \tag{2.4.1}$$

où $C = C\left(N, \frac{\beta}{\alpha}, R, p\right)$.

Preuve. Voir [5, Theorem 8.18.], et [14, Theorem 14.1.2.]. ■

2.4.3 Principe de maximum fort

Théorème 2.4.3 *Soit* u *une solution faible du problème* (2.1.1), *avec* $f \geq 0$ *dans* Ω. *Alors soit* $u = 0$ *dans* Ω *ou* $u > 0$ *dans* Ω.

Preuve. Voir [33, Theorem 11.1, page 60]. ■

Dans cette section, On va traiter le problème (2.1.1) où le deuxième membre f n'appartient plus à l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.

2.5 Problèmes de Dirichlet dans les espaces de Sobolev plus grand que $H_0^1(\Omega)$

Dans cette section, on considère le problème (2.1.1) avec $f \in L^m(\Omega)$ où $1 < m < \frac{2N}{N+2}$ au lieu de $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}$. Dans ce cas, la définition (2.1.3) n'a aucun sens. Donc, on a besoin d'introduire une autre notion de solution.

Définition 2.5.1 *On dit que $u \in W_0^{1,\delta}(\Omega)$ avec $1 < \delta < 2$, est une solution distributionnelle (au sens de distribution) du problème (2.1.1), si*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega). \tag{2.5.1}$$

Remarque 2.5.1 *les intégrales de la définition ci-dessus sont bien définis.*

Remarque 2.5.2 *Comme $f \in L^m(\Omega)$ avec $1 < m < \frac{2N}{N+2}$,alors $1 < m^* < 2$ qui implique que $H_0^1(\Omega) \subset W^{1,m^*}(\Omega)$.*

Preuve. Comme on a $1 < m < \frac{2N}{N+2}$, et par définition $m^* = \frac{Nm}{N-m}$,alors :

$$N < Nm < \frac{2N^2}{N+2}.$$

Donc

$$\frac{-2N}{N+2} < -m < -1.$$

On fait des calculs

$$\begin{gathered} N - \frac{-2N}{N+2} < N - m < N - 1, \\ \frac{N(N+2)-2N}{N+2} < m^* < \frac{2N^2}{N+2}\frac{1}{N-1}, \\ 1 < \frac{N^2}{N+2} < m^* < \frac{N^2}{N^2+N-2}, \\ \frac{N^2}{N^2+N-2} < 2, \end{gathered}$$

Alors on conclu que

$$1 < m^* < 2.$$

On obtient $H_0^1(\Omega) \subset W^{1,m^*}(\Omega)$. ∎

Théorème 2.5.1 *On suppose que l'hypothèse (2.1.2) est satisfaite, et que $f \in L^m(\Omega)$ avec $1 < m < \frac{2N}{N+2}$. Alors le problème (2.1.1) admet une solution distributionnelle $u \in W^{1,m^*}(\Omega)$ où $m^* = \frac{Nm}{N-m}$.*

Preuve. Pour montrer ce théorème il faut approcher le problème (2.1.1) . Soit $f_n = T_n(f)$,et soit $u_n \in H_0^1(\Omega)$ solution du problème approché suivant

$$\begin{cases} -\text{div}\,(M(x)\nabla u_n) = f_n & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.5.2}$$

Pour $h>0$,on définit $v=T_1\left(G_k(u_n)\right)$ comme fonction test dans le problème (2.5.2) ,alors

$$\alpha\int_\Omega \nabla u_n\nabla v\,dx=\int_\Omega fv\,dx\leq\int_\Omega f\,dx. \tag{2.5.3}$$

On définit les deux ensemble A_h et B_h tels que

$$A_h=\{x\in\Omega:|u|\geq h\},B_h=\{x\in\Omega:\leq|u|\leq h+1\}, \tag{2.5.4}$$

Il est claire que : $\nabla u=\nabla v$ .Alors (2.5.5) revient

$$\alpha\int_\Omega \nabla u_n\nabla v,dx=\int_\Omega fv\,dx\leq\int_\Omega f\,dx. \tag{2.5.5}$$

Soit $0<\theta<1$,alors on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_\Omega\frac{|\nabla u_n|^2}{(1+|u_n|)^\theta}\,dx&\leq\sum_{h=0}^{+\infty}\int_{B_h}\frac{|u_n|^2}{(1+|u_n|)^\theta}\,dx,\\&\leq\sum_{h=0}^{+\infty}\frac{1}{(1+h)^\theta}\int_{B_h}|\nabla u_n|^2\,dx,\\&\leq\sum_{h=0}^{+\infty}\frac{1}{\alpha(1+h)^\theta}\int_{A_h}|f|\,dx,\\&\leq\sum_{h=0}^{+\infty}\frac{1}{\alpha(1+h)^\theta}\sum_{k=h}^{+\infty}\int_{B_h}|f|\,dx,\end{aligned}$$

Si on met en jeu la linéarité de l'intégrale ,on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega\frac{|\nabla u_n|^2}{(1+|u_n|)^\theta}\,dx&\leq\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{B_k}|f|\sum_{h=0}^{k}\frac{1}{\alpha(1+h)^\theta}\,dx,\\&\leq\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{B_k}|f|(1+k)^{1-\theta}\,dx,\\&\leq C\int_\Omega|f|(1+|u_n|)^{1-\theta}\,dx,\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder ,on trouve

$$\int_\Omega\frac{|\nabla u_n|^2}{(1+|u_n|)^\theta}\,dx\leq C\|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega(1+|u_n|)^{(1-\theta)m'}\,dx\right)^{\frac{1}{m'}}. \tag{2.5.6}$$

Soit maintenant $q>1$ fixé ,en utilisant l'inégalité de Sobolev et celle de Hölder ,alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{S^q}\left(\int_\Omega|\nabla u_n|^{q^*}\,dx\right)^{\frac{q}{q^*}}\leq\int_\Omega|\nabla u_n|^q\,dx&\leq\int_\Omega\frac{|\nabla u_n|^q}{(1+|u_n|)^{\frac{q\theta}{2}}}\left((1+|u_n|)^{\frac{q\theta}{2}}\right)\,dx,\\&\leq\left(\int_\Omega\frac{|\nabla u_n|^2}{(1+|u_n|)^\theta}\,dx\right)^{\frac{q}{2}}\left(\int_\Omega\left((1+|u_n|)^{\frac{q\theta}{2-q}}\right)\,dx\right)^{1-\frac{q}{2}}.\end{aligned}$$

Gras au (2.5.6),donc

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^q \, dx \leq \left(C\|f\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_\Omega (1+|u_n|)^{(1-\theta)m'} \, dx \right)^{\frac{1}{m'}} \right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_\Omega \left((1+|u_n|)^{\frac{q\theta}{2-q}} \right) \, dx \right)^{1-\frac{q}{2}},$$

Dans ce cas on choisi θ tel que

$$(1-\theta)\, m' = q^* = \frac{\theta q}{2-q},$$

Il est facile de montrer que

$$\theta = \frac{N(2-q)}{N-q} \ , \ q = m^* = \frac{Nm}{N-m}. \tag{2.5.7}$$

En utilisant la remarque (2.5.2) ,il est facile de montrer que $0 < \theta < 1$,alors gras au (2.5.7) ,donc on obtient

$$\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^{q^*} \, dx \right)^{\frac{q}{q^*}} \leq C \int_\Omega |\nabla u_n|^q \, dx \leq \left(C\|f\|_{L^m(\Omega)} \right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_\Omega (1+|u_n|)^{q^*} \, dx \right)^{1-\frac{q}{2m}}.$$

Et comme on a $m < \frac{N}{2}$,alors

$$\frac{q}{q^*} > 1 - \frac{q}{2m}.$$

Alors on peut conclure que u_n est bornée dans $W^{1,m^*}(\Omega)$ Maintenant on a montré que la suite (u_n) est uniformément bornée dans $W^{1,m^*}(\Omega)$, alors il existe une fonction u dans $W^{1,m^*}(\Omega)$ telle que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{fortement dans } H_0^1(\Omega), \tag{2.5.8}$$

En utilisant (2.5.8), il est facile de prouver que

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla \varphi \, dx \longrightarrow \int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx.$$

Comme la suite f_n converge fortement vers f dans $L^1(\Omega)$, alors

$$\int_\Omega f_n \varphi \, dx \longrightarrow \int_\Omega f \varphi \, dx.$$

Alors on a montré que u est une solution dans $W^{1,m^*}(\Omega)$. ∎

Chapitre 3

Résultats d'existence et de régularité des solutions de problèmes elliptiques impliquant un potentiel de Hardy

Ce chapitre est basé essentiellement sur l'article [23]

3.1 Position du problème

Dans ce chapitre on va étudier le problème suivant

$$\begin{cases} -\text{div}\,(M(x)\nabla u) = \lambda \dfrac{u}{|x|^2} + f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Où Ω est un ouvert borné de R^N $N > 2$ contenant l'origine O, et M est une matrice elliptique bornée ; c-à-d., il existe $\alpha > 0$ et β tels que

$$\alpha|\xi|^2 \leq M(x)\xi \cdot \xi, \qquad |M(x)| \leq \beta, \tag{3.1.2}$$

pour tout $\xi \in R^n$ et $x \in \Omega$ presque partout. De plus, on suppose que

$$0 < \lambda < \alpha \left(\frac{N-2}{2}\right)^2, \tag{3.1.3}$$

et

$$f \in L^m(\Omega), \quad 1 < m < \frac{N}{2}. \tag{3.1.4}$$

3.2 Existence des solutions faibles

Théorème 3.2.1 *On suppose que l'hypothèse (3.1.2) est satisfaite, et que $f \in L^m(\Omega)$ avec m vérifie*

$$\frac{2N}{N+2} \leq m < \frac{N}{2}, \tag{3.2.1}$$

et λ satisfait

$$0 < \lambda < \alpha \frac{N(m-1)(N-2m)}{m^2} = \alpha\lambda_m. \tag{3.2.2}$$

Alors le problème (3.1.1) admet au moins une solution $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^{m^{**}}(\Omega)$ où $m^{**} = \frac{Nm}{N-2m}$, au sens faible suivant :

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx = \lambda \int_\Omega \frac{u\varphi}{|x|^2} \, dx + \int_\Omega f\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \tag{3.2.3}$$

Remarque 3.2.1 *On note que la deuxième intégrale du côté droit de (3.2.3) est bien définie. En fait, comme $\frac{2m^{**}}{m^{**}-1} < N$ (puisque $m > 1$), alors, par le théorème (1.4.1), la fonction $\frac{1}{|x|^2} \in L^{\frac{m^{**}}{m^{**}-1}}(\Omega)$. En utilisant le fait que $u \in L^{m^{**}}(\Omega)$, alors par l'inégalité de Hölder, on a :*

$$\left| \int_\Omega \frac{u}{|x|^2} \, dx \right| \leq \left[\int_\Omega |u|^{m^{**}} \, dx \right]^{\frac{1}{m^{**}}} \left[\frac{1}{|x|^{\frac{2m^{**}}{m^{**}-1}}} \right]^{\frac{m^{**}-1}{m^{**}}}.$$

Par conséquent la fonction $\frac{u}{|x|^2}$ appartient à $L^1(\Omega)$, ce qui donne un sens à l'intégrale $\int_\Omega \frac{u\varphi}{|x|^2} \, dx$, pour $\varphi \in L^\infty(\Omega)$.

Remarque 3.2.2 *La condition (3.2.2) est optimale comme le montre l'exemple suivant.*

Exemple 3.2.1 *On considère le problème (3.1.1),et on pose $\Omega = B_1(0)$,$M(x) = I$ et $f(x) = \frac{1}{|x|^\nu}$ tel que $\nu = \frac{N}{m}$ .Alors passant à des coordonnées radiales*

$$-u''(r) - \frac{N-1}{r}u'(r) - \lambda\frac{u(r)}{r^2} = \frac{1}{r^\nu}, \; u(1) = 0, \; 0 < \lambda \leq \left(\frac{N-2}{2}\right)^2.$$

tel que

$$\alpha = -\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 + \left(\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 - \lambda\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par intégration d'élément ,nous trouvons une famille de solution tel que

$$u(r) = Ar^{\alpha_+} + Br^{\alpha_-} + Cr^{2-\nu}, u(1) = 0, A + B + C = 0,$$

$$C = \frac{1}{(2-\nu)(1-\nu)+(N-1)(2-\nu)+\lambda}[r^{\alpha_+} - r^{2-\nu}].$$

Si $\nu = \frac{N}{m}$ *,alors*

$$\frac{1}{(2-\frac{N}{m})(1-\frac{N}{m})+(N-1)(2-\frac{N}{m})+\lambda} = \frac{1}{(2-r)(1-r)+(N-1)(2-r)+\lambda}.$$

Si on a $\lambda > \alpha\frac{N(m-1)(N-2m)}{m^2}$ *,alors* $2-\nu > \alpha_+$*.De sorte de summability de* $r^{\alpha+}$ *,et* $r^{\alpha+}$ *ne se rattache pas à* $L^{m^{**}}(\Omega)$ *.*

Remarque 3.2.3 *Dans le cas au* $f \in L^m(\Omega)$ *tel que* $\frac{2N}{N+2} \leq m < \frac{N}{2}$*,, si on pose* $\lambda = 0$ *alors le problème* (3.1.1) *revient un problème elliptique linéaire de type Dirichlet et on remarque que la régularété est la méme dans le théorème 3.2.1 et cela de 2.3.2 . Alors* λ *n'infléuence pas à la régularité .*

La démonstration du théorème 3.2.1 sera divisée en plusieurs étapes. Tout d'abord, on va approcher le problème (3.1.1) par une suite de problèmes réguliers $(P_n)_{n\geq 1}$. Ensuite, on va démontrer que le problème approché P_n admet au moins une solution bornée notée u_n. Puis, on va prouver que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est uniformément bornée dans l'espace $H_0^1(\Omega)\cap L^{m^{**}}(\Omega)$. Enfin, on va passer à la limite dans le problème régularisé P_n.

3.2.1 Approximation

Pour $n \geq 1$, on considère le problème approché suivant :

$$(P_n) \; : \begin{cases} -\text{div}\,(M(x)\nabla u_n) = \lambda\dfrac{u_n}{|x|^2+\frac{1}{n}} + f_n & \text{in } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2.4}$$

où $f_n = T_n(f)$. Maintenant, on va montrer que le problème approché admet au moins une solution dans l'espace $H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. Ceci est l'objet du lemme suivant.

Lemme 3.2.1 *On suppose que l'hypothèse* (3.1.2) *est satisfaite,* $f \in L^m(\Omega)$ *avec* $m > 1$ *, et* λ *satisfait la condition* (3.1.3)*. Alors le problème approché* (3.2.4) *admet au moins une solution* $u_n \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$*.*

Preuve. Pour démontrer ce lemme, on procédé par deux étapes.

1. **Étape 1 : L'existence dans l'espace $H_0^1(\Omega)$.** On va faire la démonstration de l'existence des solutions faibles on utilise le théorème 1.6.1(Lax-Milgram). On définit les opérateurs $A:\ H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\longrightarrow\mathbb{R}$, et $L:\ H_0^1(\Omega)\longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ par :

$$L(v)=\int_\Omega f_n v\,dx,$$
$$A(w,v)=\langle\, S(w),v\,\rangle,$$

où $S:\ H_0^1(\Omega)\longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ est l'opérateur défini par :

$$S(w)=-\mathrm{div}\,(M(x)\nabla w)-\lambda\frac{w}{|x|^2+\frac{1}{n}}.$$

Méthode du Lax-Milgram.

On va démontrer que les opérateurs A et L satisfont toutes les hypothèses du théorème 1.6.1(Lax-Milgram).

(a) **La coercivité du l'opérateur A.**

Soit $w\in H=H_0^1(\Omega)$. En utilisant la condition (3.1.2), et l'inégalité de Hardy (1.3.1), on obtient

$$\begin{aligned}A(w,w)&=\langle\, S(w),w\,\rangle\\&=\langle -\mathrm{div}\,(M(x)\nabla w)-\lambda\frac{w}{|x|^2+\frac{1}{n}},w\rangle\\&=\int_\Omega M(x)\nabla w\cdot\nabla w\,dx-\lambda\int_\Omega\frac{w^2}{|x|^2+\frac{1}{n}}\,dx\\&\geq(\alpha H^2-\lambda)\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned}\tag{3.2.5}$$

Comme λ satisfait la condition (3.1.3), alors l'inégalité ci-dessus montre bien que l'opérateur A est coercif.

(b) **bilinéarite de A.**

Comme l'opérateur S est linéaire (gras à la linéarité de l'intégrale et de gradient), il est clair que l'opérateur A est bilinéaire.

(c) **Continuité de A.**

Soient $w,\ v\in H_0^1(\Omega)$. En utilisant (3.1.2), l'inégalité de Hölder et celle de Poincaré,

il vient

$$\begin{aligned}|A(w,v)| &= |\langle\, S(w), v\,\rangle| \\ &= \Big|\int_\Omega M(x)\nabla w\cdot\nabla v\,dx - \lambda\int_\Omega \frac{wv}{|x|^2+\frac{1}{n}}\,dx\Big| \\ &\le \int_\Omega |M(x)||\nabla w||\nabla v|\,dx + \lambda\int_\Omega \frac{|w||v|}{|x|^2+\frac{1}{n}}\,dx \\ &\le \beta\|w\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} + n\lambda\|w\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le C\|w\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Donc l'opérateur A est continu.

(d) L **est une forme linéaire continue**.

La linéarité de L découle directement de celle de l'intégrale, il reste à prouver seulement que L est continu. Soit $w \in H_0^1(\Omega)$. Par l'inégalité de Hölder et celle de Poincaré, on en déduit que

$$\begin{aligned}\big|L(v)\big| &= \Big|\int_\Omega f_n v\,dx\Big| \\ &\le n\int_\Omega |v|\,dx \\ &\le n|\Omega|^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le C\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Ce qui prouve bien que L est continu.

Finalement les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites, donc le problème (3.2.4) admet une solution faible $u_n \in H_0^1(\Omega)$.

Méthode de monotonie.

On va prouver que l'opérateur S a vérifié les hypothése des théorème de Leray-Lions où $S:\ H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ est l'opérateur défini par :

$$S(w) = -\mathrm{div}\,(M(x)\nabla w) - \lambda\frac{w}{|x|^2+\frac{1}{n}}.$$

On peut voir que

$$S(w) = A(w) + B(w).$$

où

$$A(w) = -\mathrm{div}\,(M(x)\nabla w)\,, B(w) = -\lambda\frac{w}{|x|^2+\frac{1}{n}}.$$

Tel que A est psodo monotone gras au chapitre précédant et on a déja montrer que S est coercive alors pour appliquer le théorème de Leray-Lions et gras à la proposition (1.7.3) il reste à montrer que B est totalement continu .

Soit v_n une suite bornée de $H_0^1(\Omega)$,alors on peut extrainer une saus suite v_n tel que $v_n \rightharpoonup v$ dans H_0^1 ,quand $n \to \infty$.

alors d'aprés Rellich on a

$$v_n \to v \ dans \ L^2(\Omega). \tag{3.2.6}$$

Soit $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Par l'inégalité de Hölder ,la condition (3.2.6) et la linéarité de l'intégral , on en déduit que

$$\begin{aligned} |\langle B(v_n - v), \varphi \rangle &= \lambda \Big| \int_\Omega \frac{(v_n - v)\varphi}{|x|^2 + \frac{1}{n}} \, dx \Big| \\ &\leq \lambda n \int_\Omega |v_n - v||\varphi| \, dx \\ &\leq \lambda n \left(\int_\Omega |v_n - v|^2 \, dx \right) \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

En utiliisant théorème de convergence forte dans $L^p(\Omega)$ on trouve le résultat. Ce qui prouve que B totalement continué. Finalement les hypothèses du théorème de Leray-Lions sont satisfait ,alors S est surjictive, donc le problème (3.2.4) admet une solution faible $u_n \in H_0^1(\Omega)$.

2. **Étape 2 : L'estimation dans l'espace** $L^\infty(\Omega)$**.**Voir [18, Theorem 8.11., page 72].

■

3.2.2 Estimations a priori

Lemme 3.2.2 *On suppose que l'hypothèse (3.1.2) est satisfaite, $f \in L^m(\Omega)$ avec m vérifie la condition (3.2.1), et λ satisfait la condition (3.2.2). Alors la suite (u_n) est uniformément bornée dans l'espace $H_0^1(\Omega) \cap L^{m^{**}}(\Omega)$.*

Preuve. Pour $n \geq 1$ fixé,soit la fonction u_n appartient à l'espace $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. On pose la fonction $v = |u_n|^{\sigma-2}u_n$ avec $\sigma = \frac{m(N-2)}{N-2m}$, avant d'utiliser v comme fonction test il faut montrer qu'elle est dans $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. En utilisant le théorème (1.2.7) il reste à prouver que $|u_n|^{\sigma-2} \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ qui est facile gras à la condition (3.2.1) on peut

déduire que $\sigma > 2$. Par conséquent, il est légitime de l'utiliser comme fonction test dans le problème approché (3.2.4), pour obtenir :

$$(\sigma-1)\int_\Omega M(x)\nabla u_n\cdot\nabla u_n|u_n|^{\sigma-2}\,dx=\lambda\int_\Omega\frac{|u_n|^\sigma}{|x|^2+\frac{1}{n}}\,dx+\int_\Omega f_n|u_n|^{\sigma-2}u_n.$$

En utilisant la condition (3.1.2) dans l'égalité ci-dessus, on obtient

$$\alpha(\sigma-1)\int_\Omega|\nabla u_n|^2|u_n|^{\sigma-2}\,dx\le\lambda\int_\Omega\frac{|u_n|^\sigma}{|x|^2+\frac{1}{n}}\,dx+\int_\Omega|f||u_n|^{\sigma-1}\,dx. \tag{3.2.7}$$

Puisque $\sigma\ge 2$ (étant $m\ge\frac{2N}{N+2}$), l'inégalité (3.2.7) devient :

$$\frac{4\alpha(\sigma-1)}{\sigma^2}\int_\Omega|\nabla|u_n|^{\frac{\sigma}{2}}|^2\,dx\le\lambda\int_\Omega\frac{\left(|u_n|^{\frac{\sigma}{2}}\right)^2}{|x|^2}\,dx+\int_\Omega|f||u_n|^{\sigma-1}. \tag{3.2.8}$$

En utilisant l'inégalité de Hardy sur le premier terme du côté droit de (3.2.8), il vient

$$\left[\frac{4\alpha(\sigma-1)}{\sigma^2}-\frac{\lambda}{H^2}\right]\int_\Omega|\nabla|u_n|^{\frac{\sigma}{2}}|^2\,dx\le\int_\Omega|f||u_n|^{\sigma-2}. \tag{3.2.9}$$

L'inégalité de Hölder sur le côté droit de (3.2.9), implique que

$$\left[\frac{4\alpha(\sigma-1)}{\sigma^2}-\frac{\lambda}{H^2}\right]\int_\Omega|\nabla|u_n|^{\frac{\sigma}{2}}|^2\,dx\le\|f\|_{L^m(\Omega)}\left[\int_\Omega|u_n|^{m'(\sigma-1)}\,dx\right]^{\frac{1}{m'}}. \tag{3.2.10}$$

L'inégalité (3.2.10) est utile seulement lorsque

$$\frac{4\alpha(\sigma-1)}{\sigma^2}>\frac{\lambda}{H^2}=\lambda\left(\frac{2}{N-2}\right)^2, \tag{3.2.11}$$

c'est-à-dire

$$\alpha(\sigma-1)(N-2)^2>\lambda\sigma^2.$$

Cela est vrai, en tenant compte de la définition de σ, si

$$\lambda<\alpha\frac{N(m-1)(N-2m)}{m^2}=\alpha\lambda_m,$$

c'est à dire la condition (3.2.2). De la définition de σ, il découle

$$\frac{\sigma 2^*}{2}=m'(\sigma-1)=m^{**}.$$

Par suite, en utilisant l'inégalité de Sobolev, il vient

$$S^2\left[\frac{4\alpha(\sigma-1)}{\sigma^2}-\frac{\lambda}{H^2}\right]\left[\int_\Omega|u_n|^{m^{**}}\,dx\right]^{\frac{2}{2^*}}\le\|f\|_{L^m(\Omega)}\left[\int_\Omega|u_n|^{m^{**}}\,dx\right]^{\frac{1}{m'}}. \tag{3.2.12}$$

Par l'inégalité de Young dans le côté droit de (3.2.12), on obtient

$$S^2\left[\frac{4\alpha(\sigma-1)}{\sigma^2}-\frac{\lambda}{H^2}\right]\left[\int_\Omega |u_n|^{m^{**}}\,dx\right]^{\frac{2}{2^*}-\frac{1}{m'}} \leq \|f\|_{L^m(\Omega)}. \tag{3.2.13}$$

Maintenant, on souligne que $\frac{2}{2^*} > \frac{1}{m'}$, puisque $m < \frac{N}{2}$. Par conséquent, à partir de (3.2.13), il suit la bornitude de la suite (u_n) dans l'espace $L^{m^{**}}(\Omega)$. Ceci conclut la preuve de la première partie du lemme 3.2.2. Pour prouver la deuxième partie, on choisit $\sigma = 2$ dans (3.2.9). On obtient ainsi

$$\left(\alpha-\frac{\lambda}{H^2}\right)\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx \leq \int_\Omega |f||u_n|\,dx. \tag{3.2.14}$$

Comme $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$, alors, by l'inégalité de Hölder sur le côté droit de (3.2.14), on obtient

$$\left(\alpha-\frac{\lambda}{H^2}\right)\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx \leq \|f\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)}\left[\int_\Omega |u_n|^{2^*}\,dx\right]^{\frac{1}{2^*}}. \tag{3.2.15}$$

Par l'inégalité de Sobolev sur le côté droit de (3.2.15), il vient

$$\left(\alpha-\frac{\lambda}{H^2}\right)\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx \leq \frac{\|f\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)}}{S}\left[\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.2.16}$$

En utilisant l'inégalité de Young sur le sur le côté droit de (3.2.16), on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx \leq C, \tag{3.2.17}$$

où C est une constante positive ne dépend pas de n. De (3.2.17), on en déduit que la suite (u_n) est uniformément bornée dans l'espace $H_0^1(\Omega)$. Ceci termine la preuve du lemme 3.2.2.

■

3.2.3 Passage à la limite

On a démontré que le problème approché (3.2.4), admet une solution $u_n \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ au sens faible suivant

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n\cdot\nabla\varphi\,dx = \lambda\int_\Omega \frac{u_n\varphi}{|x|^2+\frac{1}{n}}\,dx + \int_\Omega f_n\varphi\,dx, \quad \forall\varphi\in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega). \tag{3.2.18}$$

De plus, on a prouvé dans le lemme 3.2.2 une estimation uniforme sur la suite de solutions approchées (u_n) dans l'espace $H_0^1(\Omega)\cap L^{m^{**}}(\Omega)$. Maintenant on a tous les outils nécessaires

pour démontrer le théorème 3.2.1. Tout d'abord, comme la suite (u_n) est uniformément bornée dans $H_0^1(\Omega) \cap L^{m^{**}}(\Omega)$, alors il existe une fonction $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^{m^{**}}(\Omega)$ telle que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{fortement dans } H_0^1(\Omega), \tag{3.2.19}$$

et

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{p.p.,dans} \quad \Omega. \tag{3.2.20}$$

En utilisant (3.2.19), il est facile de prouver que

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla\varphi \, dx \longrightarrow \int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx.$$

Comme la suite f_n converge fortement vers f dans $L^1(\Omega)$, alors

$$\int_\Omega f_n\varphi \, dx \longrightarrow \int_\Omega f\varphi \, dx.$$

Il reste à prouver que

$$\int_\Omega \frac{u_n\varphi}{|x|^2 + \frac{1}{n}} \, dx \longrightarrow \int_\Omega \frac{u\varphi}{|x|^2} \, dx. \tag{3.2.21}$$

Comme la suite (u_n) est uniformément bornée dans l'espace $L^{m^{**}}(\Omega)$, on peut procéder comme dans la remarque 3.2.1, pour montrer que

$$\text{la suite } \left(\frac{u_n}{|x|^2 + \frac{1}{n}}\right)_{n\geq 1} \text{ est uniformément bornée dans } L^1(\Omega). \tag{3.2.22}$$

En utilisant (3.2.20), on a

$$\frac{u_n}{|x|^2 + \frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{u}{|x|^2} \quad \text{p.p., dans } \Omega. \tag{3.2.23}$$

De (3.2.22) et (3.2.23), on peut conclure par le théorème de Vitali que

$$\frac{u_n}{|x|^2 + \frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{u}{|x|^2} \quad \text{fortement dans } L^1(\Omega). \tag{3.2.24}$$

Enfin, on obtient (3.2.21), en utilisant (3.3.21), et le théorème de convergence dominée.

$$\int_\Omega \frac{u_n\varphi}{|x|^2 + \frac{1}{n}} \, dx \longrightarrow \int_\Omega \frac{u\varphi}{|x|^2} \, dx.$$

3.3 Existence des solutions distributionnelles

Théorème 3.3.1 *On suppose que l'hypothèse (3.1.2) est satisfaite, et que $f \in L^m(\Omega)$ avec m vérifie*

$$1 < m < \frac{2N}{N+2}. \tag{3.3.1}$$

et λ satisfait la condition (3.2.2). Alors le problème (3.1.1) admet au moins une solution $u \in W_0^{1,m^*}(\Omega)$ où $m^* = \frac{Nm}{N-m}$ au sens faible suivant :

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx = \lambda \int_\Omega \frac{u\varphi}{|x|^2} \, dx + \int_\Omega f\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega). \tag{3.3.2}$$

Remarque 3.3.1 *Comme $u \in W_0^{1,m^*}(\Omega)$, alors, par l'injection de Sobolev, $u \in L^{m^{**}}(\Omega)$, donc par la remarque 3.2.1, le deuxième intégral du côté droit de (3.3.2) a un sens.*

Remarque 3.3.2 *Comme $u \in W_0^{1,m^*}(\Omega)$, alors par l'injection de Sobolev, $u \in L^{m^*}(\Omega)$,et on obtient l'injection de $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$ dans $L^{(m^*)'}(\Omega)$.Alors en utilisant Hölder et l'hypothèse (3.1.2) sur le côté gauche de (3.3.2) ,alors*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx \leq \beta \left[\int_\Omega |\nabla u|^{m^*} \, dx\right]^{\frac{1}{m^*}} \left[\int_\Omega |\nabla\varphi|^{(m^*)'} \, dx\right]^{\frac{1}{(m^*)'}}.$$

Ce qui donne un sens à l'intégral.

Remarque 3.3.3 *Comme on a $f \in L^m(\Omega)$ avec $1 < m < \frac{2N}{N+2}$,alors si on pose que $\lambda = 0$ donc gras à théorème 2.5.1 on peut voir que on a la méme régularité comme le théorème 3.3.1 .Alors λ n'infléuence pas à la régularité .*

Afin de démontrer le théorème 3.3.1, on va reprendre les étapes de la démonstration du théorème 2.5.1. Tout d'abord, on considère à nouveau le problème approché (3.2.4), et on démontre le lemme suivant :

Lemme 3.3.1 *On suppose que l'hypothèse (3.1.2) est satisfaite, $f \in L^m(\Omega)$ avec m vérifie la condition (3.3.1), et λ satisfait la condition (3.2.2). Alors la suite u_n est bornée dans l'espace $W^{1,m^*}(\Omega)$.*

Preuve.

Pour $N \geq 1$ fixé ,soient $\varepsilon > 0$ et u_n appartient à l'espace $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ .On pose $v_\varepsilon = sgn(u_n)\left[(\varepsilon + u_n)\right]^{\sigma-1}$ avec $\sigma = \frac{(N-2)m}{N-2m}$,on utilise la condition (3.3.1), on peut montrer

que $\sigma > 1$,alors v_ε est un produit de deux fonctions appartient à $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ .Gras au théorème (1.2.7) on peut utiliser v_ε comme fonction test dans le problème approché (3.2.4) ,alors

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \nabla v_\varepsilon \, dx = \lambda \int_\Omega \frac{u_n v_\varepsilon}{|x|^2 + \frac{1}{n}} \, dx + \int_\Omega f_n v_\varepsilon \, dx. \tag{3.3.3}$$

En remplaçant v_ε par sa valeur dans (3.3.3) on obtient

$$\alpha\big(\sigma - 1\big) \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{(\varepsilon + |u_n|)^{2-\sigma}} \, dx = \lambda \int_\Omega \frac{u_n v_\varepsilon}{|x|^2 + \frac{1}{n}} \, dx + \int_\Omega f_n v_\varepsilon \, dx. \tag{3.3.4}$$

Il est facile de montrer que

$$\alpha\big(\sigma - 1\big) \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{(\varepsilon + |u_n|)^{2-\sigma}} \, dx = \frac{4\alpha\big(\sigma - 1\big)}{\sigma^2} \int_\Omega \big(\nabla\big(\varepsilon + |u_n|\big)^{\frac{\sigma}{2}} - \varepsilon^{\frac{\sigma}{2}}\big)^2 \, dx. \tag{3.3.5}$$

Alors (3.3.4),revient

$$\begin{aligned} \frac{4\alpha\big(\sigma - 1\big)}{\sigma^2} \int_\Omega (\nabla(\varepsilon + |u_n|)^{\frac{\sigma}{2}} - \varepsilon^{\frac{\sigma}{2}})^2 \, dx \le \lambda \int_\Omega [\frac{1}{|x|}\big(\varepsilon + |u_n|\big)^{\frac{\sigma}{2}} - \varepsilon^{\frac{\sigma}{2}}]^2 \, dx + \int_\Omega f_n v_\varepsilon \, dx \\ + \lambda \int_\Omega \frac{1}{|x|^2}[u_n v_\varepsilon - \big(\big(\varepsilon + |u_n|\big)^{\frac{\sigma}{2}} - \varepsilon^{\frac{\sigma}{2}}\big)^2] \, dx. \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

On utilise l'inégalité de Hardy :

$$\lambda \int_\Omega [\frac{1}{|x|}\big(\varepsilon + |u_n|\big)^{\frac{\sigma}{2}} - \varepsilon^{\frac{\sigma}{2}}]^2 \, dx \le \frac{\lambda}{H^2} \int_\Omega [\nabla\big(\big(\varepsilon + |u_n|\big)^{\frac{\sigma}{2}} - \varepsilon^{\frac{\sigma}{2}}\big)]^2 \, dx.$$

Dans la suite on note :$w_\varepsilon = (\varepsilon + |u_n|)^{\frac{\sigma}{2}} - \varepsilon^{\frac{\sigma}{2}}$. Alors :

$$\left[\frac{4\alpha\big(\sigma - 1\big)}{\sigma^2} - \frac{\lambda}{H^2}\right] \int_\Omega (\nabla(w_\varepsilon)^2 \, dx \le +\lambda \int_\Omega \frac{1}{|x|^2}[u_n v_\varepsilon - (w_\varepsilon)^2] \, dx + \int_\Omega f_n v_\varepsilon \, dx. \tag{3.3.7}$$

En utilisant l'inégalité de Sobolev (3.3.7) revient

$$S^2 \left[\frac{4\alpha\big(\sigma - 1\big)}{\sigma^2} - \frac{\lambda}{H^2}\right] \left[\int_\Omega |w_\varepsilon|^{2^*} \, dx\right]^{\frac{2}{2^*}} \le \lambda \int_\Omega \frac{1}{|x|^2}[u_n v_\varepsilon - (w_\varepsilon)^2] \, dx + \int_\Omega f_n v_\varepsilon \, dx. \tag{3.3.8}$$

On fixe n et on suppose que $\varepsilon \longrightarrow 0$ .Alors :

$$\begin{cases} v_\varepsilon \longrightarrow sgn(u_n)\big(u_n\big)^{\sigma-1}. \\ w_\varepsilon \longrightarrow |u_n|^{\frac{\sigma}{2}}. \end{cases}$$

Donc ,gras à la convergence forte on obtient

$$\int_\Omega \frac{1}{|x|^2}[u_n v_\varepsilon - (w_\varepsilon)^2] \, dx \longrightarrow 0.$$

Alors (3.3.8) revient

$$S^2\left[\frac{4\alpha(\sigma-1)}{\sigma^2}-\frac{\lambda}{H^2}\right]\left[\int_\Omega |u_n|^{\frac{\sigma 2^*}{2}}\,dx\right]^{\frac{2}{2^*}} \leq \int_\Omega f_n|u_n|^{\sigma-1}\,dx. \tag{3.3.9}$$

Gras à l'inégalité de Hölder à droit de (3.3.9) ,alors

$$S^2\left[\frac{4\alpha(\sigma-1)}{\sigma^2}-\frac{\lambda}{H^2}\right]\left[\int_\Omega |u_n|^{\frac{\sigma 2^*}{2}}\,dx\right]^{\frac{2}{2^*}} \leq \|f\|_{L^m(\Omega)}\left[\int_\Omega |u_n|^{(\sigma-1)m'}\,dx\right]^{\frac{1}{m'}}. \tag{3.3.10}$$

Avant de compléter les calcules ,d'autre part on a :

$$\sigma=\frac{(N-2)m}{N-2m}\ et\ 2^*=\frac{2N}{N-2}.$$

Alors il est facile de montrer que

$$\frac{\sigma 2^*}{2}=(\sigma-1)m'=m^{**}. \tag{3.3.11}$$

Et on a aussi :

$$\frac{2}{2^*}=\frac{\sigma}{m^{**}}\ et\ \frac{1}{m'}=\frac{\sigma-1}{m^{**}}.$$

Donc ,il est trivial de voir que

$$\frac{2}{2^*}-\frac{1}{m'}=\frac{1}{m^{**}}. \tag{3.3.12}$$

Alors gras au (3.3.11) et (3.3.12) ,l'inégalité (3.3.10) devient

$$S^2\left[\frac{4\alpha(\sigma-1)}{\sigma^2}-\frac{\lambda}{H^2}\right]\|u_n\|_{L^{m^{**}}(\Omega)} \leq \|f_n\|_{L^m(\Omega)}.$$

Ainsi que

$$\|u_n\|_{L^{m^{**}}(\Omega)} \leq \frac{\|f_n\|_{L^m(\Omega)}}{S^2\left[\frac{4\alpha(\sigma-1)}{\sigma^2}-\frac{\lambda}{H^2}\right]}.$$

D'autre part on fixe $\varepsilon = R$ et en remplaçant dans (3.3.5) ,on obtient

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{(R+|u_n|)^{2-\sigma}}\,dx \leq C(\sigma,m,N,\alpha,S,R)=M. \tag{3.3.13}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder avec exposant $\frac{2}{m^*}$ et $\frac{2}{2-m^*}$, on trouve

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{m^*}\,dx \leq \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^{m^*}}{(R+|u_n|)^{\frac{(2-\sigma)m^*}{2}}}(R+|u_n|)^{\frac{(2-\sigma)m^*}{2}}\,dx. \tag{3.3.14}$$

Alors

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{m^*}\,dx \leq M^{\frac{m^*}{2}}\left(\int_\Omega (R+|u_n|)^{\frac{(2-\sigma)m^*}{2-m^*}}\right)^{\frac{2-m^*}{2}}\,dx.$$

Ainsi,on déduire que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{m^*}\,dx \leq M^{\frac{m^*}{2}} \left(\int_\Omega (R+|u_n|)^{m^{**}}\right)^{\frac{2-m^*}{2}}\,dx.$$

Donc on a prouvé que u_n est uniformement bornée dans $W^{1,m^*}(\Omega)$

■

3.3.1 Passage à la limite

On a démontré que le problème approché (3.2.4), admet une solution $u_n \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ au sens faible suivant

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n\cdot\nabla\varphi\,dx = \lambda\int_\Omega \frac{u_n\varphi}{|x|^2+\frac{1}{n}}\,dx + \int_\Omega f_n\varphi\,dx, \quad \forall\varphi\in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega). \tag{3.3.15}$$

De plus, on a prouvé dans le lemme (3.3.1) une estimation uniforme sur la suite de solutions approchées (u_n) dans l'espace $W^{1,m^*}(\Omega)$. Maintenant on a tous les outils nécessaires pour démontrer le théorème **??**. Tout d'abord, comme la suite (u_n) est uniformément bornée dans $W^{1,m^*}(\Omega)$, alors il existe une fonction u dans $W^{1,m^*}(\Omega)$ telle que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{fortement dans } L^{m^*}(\Omega), \tag{3.3.16}$$

et

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{p.p.,dans} \quad \Omega. \tag{3.3.17}$$

En utilisant (3.3.16), il est facile de prouver que

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n\cdot\nabla\varphi\,dx \longrightarrow \int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx.$$

Comme la suite f_n converge fortement vers f dans $L^1(\Omega)$, alors

$$\int_\Omega f_n\varphi\,dx \longrightarrow \int_\Omega f\varphi\,dx.$$

Il reste à prouver que

$$\int_\Omega \frac{u_n\varphi}{|x|^2+\frac{1}{n}}\,dx \longrightarrow \int_\Omega \frac{u\varphi}{|x|^2}\,dx. \tag{3.3.18}$$

Comme la suite (u_n) est uniformément bornée dans l'espace $W^{1,m^*}(\Omega)$, on peut procéder comme dans la remarque 3.2.1, pour montrer que

$$\text{la suite } \left(\frac{u_n}{|x|^2+\frac{1}{n}}\right)_{n\geq 1} \text{ est uniformément bornée dans } L^1(\Omega). \tag{3.3.19}$$

En utilisant (3.3.17), on a

$$\frac{u_n}{|x|^2+\frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{u}{|x|^2} \quad \text{p.p., dans } \Omega. \tag{3.3.20}$$

De (3.3.19) et (3.3.20), on peut conclure par le théorème de Vitali que

$$\frac{u_n}{|x|^2+\frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{u}{|x|^2} \quad \text{fortement dans } L^1(\Omega). \tag{3.3.21}$$

Enfin, on obtient (3.3.18), en utilisant (3.3.21), et le théorème de convergence dominée.

$$\int_\Omega \frac{u_n\varphi}{|x|^2+\frac{1}{n}}\,dx \longrightarrow \int_\Omega \frac{u\varphi}{|x|^2}\,dx.$$

3.4 Non existence dans le cas où $f \in L^1(\Omega)$

Soit $f \in L^1(\Omega)$,on dit que $u \in L^1(\Omega)$ est une solution faible de

$$-\text{div}\,(M(x)\nabla u) - \lambda\frac{u}{|x|^2} = f.$$

Si et seulement si

$$\int_\Omega u(-\text{div}\,(M(x)\nabla\psi) - \lambda\frac{\psi}{|x|^2} - f)\,dx = 0, \quad \forall\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

Et qui est vérifie que

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^1(\Omega)}, \quad \forall f \in L^1(\Omega). \tag{3.4.1}$$

Soit $g \in L^\infty(\Omega)$ et on suppose que $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ solution de

$$-\text{div}\,(M(x)\nabla\varphi) - \lambda\frac{\varphi}{|x|^2} = g.$$

Si le problème admet une solution dans $L^1(\Omega)$.Alors en utilisant (3.4.1) et l'inégalité de Hölder, on trouve

$$|\int_\Omega f\varphi\,dx| = |\int_\Omega gu\,dx| \leq \|g\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{L^1(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^\infty(\Omega)}\|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

Mais si on pose $\|f\|_{L^1(\Omega)} \leq 1$,on a donc

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Qui est faux en général. Donc le problème (3.1.1) n'admet pas une solution le cas où $f \in L^1(\Omega)$.Dans ce cas on donne le contre exemple suivante

Exemple 3.4.1 *Soit* $\Omega = B_{\frac{1}{2}}(0)$ *,et soit* $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *solution de problème*

$$\begin{cases} \triangle u_n = \lambda \frac{u_n}{|x|^2+\frac{1}{n}} + f_n & dans\ \Omega, \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Tel que $f_n \in L^\infty(\Omega)$ *une suite de fonction non négative Bornées dans* $L^1(\Omega)$*. Comme la solution* u_n *est non négative alors soit* $u_n \geq z_n$ *,tel que* z_n *est l'unique solution dans* $W_0^{1,2}(\Omega)$ *de*

$$\begin{cases} \triangle z_n = f_n & dans\ \Omega, \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega. \end{cases}$$

En utilisant principe maximum faible ,$u_n \geq w_n$ *,tel que* w_n *est l'unique solution dans* $W_0^{1,2}(\Omega)$ *de*

$$\begin{cases} \triangle w_n = \lambda \frac{z_n}{|x|^2+\frac{1}{n}} + f_n & dans\ \Omega, \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Supposant que f_n *est symétrique ,alors* u_n, z_n *et* w_n *sont symétrique . Alors passant à des coordonnées radiales ,aprés le calcul on obtient*

$$z_n = \frac{1}{N-2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{s^{N-1}}{max(\rho,s)^{N-2}} f_n(s)\, ds - \frac{2^{N-2}}{N-2}\omega_N \|f\|_1,$$

Et on trouve aussi que

$$w_n(\rho) = \frac{\lambda}{N-2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{s^{N-3}}{max(\rho,s)^{N-2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{t^{N-1} f_n(t)}{max(\rho,s)^{N-2}}\, dt\right) ds + C,$$

$$\geq \int_0^{\rho} \frac{s^{N-3}}{max(\rho,s)^{N-2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{t^{N-1} f_n(t)}{max(\rho,s)^{N-2}}\, dt\right) ds + C,$$

$$= C + \frac{\lambda}{N-2}\frac{1}{\rho^{N-2}} \int_0^{\rho} \frac{1}{s}\left(\int_0^s t^{N-1} f_n(t)\, dt\right) ds.$$

Dans ce cas on choisit $f(x) = \frac{1}{|x|^N(-\ln(|x|))^\alpha}$ *,tel que* α *,alors* $f \in L^1(\Omega)$ *,et soit* $f_n = T_n(f)$ *,comme on a* f_n *converge vers* f *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^s t^{N-1} f_n(t)\, dt = \int_0^s t^{N-1} f(t)\, dt = \frac{1}{(\alpha-1)(-\ln(|s|))^{\alpha-1}}$$

Pour tout $|x| = \rho$ *dans* Ω *,*

$$\lim_{n\to+\infty} w_n(\rho) \geq C + \frac{\lambda}{(N-2)(\alpha-1)}\frac{1}{\rho^{N-2}} \int_0^{\rho} \frac{1}{s(-\ln(|s|))^{\alpha-1}}\, ds = +\infty.$$

Alors on peut voir que la limite de u_n est $+\infty$,alors l'estimation est fausse sauf dans $L^1(\Omega)$

.

3.5 Le cas où $f \in L^m(\Omega)$ avec $m \geq \frac{N}{2}$.

Si on prend $f \in L^m(\Omega)$ avec $m \geq \frac{N}{2}$,alors n'existe pas une solution $u \in L^1(\Omega)$ de (3.1.1). D'autre part si $f \geq 0$ et en utilisant Principe de maximum fort on trouve que $u > 0$ et

$$- \triangle u > 0.$$

Si $u > \eta$ dans $B_r(0)$,par suite $\eta > 0$ .En fait une comparison si $u > v$ dans $B_r(0)$,tel que v la solution de problème

$$\begin{cases} \triangle v = \lambda \frac{\eta}{|x|^2} & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Qui est facile de montrer que n'est pas bornée .Pour plus d'explication on va donner le contre exemple suivant ,on considère l'equation radiale

$$-u^{''}(r) - \frac{N-1}{r} u^{'}(r) - \lambda \frac{u(r)}{r^2} = 1.$$

On va voir la solution dans l'espace $W_0^{1,2}(\Omega)$ tel que $u(1) = 0$.

Par calcul on trouve la solution

$$u(r) = A\left(r^{\alpha_+} - r^2\right),$$

Tel que

$$\alpha_+ = \left(\frac{(N-2)}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{(N-2)}{2}\right)^2 - \lambda}, \ et \ A = \frac{1}{2N + \lambda}.$$

On peut voir que $0 > \alpha$.

Donc on a une contradiction car on a $u > 0$.

Conclusion général

A travers ce modeste travail, nous avons abordé une partie de problème elliptique, tel que on a étudié l'existence et la réqularité de solution pour un problème elliptique avec un potentiel de Hardy on utilisant des méthodes de résolution.

Bibliographie

[1] A. Adimurthi, et al., *The regularizing effect of lower order terms in elliptic problems involving Hardy potential.*" Advanced Nonlinear Studies 17.2 (2017) : 311-317.

[2] A. Porretta, *Uniqueness and homogeneization for a class of noncoercive operators*

[3] A. Perrotta, A. Primo, *Regularizing Effect of a Gradient Term in a Problem Involving the p-Laplacian Operator*. Advanced nonlinear studies 11.1 (2011), 221–231.

[4] Baras, P., Goldstein, J. : The heat equation with singular potential. Trans. Am. Math. Soc. 294,121–139 (1984).

[5] D. Gilbarg, and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, 1998.

[6] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications : II/B : Nonlinear Monotone Operators*. Springer Science and Business Media, 2013.

[7] G. Croce, *An elliptic problem with degenerate coercivity and a singular quadratic gradient lower order term*, Discrete and Continuous Dynamical Systems-S 5.3 (2012), 507–530.

[8] G. Leoni, *A first course in Sobolev spaces*. American Mathematical Soc., 2017.

[9] G. Stampacchia, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **15** (1965), 189–258.

[10] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.

[11] H. Brézis, X. Cabré, *Some simple nonlinear PDE's without solutions*. Bollettino della Unione Matematica Italiana-B 2 (1998), 223–262.

[12] H. Le Dret, *Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations*. Springer International Publishing :, 2018.

[13] J. Bebernes, and D. Eberly, *Mathematical Problems from Combustion Theory*. Applied Mathematical Sciences, vol. 83. Springer, New York (1989).

[14] J. Jost, *Partial Differential Equations*. Springer-Verlag New York, 2013.

[15] J. L. Vazquez, and E. Zuazua, *The Hardy inequality and the asymptotic behavior of the heat equation with an inverse-square potential*. J. Funct. Anal. 173,(2000), 103-153.

[16] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[17] J. Kinnunen, *Real Analysis*, 2020.

[18] L. Boccardo, and G. Croce, *Elliptic partial differential equations : existence and regularity of distributional solutions*. Vol. 55. Walter de Gruyter, 2013.

[19] L. Boccardo, and T. Gallouet, *Nonlinear elliptic equations with right hand side measures*. Comm. PartialDifferential Equations, 17, 641–655.

[20] L. Boccardo, *Dirichlet problems with singular and gradient quadratic lower order*

[21] L. Boccardo, F. Murat, J. P. Puel, L^∞*-estimate for some nonlinear elliptic partial*

[22] L. Boccardo, H. Brezis, *Some remarks on a class of elliptic equations with degenerate coercivity*. Boll. Unione Mat. Ital., 6 (2003), 521–530.

[23] L. Boccardo, L. Orsina, I. Peral, *A remark on existence and optimal summability of solutions of elliptic problems involving Hardy potential*. Discrete and Continuous Dynamical Systems-A 16.3 (2006), 513–523.

[24] L. Boccardo, L. Moreno-Méridaa, L. Orsina, *A Class of Quasilinear Dirichlet Problems with Unbounded Coefficients and Singular Quadratic Lower Order Terms*, Milan J. Math., 83 (2015), 157–176.

[25] L. Boccardo, L. Orsina, M. M. Porzio, *Existence results for quasilinear elliptic and parabolic problems with quadratic gradient terms and sources*, Advances in Calculus of Variations 4.4 (2011), 397–419.

[26] L. Boccardo, *The summability of solutions to variational problems since Guido Stampacchia*. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Math. RACSAM 97.3 (2003) : 413-421.

[27] L. C. Evans, and R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*. Chapman and Hall/CRC, 2015.

[28] L. Gasinski, and N. S. Papageorgiou, *Nonsmooth critical point theory and nonlinear boundary value problems*. Chapman and Hall/CRC, 2004.

[29] L. Orsina, *Elliptic equations with measure data*, in Lecture notes of the course Analisi Superiore (2012/2013).

[30] M.M. Porzio, *On some quasilinear elliptic equations involving Hardy potential*. Rendiconti di Matematica, Serie 7.27 (2007), 277–297.

[31] M. T. Lacroix-Sonrier, *Distributions, espaces de Sobolev : applications*. Ellipses, 1998.

[32] N.S. Trudinger, *On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations*. Comm. Pure Appl. Math., 20 (1967), 721–747.

[33] P. Pucci, and J. Serrin, *The strong maximum principle revisited*. Journal of Differential Equations 196.1 (2004), 1-66.

[34] T. Gallouët, and R. Herbin, *Master 2 de mathématiques Equations aux dérivées partielles*. 2020.

[35] T. Roubicek, *Nonlinear partial differential equations with applications*. Vol. 153. Springer Science and Business Media, 2013.

[36] Reed, M., Simon, B. : Methods of Modern Mathematical Physics, vol. II. Academic Press, New York (1979)

[37] S. Merchán, et al., *Existence and qualitative properties of solutions to a quasilinear elliptic equation involving the Hardy-Leray potential*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 31.1 (2014), 1–22.

[38] S. Merchán, I. Peral, *Remarks on the solvability of an elliptic equation with a supercritical term involving the Hardy–Leray potential*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 394.1 (2012), 347–359.

[39] S. Migorski, A. Ochal, and M. Sofonea, *Nonlinear inclusions and hemivariational inequalities : models and analysis of contact problems*. Vol. 26. Springer Science and Business Media, 2012.

[40] S. Salsa, *Partial differential equations in action : from modelling to theory*. Vol. 99. Springer, 2016.

[41] Z. Wu, J. Yin, and C. Wang, *Elliptic and parabolic equations*. World Scientific, 2006.