REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
UNIVERSITE DR. YAHIA FARES DE MEDEA

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Génie des Procédés

Filière : Génie Chimique

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de MASTER

Thème

# Etude de transfert de chaleur et de masse dans une cavité rempli d'un fluide non newtonien

**Réalisé par :**

**Ben Arous fateh**
**Lamellad khiereddine**

**Suivi par :**

**Dr. Hadidi. N**
**Dr. Rebhi. R**

**Promotion : 2019/2020**

# *Dédicaces*

A mes très chers parents source de vie d'amour et d'affection

A mes chers frères source de joie et de bonheur

A toute ma famille source d'espoir et de motivation

A tous mes amis

A tous ceux qui ont participé de près et de loin

À la réalisation de ce travail

Je dédie ce modeste travail.

# *Remerciements*

Je commence par remercier DIEU tout puissant pour l'aide, la volonté et le courage qui m'a donné pour pouvoir achever ce travail.

J'adresse mes chaleureux remerciements aux encadreurs,

Dr. Hadidi. Noureddine

Dr : Rebhi Redha

Mes remercîments sont adressés à tous les enseignants et biens sur la famille de génie chimique.

Je n'oublierai jamais d'adresser un grand et chaleureux remerciement à ma famille pour leurs soutiens moraux, matériels continus.

## ملخص

يتعلق هذا العمل بالدراسات العددية والتحليلية للحمل الحراري الطبيعي للسوائل غير النيوتونية في وسط مائع. تم اختيار نموذج Carreau-Yasuda لنمذجة السلوك الانسيابي للسائل غير النيوتوني. استخدمنا في هذا العمل طريقة الفروق المحدودة لحل المعادلات الحاكمة: الاستمرارية والحركة والطاقة والكتلة. النموذج المادي المختار هو تجويف مستطيل مشبع بسائل غير نيوتوني بحيث يتم الحفاظ على الجدران العلوية والسفلية في تدفقات موحدة للحرارة والكتلة ، في حين أن الجدران العمودية غير منفذة. كما أنها تخضع لعدة عوامل مختلفة مثل عدد رايلي $R_T$ ، ونسبة قوة الحجم ، N ، عدد لويس ، $Le$ ، نسبة أبعاد التجويف ، $A$ والمعلمات الريولوجية n، s، a، E. كما أظهرت النتائج التي تم الحصول عليها أن انخفاض قيم n و s و a وزيادة قيمة عدد E تؤدي إلى تحسن كبير في الحمل الحراري والكتلة.


**الكلمات الرئيسية:** الحمل الحراري الطبيعي ، السوائل غير النيوترونية ، نموذج Carreau-Yasuda ، وسط السوائل ، طريقة الفروق المحدودة ،



# Abstract:

This Works concerns numerical and analytical studies of the natural convection of non-Newtonian fluids in a fluid medium. The Carreau-Yasuda (CY) model was chosen to model the rheological behavior of the non-Newtonian fluide. In this work, we used the finité différence méthode to solve the Goering equations: of continuity, movement, energy and mass. The physical model chosen is a rectangular cavity saturated by a non-Newtonian fluid such that the upper and lower walls are maintained at uniform fluxes of heat and mass, while the vertical walls are impermeable and adiabatic. The parameters governing in this study are the thermal Rayleigh number,, the volume force ratio, N, the Lewis number, Le, the aspect ratio, A and the rheological parameters n, s, a, E. The results obtained show that the decrease in the values of n, s, and a and the increase in the value of the number E lead to a significant improvement in the rates of heat and mass transport.


**Keywords:** Natural convection, Non-Newtonian fluid, Tile-Yasuda model, fluid medium, Finite difference method,



# Résumé :

Ce travail porte sur les études numériques et analytiques de la convection naturelle des fluides non-Newtoniens dans un milieu fluide. Le modèle de Carreau-Yasuda (CY) a été retenu pour modéliser le comportement rhéologique du fluide non-Newtonien. Dans ce travail, nous avons utilisé la méthode des différences finies pour la résolution des équations

gouvernantes : de continuité, de mouvement, de l'énergie et de la masse.Le modèle physique opté c'est une cavité rectangulaire saturée par un fluide non-Newtonien tel que les parois supérieures et inférieures sont maintenues à des flux uniforme de chaleur et de la masse, tandis que les parois verticales sont imperméables et adiabatique. Les paramètres régissant dans cette étude sont le nombre de Rayleigh thermique , $R_T$ , le rapport des force de volume, $N$, le nombre de Lewis, $Le$, le rapport d'aspect, $A$ et les paramètres rhéologique $n, s, a, E$. Les résultats obtenus montrent que la diminution des valeurs de $n, s,$ et $a$ et l'augmentation de la valeur du nombre $E$ entrainent une amélioration significative des taux de transports de chaleur et de masse.

**Mot-clés :** Convection naturelle, Fluide non-Newtonien, Modèle Carreau-Yasuda, milieu fluide, Méthode des différences finies,

# Table des Matières

Liste des abréviations

Liste des tableaux

Liste des figures

Nomenclatures

**INTRODUCTION GÉNÉRALE ..... 1**

**CHAPITRE 1 : ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE…… 2**

**CHAPITRE2: GÉNÉRALITÉ SUR LES TRANSFERTS DE CHALEUR ET DE MASSE……. 6**

2.1 Transfert Thermique ……. 6

2.1.1 Introduction ……..... 6

2.1.2 Définition…… 6

2.1.2.1 Champ de température…….. 6

2.1.2.2 Gradient de température…… 7

2.1.2.3 Flux de chaleur……..... 7

2.1.3 Formulation d'un problème de transfert de chaleur…….……..... 8

2.1.3.1 Bilan d'énergie…….. 8

2.1.3.2 Expression des flux d'énergie……... 8

2.1.3.2.1 Conduction…… 8

2.1.3.2.2 Convection…… 9

2.1.3.2.3 Rayonnement…… 10

2.1.4 Equation de la Chaleur……. 11

2.1.4.1 Equation de la chaleur en coordonnées cartésiennes…… 11

2.1.4.2 Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques ……..... 11

2.2 Transfert de masse ……..……. 12

2.2.1 Définition…….. 12

2.2.2 Nombre de transfert de masse…… 12

2.2.3 La densité de flux de masse ……. 13

2.2.4 Loi de FICK……... 13

2. 3 Lois De Comportement Des Fluides ……...…….. 14

2. 3.1 Définitions : C'est quoi un fluide newtonien ? Non newtonien ?..... 15

2. 3.1 La différence entre fluide newtonien et non newtonien……..... 16

2. 3.2 Fluides newtoniens……..... 16

2. 3.3 Fluides Non-Newtonien…… 17

2. 3.3 .1 Fluides aux viscosités indépendantes du temps……... 18

2. 3.3.2 Fluides rhéofluidifiants (pseudo-plastiques)…… 18

3.3.3 Fluides rhéoépaississants…… 19

2. 3.3.4 Fluides à seuil (viscoplastique)……... 19

2. 4. Conclusion……..……. 19

**CHAPITRE 3 : MODELE PHISIQUE ET FORMULATION MATHÉMATIQUE……19**

3.1 Introduction…….…….. 20

3.2 Description du modèle physique……..……. 21

3.3 Équations gouvernant le problème……. 21

3.3.1 Équation de conservation de la masse…… 21

3.3.2 Équation de conservation de la quantité de mouvement…… 22

3.3.3 Équation de conservation de l'énergie…… 23

3.3.4 Équation constitutive (comportement rhéologique) …….. 23

3.4 Hypothèses simplificatrices……. 23

3.5 Formulation mathématique en coordonnées cartésiennes…… 24

3.6 Conditions aux limites hydrodynamiques et thermiques…….. 25

3.6.1 Conditions aux limites hydrodynamiques……... 26

3.6.2 Conditions aux limites thermiques……. 26

3.7 Mise sous forme adimensionnelle……..…… 27

3.7.2 Équation de transport adimensionnelles en formulation (ψ , Ω)……. 29

3.7.2 Conditions aux limites adimensionnelles ……... 30

3.8 Conclusion…….…….. 33

**CHAPITRE 4 : MÉTHODES NUMÉRIQUES…….33**

4.1 Introduction……..…….. 34

4.2 Définition de la méthode des différences finies……. 35

4.3 Discrétisation des équations de conservation…….…… 36

4.3.1 Les termes diffusifs et non diffusifs…… 36

4.3.2 Les termes convectifs…….. 37

4.3.3 Les termes temporels…… 37

4.4 Discrétisation de l'équation de mouvement …… 37

4.5 Discrétisation de l'équation d'énergie …… 39

4.6 Conclusion……..…….. 43

**CHAPITRE 5 : RÉSULTATS ET DISCUSSIONS……. 44**

CONCLUSION GÉNÉRALE…….. 60

BIBLIOGRAPHIE …….. 63

# LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

$A$ : Rapport de forme de la cavité, $A = H' / L'$

$C_T$ : Gradient de température dans la direction $x$

$g$ : Accélération de la pesanteur, $m/s^2$

$H'$ : Hauteur de la cavité, $m$

$L'$ : Largeur de la cavité, $m$

$\lambda$ : Conductivité thermique du fluide, $W/mK$

$n$ : Indice de la loi en puissance, paramètre réel

$q'$ : Flux de chaleur constant par unité de surface, $W/m^2$

$Nu\ (x)$ : Nombre de Nusselt local

$Nu_m$ : Nombre de Nusselt moyen

$Pr$ : Nombre de Prandtl ; $Pr = \dfrac{\mu_0}{\rho_0 \alpha}$

$Ra_T$ : Nombre de Rayleigh thermique ; $Ra_T = \dfrac{\rho_0 g\, \beta \Delta T'\, H'^3}{\mu_0 \alpha}$

$Ra_T^{sous}$ : Nombre de Rayleigh sous-critique

$Ra_T^{sup}$ : Nombre de Rayleigh supercritique

$Ra_{TC}$ : Nombre de Rayleigh critique

$T$ : Température adimensionnelle

$\Delta T'$ : Différence de température

$u$ : Composante de la vitesse adimensionnelle, direction $x$

$v$ : Composante de la vitesse adimensionnelle, direction $y$

$x, y$ : Coordonnées cartésiennes à partir du centre de la cavité

**Symboles Grecs**

$\alpha$ : Diffusivité thermique du fluide, $m^2 / s$

$\beta$ : Coefficient d'expansion thermique, $K^{-1}$

$\psi$ : Fonction du courant adimensionnelle,

$\rho$ : Masse volumique du fluide, $Kg / m^3$

$\Omega$ : Vorticité adimensionnelle

$\eta$ : Viscosité apparente adimensionnelle

$\mu$ : Viscosité dynamique d'un fluide Newtonien, $Pa\ s$

$\tau$ : Tenseur des contraintes

# *LISTE DES TABLEAUX*

**Tableau.1** : Sensibilité de la solution numérique au maillage en termes de l'intensité de l'écoulement, $\psi_0$, de nombre de Nusselt local, $\boldsymbol{Nu}$, de Nusselt moyen, $\boldsymbol{Nu_m}$, de Sherwood local, $\boldsymbol{Sh}$, and Sherwood moyen, $\boldsymbol{Sh_m}$, au centre de la cavité pour les valeurs de $A=10$, $P_r=10$, $R_T=10^3$, $\varphi=0.2$, $Le=10$, $n=0.6$, $E=0.2$, $a=2$ et $s=10^{-2}$ ..... 44

**Tableau 2** : Validation du code numérique en termes de nombre de Nusselt moyen, dans le cas d'une cavité carrée remplie d'air pour les valeurs de A = 1, Pr = 0,71

et φ = 0..... 45

# *LISTE DES FIGURES*

**Figure 1 :** Isotherme et gradient thermique …….. 7

**Figure 2 :** Bilan d'énergie……..... 8

**Figure 3 :** Représentation schématique du phénomène de conduction …… 9

**Figure 4 :** Transfert thermique par convection…….. 9

**Figure 5 :** Transfert thermique par rayonnement……..... 10

**Figure I-4** Rhéogramme et courbe de viscosité dynamique d'un fluide Newtonien..17

**Figure I-5** Allure générale d'une courbe d'écoulement ……

**Figure I-6** Rhéogramme des fluides Non-Newtoniens indépendants du temps ……18

**Figure I-11** Rhéogramme des fluides Non-Newtoniens dépendants du temps …… 19

**Figure 1 :** Représentation schématique de la cavité et système de coordonnées…..21

**Figure 3.1 :** Présentation maillage du domaine de calcul……35

**Figure 5.1:** Effet de $n$ sur les lignes de courant, isothermes, isoconcentrations et la viscosité apparente pour $A = 10$, $R_T = 800$, $Le = 10$, $\varphi = 0.05$, $E = 0.1, a = 2,\quad s = 10^{-2}$ :

(a) $n = 1, \psi_0 = 0.746, Nu = 1.161, Sh = 2.835, \mu = 1.000.$

(b) $n = 0.3, \psi_0 = 2.300, Nu = 1.972, Sh = 3.522, \mu = 0.371$……46

**Figure 5.2:** Effet de $n$ sur les lignes de courant, isothermes, isoconcentrations et la viscosité apparente pour condition de Neumann, $A = 1$, $R_T = 2000$, $Le = 10$, $\varphi = 0.05$, $E = 0.1, a = 2, s = 10^{-2}$ :

(a) $n = 1, \psi_0 = 1.064, Nu = 1.170, Sh = 3.593, \mu = 1.000.$

(b) $n = 0.6, \psi_0 = 2.306, Nu = 1.697, Sh = 5.213, \mu = 0.468.$

(c) $n = 0.4, \psi_0 = 3.204, Nu = 2.117, Sh = 5.820, \mu = 0.265$ ...…… 47

**Figure 5.3:** Effet de $n$ sur les lignes de courant, isothermes, isoconcentrations et la viscosité apparente pour condition de Dirichlet, $A = 1$, $R_T = 2000$, $Le = 10$, $\varphi = 0.05$, $E = 0.1, a = 2, s = 10^{-2}$ :

(a) $n = 0.8, \psi_0 = 0.503, Nu = 1.028, Sh = 2.171, \mu = 0.884.$

(b) $n = 0.6, \psi_0 = 3.191, Nu = 1.761, Sh = 5.038, \mu = 0.409.$

(c) $n = 0.4, \psi_0 = 5.662, Nu = 2.423, Sh = 5.905, \mu = 0.192$…… 48

**Figure 5.4 :** Effet de l'indice $n$ de loi de puissance sur les profils de la fonction de courant, $\psi$, de la température, $T$, de la concentration, $S$, et de la viscosité apparente, $\mu$, dans le plane médian vertical pour $R_T = 1000$, $Le = 10$ and $\varphi = -0.1$…… 50

**Figure 5.5 :** Effet de constant de temps, $E$, sur les profils de la fonction de courant, $\psi$, de la température, $T$, de la concentration, $S$, et de la viscosité apparente, $\mu$, dans le plane médian vertical pour $R_T = 000$, $Le = 10$ and $\varphi = -0.1$. ……. 51

**Figure 5.6 :** Effet de paramètre, $a$, sur les profils de la fonction de courant, $\psi$, de la température, $T$, de la concentration, $S$, et de la viscosité apparente, $\mu$, dans le plane médian vertical pour $R_T = 1000$, $Le = 10$ and $\varphi = -0.1$. ……. 52

**Figure 5.7 :** Effet de paramètre, $s$, sur les profils de la fonction de courant, $\psi$, de la température, $T$, de la concentration, $S$, et de la viscosité apparente, $\mu$, dans le plane médian vertical pour $R_T = 1000$, $Le = 10$ and $\varphi = -0.1$. ……. 53

**Figure 5.8 :** Effets du nombre de Rayleigh, $R_T$, et l'indice de loi de puissance, $n$, sur l'intensité de l'écoulement, $\psi$, le nombre de Nusselt, $Nu$, le nombre de Sherwood, $Sh$, and la viscosité apparente, $\mu$, pour $Le = 10$, $\varphi = 0.05$, $E = 0.1$, $a = 2$ et $s = 10^{-2}$……... 54

**Figure 5.9** : Effets du nombre de Rayleigh, $R_T$, et le rapport des forces de volume, $N$, sur l'intensité de l'écoulement, $\psi$, le nombre de Nusselt, $Nu$, le nombre de Sherwood, $Sh$, et la viscosité apparente, $\mu$, pour $Le = 10$, $n = 0.4$, $E = 0.1$, $a = 2$ et $s = 10^{-2}$ …55

**Figure 5.10 :** Effets du nombre de Rayleigh, $R_T$, et le rapport d'aspect, $A$, sur l'intensité de l'écoulement, $\psi$, le nombre de Nusselt, $Nu$, le nombre de Sherwood, $Sh$, et la viscosité apparente, $\mu$, pour $Le = 10$, $\varphi = 0.05$, $n = 0.4$, $E = 0.1$, $a = 2$ et $s = 10^{-2}$ ……... 56

**Figure 5.11:** Effets du nombre de Rayleigh, $R_T$, et le nombre de Lewis, $Le$, sur l'intensité de l'écoulement, $\psi$, le nombre de Nusselt, $Nu$, le nombre de Sherwood, $Sh$, et la viscosité apparente, $\mu$, pour $\varphi = 0.05$, $n = 0.4$, $E = 0.1$, $a = 2$ et $s = 10^{-2}$ ……. 57

**Figure 5.12:** Effets des paramètres rhéologique sur le nombre de Rayleigh Souscritique , $R_{TC}^{sous}$, pour $\varphi = 0.05$ et $Le = 10$…….. 59

**Figure 5.13:** Effets de loi de puissance, $n$, et de rapport des forces de volume, $N$, sur les nombres de Rayleigh critique, $R_{TC}^{sous1}$, $R_{TC}^{sous2}$, $R_{TC}^{tur}$ pour, $Le = 10$, $E = 0.1$, $a = 2$ et $s = 10^{-2}$……..... 60

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le transfert de chaleur est une science qui contient plusieurs concepts pratiques de base utilisés dans de nombreuses applications industrielles. Le transfert de chaleur peut s'effectuer au moyen de trois mécanismes différents, la conduction, la convection et le rayonnement. Les connaissances de base dans ce domaine, sont donc indispensables pour comprendre et maîtriser l'utilisation pratique de ces phénomènes.

Dans les écoulements avec les transferts de chaleur et de masse, la convection peut se présenter sous trois modes, à savoir la convection naturelle, la convection forcée et la convection mixte. Cette dernière qui s'implique dans de nombreux phénomènes naturels ou processus industriels trouve son application dans les échangeurs de chaleur destinés au chauffage ou au refroidissement des fluides, dans les procédés chimiques, dans les industries alimentaires, ainsi que dans le refroidissement des réacteurs nucléaires et des systèmes électroniques

La convection thermique naturelle dans la configuration de Rayleigh-Bénard semble être bien maîtrisée dans les fluides Newtoniens en raison d'énormes travaux de recherche entrepris dans ce domaine. Les travaux consacrés à la convection thermique des fluides non-Newtoniens de meurent peu nombreux à cause des facteurs suivants:

- La complexité de l'écoulement qui dépend fortement de la viscosité qui est fonction du taux de cisaillement pour certain fluide.
- Le manque de connaissance du comportement de bifurcation de l'état de repos qui reste toujours en cours de recherches expérimentales et numériques.

L'intérêt porté à la compréhension et la maitrise du comportement rhéologique des fluides dans les écoulements convectifs est indispensable afin d'apporter des solutions aux problèmes rencontrés dans les divers branches d'activités telles que ; les processus industriels, chimiques, pétrochimiques, pharmaceutiques et particulièrement dans l'industrie agro-alimentaires.

La présente étude porte une simulation numérique par la méthode des différences finis de la convection naturelle au sein d'une cavité rectangulaire. Cette cavité est soumise à un gradient de température vertical. Ce gradient de température vertical est obtenu soit en imposant des flux de chaleur constant (type de Neumann) ou des températures constantes

(type Dirichlet) sur les parois actives horizontales, tout en maintenant isolées les parois verticales

Cette étude s'articule sur Cinq (04) chapitres essentiels et une conclusion.

- Le premier chapitre, est une généralité sur les phénomènes des transferts de chaleur et de masse.
- Le second chapitre, nous allons présenter la modélisation mathématique, en présentant le problème physique de notre étude, suivi par une formulation mathématique des équations de continuité, de la quantité de mouvement, de l'équation de l'énergie et de l'équation de masse.
- Le troisième chapitre est réservé à la présentation de l'outil numérique de calcul, en précisant les différentes étapes pour résoudre le problème physique par la méthode des différences finies.
- Le dernier chapitre sera consacré à l'interprétation des différents résultats.
- On termine ce travail par une conclusion générale qui résume les principaux résultats obtenus avec des recommandations.

# CHAPITRE 1 :
# ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE

Ces modèles prennent en considération l'hétérogénéité de l'aliment, et la variété des modes de transferts au sein de ce dernier, un transfert couplé de chaleur et de masse se Produit simultanément dans le domaine d'étude et durant le processus. Le changement de Phase se produit et entraîne des changements complexes dans les propriétés de transport Tels que la densité, la chaleur spécifique, la conductivité et la chaleur latente de fusion qui sont fonction de la température.

De cela La synthèse de ces deux variables (chaleur et masse) détermine le comportement du produit durant le procédé de ainsi que la qualité finale du produit. Dans la littérature plusieurs travaux concernant les transferts de la chaleur et de masse durant le refroidissement et au cours de la congélation, admettent que les aliments solides ont des structures très compliquées, l'eau et la vapeur d'eau sont transportées simultanément par plusieurs mécanismes et il est donc impossible d'identifier un seul mécanisme physique pour construire un fond théorique pour le calcul.

Mascheroni , Chuntranuluk Wells et Cleland,, utilisaient les équations de transfert de chaleur et de masse et les a résolu par des méthodes numériques pour obtenir des modèles simples et utilisable pour plusieurs types d'aliments. [30]

Une perte d'humidité de la surface du produit non seulement accélère le processus de refroidissement mais modifie également les attributs de qualité du produit. Des pertes de poids supérieures à 1% se produisent généralement dans certains procédés de réfrigération commerciale. Dans le refroidissement de la carcasse de bœuf par exemple, la perte de poids est d'environ 1,5 ± 2,3%. **[3]**

**Ils** ont élaboré un modèle pour prédire la charge de chaleur et la perte de poids pendant le refroidissement des carcasses de bœuf. Ce modèle a été l'un des premiers modèles validés au niveau industriel. Ils ont utilisé une approche de différence finie sans flux de chaleur axiale, dans lequel la géométrie de carcasse irrégulière a été approchée par une combinaison de sept cylindres et plaques. [29]

Ils ont utilisé la dynamique des fluides informatiques pour simuler les vitesses de refroidissement et la perte de poids pendant le refroidissement de la viande porc en forme de

cylindre. Dans la première étape, ils ont étudié le champ d'écoulement en régime permanent, suivi du calcul du coefficient de transfert de chaleur convectif moyen [31]

Qui tient compte de la convection, du rayonnement et de l'évaporation à la surface du produit. Ils ont simulé le transfert de chaleur et de masse dans le produit en supposant le coefficient de transfert thermique homogène calculé dans l'étape précieuse. Il a été démontré qu'il y avait une grande quantité de chaleur éliminée par évaporation, qui était supérieure à la perte de chaleur par convection. De plus, ils ont signalé que la perte de chaleur par rayonnement était relativement faible par rapport à la perte de chaleur causée par l'évaporation et la conduction.

Ils ont développé un modèle numérique qui résout les bilans de chaleur et de masse couplés pendant la congélation et le stockage congelé d'aliments non emballés. Il permet d'évaluer les températures, le temps de congélation, l'épaisseur de la couche déshydratée et la perte de poids lors de la congélation et du stockage. Le modèle est adapté pour différents aliments (avec les propriétés physiques adéquates) et différentes géométries (cylindre et sphère). Les résultats numériques donnent une très bonne prédiction des valeurs expérimentales. [30]

Ils **utilisant** l'analyse des différences finies, et l'approximation de la forme du produit par une géométrie régulière, les équations sont associées au flux de chaleur entre les nœuds. Cette méthode est très utile pour les modèles unidimensionnels mais elle a une application limitée aux produits à formes régulières comme les cylindres, les plaques et les boîtes

ils on étudiés l'effet de la turbulence de l'air sur le transfert de chaleur et masse autour d'un cylindre. Le coefficient de transfert thermique a été mesuré autour d'un cylindre circulaire placé dans un contre-courant d'air dont l'intensité de turbulence du flux libre était de 14%. Dans cette gamme, l'effet sur la valeur moyenne du coefficient de transfert est très faible et ne peut être comparée à l'influence considérable de l'intensité de la turbulence. [27]

Ils**]** ont effectué une simulation numérique dans produit parallelipedique en utilisant le schéma de trois niveaux de Lee (Lee'sthree-levelscheme) et une grille fixe (fixed grid) pour prédire le transfert de chaleur et de masse pendant la congélation d'une matrice humide poreuse, ainsi que la perte en eau des aliments par évaporation à travers sa surface au cours du processus. Par l'introduction des deux termes d'évaporation condensation et le taux de formation de glace, dans les équations d'énergie Et de masse.

Ils **ont** étudié l'effet de différentes valeurs de l'activité de L'eau sur les temps de congélation / décongélation et la prédiction de la perte de poids de viande de porc et de bœuf cuits et de viande de poulet. Un schéma explicite de la méthode Différence finie, qui incorpore le transfert de masse a été utilisée dans l'analyse. Des Données expérimentales sur les temps de

congélation / décongélation et la perte de poids ont également été obtenues pour vérifier et comparer les prévisions du modèle. [35]

Ils ont réalisé une modélisation des transferts de chaleur et de masse durant la congélation des aliments poreux, l'étude numérique été mener par la méthode des volumes finies, et la résolution par un programme élabore a l'aide du code fortran, la simulation ete faite dans une chambre pour une convection d'air naturelle, le modèle établie n'a pas besoin du coefficient de transfert de chaleur pour le calcul, mais ils ont utilisé le nombre de Rayleigh pour prédire le temps de congélation et le taux de transfert. [27]

Dans une étude du transfert de chaleur et de masse pendant la congélation d'un bloc de boeuf dans un congélateur d'un réfrigérateur domestique. Il tient compte de la convection naturelle dans l'air couplée à la conduction thermique et à la diffusion de l'eau dans la viande. Les équations différentielles partielles non linéaires décrivant la conservation de masse, le moment linéaire, l'énergie et la concentration des espèces en deux dimensions sont résolues avec l'algorithme SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations) et la méthode des volumes finis. Les résultats obtenus comprennent la description de l'état d'inertie du mouvement de l'air ainsi que la température et la concentration de l'eau dans l'air et la répartition de la température et de la concentration de l'eau dans la viande. La perte de poids prédite de l'aliment atteint une valeur de 1,5%.

Il a établi un modèle pour la résolution du problème de transfert de chaleur et de masse durant la congélation et le stockage des aliments, ou il divise les aliments en deux catégories, des aliments denses et des aliments poreux. Pour lui le changement de phase ne se produit presque jamais seul et d'autres phénomènes ont lieu en parallèle avec le transfert de chaleur,

Des principes thermodynamiques sont employés pour développer des modèles déterministes de médias poreux. Les lois relatives à la balance à micro-échelle en moyenne sur les domaines fluide-solide adjacents pour atteindre les équations méso-échelle. Les équations de méso-échelle sont en outre moyennées sur le mélange solide-fluide et les phases en vrac pour obtenir des équations à macro échelle. Ils ont utilisé une version simplifiée pour dériver les équations de Navier-Stokes pour les fluides, les équations d'élasticité utilisées pour modéliser les solides et la loi de Darcy utilisée Pour modéliser l'écoulement. [20]

Ils Proposent une autre approche de modélisation des transferts couplée, la théorie du mélange hybride (HMT ; Hybrid mixture theory), une méthode puissante pour intégrer des mécanismes multi-scalaires pour estimer les changements physiques et les mécanismes de transport généraux qui se produisent dans une matrice alimentaire. HMT peut également être utilisé pour prédire les changements de qualité d'un produit congelé pendant le processus de

congélation. Les lois de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et de l'entropie sont mesurées deux fois en volume pour obtenir des équations à l'échelle méso et macroscopiques Cependant, en général, toutes les approches conduisant à une meilleure compréhension et une meilleure description de divers processus et peuvent être classées comme : [19]

- **Approche expérimentales :** Le processus considéré est simulé en laboratoire ou à l'échelle pilote. Cette approche fournit des données précieuses sur la performance du système, mais peut manquer d'une description théorique généralisée du processus. Les corrélations développées sont généralement empiriques ou semi-empiriques et ne peuvent donc pas être facilement généralisées.

- **L'approche analytique :** D'autre part, est basée sur des principes physiques. L'approche analytique peut être subdivisée en trois catégories :

- Solutions exactes en forme fermée : Avec les solutions exactes, de nombreuses simplifications sont faites pour résoudre des problèmes pratiques de nature complexe : Les solutions approchées tentent de résoudre approximativement les problèmes du monde réel

- Solutions approximatives en forme fermée.

- Solutions numériques : Les solutions numériques demandent plus d'informations sur le processus et le produit et sur les méthodes de calcul.

Ainsi, il existe encore de nombreuses situations dans lesquelles les méthodes simples de prédiction du temps de congélation sont préférées par les ingénieurs en alimentation plutôt que les méthodes numériques plus complexes. [2]

# CHAPITRE 2 :
# GÉNÉRALITÉ SUR LES TRANSFERT DE CHALEUR ET MASSE

## 2.1 Introduction :

Un phénomène de transfert (ou phénomène de transport) est un phénomène irréversible durant lequel une grandeur physique est transportée par le biais de molécules. C'est un phénomène transversal présent dans tous les domaines de la science et en ingénierie. Tous les phénomènes de transport ont pour origine l'inhomogénéité d'une grandeur intensive. C'est la tendance spontanée des systèmes physiques et chimiques à rendre uniformes ces grandeurs qui provoquent le transport. [34]

Les entités transférées les plus connues sont la chaleur (transfert thermique) et la matière (transfert de masse)

## 2.1 Transferts de chaleur :

### 2.1.1 Définitions [29] :

L'énergie thermique est l'énergie cinétique d'agitation microscopique d'un objet, qui est due à une agitation désordonnée de ses molécules et de ses atomes. Les transferts d'énergie thermique entre corps sont appelés transferts thermiques. Ils jouent un rôle essentiel en thermodynamique. Deux corps ayant la même température sont dits en équilibre thermique. Si leur température est différente, le corps le plus chaud cède de l'énergie au corps le plus froid : il y a alors transfert de chaleur.

#### 2.1.2.1 Champ de température : [30]

Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le Temps de la température : T = f (x, y, z, t). La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température.

Le caractère de déséquilibre peut être classé en quatre types de régimes :

- **Les régimes permanents** pour lesquels la température en tout point du milieu est indépendante du temps, le déséquilibre est entretenu par les sources de chaleur

- **Les régimes périodiques** établis pour lesquels la température, en tout point, effectue des oscillations périodiques indépendantes du champ de température initial
- **Les régimes transitoires** qui correspondent à l'évolution d'un système d'un état initial (permanent ou en équilibre) vers un état final (permanent ou en équilibre) provoquée par un changement à l'instant initial des sources; le champ de température dépend du champ de température initial mais l'influence de celui-ci s'estompe avec le temps
- **Les régimes variables** pour lesquels les sources évoluent constamment, le champ de température

### 2.1.2.2 Gradient de température : [33]

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une Surface dite surface isotherme. La variation de température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température :

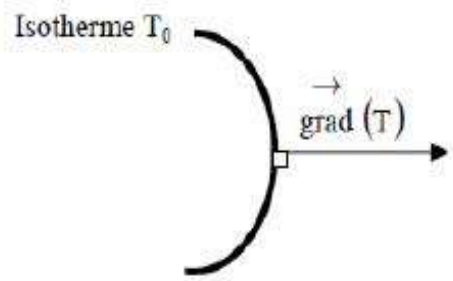



Figure 2.1 : Isotherme et gradient thermique

$$\overrightarrow{grad}\,(\mathrm{T}) = \vec{n}\,\frac{\partial T}{\partial n} \qquad \text{(II.1)}$$

Avec : $\vec{n}$ vecteur unitaire de la normale

$\frac{\partial T}{\partial n}$ : Dérivée de la température le long de la normale.

### 2.1.2.3 Flux de chaleur : [34]

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température par conduction des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur :

$$\Phi = \left(\frac{1}{S}\right)\left(\frac{dQ}{dt}\right) \qquad (W\ m^{-2})$$

(II.2)

Où S est l'aire de la surface ($m^2$).

On appelle flux de chaleur la quantité de chaleur transmise sur la surface S par unité de temps :

$$\phi = \frac{dQ}{dt} \qquad (W) \qquad \text{(II.3)}$$

### 2.1.3 Formulation d'un problème de transfert de chaleur :

#### 2.1.3.1 Bilan d'énergie [31]

Il faut tout d'abord définir un système (S) par ses limites dans l'espace et il faut ensuite établir l'inventaire des différents flux de chaleur qui influent sur l'état du système et qui peuvent être

**[17]**

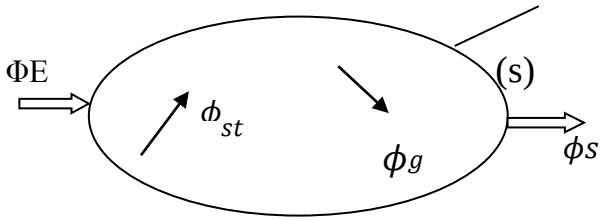



Figure 2.2 : Bilan d'énergie

$\Phi_{ST}$ : flux de chaleur stocké
$\Phi_G$ : flux de chaleur généré dans le système (S)
$\Phi_E$ : flux de chaleur entrant
$\Phi_S$ : flux de chaleur sortant

On applique alors le 1er principe de la thermodynamique pour établir le bilan d'énergie du système (S) :

$$\phi e + \phi g = \phi s + \phi st \qquad (w) \qquad \text{(II.4)}$$

#### 2.1.3.2 Les différents modes de transfert de chaleur : [30]

Si un solide est à température uniforme on dit qu'il est en équilibre thermique et aucun transfert de chaleur ne peut se produire. Dès qu'il existe entre deux corps, ou entre deux parties d'un même corps une différence de température ; cette dernière tend à disparaître

spontanément par échange de chaleur qui peut se faire par trois modes différents : Conduction, Convection et Rayonnement.

#### 2.1.3.2.1 Conduction : [28]

C'est le transfert de chaleur au sein d'un milieu opaque, sans déplacement de matière, sous l'influence d'une différence de température. La propagation de la chaleur par conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue selon deux mécanismes distincts : une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par les électrons libres **[18]**

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : la densité de flux est proportionnelle au gradient de température :

$$\vec{\Phi} = - \lambda \overrightarrow{grad}(T) \qquad \text{(II.5)}$$

Ou sous forme algébrique :

$$\phi = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \qquad (w) \qquad \text{(II.6)}$$

Avec :

Φ : Flux de chaleur transmis par conduction …. (W) λ : Conductivité thermique du milieu …. (W $m^{-1}$ °$C^{-1}$) x : Variable d'espace dans la direction du flux …. (m)

S : Aire de la section de passage du flux de chaleur …. ($m^2$)

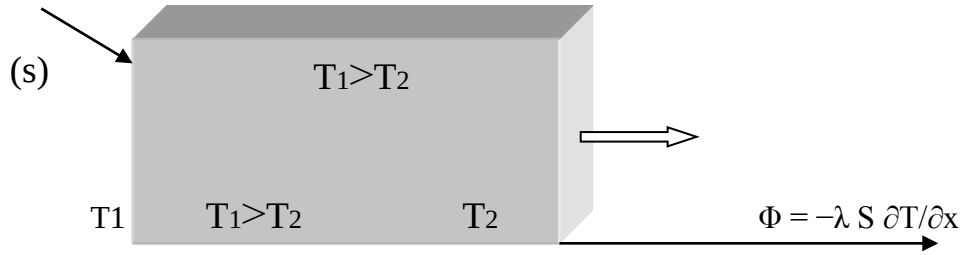



Figure 2. 3 : Représentation schématique du phénomène de conduction

#### 2.1.3.2.2 Convection :

C'est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide **[19]**

Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de NEWTON :

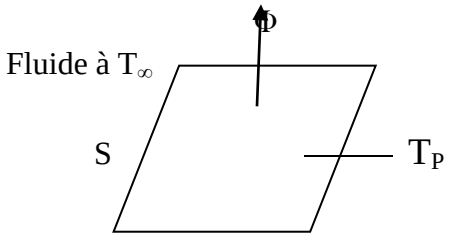



Figure 2.4 : Transfert thermique par convection

$$\phi = h\ S\ (T_P - T_\infty)\quad .\ (W) \qquad \text{(II.7)}$$

Avec :

Φ : Flux de chaleur transmis par convection (W)

h : Coefficient de transfert de chaleur par convection ($W\ m^{-2}\ °C^{-1}$)

$T_P$ : Température de surface du solide (°C)

$T_\infty$ : Température du fluide loin de la surface du solide (°C)

S : Aire de la surface de contact solide/fluide ($m^2$)

**2.1.3.2.3 Rayonnement : [13]**

C'est un transfert d'énergie électromagnétique entre deux surfaces (même dans le vide). Dans les problèmes de conduction, on prend en compte le rayonnement entre un solide et le milieu environnant et dans ce cas nous avons la relation **:**

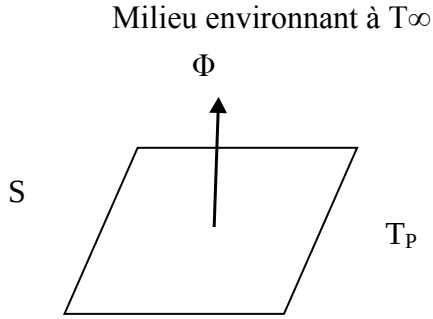



Figure 2.5 : Transfert thermique par rayonnement

$$\Phi = \sigma\ \varepsilon_p\ S\ (T_p\ 4 - T_\infty) \qquad \ldots\ (w) \qquad \text{(II.8)}$$

Avec :

$\Phi$ : Flux de chaleur transmis par rayonnement

(W) $\sigma$ : Constante de Stephan (5,67.$10^{-8}$ W m-2

$K^{-4}$)

$\varepsilon_p$ : Facteur d'émission de la surface

$T_p$ : Température de la surface (**K**)

$T_\infty$ : Température du milieu environnant la surface (**K**)

S : Aire de la surface ($m^2$)

### 2.1.4 Equation de la Chaleur :

#### 2.1.4.1 Equation de la chaleur en coordonnées cartésiennes [21] :

**Coordonnées cartésiennes (3.D)**

Dans le cas tridimensionnel, nous obtenons l'équation de la chaleur dans le cas le plus général **:**

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q} \qquad \text{(II.9)}$$

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas :

a) Si le milieu est isotrope : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$

b) S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système ⋮= 0

c) Si le milieu est homogène, λ n'est fonction que de T.

Les hypothèses a) + b) +c) permettent d'écrire :

$$\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{d\lambda}{dt}\left[\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dz}\right)^2\right] = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \qquad \text{(II.10)}$$

d) Si de plus $\lambda$ est constant (écart modéré de température), nous obtenons l'équation de Poisson :

$$a\nabla^2 T = \partial T / \partial t \qquad \text{(II.11)}$$

Le rapport $a = \frac{\lambda}{\rho C}$ est appelé la diffusivité thermique ($m^2.s^{-1}$) qui caractérise la vitesse de propagation d'un flux de chaleur à travers un matériau.

e) En régime permanent, nous obtenons l'équation de Laplace

$$\nabla^2 T = 0 \qquad \text{(II.12)}$$

### 2.1.4.2 Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques : [14]

**Coordonnée cylindriques (3.D) :** s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\left(r\frac{\partial T}{\partial \mathrm{r}}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathrm{z}}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{\varphi}{\lambda} = \frac{1}{\mathrm{a}}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}} \qquad \text{(II.13)}$$

**Coordonnée cylindriques (2.D) :** [15]

Dans le cas d'un problème à symétrie cylindrique où la température ne dépend que de r et de z, l'équation (II.13) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\left(r\frac{\partial T}{\partial \mathrm{r}}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathrm{z}}\right) + \frac{\dot{q}}{\mathrm{k}} = \frac{1}{\mathrm{a}}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}}$$

(II.14)

$\frac{\dot{q}}{\mathrm{k}} = 0$(Sans source de chaleur)

Donc l'équation devient :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}$$

(II.15)

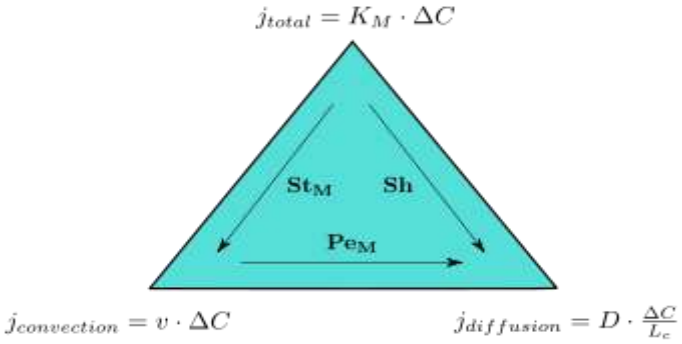
## 2 .2 Transferts de masse :

### 2 .2 .1 Définition [22] :

Le transfert de masse est le déplacement de la matière sous l'effet d'un gradient de concentration.

- On doit avoir un mélange de deux ou de plusieurs espèces que le transfert de masse produit.
- Le gradient de concentration des espèces est le potentiel de conduite pour ce transfert.
- Le transfert de masse par diffusion est similaire au transfert de chaleur par conduction

### 2.2.2 Nombres en transfert de masse [32]




- Nombre de Sherwood :

Le nombre de Sherwood (Sh) correspond au rapport entre le transfert massique total et le transfert de masse par diffusion.

$$Sh = \frac{j_{total}}{j_{diffusion}} = \frac{K_M L_c}{D} \qquad \text{(II.16)}$$

- Nombre de Péclet :

Le nombre de Peclet massique ($Pe_M$) correspond au rapport entre le transfert massique par convection et le transfert de masse par diffusion.

$$Pe_M = \frac{j_{convection}}{j_{diffusion}} = \frac{L_c \cdot v}{D} \qquad \text{(II.17)}$$

- Nombre de Stanton :

Le nombre de Stanton massique ($St_M$) correspond au rapport entre le transfert massique total et le transfert de masse par convection.

avec $K_M$ le coefficient de transfert de masse, $L_c$ la longueur caractéristique, D le coefficient de diffusion et v la vitesse

$$St_{\text{massique}} = \frac{j_{total}}{j_{convection}} = \frac{K_M}{v} \qquad \text{(II.18)}$$

2.2.3 **La densité de flux de matière** : [11]

Elle représente la quantité de matière (exprimée en masse ou en nombre de moles) qui passe à travers une unité de surface par unité de temps ; elle s'exprime donc en mol/ $m^2$ s

**2.2.4 Loi de Fick [19]**

Dans le cas général et dans un milieu au repos, le transfert de matière par diffusion moléculaire d'une espèce A dans un fluide B est décrit par la première loi de FICK :

$$\overrightarrow{J_A} = -D_{AB} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, C_A \qquad \text{( II.19)}$$

Où :

$J_A$ : représente le vecteur densité de flux molaire de diffusion de l'espèce A (au sein du fluide B), orienté dans la direction de la diffusion, et dont la norme s'exprime en mol $m^{-2}$ $s^{-1}$.

$D_{AB}$ : est le coefficient de diffusion moléculaire (ou diffusivité moléculaire) de l'espèce A au sein du fluide B, qui s'exprime en $m^2$ $s^{-1}$

$C_A$ : est la concentration de l'espèce A, exprimée en mol $m^{-3}$.

## 2.3 Lois de comportement des fluides :

### 2.3.1 La loi de Newton : [15]

Le comportement Newtonien est le plus simple que l'on connaisse. Il est caractérisé par la relation linéaire suivante :

$$\bar{\bar{\tau}}' = \mu \bar{\bar{\dot{\gamma}}}' \qquad \text{(II.20)}$$

entre le tenseur déviateur des contraintes (noté $\bar{\bar{\tau}}'$) et tenseur du taux de déformation (noté $\bar{\bar{\dot{\gamma}}}'$) une constante $\mu$ est présente. Elle est appelée la viscosité dynamique du fluide qui ne dépend que de la température et de la pression.

Pour un écoulement laminaire àcisaillement simple, l'équation (1.1) se réduit à :

$$\tau' = \mu\dot{\gamma}'$$

(II.21)

Où $\tau'$ et $\dot{\gamma}'$ sont respectivement, la contrainte et le taux de cisaillement.

De la relation linéaire (1.2), il en ressort que les principaux critères des fluides Newtoniens sont :

- La viscosité dynamique $\mu$ est indépendante des paramètres de l'écoulement et du temps ;
- La viscosité dynamique varie qu'en fonction des paramètres étrangers à l'écoulement, comme la température ou la pression ;
- Les contraintes s'annulent immédiatement lorsque l'écoulement est en repos.

Éventuellement, ces critères, décrivent le comportement d'un fluide idéal. A l'exception de certains fluides comme les gaz et quelques liquides composés de molécules simples (eau, certaines huiles).Toutes déviations aces règles est le signe d'un comportement non-Newtonien. [5]

### 2.3.2 Définition : C'est quoi un fluide newtonien ? Non newtonien ?

- **Fluide Newtonien : [6]**

Un fluide newtonien est un fluide dont la viscosité ne dépend pas des contraintes qui lui sont appliquées. Autrement dit sa viscosité ne varie pas quand on agite le fluide. Elle peut néanmoins dépendre d'autres facteurs tels que la température. Plus le fluide est chaud moins celui-ci est visqueux, car les molécules sont plus agitées et par conséquent les liaisons entre elles sont moins fortes. A l'inverse plus le fluide est froid, plus il se solidifie, car ses molécules se figent et leurs liaisons sont donc plus fortes.

La viscosité du fluide newtonien sera donc constante quelques soient les contraintes exercées.

Des exemples de fluides newtoniens : l'eau, le miel, le sirop de sucre de canne...

- **Fluide non Newtonien : [17]**

Dans un fluide non-newtonien, la viscosité ne dépend pas seulement de la température mais aussi d'une contrainte appelée contrainte de cisaillement. La viscosité dépend aussi, chez certains types de fluides non newtoniens, de la durée pendant laquelle cette contrainte est appliquée.

La viscosité augmente quand on applique une action mécanique dessus.

**Un exemple concret : [26]**

Pour mieux différencier les fluides newtoniens et les fluides non-newtoniens, on imagine que l'on place un fluide newtonien (du miel par exemple) dans un bol. On touille le fluide à l'aide d'une cuillère et on mesure la force exercée sur la cuillère et la vitesse de la cuillère dans le bol.

On remarque alors que lorsque l'on augmente de deux fois la vitesse, on doit aussi augmenter deux fois la force appliquée. La force et la vitesse sont donc proportionnelles car la viscosité est constante.




Maintenant si on place dans le bol un fluide non-newtonien, La force et la vitesse ne seront plus proportionnelles, car la viscosité du fluide variera. En

effet la cuillère oblige une partie de fluide à se mettre en mouvement tandis qu'une partie reste immobile ou bouge plus lentement. Il y a donc bien une contrainte de cisaillement et le fluide change de viscosité

### 2.3.1 La différence entre fluide newtonien et non Newtonien : [8]

Un fluide newtonien garde sa fluidité même si on la remue. Inversement ; un fluide non newtonien verra sa fluidité changer quand on la remue

### 2.3.2 Classification des fluides : [10]

Il est possible d'effectuer une classification rhéologique des fluides réels suivant la nature des paramètres influençant leur comportement rhéologique. Nous distinguons plusieurs catégories principales de fluides**:**

- Fluides Newtoniens ;
- Fluides non Newtoniens ;

### 2.4.1 Fluides Newtoniens : [14]

Ils s'appellent aussi liquides linéaires ou liquides parfaits. Dans ce cas, les contraintes de cisaillement sont proportionnelles au gradient de vitesse et la viscosité est indépendante de la contrainte appliquée et du temps. C'est une caractéristique de chaque fluide qui dépend de la température et de la pression. L'équation rhéologique s'écrit sous la forme

$$\tau = \mu\, \gamma \qquad \text{(II.22)}$$

Avec μ ($Pa.\ s$) la viscosité dynamique du liquide dite absolue dans ce cas. Parmi les liquides appartenant à cette famille, on trouve l'eau, l'air, le miel... (Figure I-1)

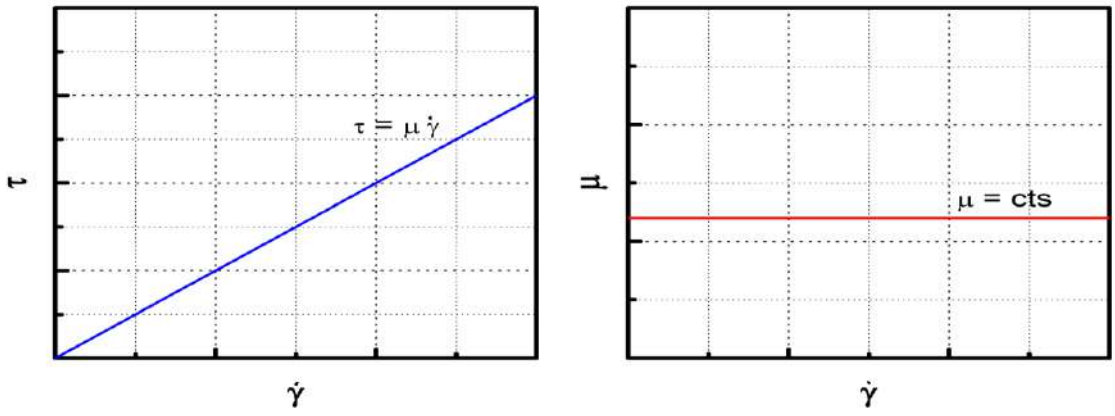



Figure I-1 rhéogramme et courbe de viscosité dynamique d'un fluide Newtonien **[24]**

### 2.4.2 Fluides Non-Newtonien : [19]

Un fluide non-newtonien ils s'appellent aussi liquides non-linéaires est un fluide ayant une viscosité apparente variable en fonction de la vitesse de cisaillement (Figure I-2).

Les fluides non-newtoniens sont subdivisés en trois groupes, qui sont caractérisés par des comportements rhéologiques distincts :

- ❖ Fluides à viscosité indépendantes du temps
- ❖ Fluides à viscosité dépendantes du temps ;
- ❖ Fluides viscoplastiques.

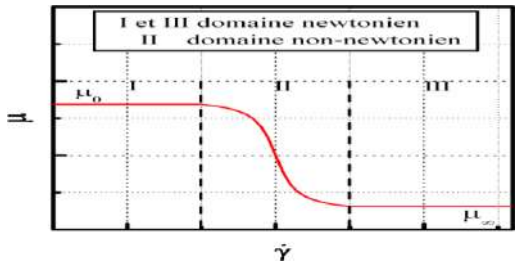



Figure I-2 Allure générale d'une courbe d'écoulement **[24]**

### 2.4.2.1 Fluides aux viscosités indépendantes du temps :

Dans ce type de fluide, la viscosité dite apparente $\mu$ dépend toujours de la température et de la pression mais aussi du taux de déformation ou de la contrainte de cisaillement **[25]**. Cette catégorie comporte à son tour les trois types de fluides suivants (voir Figure I-3) :

- Les fluides rhéofluidifiants (pseudo-plastiques) ;
- Les fluides rhéoépaississants (dilatants) ;
- Les fluides à seuil (viscoplastiques) :

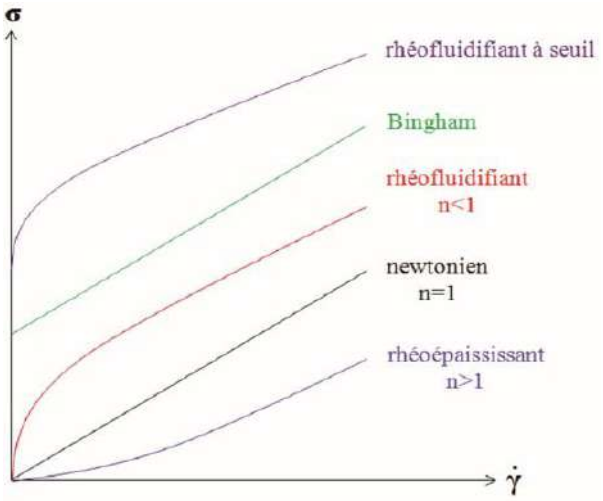



Figure I-3 Rhéogramme des fluides Non-Newtoniens indépendants du temps **[25]**

### 2.4.2.2 Fluides à viscosité dépendants du temps : [21]

Certains fluides non-Newtoniens possèdent un comportement qui varie en fonction du temps et du taux de cisaillement. Ces fluides se caractérisent par une viscosité apparente qui dépend de la durée d'application de la contrainte sans interruption.

Ces fluides se comportent comme si les contraintes subies dans un passé relativement récent modifiaient leurs comportements à l'écoulement présent. Les rhéogrammes résultantes de l'application d'une vitesse de déformation qui croît et décroît régulièrement (charge décharge) sur ces derniers, présentent des cycles d'hystérésis.

Cette catégorie de fluide peut se subdiviser en deux classes (Figure I-4) :

- Les fluides thixotropes
- Les fluides rhéopectine (antithixotropes)

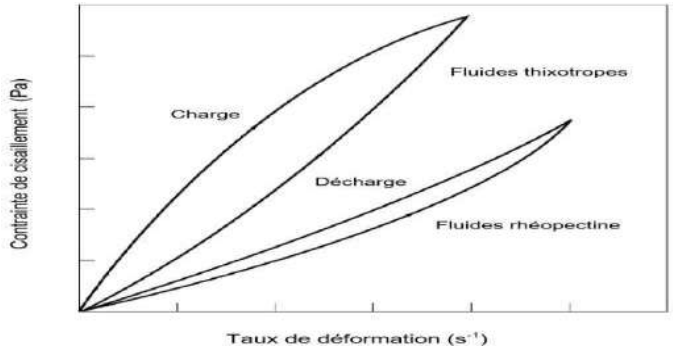



Figure I-4 Rhéogramme des fluides non-Newtoniens dépendants du temps **[26]**

### 2.4.2.3 Les fluides viscoélastiques (rhéoplastiques) : [7]

Les fluides viscoélastiques manifestent sous l'effet d'une contrainte, un comportement qui dépend à la fois de la déformation, du taux de cisaillement et du temps.

Ces fluides possèdent simultanément des propriétés visqueuses et élastiques. Car soumis à un test de fluage (contrainte de cisaillement constante) (Figue I-4), ces fluides se déforment en trois temps successifs :

- Déformation instantanée qui résulte de l'élasticité du fluide ;
- Déformation élastique amortie par la viscosité ;
- Déformation linéaire purement visqueuse.

# CHAPITRE 3 :
# MODÉLÉ PHYSIQUE ET FORMULATION MATHÉMATIQUE

## 3 .1 Introduction :

La convection thermique fait intervenir le transport de chaleur par un mouvement de la matière sous l'effet de la pesanteur. Cependant, les équations nécessaires à la modélisation de ce processus doivent décrire d'une part le mouvement de la matière, et d'autre part le transport de la chaleur. C'est précisément ce que font les équations de mouvement couplées avec l'équation de la chaleur. Dans le cas de la convection naturelle, ces équations peuvent être simplifiées, mais même après leurs simplifications, elles resteront toujours non-linéaires. Cette non-linéarité a rendu leur résolution par voie analytique impossible d'où le recours à des méthodes numériques à savoir, les méthodes des différences finies, les volumes finis, les éléments finis ou les méthodes spectrales. [11]

Dans cette étude, la méthode des différences finies a été retenue du fait qu'elle est la mieux adaptée à la configuration géométrique choisie.

Dans un premier temps, on présentera la formulation mathématique du problème de convection naturelle d'un fluide non-Newtonien confiné dans une cavité rectangulaire. Dans un second temps, on donnera sous formes dimensionnelle, dans un système de coordonnées

cartésien, les équations gouvernantes associées aux conditions aux limites appropriées. Ensuite, on déterminera les échelles caractéristiques de la longueur, la vitesse et le temps dans le but de mettre ces équations sous formes adimensionnelles. Cette étape de travail, nous permettra de ressortir des nombres sans dimension dans le système d'équations. Enfin on se basera sur des hypothèses simplificatrices pour faciliter le traitement numérique. [23]

Par ailleurs, il est utile de mentionner que dans tout ce qui suit, on désigne par des primes les grandeurs dimensionnelles.

## 3 .2 Description du modèle physique [18]

Dans ce travail, la configuration géométrique qui a suscité notre intérêt est une cavité rectangulaire remplie d'un fluide non-Newtonien dont le comportement rhéologique obéit au modèle de Carreau - Yasuda . Comme il est illustré sur la figure (1) , il s'agit d'une cavité rectangulaire de hauteur $H'$ de largeur $L'$ . L'origine du système de coordonnées cartésiens considéré est située au centre de la cavité.

les parois horizontales sont soumises soit à un flux de chaleur constant, $q'$ , ou maintenues à des températures constantes. Par ailleurs, Les parois verticales sont toujours adiabatiques.

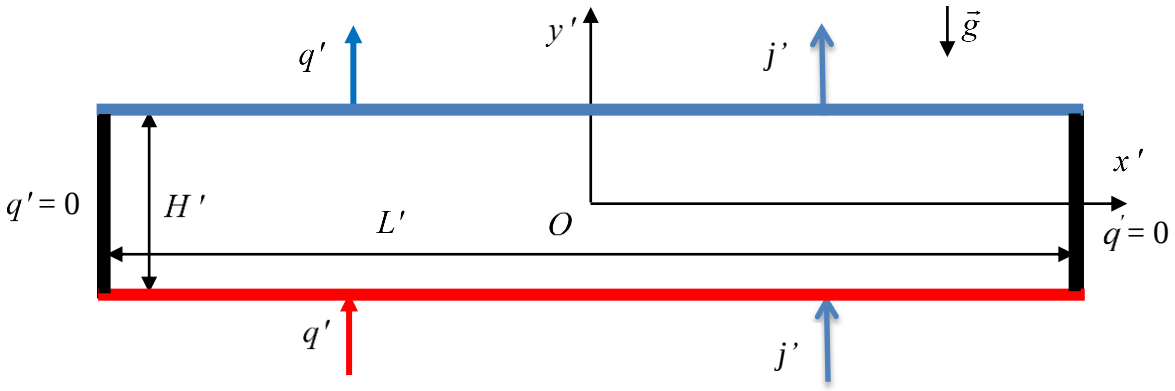



Figure 2 : Représentation schématique de la cavité et système de coordonnées.

## 3 .3 Équations gouvernant le problème

Les équations de conservation, couplées décrivant le mouvement et le transfert de chaleur misent sous forme tensorielle, sont formulées de la manière suivante :

### 3 .3.1 Équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\rho \overrightarrow{V'}\right) = 0 \qquad \text{(III.1)}$$

Comme le fluide considéré est incompressible ( $\rho$ = cste), l'équation (2.1) se simplifie pour donner : $\vec{\nabla}\overrightarrow{V'} = 0$

(III.2)

### 3 .3.2 Équation de conservation de la quantité de mouvement [30]

$$\rho \frac{D\vec{V'}}{Dt} = \rho \vec{g} + \vec{\nabla}\overline{\overline{\Sigma}} \qquad \text{(III.3)}$$

Où :

$\overrightarrow{V'}$ : représente le vecteur vitesse ($\overrightarrow{V'} = u'\vec{i} + v'\vec{j}$) ;

$\vec{g}$ : Le vecteur de l'accélération de la pesanteur selon l'axe *y' ;*

$\overline{\overline{\Sigma}}$ : Le tenseur des contraintes, qui se décompose en deux termes :

- $\overline{\tau'}$ : tenseur des extra-contraintes (ou tenseur déviateur des contraintes), qui se rapporte aux contraintes tendant à déformer le fluide ;
- $P'$ : la pression hydrostatique

$$\overline{\overline{\Sigma}} = \overline{\tau'} - P'\overline{I} \qquad \text{(III.4)}$$

Et $\overline{I}$ : représente la tenseur identité.

L'équation (2.3) s'écrit comme suit :

$$\rho \frac{D\overrightarrow{V'}}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial \overrightarrow{V'}}{\partial t'} + \overrightarrow{V'}\vec{\nabla}\overrightarrow{V'}\right) = -\vec{\nabla}P' + \rho\vec{g} + \vec{\nabla}\overline{\overline{\tau'}} \qquad \text{(III.5)}$$

$P'$ : représente la pression qui contient la contribution de la pesanteur ;

$\overline{\tau'}$ : Le tenseur déviateur des contraintes définit par :

$$\overline{\overline{\tau'}} = 2\mu\left(\dot{\gamma}\right)\overline{\overline{\dot{\gamma}'}} \qquad \text{(III.6)}$$

ou encore en terme de convention d'Einstein:

$$\tau'_{ij} = 2\mu\left(\dot{\gamma}'\right)\dot{\gamma}'_{ij} \qquad \text{(III.7)}$$

$\overline{\overline{\dot{\gamma}'}}$ : représente le tenseur du taux de déformation défini comme la partie symétrique du tenseur du gradient de vitesse:

$$\overline{\overline{\dot{\gamma}'}} = \frac{1}{2}\left( \overline{\overline{\nabla \vec{V}'}} + \left( \overline{\overline{\nabla \vec{V}'}} \right)^T \right) \tag{III.8}$$

Où :

$\overline{\overline{\nabla \vec{V}'}}$ : représente le gradient de vitesse dont ses composantes sont données par :

$$\dot{\gamma}'_{ij} = \frac{1}{2}\left( \frac{\partial V_i^{'}}{\partial x_j^{'}} + \frac{\partial V_j^{'}}{\partial x_i^{'}} \right) \tag{III.9}$$

Et $\mu$: représente la viscosité apparente du fluide, exprimée en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}'$ et définit par la formule suivante :

$$\dot{\gamma}' = \sqrt{\frac{1}{2}\overline{\overline{\dot{\gamma}'}} : \overline{\overline{\dot{\gamma}'}}} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{ij} \dot{\gamma}_{ij}^{'2}} \tag{III.10}$$

### 3 .3.3 Équation de conservation de l'énergie

$$\rho c_p \frac{DT'}{Dt'} = \rho c_p \left( \frac{\partial T'}{\partial t'} + \overline{V}' \overline{\nabla} T' \right) = \overline{\nabla}\left( \lambda \overline{\nabla} T' \right) + \overline{\overline{\tau}}' : \overline{\nabla} \overline{V}' \tag{III.11}$$

Où :

$\lambda$ : représente la conductivité thermique ;

$c_p$ : La chaleur calorifique à pression constante ;

Et ($\overline{\overline{\tau}}' : \overline{\nabla} \overline{V}'$) : représente la dissipation visqueuse de l'énergie. **[27-54]:**

## 3.4 Hypothèses simplificatrices [26]

Afin de simplifier la formulation mathématique du modèle, on a considéré quelques approximations qui sont largement utilisées par de nombreux auteurs dans leurs études sur la convection naturelle.

On a supposé que :

- La troisième dimension est suffisamment grande par rapport aux deux autres dimensions (*L*' et *H*') rendant les effets de bords négligeables et ramenant la configuration à un problème bidimensionnel;

- Le fluide non-Newtonien confiné à l'intérieur de la cavité est supposé incompressible ;

- L'écoulement engendré est supposé laminaire ;

- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable ;

- Le travail des forces visqueuses et de pression est négligeable ;

- Les propriétés thermo-physiques du fluide sont supposées constantes (indépendantes de la température) et sont évaluées à la température de référence. À l'exception de la masse volumique $\rho$, dans le terme de la poussée d'Archimède qui varie linéairement avec la température $T'$et obéit à l'approximation de Boussinesq **[55]**. En fait, cette approximation a été proposée pour la première fois en 1879 par Oberbeck **[56]**:

$$\rho = \rho_0 \left[ 1 - \beta \left( T' - T_0' \right) \right] \qquad \text{(III.12)}$$

$\rho_0$ : représente la densité du fluide donnée à la température référence $T_0'$ ;

$\beta$ : le coefficient d'expansion thermique pression constante, généralement, ce coefficient est de l'ordre de$10^{-4}$. Il est définit par :

$$\beta = -\frac{1}{\rho_0}\left( \frac{\partial \rho}{\partial T'} \right)_P \qquad \text{(III.13)}$$

Selon Gray et Giorgini **[57]**, l'approximation de Boussinesq est valide pour des faibles différences de température. Toutefois, et pour plus de détail, un exposé sur l'approximation de Boussinesq et ses conditions de validité sont données dans l'ouvrage de Bois **[58]**.

### 3 .5 Formulation mathématique en coordonnées cartésiennes : [24]

L'application de l'approximation de Boussinesq permet de considérer la masse volumique du fluide constante dans tous les termes sauf dans le terme de poussée. En faisant intervenir la pression hydrostatique $P' = p' - \rho_0 g$ , le système d'équations en terme de $u'$ et $v'$ devient :

Équation de continuité:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \tag{III.14}$$

Équation de mouvement suivant $x'$ :

$$\rho_0 \left( \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\partial \tau'_{xx}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y'} \tag{III.15}$$

Équation de mouvement suivant $y'$ :

$$\rho_0 \left( \frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial P'}{\partial y'} - \rho_0 \beta \left( T' - T'_0 \right) g + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau'_{yy}}{\partial y'} \tag{III.16}$$

où :

$$\begin{aligned} \tau'_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \tau'_{xy} &= \tau'_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \\ \tau'_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v'}{\partial y'} \end{aligned} \tag{III.17}$$

Équation de l'énergie:

$$\rho_0 c_p \left( \frac{\partial T'}{\partial t'} + u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} \right) \tag{III.18}$$

Equation de la masse :

$$\frac{\partial S'}{\partial t'} + u'\frac{\partial S'}{\partial x'} + v'\frac{\partial S'}{\partial y'} = D\left(\frac{\partial^2 S'^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 S'^2}{\partial y'^2}\right) \quad \text{(III.19)}$$

### 3 .6 Conditions aux limites hydrodynamiques et thermiques [3]

La configuration la plus simple permettant d'étudier le phénomène de la convection de Rayleigh-Bénard concerne une cavité horizontale soumise à un gradient de température verticale. Les conditions aux limites dimensionnelles sont données par :

#### 3 .6.1 Conditions aux limites hydrodynamiques [19]

- Parois horizontales :

Dans toute l'étude, les parois horizontales sont supposées rigides (cas sans glissement)

$$u' = v' = 0 \quad \text{pour} \quad y' = \pm\frac{H'}{2} \quad \text{(III.20)}$$

- Parois verticales :

Dans le cas où les parois verticales supposées sont rigides (cas sans glissement) on a :

$$u' = v' = 0 \quad \text{pour} \quad x' = +\frac{L'}{2} \quad \text{(III.21)}$$

Alors, lorsque ces parois verticales sont supposées libre (cas avec glissement) on a :

$$u' = \frac{\partial v'}{\partial x'} = 0 \ \text{pour} \ x' = +\frac{L'}{2} \quad \text{(III.22)}$$

#### 3 .6.2 Conditions aux limites thermiques : [27]

- Parois verticales :

Les parois verticales de la cavité sont supposées adiabatiques (pas d'échange de chaleur avec le milieu extérieur), ce qui se traduit par :

$$q' = j' = 0, \qquad \frac{\partial T'}{\partial x'} = \frac{\partial S'}{\partial x'} = 0 \qquad \text{pour} \qquad y' = \pm\frac{L'}{2}$$

(III.23)

- Les parois horizontales :

Dans le cas où les parois horizontales sont supposées maintenues à un flux de chaleur constant (condition de Neumann), on a :

$$q' = -\lambda \frac{\partial T'}{\partial y}, \quad j' = -\rho D \frac{\partial S'}{\partial y'} \qquad \text{Pour} \qquad y' = \pm \frac{H'}{2} \tag{III.24}$$

Alors, lorsque ces parois horizontales sont supposées isothermes (condition de Dirichlet), on a :

$$T' = T'_H, \; S' = S'_H \qquad \text{pour} \qquad y' = -\frac{H'}{2}$$

(III.25)

$$T' = T'_C, \quad S' = S'_C \quad \text{pour} \quad y' = +\frac{H'}{2}$$

(III.26)

### 3.7 Mise sous forme adimensionnelle [6]

Les équations (2.15) à (2.19) avec les conditions aux (2.20) à (2.26) sont rendues adimensionnelles en considérant les échelles caractéristiques suivantes :

- La hauteur $(H')$ de la cavité comme échelle de longueur ;
- Le temps de diffusion thermique $\left(H'^2/\alpha\right)$ comme échelle de temps. Ce temps caractéristique convient parfaitement pour des fluides dont le temps de diffusion thermique est plus élevé que le temps de diffusion visqueuse. C'est le cas des fluides dont le nombre de Prandtl est supérieur à 1 ;
- La vitesse de diffusion thermique $\left(H' \middle/ \left(H'^2/\alpha\right)\right)$ comme échelle de vitesse ;
- L'écart de température $\left(\Delta T' = T'_H - T'_C\right)$ ou bien $(\Delta T' = q' H' / \lambda)$ suivant le cas considéré ;
- $\left(\rho_0 \alpha^2 / H'^2\right)$ comme échelle de pression.

Ainsi, les variables sans dimension associées sont :

$$(x, y) = \frac{(x', y')}{H'}, t = \frac{t' \alpha}{H'^2}, (u, v) = \frac{(u', v') H'}{\alpha}, \; \psi = \frac{\psi'}{\alpha}, \; \eta = \frac{\mu}{\mu_0}, T = \frac{T' - T'_0}{\Delta T'} \tag{III.27}$$

où : $\alpha = \dfrac{\lambda}{\rho_0 c_p}$ représente la diffusivité thermique.

En vertu des variables adimensionnelles données par la relation (2.27), les équations de conservation (2.15)-(2.19) peuvent se réécrire sous la façon suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \text{(III.28)}$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + Pr \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \text{(III.29)}$$

$$\left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + Pr \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + Ra_T T \right) \qquad \text{(III.30)}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{yy} &= 2\eta \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \qquad \text{(III.31)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad \text{(III.32)}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \qquad \text{(III.33)}$$

Compte tenu de l'équation (2.12), la viscosité apparente adimensionnelle du modèle de Carreau-Yasuda se réduit à :

$$\eta(\dot{\gamma}) = s + (1-s)\left[ 1 + (E\dot{\gamma})^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \qquad \text{(III.34)}$$

Où :

$s = \mu_\infty / \mu_0$ : représente le rapport de la viscosité taux de cisaillement infini sur taux de cisaillement nul ;

$E = E'\alpha / H'^2$ : représente le temps caractéristique adimensionnelle du fluide.

$\dot{\gamma}$ : représente le second invariant du tenseur de taux de déformation (taux de cisaillement) définit par :

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} \qquad \text{(III.35)}$$

Le problème considéré fait intervenir le groupement de paramètres adimensionnels suivants :

- Le rapport de forme $A$ ;
- Le nombre de Prandtl $Pr$ qui caractérise les propriétés thermiques du fluide. C'est le rapport du temps caractéristique de diffusion thermique sur le temps caractéristique de diffusion visqueuse :

$$Pr = \frac{\mu_0}{\rho_0 \alpha} \qquad \text{(III.36)}$$

- Le nombre de Rayleigh thermique $Ra_T$ qui exprime le transfert de chaleur à l'intérieur d'un fluide. C'est le rapport entre les effets déstabilisants (force d'Archimède) qui provoquent la mise en mouvement du fluide et les effets stabilisants (force visqueuse et diffusion thermique) :

$$Ra_T = \frac{\rho_0 g \beta \Delta T' H'^3}{\mu_0 \alpha} \qquad \text{(III.37)}$$

- Les paramètres rhéologiques *n, E, set a.*

Il nous semble utile de mentionner que dans la présente étude, l'écart de température $\Delta T'$ , le coefficient d'expansion thermique $\beta$ ainsi que les nombres de Prandtl et de Rayleigh thermique $Pr$ et $Ra_T$ sont considérés positifs.

### 3.7.1 Équation de transportadimensionnelles en formulation ($\psi$,$\Omega$)

Dans la plupart des travaux relatifs à la convection naturelle, l'étude de la pression ne présente pas un intérêt majeur. L'utilisation de la formulation fonction de courant-vorticité

$(\psi, \Omega)$ fait non seulement réduire le nombre d'équation mais elle présente aussi l'avantage de tracer directement les lignes de courant qui apportent d'importantes informations sur la structure de l'écoulement.

Ainsi, l'équation de mouvement peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial (u\Omega)}{\partial x} + \frac{\partial (v\Omega)}{\partial y} = \Pr\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tau_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\tau_{yy} - \tau_{xx}\right) + R_T\left(\frac{\partial T}{\partial x} + N\frac{\partial s}{\partial x}\right)\right] \quad \text{(III.38)}$$

Où, $\Omega$ : représente la vorticité adimensionnelle definie comme suit :

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{(III.39)}$$

avec :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{(III.40)}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \\ \tau_{yy} &= -2\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y} \end{aligned} \quad \text{(III.41)}$$

Et :

$$\dot{\gamma} = \sqrt{4\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)^2} \quad \text{(III.42)}$$

En substituant les composantes du tenseur de déformation par ses valeurs respectives, et après manipulation algébrique, l'équation de mouvement (2.37) s'écrit comme :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial (\partial \Omega)}{\partial x} + \frac{\partial (\partial v)}{\partial y} = P_r\left[\mu \nabla^2 \Omega + 2\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)\right] + \\ &P_r\left[\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - 2\frac{\partial^2 \mu}{\partial xy}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + R_T\left(\frac{\partial T}{\partial X} + N\frac{\partial S}{\partial X}\right)\right] \end{aligned} \quad \text{(III.43)}$$

L'équation d'énergie devient :

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial(uT)}{\partial x}+\frac{\partial(vT)}{\partial y}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad \text{(III.44)}$$

L'équation de la masse

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial(uS)}{\partial x}+\frac{\partial(vS)}{\partial y}=Le^{-1}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right)$$

(III.45)

Et la fonction de courant (équation de poisson) s'écrit comme :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=-\Omega \qquad \text{(III.46)}$$

### 3.7.2 Conditions aux limites adimensionnelles [12]

Les conditions hydrodynamiques sur les parois horizontales sont définies de la manière suivante :

$$u=v=\Psi=\frac{\partial \Psi}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial y}=0 \quad \text{pour} \quad y=\pm\frac{1}{2} \qquad \text{(III.47)}$$

Deux cas se présentent pour les parois verticales:

$$u=v=\Psi=\frac{\partial \Psi}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial y}=0 \qquad \text{pour} \qquad x=\pm\frac{A}{2}$$

(III.48)

Cependant, les conditions thermiques et solutals sur les parois horizontales sont :

- pour le cas des flux de chaleur et de masse constants (type de Neumann)

$$\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial T}{\partial y}=-1 \qquad \text{pour} \qquad x=\pm\frac{A}{2}$$

(III.49)

- pour le cas des températures et des concentrations constants (type de Dirichlet) on a :

$$T=S=\pm\frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad y=\mp\frac{1}{2} \qquad \text{(III.50)}$$

et sur les parois verticales on a:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad \text{pour} \quad x = \pm \frac{A}{2} \tag{III.51}$$

où $A = \frac{L'}{H'}$ : représente le rapport de forme de la cavité.

où :

## Transfert thermique et massique [34]

Dans la présente étude, nous nous intéressons particulièrement aux calculs du taux de transfert de chaleur et de masse à une position $x$ donnée, qui sont exprimés en termes des nombres de Nusselt et Sherwood définis par :

$$Nu_x = \frac{q'}{k_P \frac{\Delta T'}{H'}} = \frac{1}{T(x,-1/2) - T(x,1/2)}$$

(III.52)

$$Sh_x = \frac{j'}{D \frac{\Delta S'}{H'}} = \frac{1}{S(x,-1/2) - S(x,1/2)}$$

(III.53)

Les valeurs moyennes des nombres de Nusselt et de Sherwood sur les parois actives sont exprimées par :

$$Nu_m = \frac{1}{A} \int_{-A/2}^{A/2} Nu_x dx$$

(III.54)

$$Sh_m = \frac{1}{A} \int_{-A/2}^{A/2} Sh_x dx$$

(III.55)

### 3.8 Conclusion

L'étude numérique entreprise a permis de montrer l'influence du mode de transfert thermique sur les caractéristiques hydrodynamique et thermosolutale au sein de la cavité. De plus, il a été noté que l'augmentation du nombre de poussée modifie les transferts thermique et massique étant donné que les poussées thermique et solutale sont coopérantes avec le mouvement des parois verticales.

# CHAPITRE 4 :
# MÉTHODE NUMÉRIQUE D.F :

## 4.1 Introduction

Les équations de conservation de mouvement et d'énergie munies des conditions aux limites appropriées sont discrétisées par la méthode des différences finies. Malgré, qu'elle est la plus ancienne des méthodes numériques, elle reste la plus adaptée pour des configurations géométriques simple comme la nôtre. Dans le cas de la convection naturelle des fluides confinés, plusieurs auteurs ont utilisé avec succès cette méthode pour résoudre des équations gouvernantes [20-30-36-44-45]. Le domaine de calcul est discrétisé avec un maillage uniforme suivant les deux directions De l'espace (voir figure 3.1). Ainsi, chaque point est

appelée nœud et peut être identifié par un couple d'indice $(i\ ,\ j)$. Les inconnues du problème, à savoir, la température, la fonction de courant, la vorticité et la viscosité apparente sont calculées sur chaque nœud en résolvant les équations gouvernantes. Quant à la vitesse, elle est déduite de la fonction de courant. [14]

L'équation de mouvement et l'équation d'énergie sont discrétisées par un schéma centré du deuxième ordre en utilisant la forme conservatrice des termes convectifs.

Une fois que ces équations sont discrétisées, elles sont résolues numériquement. Les équations de conservation de mouvement et d'énergie sont résolues par le biais de la méthode implicite aux directions alternées (A.D.I) modifiée par Peaceman et al.[26]. Cette méthode très puissante est largement utilisée avec succès pour les problèmes de convection naturelle en régime transitoire. Quant à l'équation de la fonction de courant, qui ne contient pas de termes transitoires, celle-ci est résolu par la méthode de sur-relaxation (S.O.R) [27].

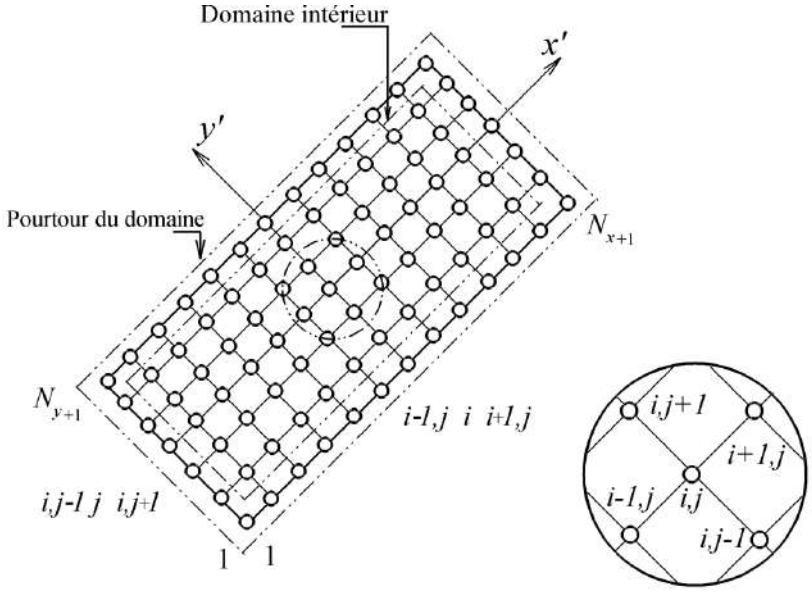


Figure 3.2 : Présentation maillage du domaine de calcul.

## 4.1 Définition de la méthode des différences finies. [18]

La méthode des Différences Finies est une méthode de résolution des Equations aux Dérivées Partielles (EDP) très puissante. Elle est caractérisée par :

- Sa facilité à discrétiser les EDP et les Conditions aux Limites (CL),
- Sa difficulté à discrétiser les domaines complexes sous forme de grille,
- Sa rapidité en temps de calcul.

### 4.2 Discrétisation des équations de conservation [10]

A l'intérieur du domaine, les dérivées partielles spatiales, apparaissant dans les équations de conservation (2.42) et (2.43)sont discrétisées selon un schémacentré aux différencesfinies. Ce choix est liéà la nature du problèmeconsidéré où les informations sont connues à l'amont et à l'aval (cavitéfermée).

### 4.3 Les termes diffusifs et non diffusifs [20]

A l'intérieur du domaine, les dérivées partielles de premier et deuxième ordresont approchées selon un schéma centré aux différences finies :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2(\Delta x)}$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2(\Delta y)} \qquad \text{(IV.1)}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \qquad \text{(IV.2)}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4(\Delta x)(\Delta y)} \qquad \text{(IV.3)}$$

où :

*f :* représente soit la température *Tsoit* la fonction de courant $\psi$ ou soit la viscosité apparente $\eta$ ;

$(\Delta x)$et $(\Delta y)$ : représententrespectivement l'espacement entre deux nœuds voisins.

### 4.3.1 Les termes convectifs [18]

Les termes convectifs des équations de vorticité et de l'énergie sont approximées de la manière suivante : $$\left(\frac{\partial uf}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} f_{i+1,j} - u_{i-1,j} f_{i-1,j}}{2(\Delta x)} \quad \text{(IV.4)}$$

### 4.3.2 Les termes temporels [10]

L'avancement dans le temps de la fonction $f$ entre les instant $t_m = m\Delta t$ et $t_{m+t} = t_m + \Delta t$ est approché par :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{i,j}^{m+1} = \frac{f_{i,j}^{m+1} - f_{i.j}^{m}}{\Delta t} \quad \text{(IV.5)}$$

Les équations de conservation de mouvement (2.42) et d'énergie (2.43) sontrésolues numériquement par la méthode implicite aux directions alternées (A.D.I). Son principe consiste, comme son nom l'indique, à écrire au cours d'un premier demipas de temps les équations de conservation dont les inconnues sont respectivement $\Omega$ et$T$ de manière implicite dans la direction des $x$ , puis implicite dans la direction des $y$ au cours du second demipas de temps, en utilisant à chacune de ces étapes les derniers résultats obtenus.

## 4.4 Discrétisation de l'équation de mouvement : [30]

La discrétisation de l'équation de mouvement(2.42) suivant un schéma implicite en $x$ et explicite en $y$ est écrite comme suit :

$$\left(-\frac{u^m_{i-1.j}}{2(\Delta x)}-\frac{P_r\mu^m_{i.j}}{(\Delta x)^2}+\frac{P_r\left(\mu^m_{i+1.j}-\mu^m_{i-1.j}\right)}{2(\Delta x)^2}\right)\Omega^{m+1/2}_{i-1.j}+\left(\frac{2}{\Delta t}+\frac{2P_r\mu^m_{i.j}}{(\Delta x)^2}\right)\Omega^{m+1/2}_{i.j}+$$
$$\left(\frac{u^m_{i+1.j}}{2(\Delta x)}-\frac{P_r\mu^m_{i.j}}{(\Delta x)^2}-\frac{P_r\left(\mu^m_{i+1.j}-\mu^m_{i-1.j}\right)}{2(\Delta x)^2}\right)\Omega^{m+1/2}_{i+1.j}=$$
$$\left(\frac{v_{i.j-1}}{2(\Delta y)}+\frac{P_r\mu^m_{i.j}}{(\Delta y)^2}-\frac{P_r\left(\mu^m_{i.j+1}-\mu^m_{i.j-1}\right)}{2(\Delta y)^2}\right)\Omega^m_{i.j-1}+$$
$$\left(\frac{2}{\Delta t}-\frac{2P_r\mu^m_{i.j}}{(\Delta y)^2}\right)\Omega^m_{i.j}+\left(\frac{-v^m_{i.j+1}}{2(\Delta y)}+\frac{P_r\mu^m_{i.j}}{(\Delta y)^2}\frac{P_r\left(\mu^m_{i.j+1}-\mu^m_{i.j-1}\right)}{2(\Delta y)^2}\right)\Omega^m_{i.j+1}+$$
$$P_r\left(\frac{\mu^m_{i+1.j}-2\mu^m_{i.j}+\mu^m_{i-1.j}}{(\Delta x)^2}-\frac{\mu^m_{i.j+1}-2\mu^m_{i.j}+\mu^m_{i.j-1}}{(\Delta y)^2}\right)\left(\frac{u^m_{i+1.j}-u^m_{i.j-1}}{2(\Delta y)}+\frac{v^m_{i+1.j}-v^m_{i.j-1}}{2(\Delta x)}\right)+$$
$$2P_r\left(\frac{\mu^m_{i+1.j}-\mu^m_{i+1.j-1}-\mu^m_{i-1.j+1}+\mu^m_{i-1.j-1}}{4(\Delta x)(\Delta y)}\right)\left(\frac{u^m_{i+1.j}-u^m_{i-1.j}}{2(\Delta x)}-\frac{v^m_{i.j+1}-v^m_{i.j-1}}{2(\Delta y)}\right)+$$
$$R_TP_r\left(\frac{T^m_{i+1}-T_{i+1.j}}{2(\Delta x)}+N\frac{S^m_{i+1}-S_{i+1.j}}{2(\Delta x)}\right)$$

(IV.6)

L'équation(3.6)peut s'écrire sous la forme généralisée comme suit :

$$A_i\ \Omega^{m+1/2}_{i-1,j}+B_i\ \Omega^{m+1/2}_{i,j}+C_i\ \Omega^{m+1/2}_{i+1,j}=D_i \qquad \text{(IV.7)}$$

Ainsi, La discrétisation de l'équation mouvement (2.42) suivant un schéma implicite en $y$ et explicite en $x$ est écrite comme suit :

$$\left(-\frac{v_{i.j-1}^{m+1/2}}{2(\Delta y)}-\frac{P_r\mu_{i.j}^{m+1/2}}{(\Delta y)^2}+\frac{P_r\left(\mu_{i.j+1}^{m+1/2}-\mu_{i.j+1}^{m+1/2}\right)}{2(\Delta y)^2}\right)\Omega_{i.j-1}^{m+1}+\left(\frac{2}{\Delta t}+\frac{2P_r\mu_{i.j}^{m+1/2}}{(\Delta y)^2}\right)\Omega_{i.j}^{m+1}+$$
$$\left(\frac{v_{i.j+1}^{m+1/2}}{2(\Delta y)}-\frac{P_r\mu_{i.j}^{m+1/2}}{(\Delta y)^2}-\frac{P_r\left(\mu_{i.j+1}^{m+1/2}-\mu_{i.j-1}^{m+1/2}\right)}{2(\Delta y)^2}\right)\Omega_{i.j+1}^{m+1}=$$
$$\left(\frac{u_{i-1.j}^{m+1/2}}{2(\Delta x)}+\frac{P_r\mu_{i.j}^{m+1/2}}{(\Delta x)^2}-\frac{P_r\left(\mu_{i+1.j}^{m+1/2}-\mu_{i-1.j}^{m+1/2}\right)}{2(\Delta x)^2}\right)\Omega_{i-1.j}^{m+1/2}+$$
$$\left(\frac{2}{\Delta t}-\frac{P_r\mu_{i.j}^{m+1/2}}{(\Delta x)^2}\right)\Omega_{i..j}^{m+1/2}+\left(\frac{-u_{i+1.j}^{m+1/2}}{2(\Delta x)}+\frac{P_r\mu_{i.j}^{m+1/2}}{(\Delta x)^2}+\frac{P_r\left(\mu_{i+1.j}^{m+1/2}-\mu_{i-1.j}^{m+1/2}\right)}{2(\Delta x)^2}\right)\Omega_{i+1.j}^{m+1/2}+$$
$$P_r\left(\frac{\mu_{i+1.j}^{m+1/2}-2\mu_{i.j}^{m+1/2}+\mu_{i-1.j}^{m+1/2}}{(\Delta x)^2}-\frac{\mu_{i.j+1}^{m+1/2}-2\mu_{i.j}^{m+1/2}+\mu_{i.j-1}^{m+1/2}}{(\Delta y)^2}\right)\left(\frac{u_{i.j+1}^{m+1/2}-u_{i.j-1}^{m+1/2}}{2(\Delta y)}+\frac{v_{i+1.j}^{m+1/2}-v_{i-1.j}^{m+1/2}}{2(\Delta x)}\right)-$$
$$2P_r\left(\frac{\mu_{i+1.j+1}^{m+1/2}-\mu_{i+1.j-1}^{m+1/2}-\mu_{i-1.j+1}^{m+1/2}+\mu_{i-1.j-1}^{m+1/2}}{4(\Delta x)(\Delta y)}\right)\left(\frac{u_{i+1.j}^{m+1/2}-u_{i-1.j}^{m+1/2}}{2(\Delta x)}-\frac{v_{i.j+1}^{m+1/2}-v_{i.j-1}^{m+1/2}}{2(\Delta y)}\right)+$$
$$R_TP_r\left(\frac{T_{I+1.J}^{m+1/2}-T_{i-1.j}^{m+1/2}}{2(\Delta x)}+N\frac{S_{I+1.J}^{m+1/2}-S_{i-1.j}^{m+1/2}}{2(\Delta x)}\right)$$

(IV.8)

L'équation (3.8) peut s'écrire sous la forme généralisée comme suit :

$$A_j\,\Omega_{i,j-1}^{m+1}+B_j\,\Omega_{i,j}^{m+1}+C_j\,\Omega_{i,j+1}^{m+1}=D_j \qquad \text{(IV.9)}$$

## 4.5 Discrétisation de l'équation d'énergie : [31]

La discrétisation de l'équation d'énergie(2.43)suivant un schéma implicite en $x$ et explicite en $y$ est écrite comme suit :

$$\left(-\frac{u_{i-1,j}^{m}}{2(\Delta x)}-\frac{1}{(\Delta x)^2}\right)T_{i-1,j}^{m+1/2}+\left(-\frac{2}{\Delta t}+\frac{2}{(\Delta x)^2}\right)T_{i,j}^{m+1/2}+$$
$$\left(\frac{u_{i+1,j}^{m}}{2(\Delta x)}-\frac{1}{(\Delta x)^2}\right)T_{i+1,j}^{m+1/2}=\left(\frac{v_{i,j-1}^{m}}{2(\Delta y)}+\frac{1}{(\Delta y)^2}\right)T_{i,j-1}^{m}+ \quad \text{(IV.10)}$$
$$\left(\frac{2}{\Delta t}-\frac{2}{(\Delta y)^2}\right)T_{i,j}^{m}+\left(\frac{-v_{i,j+1}^{m}}{2(\Delta y)}+\frac{1}{(\Delta y)^2}\right)T_{i,j+1}^{m}$$

L'équation(3.10)peut s'écrire sous la forme généralisée comme suit :

$$A_i T_{i-1,j}^{m+1/2}+B_i T_{i,j}^{m+1/2}+C_i T_{i+1,j}^{m+1/2}=D_i \quad \text{(IV.11)}$$

La discrétisation de l'équation d'énergie(2.43)suivant un schéma implicite en $y$ et explicite en $x$ est écrite comme suit :

$$\left(-\frac{v_{i,j-1}^{m+1/2}}{2(\Delta y)}-\frac{1}{(\Delta y)^2}\right)T_{i,j-1}^{m+1}+\left(\frac{2}{\Delta t}+\frac{2}{(\Delta y)^2}\right)T_{i,j}^{m+1}+$$
$$\left(\frac{v_{i,j+1}^{m+1/2}}{2(\Delta y)}-\frac{1}{(\Delta y)^2}\right)T_{i,j+1}^{m+1}=\left(\frac{u_{i-1,j}^{m+1/2}}{2(\Delta x)}+\frac{1}{(\Delta x)^2}\right)T_{i-1,j}^{m+1/2}+ \quad \text{(IV.12)}$$
$$\left(\frac{2}{\Delta t}-\frac{2}{(\Delta x)^2}\right)T_{i,j}^{m+1/2}+\left(\frac{-u_{i+1,j}^{m+1/2}}{2(\Delta x)}+\frac{1}{(\Delta x)^2}\right)T_{i+1,j}^{m+1/2}+$$

L'équation (3.12) peut s'écrire sous la forme généralisée comme suit :

$$A_j T_{i,j-1}^{m+1}+B_j T_{i,j}^{m+1}+C_j T_{i,j+1}^{m+1}=D_j \quad \text{(IV.13)}$$

## Discrétisation de l'équation de concentration [32]

De même pour l'équation de concentration (3.19), nous exposons dans ce qui suit sa discrétisation en suivant exactement les mêmes démarches que le paragraphe précédent.

L'équation de concentration (3.19) se réécrit de la façon suivante :

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial(uS)}{\partial x}+\frac{\partial(vS)}{\partial y}=Le^{-1}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right)$$

(IV.19)

- **Schéma implicite en *x* et explicite en *y* :**

Similairement aux démarches précédentes, l'équation algébrique correspondant à la discrétisation de l'équation de concentration donne : [18]

$$A_i S_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + B_i S_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_i S_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = D_i$$

(IV.20)

Avec :

$$A_i = \left[ \frac{u_{i+1,j}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{\Delta x^2 Le} \right], \quad B_i = 2\left[ \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x^2 Le} \right], \quad C_i = \left[ \frac{u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2 Le} \right]$$

$$D_i = \left[ \frac{v_{i,j+1}^n}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta y^2 Le} \right] S_{i,j+1}^n + 2\left[ \frac{1}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta y^2 Le} \right] S_{i,j}^n + \left[ \frac{v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta y^2 Le} \right] S_{i,j}^n$$

- **Schéma implicite en *y* et explicite en *x***

$$A_i' S_{i,j+1}^{n+1} + B_i' S_{i,j}^{n+1} + C_i' S_{i,j-1}^{n+1} = D_i'$$

(IV.21)

$$A'_i = \left[ -\frac{v_{i,j+1}^n}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta x^2 Le} \right], \quad B_i' = 2\left[ \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta y^2 Le} \right], \quad C_i = \left[ \frac{v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta y^2 Le} \right]$$

$$D'_i = \left[ -\frac{u_{i+1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2 Le} \right] T_{i+1,j}^{n+1/2} + 2\left[ \frac{1}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x^2 Le} \right] T_{i,j}^{n+1/2} + \left[ \frac{u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2 Le} \right] T_{i-1,j}^{n+1/2}$$

## 4.6 Résolution de l'équation de la fonction de courant [15]

L'équation de courant (2.44),une fois discrétisée à l'aide d'un schéma centré du deuxième ordre est calculée par la méthode de sur-relaxation (S.O.R) qui n'est qu'une méthode itérative de Gauss Seidel relaxée. À chaque nœud, les nouvelles valeurs de la fonction de courant sont relaxées de la manière suivante :

$$\psi_{i,j}^{l} = (1-\omega)\psi_{i,j}^{l} + \frac{\omega}{2(1+b^2)}\left(\psi_{i-1,j}^{l+1} + \psi_{i+1,j}^{l} + b^2\psi_{i,j-1}^{l+1} + b^2\psi_{i,j+1}^{l+1} + \Delta x^2\Omega_{i,j}\right) \quad \text{(IV.22)}$$

où : l'exposant $l$ indique le nombre d'itération ;

$b$ : représente le rapport : $\Delta x / \Delta y$ ;

et $\omega$ :représentele coefficient de sur-relaxation,compris entre 1 et 2, son rôle est d'accélérer le processus de converge et donc diminuer le nombre d'itérations. Sa valeur optimale, pour un maillage rectangulaire uniforme, est donnée par les paramètres suivants :

$$\omega_{opt} = \frac{2}{\zeta^2}\left(1-\sqrt{1-\zeta^2}\right) \quad \text{(IV.23)}$$

Avec:

$$\zeta = \frac{\cos(\pi/Nx) + b^2\cos(\pi/Ny)}{1+b^2} \quad \text{(IV.24)}$$

$Nx, Ny$ Désignent respectivement le nombre d'intervalles selon les directions des $x$ et $y$ .

A chaque pas de temps $\Delta t$ , la fonction de courant $\psi$ est déduite de la vorticité $\Omega$ , et comparée à celle obtenue de l'itération précédente. Cette opération est répétée jusqu'à ce que le critère de convergence ci-dessous soit satisfait :

$$\frac{\sum_{i,j}\psi_{i,j}^{l+1} - \sum_{i,j}\psi_{i,j}^{l}}{\sum_{i,j}\psi_{i,j}^{l}} \le 10^{-8} \quad \text{(IV.25)}$$

Après, les champs de vitesse et de viscosité apparente seront déduits :

$$u_{i,j}^{l+1} = \frac{\psi_{i,j+1}^{l+1} - \psi_{i,j-1}^{l+1}}{2\Delta y} \quad \text{(IV.26)}$$

$$v_{i,j}^{l+1} = \frac{\psi_{i-1,j}^{l+1} - \psi_{i+1,j}^{l+1}}{2\Delta x} \tag{IV.27}$$

$$\eta_{i,j}^{l+1} = s + (1-s)\left[1 + \left(E\,\dot{\gamma}_{i,j}^{l+1}\right)^{a}\right]^{\frac{n-1}{a}} \tag{IV.28}$$

avec:

$$\dot{\gamma}_{i,j}^{l+1} = 2\left(\left(\frac{u_{i+1,j}^{l+1} - u_{i-1,j}^{l+1}}{2\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{v_{i,j+1}^{l+1} - v_{i,j-1}^{l+1}}{2\Delta y}\right)^2\right) + \left(\frac{u_{i,j+1}^{l+1} - u_{i,j-1}^{l+1}}{2\Delta y} + \frac{v_{i+1,j}^{l+1} - v_{i-1,j}^{l+1}}{2\Delta x}\right)^2 \tag{IV.29}$$

## 4.7 Discrétisation des conditions aux limites

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i.j} = \frac{f_{i-2.j} + f_{i-1.j} + 3f_{i.j}}{2(\Delta x)}$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i.j} = \frac{f_{i.j-2} + f_{i.j-1} + 3f_{i.j}}{2(\Delta y)} \tag{IV.30}$$

Avec:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i.j} = \frac{4f_{i+1.j} - f_{i+2.j} - 3f_{i.j}}{2(\Delta x)}$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i.j} = \frac{4f_{i.j+1} - f_{i.j+2} - 3f_{i.j}}{2(\Delta y)}$$

(IV.31)

L'utilisation des équations (3.30) et (3.31) conduit à discrétiser les conditions aux limites comme suit :

- **Paroi horizontale inferieure** ( $y = -\frac{1}{2}$ )

$$T_{i.1} = \frac{4T_{i.2} - T_{i.3} + 2\Delta y}{3} \tag{IV.32}$$

- **Paroi horizontale inferieure** ( $y = +\frac{1}{2}$ )

$$T_{i.Nny+1} = \frac{4T_{i.Nny-1} - T_{i.Nny-2} - 2\Delta y}{3} \qquad \text{(IV.33)}$$

- **Paroi horizontale supérieur** ( $y = -\frac{1}{2}$ )

$$S_{i.j} = \frac{4S_{i.2} - S_{i.3} + 2\Delta y}{3} \qquad \text{(IV.34)}$$

- **Paroi horizontale supérieur** ( $y = +\frac{1}{2}$ )

$$S_{i.Nny} = \frac{4S_{i.Nny-1} - S_{i.Nny-2} - 2\Delta y}{3} \qquad \text{(IV.35)}$$

- **Paroi verticale gauche** $\left( x = -\frac{A}{2} \right)$

$$u_{1.j} = v_{1.j} = \psi_{1.j} = 0$$

$$T_{1.j} = \frac{4T_{2.j} - T_{3.j}}{3} \qquad \text{(IV.36)}$$

- Paroi verticale droite $\left( x = \frac{A}{2} \right)$

$$u_{Nnx.j} = v_{Nnx.j} = \psi_{Nnx.j} = 0$$

$$T_{Nnx-1.j} = \frac{4T_{Nnx-1.j} - T_{Nnx-2.j}}{3} \qquad \text{(IV.37)}$$

# CHAPITRE 5 :

# RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

L'algorithme numérique a été testé pour le problème de convection naturelle classique dans une cavité carrée avec un fluide newtonien (). Le nombre moyen de Nusselt est calculé et les résultats obtenus à partir de la présente méthode sont comparés à ceux donnés par différents auteurs pour,, et diverses valeurs de comme indiqué dans le tableau 2. On constate que le maillage uniforme de (101 × 101) donne une bonne concordance des résultats actuels avec les données des études précédentes rapportées. L'erreur relative est inférieure à 0,55% pour, 0,66% pour et 0,96% pour, ce qui reflète l'exactitude des résultats actuels.

Tableau.1 : Sensibilité de la solution numérique au maillage en termes de l'intensité de l'écoulement, $\psi_0$, de nombre de Nusselt local, $\boldsymbol{Nu}$, de Nusselt moyen, $\boldsymbol{Nu_m}$, de Sherwood local, $\boldsymbol{Sh}$, and Sherwood moyen, $\boldsymbol{Sh_m}$, au centre de la cavité pour les valeurs de $A=10$, $P_r=10$, $R_T=10^3$, $\varphi=0.2$, $Le=10$, $n=0.6$, $E=0.2$, $a=2$ et $s=10^{-2}$.

| $N_x \times N_y$ | Solution Numérique | | | | | Analytique |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 50×25 | 75×50 | 100×75 | 150×100 | 200×150 | |
| $\psi_0$ | 3.195 | 3.135 | 3.122 | 3.114 | 3.098 | 3.094 |
| $Nu$ | 2.431 | 2.371 | 2.360 | 2.349 | 2.326 | 2.316 |
| $Nu_m$ | 2.336 | 2.262 | 2.273 | 2.264 | 2.253 | …. |
| $Sh$ | 3.675 | 3.520 | 3.501 | 3.500 | 3.473 | 3.467 |
| $Sh_m$ | 3.966 | 3.720 | 3.730 | 3.726 | 3.715 | …. |
| $\mu_{CY}$ | 0.306 | 0.304 | 0.304 | 0.304 | 0.304 | 0.304 |

De plus, un test d'indépendance du réseau est effectué en utilisant une taille de réseau de 50 x 25 à 200 x 150, et les résultats sont listés dans le tableau 3 pour un conteneur rectangulaire

chauffé en dessous dont le rapport est constitué de. Les résultats numériques ont été calculés pour ,,,,, et. Par rapport à la solution analytique précise mentionnée dans la section suivante, les résultats indiquent que pour le réseau répété, il y a une différence relative de 0,12% pour la fonction d'écoulement, inférieure à 0,43% pour les taux de conversion de chaleur et de masse et de 0,0% pour la viscosité claire. Ainsi, il a été constaté qu'une maille de 200 x 150 était suffisante pour simuler avec précision le flux de flux thermique.

Tableau 2: Validation du code numérique en termes de nombre de Nusselt moyen, dans le cas d'une cavité carrée remplie d'air pour les valeurs de A = 1, Pr = 0,71

et φ = 0

| | $R_T = 10^4$ | $R_T = 10^5$ | $R_T = 10^6$ |
|---|---|---|---|
| Benouared et al. [15] | 2.163 | 3.934 | 6.379 |
| Turan et al. [30] | 2.154 | 3.907 | 6.363 |
| Quertatani et al. [31] | 2.158 | 3.910 | 6.309 |
| Present study | 2.151 | 3.934 | 6.318 |

La confirmation numérique de la solution analytique est présentée dans la Fig. 1 pour A = 10, R_T = 800, Le = 10, φ = 0,05, E = 0,1, a = 2, s = 〖10〗 ^ (- 2) et diverses valeurs de l'indice de la loi de puissance ,. Dans ces graphiques, les lignes de courant, les isothermes, les isoconcentrés et la viscosité apparente sont illustrés de haut en bas, respectivement. Le cas où, correspondant au problème classique de la convection naturelle d'un fluide newtonien, c'est-à-dire la viscosité apparente d'un fluide newtonien est donné par. La structure d'écoulement consiste en une extension elliptique unicellulaire remplissant toute la cavité et l'écoulement dans la région centrale de la cavité est essentiellement parallèle, tandis que la température et la concentration dans le cœur de la cavité sont stratifiées linéairement dans les directions horizontales. Les effets principaux de l'indice de loi de puissance ,, sur le schéma d'écoulement pour différentes valeurs de 0,6 et 0,3, respectivement, peuvent être vus sur les Fig. 1 (a) - (c). L'augmentation de l'indice de la loi de puissance ,, réduit considérablement la force du mouvement convectif dans la couche comme l'indique la valeur de la fonction de flux au centre de la cavité: ψ_0 = 2.300 pour n = 0.3, ψ_0 = ... pour et ψ_0 = 0,746 pour, les isothermes et les lignes d'isoconcentrations sont moins déformées indiquant que le transfert de chaleur a tendance à être en situation de diffusion et que les contours de viscosité apparente semblent constants dans la partie centrale de la cavité, et on le voit varier près de la

droite et les extrémités gauches de la cavité où le taux de cisaillement varie de manière significative comme le montre la Fig. 2.

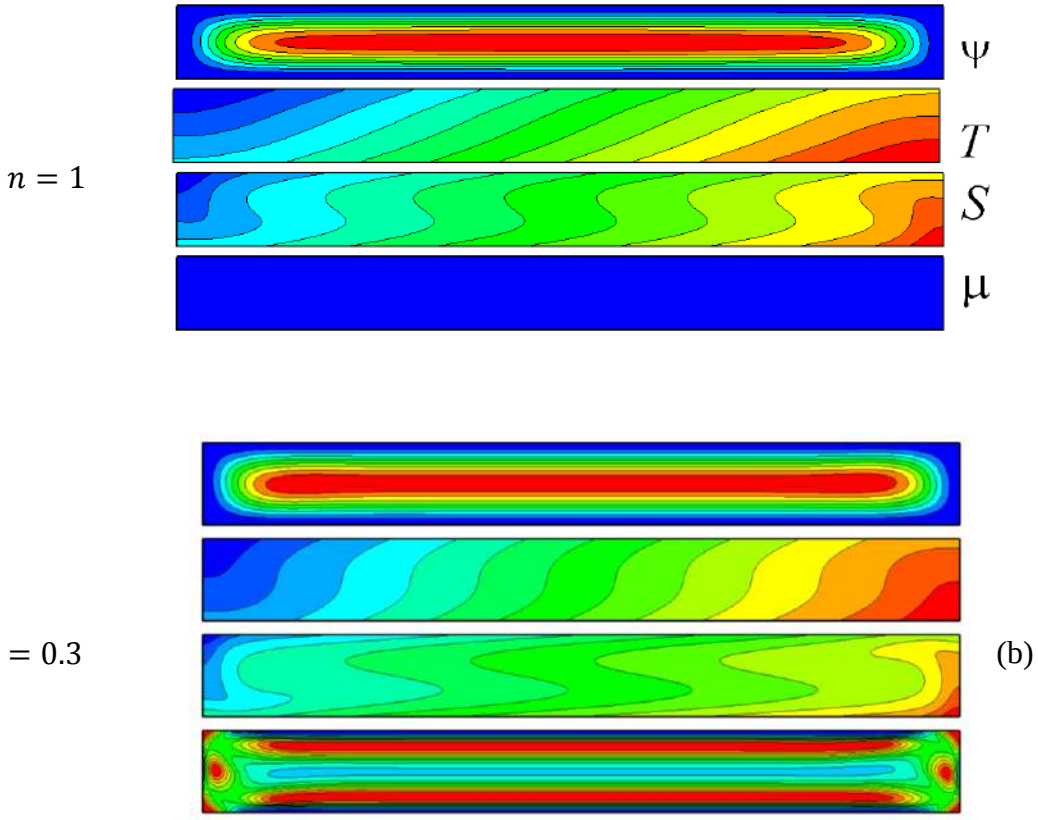



Figure 1: Effet de $n$ sur les lignes de courant, isothermes, isoconcentrations et la viscosité apparente pour $A = 10$, $R_T = 800$, $Le = 10$, $\varphi = 0.05$, $E = 0.1, a = 2, \quad s = 10^{-2}$ :
(c) $n = 1, \psi_0 = 0.746, Nu = 1.161, Sh = 2.835, \mu = 1.000.$
(d) $n = 0.3, \psi_0 = 2.300, Nu = 1.972, Sh = 3.522, \mu = 0.371.$

L'effet de l'intensité du champ magnétique sur la convection à double diffusion à l'intérieur d'une cavité carrée, A = 1, est illustré sur les Fig. 2 (a) - (c) pour R_T = 2000, Le = 10, φ = 0,05, E = 0,1, a = 2, s =$10^{-2}$. Les résultats sont obtenus pour différentes valeurs du nombre de Hartmann, Ha = 0,4, 0,6 et 1, respectivement. Sur la figure, les lignes de courant, les isothermes, l'isoconcentration et la viscosité apparente sont présentées de gauche à droite,

respectivement. Les résultats présentés sur la Fig. 2 (a) sont obtenus pour n = 0, c'est-à-dire correspondant au fluide newtonien. La structure d'écoulement se compose d'une cellule unicellulaire remplissant toute la cavité. La direction de la circulation du fluide, qui peut être soit dans le sens horaire, soit dans le sens anti-horaire et vice versa, est induite par les erreurs d'arrondi générées dans le calcul numérique. Pour l'ensemble des paramètres directeurs considérés ici, en général, il est vu de la Fig. 2 (a) la convection est relativement importante, comme l'indiquent la valeur de la fonction de flux au centre de la cavité et la grande distorsion des champs de température et de concentration. Les effets croissants de l'indice de loi de puissance, n, sur le modèle d'écoulement de la Fig. 2 (a) sont illustrés aux Fig. 2 (b) et (c), pour n = 0,4 et 0,6 respectivement, que, pour un nombre de Rayleigh donné, une augmentation de l'indice de loi de puissance, n, réduit considérablement la force du mouvement convectif dans la couche. Par conséquent, comme il peut être observé à partir des Fig. 2 (b) et (c), la température et la concentration sont considérablement inhibées avec une augmentation de l'indice de loi de puissance, n. En conséquence, le transfert de chaleur et de masse est presque purement conducteur, comme indiqué par les isothermes et les isoconcentrations presque verticales

$n = 1$ (a)

$n = 0.4$ (b)

$n = 0.6$ (c)

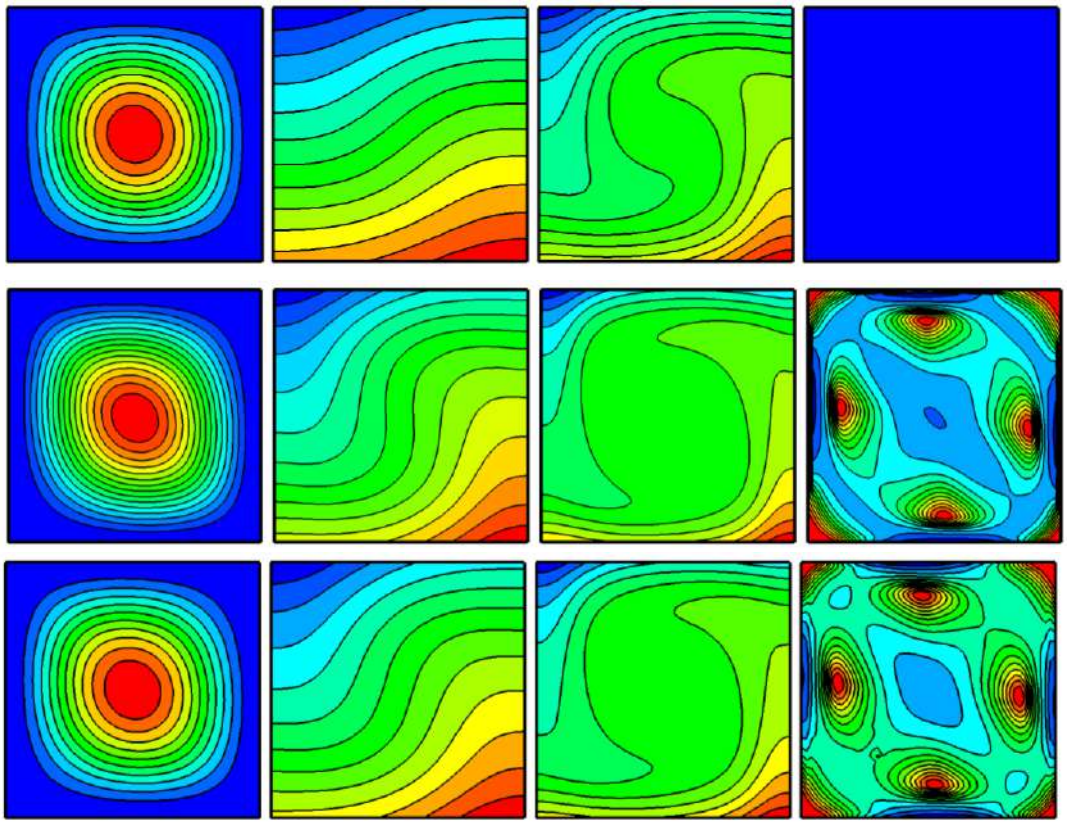


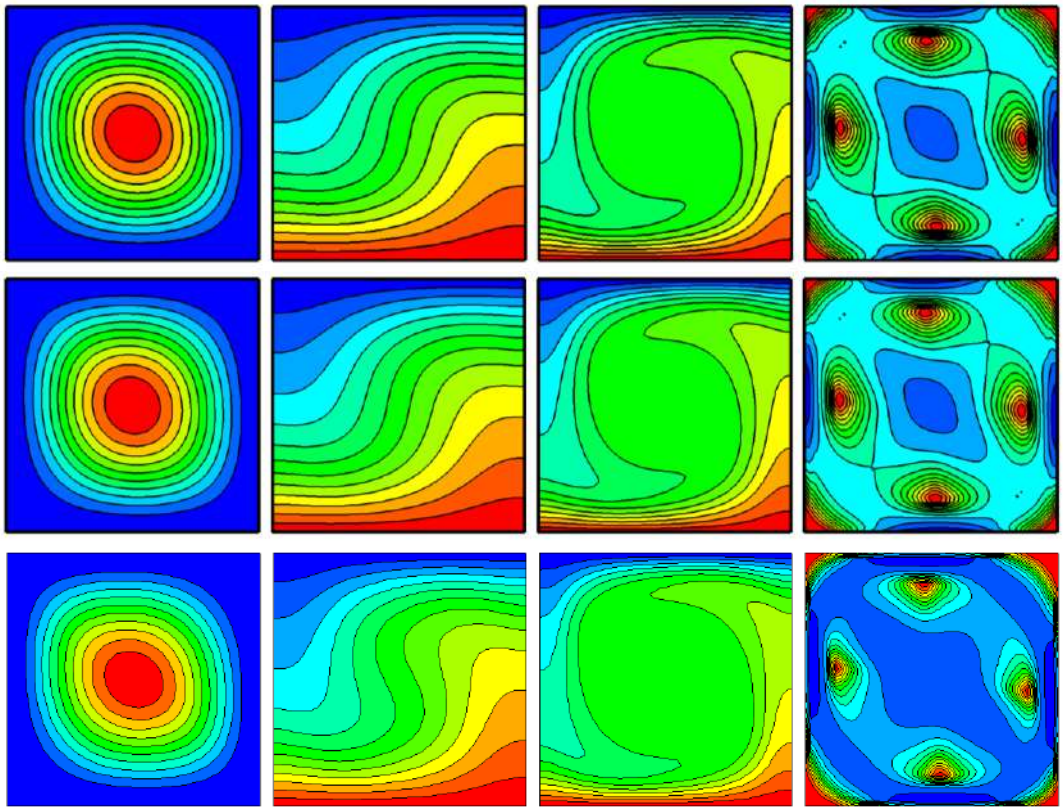
Figure 2: Effet de $n$ sur les lignes de courant, isothermes, isoconcentrations et la viscosité apparente pour condition de Neumann, $A = 1$, $R_T = 2000$, $Le = 10$, $\varphi = 0.05$, $E = 0.1$, $a = 2$, $s = 10^{-2}$ :

(d) $n = 1, \psi_0 = 1.064, Nu = 1.170, Sh = 3.593, \mu = 1.000.$

(e) $n = 0.6, \psi_0 = 2.306, Nu = 1.697, Sh = 5.213, \mu = 0.468.$

(f) $n = 0.4, \psi_0 = 3.204, Nu = 2.117, Sh = 5.820, \mu = 0.265$

$\psi$ $T$ $S$ $\mu$



(a)

(b)

(c)

Figure 3: Effet de $n$ sur les lignes de courant, isothermes, isoconcentrations et la viscosité apparente pour condition de Dirichlet, $A = 1$, $R_T = 2000$, $Le = 10$, $\varphi = 0.05$, $E = 0.1$, $a = 2$, $s = 10^{-2}$ :

(d) $n = 0.8, \psi_0 = 0.503, Nu = 1.028, Sh = 2.171, \mu = 0.884.$

(e) $n = 0.6, \psi_0 = 3.191, Nu = 1.761, Sh = 5.038, \mu = 0.409.$

(f) $n = 0.4, \psi_0 = 5.662, Nu = 2.423, Sh = 5.905, \mu = 0.192.$

Comparaison supplémentaire entre les analyses, basées sur l'approximation d'écoulement parallèle, et les solutions numériques pour l'intensité de la fonction, ψ, la composante de vitesse horizontale`` la température`` la concentration`` et la viscosité apparente`` respectivement, à la mi-largeur de la couche poreuse (c'est-à-dire x = 0) sont illustrées sur les Fig. 6-7. Les résultats ont été obtenus pour R_T = 1000, Le = 10 et φ = -0,1. et diverses valeurs des paramètres rhéologiques, à savoir n, E, s et a. D'après ces figures, il est clair que la solution d'écoulement parallèle qui est représentée en traits pleins est en excellent accord avec la solution numérique, présentée par des cercles pleins. La figure 4 (b) -7 (b) indique les profils verticaux de la vitesse horizontale,, est symétrique par rapport à y. La vitesse est maximale sur la paroi où l'amincissement par cisaillement est annulé car les forces de flottabilité sont égales et opposées. De plus, la vitesse,, diminue brusquement de la forme au niveau de la paroi vers le centre de la cavité puis redescend vers la paroi .En augmentant la valeur de l'indice de loi de puissance, on voit que la vitesse au voisinage des parois est considérablement réduite, car le fluide devient de plus en plus fluidifié par cisaillement (). L'effet de, sur la température et les profils de concentration est illustré sur les Fig. 4 (c et d) -7 (c et d). L'évolution des profils de température et de concentration est assez similaire à celle présentée sur la figure 4 (b) -7 (b) lors de l'étude de l'évolution de,. Il est vu des Figs. 4 (c) et (d) la température et la concentration à proximité des parois pleines sont favorisées avec une diminution de l'indice de loi de puissance,. De plus, la différence de température (concentration) entre le long des parois verticales diminue avec la diminution, ce qui entraîne une augmentation significative des taux de transfert de chaleur convective (Nu) et de masse. Selon Eq. (20) on voit que (correspondant au problème classique de la convection naturelle d'un fluide newtonien) quand, et, respectivement. En diminuant les valeurs de et / ou en augmentant les valeurs de et on voit que l'effet d'amincissement par cisaillement devient significatif au centre et à proximité des parois pleines de la cavité, ce qui a provoqué une diminution significative de la viscosité du fluide, en raison d'un taux de cisaillement élevé . En comparant les résultats à un cas newtonien, on constate que le comportement d'amincissement par cisaillement améliore la circulation convective alors que l'épaississement par cisaillement tend à l'affaiblir.

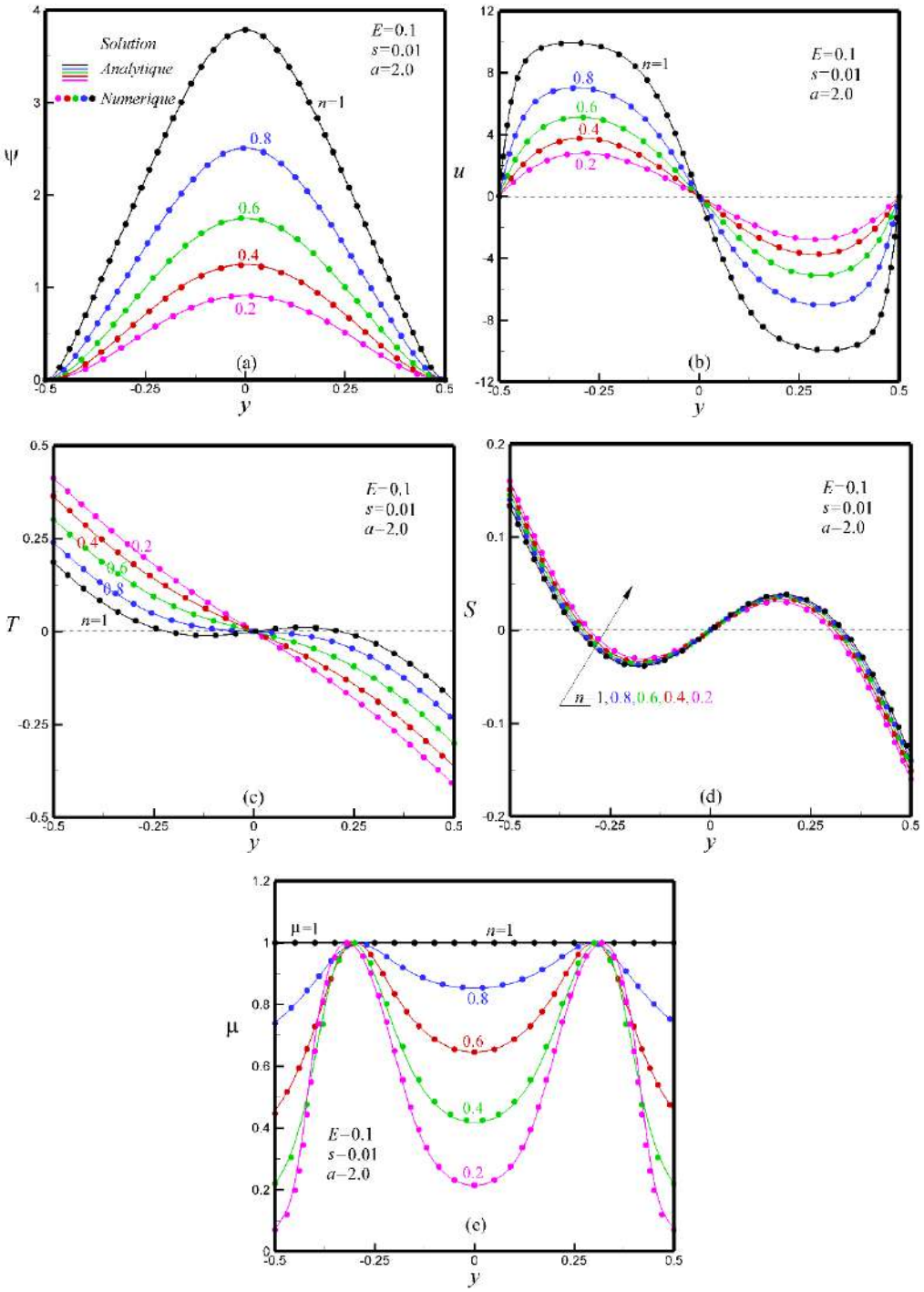



Figure 4 : Effet de l'indice $n$ de loi de puissance sur les profils de la fonction de courant, $\psi$, de la température, $T$, de la concentration, $S$, et de la viscosité apparente, $\mu$, dans le plane médian vertical pour $R_T = 1000$, $Le = 10$ and $\varphi = -0.1$.

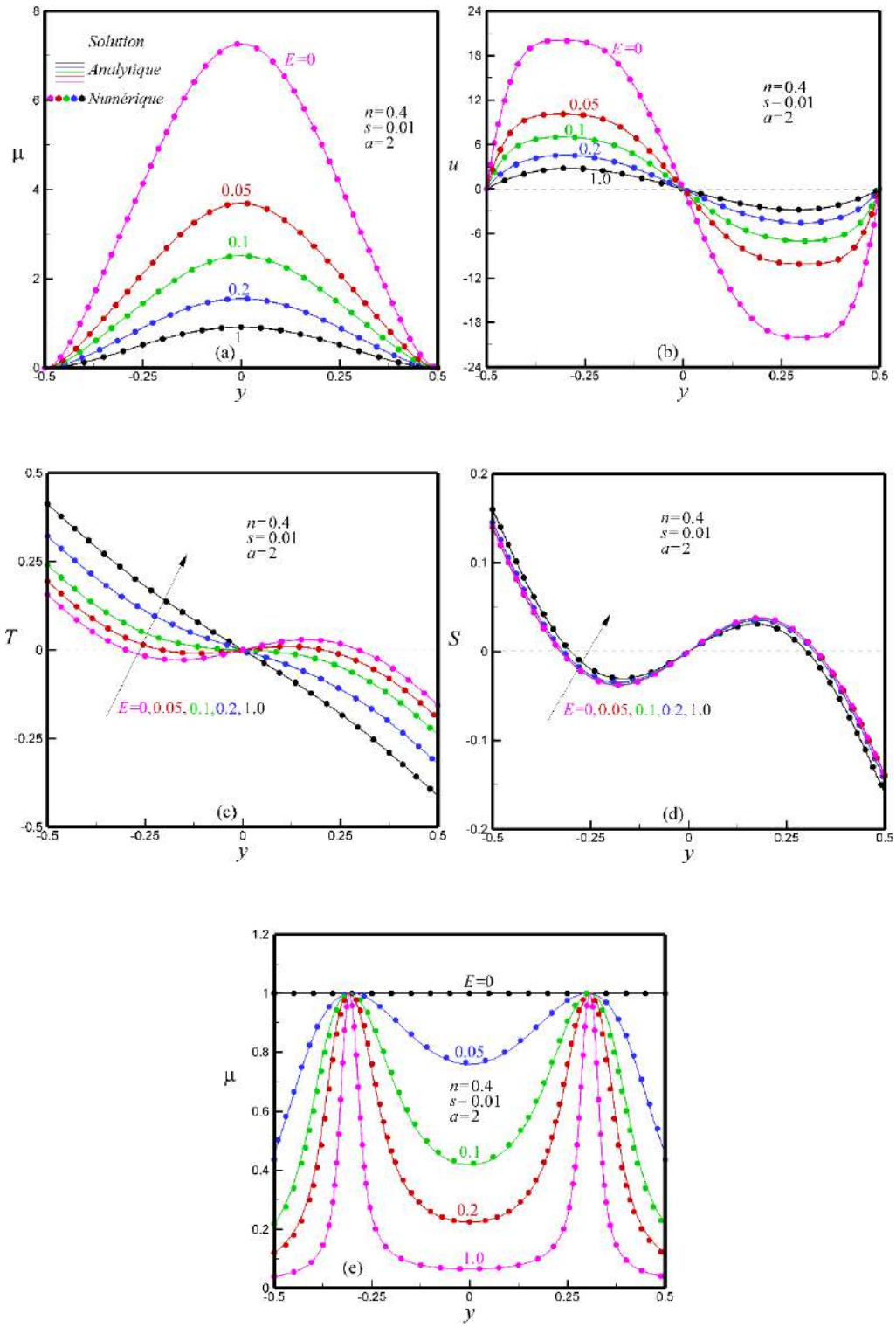



Figure 5 : Effet de constant de temps, $E$, sur les profils de la fonction de courant, $\psi$, de la température, $T$, de la concentration, $S$, et de la viscosité apparente, $\mu$, dans le plane médian vertical pour $R_T = 1000$, $Le = 10$ and $\varphi = -0.1$.

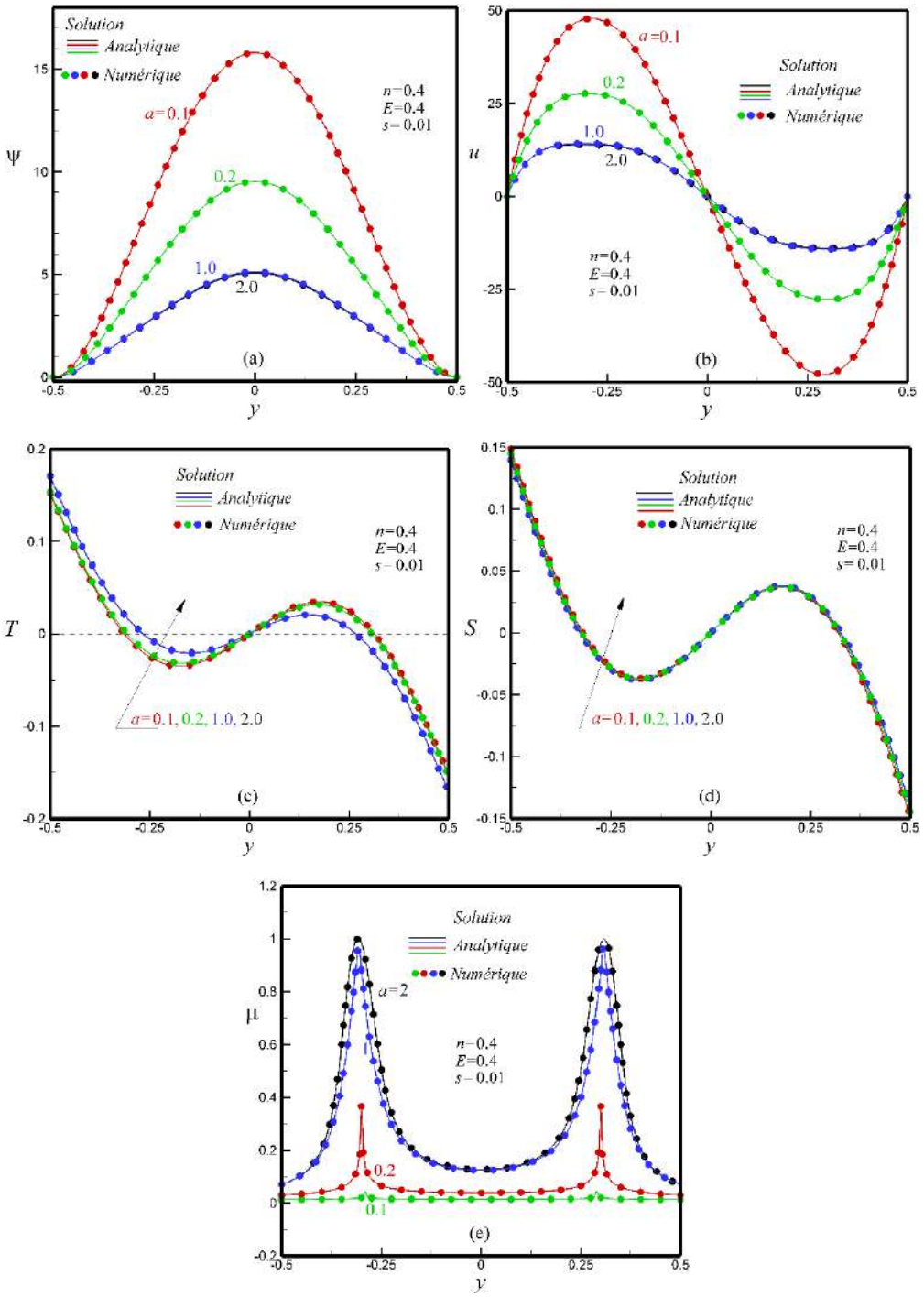



Figure 6 : Effet de paramètre, $a$, sur les profils de la fonction de courant, $\psi$, de la température, $T$, de la concentration, $S$, et de la viscosité apparente, $\mu$, dans le plane médian vertical pour $R_T = 1000$, $Le = 10$ and $\varphi = -0.1$.

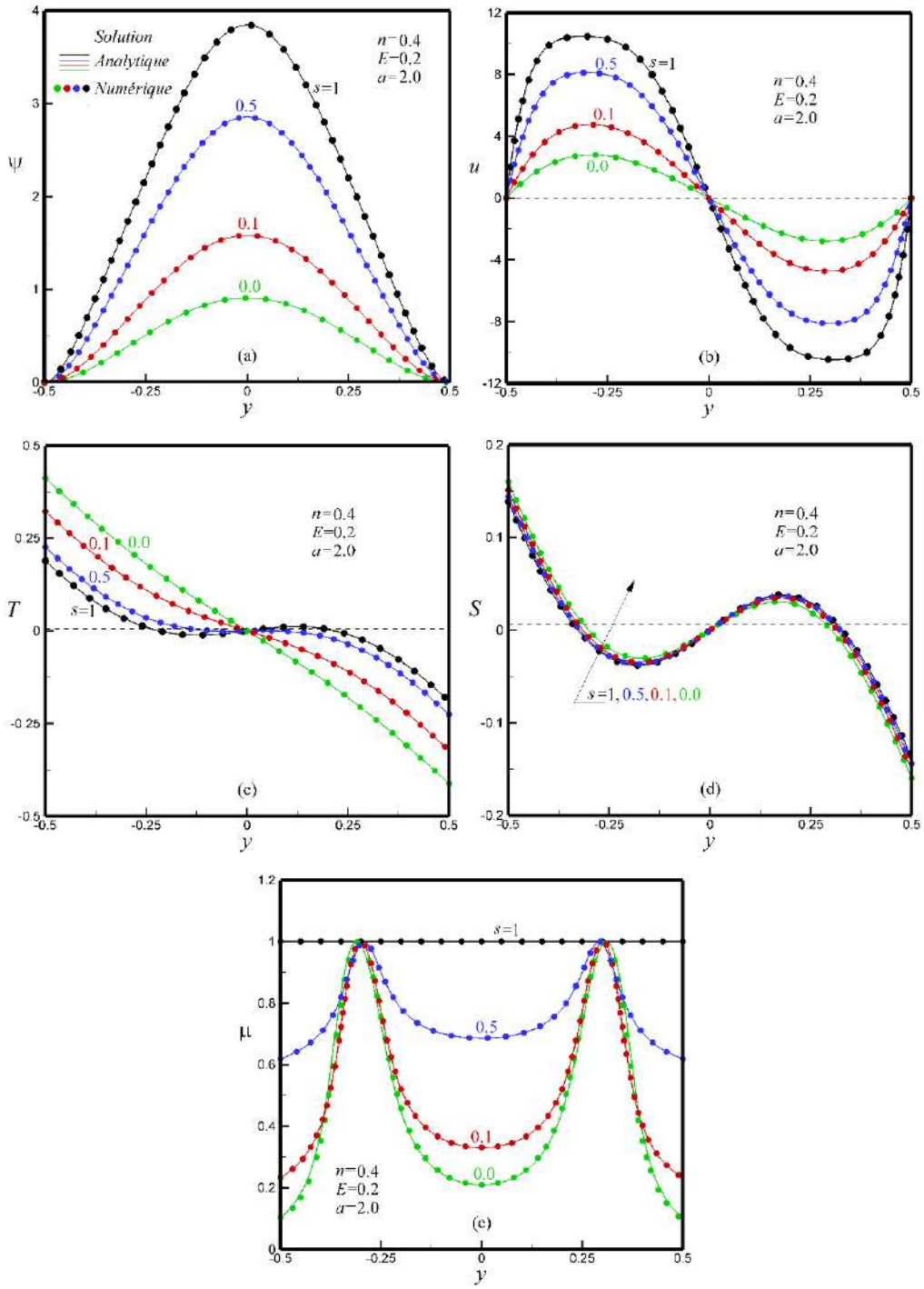



Figure 7 : Effet de paramètre, $s$, sur les profils de la fonction de courant, $\psi$, de la température, $T$, de la concentration, $S$, et de la viscosité apparente, $\mu$, dans le plane médian vertical pour $R_T = 1000$, $Le = 10$ and $\varphi = -0.1$.

Une vue plus complète des effets de $n$ et $R_T$ sur $\psi_0$, $Nu$, $Sh$, et $\mu_{CY}$ est présentée à la Fig. 8 pour $Le=10$, $\varphi=0.05$, $E=0.1$, $a=2$ et $s=10^{-2}$. Les résultats sont obtenus pour des valeurs de l'indice de loi de puissance $n$, comprises entre 1 (fluide newtonien) et $n=0.2$ (fluide fluidifiant par cisaillement). En général, on le voit sur les Figs. 8 (a) - (d) que pour un nombre de Rayleigh donné, la force de la convection ($\psi_0$) et le transfert de chaleur résultant ($Nu$) et le transfert de soluté ($Sh$) augmentent à mesure que l'indice de loi de puissance, $n$, diminue. Le graphique montre également clairement l'effet de $n$ sur l'existence des différents types de courbes de bifurcation comme discuté dans la figure 4. Ainsi, en augmentant la valeur de l'indice de loi de puissance $n$, on voit que les courbes de bifurcation évoluent à partir d'un sous-critique comportement au supercritique. Comme on peut le voir sur le graphique, la région de bistabilité s'est avérée se rétrécir et elle disparaît lors de la diminution de l'indice de loi de puissance $n$, car le fluide devient de plus en plus fluidifié par cisaillement. En outre, on observe à partir de la figure 8 que le nombre de Rayleigh supercritique, $R_{TC}^{sup}$, n'est pas affecté par l'indice de loi de puissance, $n$.

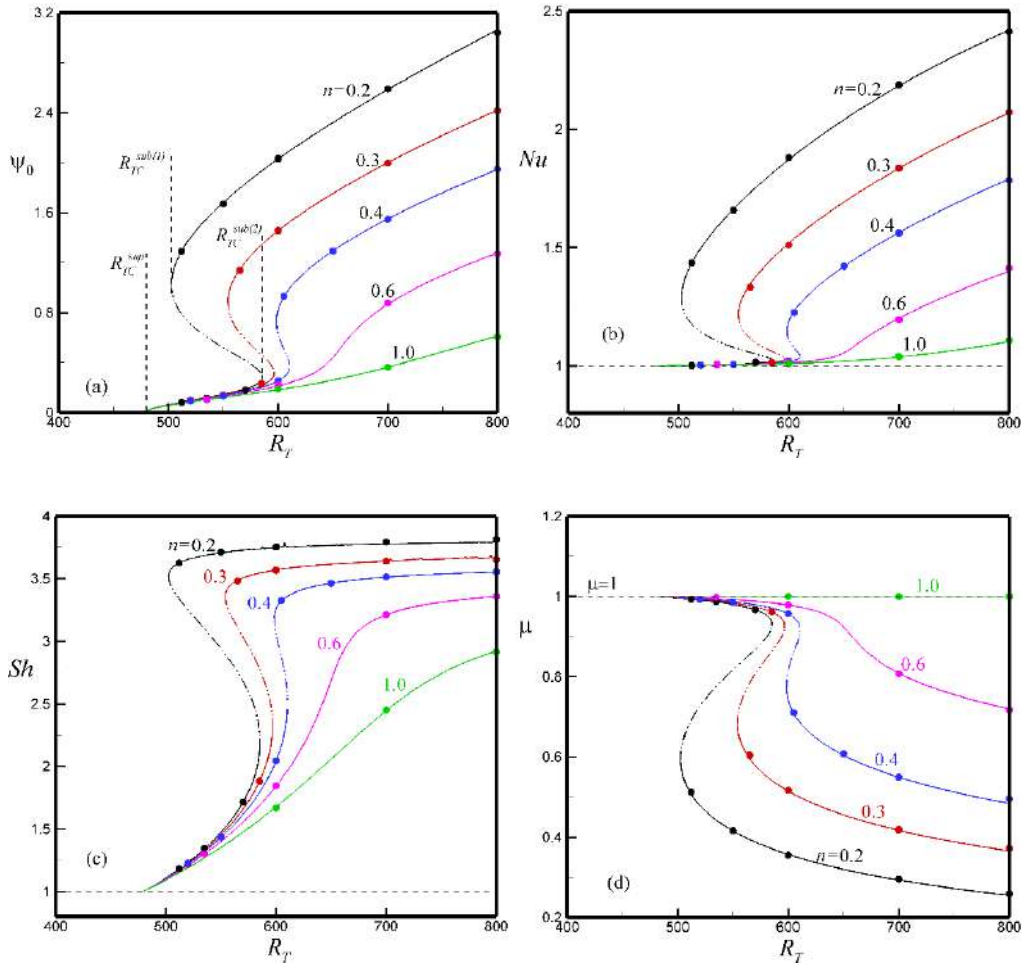


Figure 8 : Effets du nombre de Rayleigh, $R_T$, et l'indice de loi de puissance, $n$, sur l'intensité de l'écoulement, $\psi$, le nombre de Nusselt, $Nu$, le nombre de Sherwood, $Sh$, and la viscosité apparente, $\mu$, pour $Le = 10$, $\varphi = 0.05$, $E = 0.1$, $a = 2$ et $s = 10^{-2}$

Les figures (9a-d) montrent les variations de $\Psi_0$, $Nu$, $Sh$ et $\mu_{CY}$ en fonction de $R_T$ et $N$ pour $Le = 10$, $n = 0.4$, $E = 0.1$, $a = 2$ et $s = 10^{-2}$ .La courbe obtenue pour $N = 0.3$ correspond à la convection induite par les effets thermiques et massique. Elle donne lieu à une bifurcation de type fourche se produisant à un nombre de Rayleigh supercritique$R_{TC}^{sup}$. La courbe de bifurcation supercritique est affectée suivant la diminution de la valeur du rapport de la flottabilité. En effet, l'évolution des courbes de bifurcation avec le taux de flottabilité est tout à fait semblable à celle décrite dans les figures 8a)-d) sur l'effet de $n$.

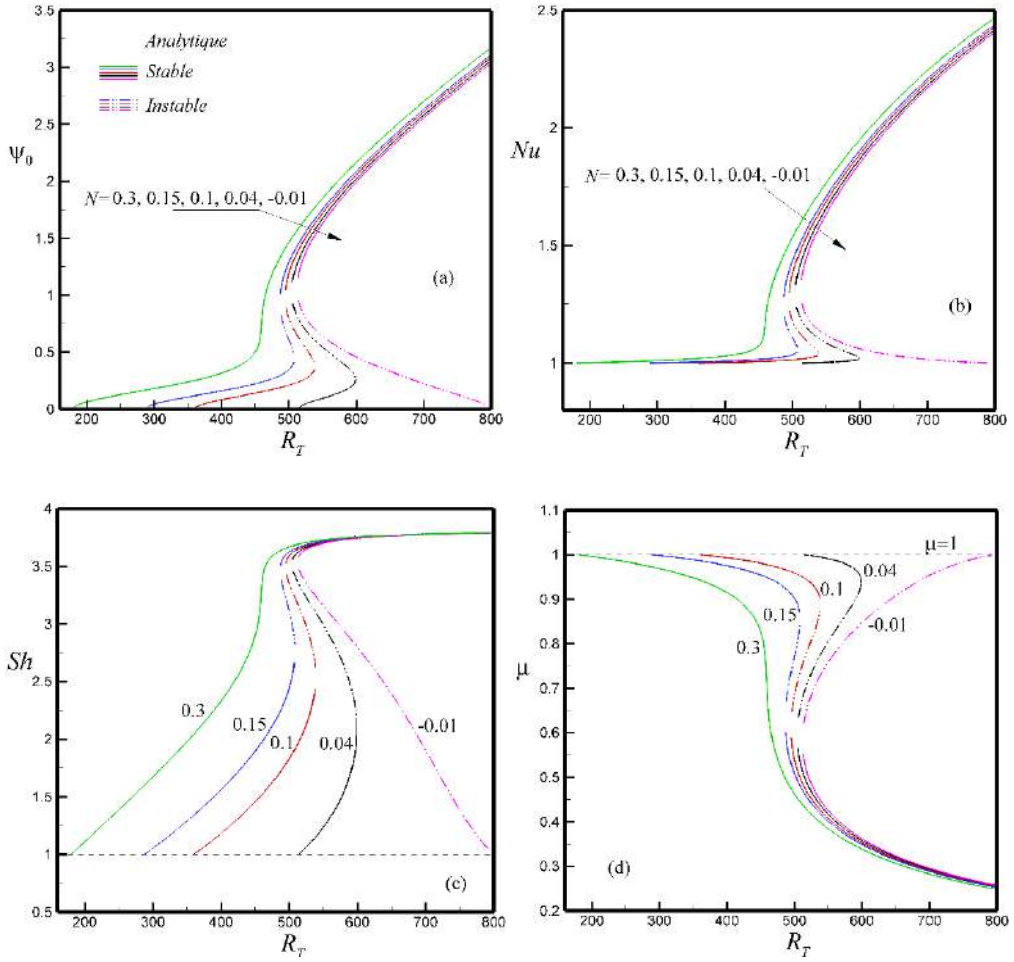



Figure 9 : Effets du nombre de Rayleigh, $R_T$, et le rapport des forces de volume, $N$, sur l'intensité de l'écoulement, $\psi$, le nombre de Nusselt, $Nu$, le nombre de Sherwood, $Sh$, et la viscosité apparente, $\mu$, pour $Le = 10$, $n = 0.4$, $E = 0.1$, $a = 2$ et $s = 10^{-2}$ .

L'effet du rapport d'aspect de la cavité, $A$, sur la convection de bistabilité est illustré sur la figure 10. Le diagramme de bifurcation illustre l'évolution de, $\psi_0$ , $Nu$, $Sh$ et $\mu_{CY}$en fonction du nombre de Rayleigh normalisé ($R_T$). On observe à partir de la figure 10 que la convection de bistabilité se produit indépendamment du rapport d'aspect et du type des conditions aux limites thermiques et solutés appliquées sur le système. D'après la figure 10, la région reste inchangée pour un rapport hauteur / largeur élevé selon la solution semi-analytique corroborée par la solution numérique aux équations gouvernantes complètes.

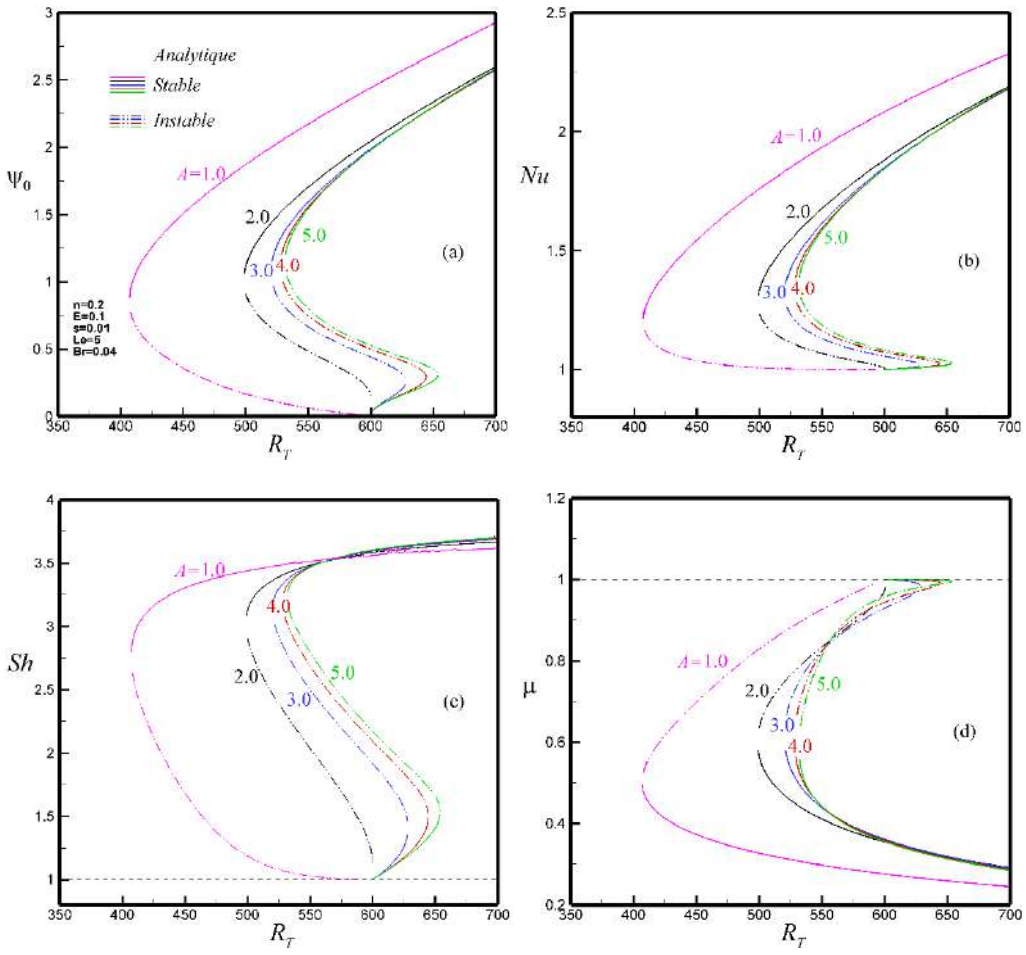



Figure 10 : Effets du nombre de Rayleigh, $R_T$, et le rapport d'aspect, $A$, sur l'intensité de l'écoulement, $\psi$, le nombre de Nusselt, $Nu$, le nombre de Sherwood, $Sh$, et la viscosité apparente, $\mu$, pour $Le = 10$, $\varphi = 0.05$, $n = 0.4$, $E = 0.1$, $a = 2$ et $s = 10^{-2}$ .

Une autre vue de l'effet du nombre de Lewis $Le$, $\psi_0$, $Nu$, $Sh$ et $\mu_{CY}$, est illustrée sur la figure 11. Pour l'ensemble du paramètre directeur considéré ici, il est prédit par le modèle analytique que la bifurcation de bistabilité n'est pas possible, comme illustré pour $Le = 2$ . En augmentant le nombre de Lewis, la région de bistabilité apparaît mais elle est petite, comme illustré par les résultats obtenus pour Le = 5. De plus, il est noté d'après la figure 8 que cette région est considérablement agrandie lorsque le nombre de Lewis devient très grand, c'est-à-dire que la concentration en soluté est presque uniforme dans le système, comme illustré sur la figure 8 pour. $Le = 10$.

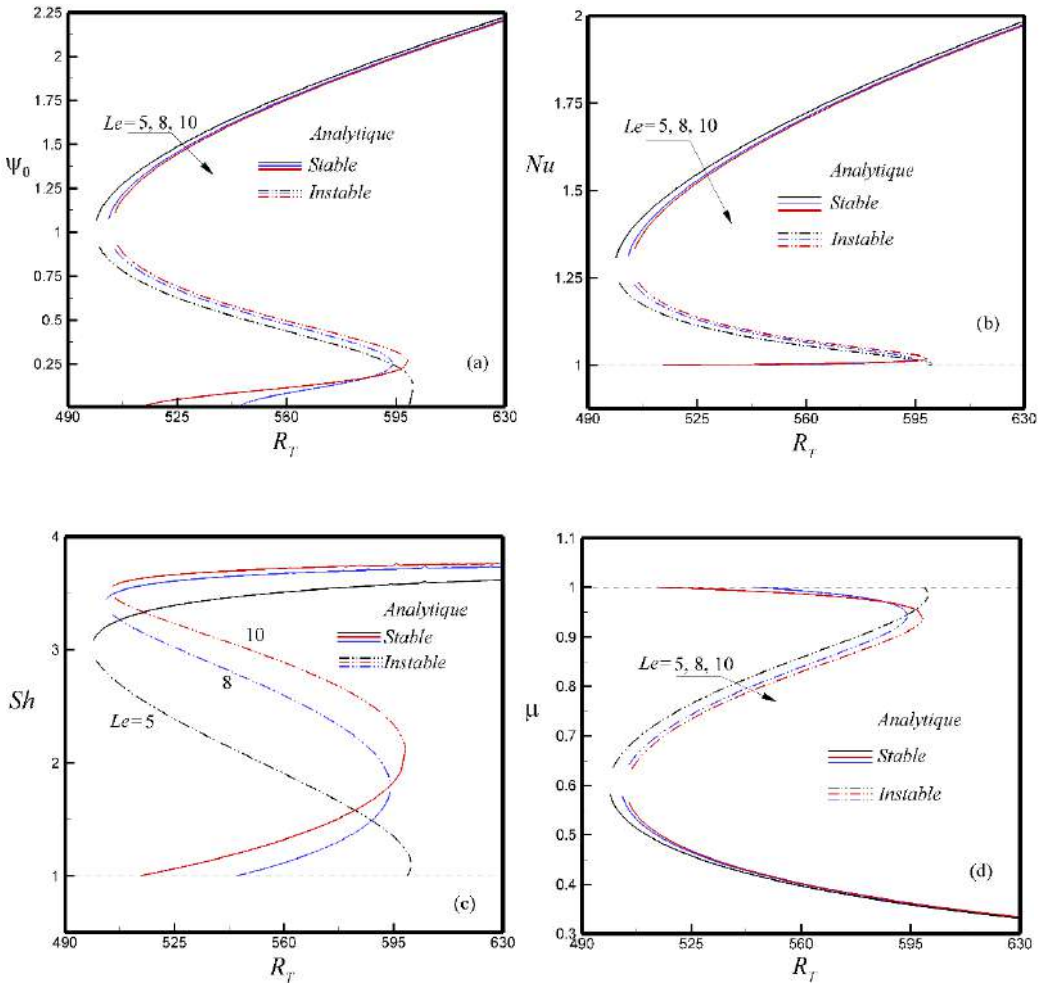



Figure 11: Effets du nombre de Rayleigh, $R_T$, et le nombre de Lewis, $Le$, sur l'intensité de l'écoulement, $\psi$, le nombre de Nusselt, $Nu$, le nombre de Sherwood, $Sh$, et la viscosité apparente, $\mu$, pour $\varphi = 0.05$, $n = 0.4$, $E = 0.1$, $a = 2$ et $s = 10^{-2}$ .

L'effet de la variation des paramètres rhéologiques du modèle de Carreau-Yasuda sur le nombre de Rayleigh sous-critique ($R_{TC}^{sub}$) est représenté sur les Fig. 12 (a) - (d) pour φ = 0,05 et Le = 10. Le nombre de Rayleigh sous-critique a été évalué à partir de la théorie non linéaire analytique en recherchant numériquement quelle valeur de $R_T$ l'inverse de la dérivée de $\psi_0$ par rapport à $R_T$ est égale à zéro. Les résultats présentés ici correspondent aux seuils d'un régime convectif unicellulaire sous-critique d'amplitude finie. Figues. 12 (a) - (c) indiquent que, pour une valeur donnée de l'indice de la loi de puissance, n, la constante de temps sans dimension, λ, et le rapport des viscosités à taux de cisaillement infini à zéro, s, le Rayleigh sous-critique nombre $R_{TC}^{sub} \rightarrow$ 879,13 lorsque n = s = 1 et λ = 0 (fluide newtonien) et ce indépendamment des valeurs de n, λ et s. La figure 12 (a) montre que, l'indice de loi de puissance, n, a un effet stabilisateur où la valeur du nombre de Rayleigh sous-critique, $R_{TC}^{sub}$, augmente avec l'augmentation de la valeur de l'indice de loi de puissance, n, pour différents valeurs de la constante de temps sans dimension, λ. L'effet de la constante de temps sans dimension, λ, sur le nombre de Rayleigh sous-critique, $R_{TC}^{sub}$, est illustré sur la figure 12 (b). Comme déjà mentionné, pour une valeur donnée de l'indice de loi de puissance, n, la valeur du sous$R_{TC}^{sub}$ diminue lors de l'augmentation de la valeur de la constante de temps sans dimension, λ. Cela découle du fait que l'augmentation de λ entraîne un effet déstabilisateur. En fait, l'évolution du $R_{TC}^{sous}$ avec le rapport des viscosités à taux de cisaillement infini à zéro, s, est assez similaire à celle discutée sur la figure 12 (a) tout en étudiant l'effet de n. La manière dont ce sous-critique est affectée lors de l'augmentation de la valeur du paramètre, s. Il est noté à partir de la figure 12 (d) que lorsque le paramètre, a, a augmenté le nombre de Rayleigh sous-critique, $R_{TC}^{sub}$, a augmenté de façon monotone et a ensuite tendance asymptotiquement vers une valeur constante qui dépend de la valeur de n, et qui a joué un rôle comme effet stabilisant.

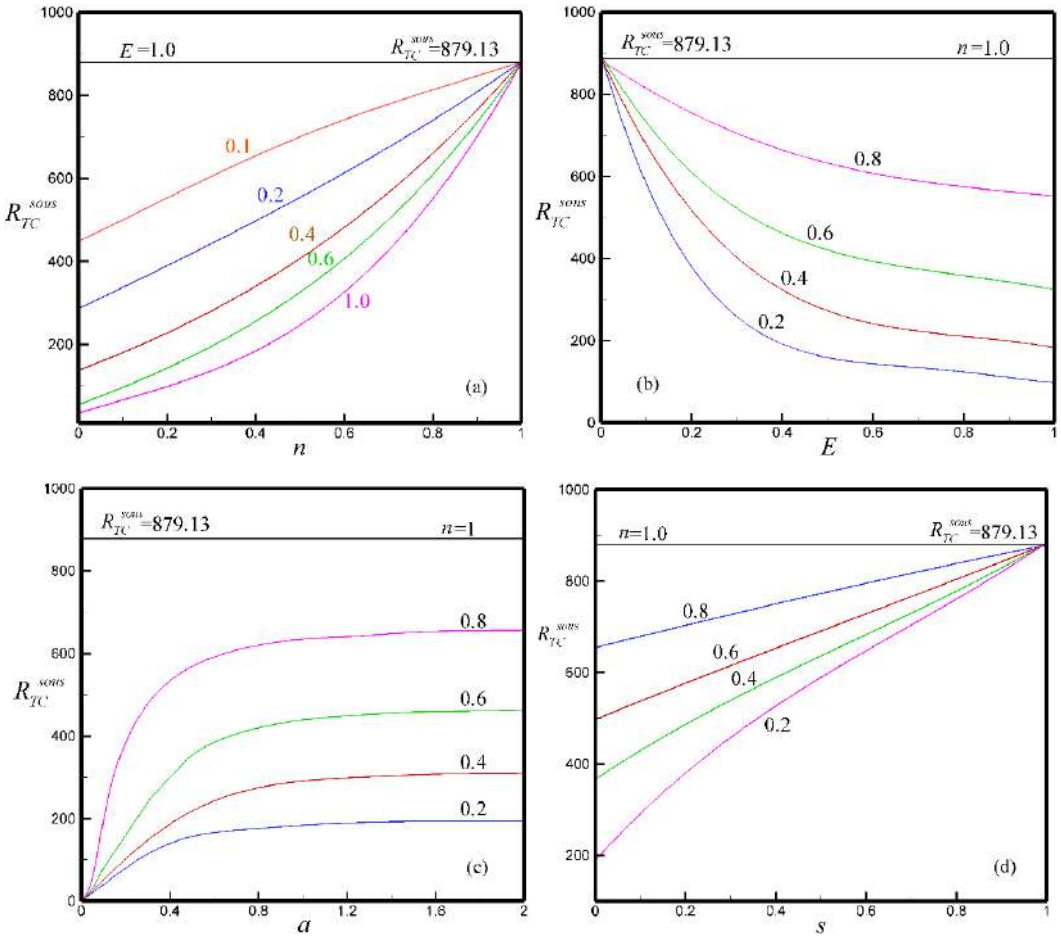



Figure 12: Effets des paramètres rhéologique sur le nombre de Rayleigh souscritique, $R_{TC}^{sous}$, pour $\varphi = 0.05$ et $Le = 10$

La figure 13 : illustre l'effet de l'indice de loi de puissance, et du rapport de flottabilité, sur les nombres de Rayleigh critiques pour le début du mouvement, $R_{TC}^{sup}$, $R_{TC}^{sous1}$ and $R_{TC}^{sous2}$ $R_{TC}^{tur}$ (correspondent à un point tournant de selle-nœud) pour, $Le = 10$, $E = 0.1$, $a = 2$ et $s = 10^{-2}$, et . Pour un indice de loi de puissance donné, $n = 0.2$, le graphique indique que dans l'intervalle (-0,3 <N <0,042) la valeur de $R_{TC}^{sous}$ diminue. Pour cette plage, on observe que le nombre de Rayleigh sous-critique est le nombre de Rayleigh critique le plus bas ($R_{TC}^{sous1} < R_{TC}^{sup} < R_{TC}^{sous2}$). Au rapport de flottabilité N = 0,042, on constate que $R_{TC}^{sup} = R_{TC}^{sous1} =$ 503.72. En augmentant le taux de flottabilité, on observe que, dans l'intervalle (0,042 <N <0,027), la courbe de bifurcation est constituée d'une branche supercritique inférieure s'étendant dans l'intervalle ($R_{TC}^{sup} < R_T < R_{TC}^{sous2}$). Les résultats obtenus à N = 0,027, pour lesquels $R_{TC}^{sup} = R_{TC}^{sous2} = 465.39$. Pour N≥0,027, le seul nombre de Rayleigh critique existant est celui supercritique,. Ainsi à N = 0 on constate que $R_{TC}^{sup} = R_{TC}^{sous1}$, et ceci indépendamment de l'indice de loi de puissance, n, variait entre 1 et 0,8. En continuant à

diminuer la valeur de l'indice de loi de puissance, n, et à augmenter la valeur du rapport de flottabilité, N> 0, il apparaît clairement que le phénomène de bistabilité se produit indépendamment de n, comme on peut le voir à partir du zoom présenté dans le graphique . Une vue à vol d'oiseau des résultats indique que l'étendue de la région de bistabilité dépend considérablement de l'indice de loi de puissance, n, comme on peut l'observer sur la figure 4 pour 0,2 ≤ n ≤ 0,6. Cette région survient lorsque le système a deux solutions en régime permanent se produisant dans les mêmes conditions, comme illustré sur la figure 8.

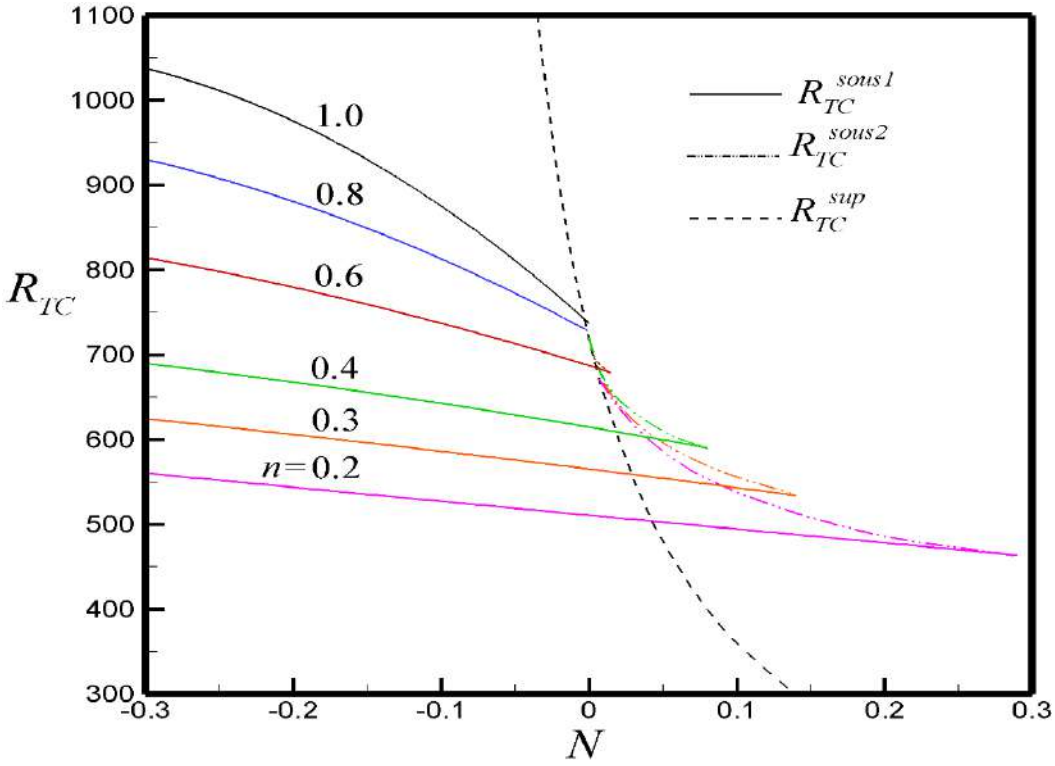



Figure 13: Effets de loi de puissance, $n$, et de rapport des forces de volume, $N$, sur les nombres de Rayleigh critique, $R_{TC}^{sous1}$, $R_{TC}^{sous2}$, $R_{TC}^{tur}$ pour, $Le = 10$, $E = 0.1$, $a = 2$ et $s = 10^{-2}$

# Conclusion Générale

Le travail présenté dans ce mémoire nous a permis d'étudie numériquement les transferts de chaleur et de la masse dans un milieu fluide remplies d'un fluide non-Newtonien dans des cavités peu profondes rectangulaires chauffée et saluée par le bas. Des conditions aux frontières de type Neumann (flux de chaleur et de masse constants) ou Dirichlet (température et concentration constantes imposés) ont été considérées. Les résultats numériques nous ont permis de mieux appréhender les effets combinés des paramètres rhéologiques sur le phénomène de la convection thermosoudable au sein du milieu fluide avec l'utilisation de modèle Carreau-Yasuda.

Le système d'équation gouvernant le problème est résolu numériquement par un code de calcul FOLTRAN77 basé sur la méthode des différences finies. L'intensité de l'écoulement et les transferts de chaleur et de masse sont exprimés en termes des paramètres de contrôle du problème. Ces paramètre étant le nombre de Rayleigh thermique $R_T$, le rapport des forces de volume $N$, le nombre de Lewis $Le$,Les paramètres rhéologiques $n$ , $E$ , $a$et $s$.

Les principales conclusions tirées dans cette étude sont résumées ci-dessous :

- ✓ Une diminution de l'indice de loi de puissance, $n$ , et une augmentation de constant de temps, $E$ , améliore le caractère rhé fluidifiant du fluide et provoque le déclenchement précoce de l'apparition de la convection sous-critique
- ✓ Les nombre de Nusselt et Sherwood sont sensibles à la fois à l'indice de loi de puissance, $n$ , et la constante de temps adimensionnelle, $E$ . Toutefois, une diminution de $n$, et une augmentation de $E$ améliore considérablement le taux de transfert de chaleur par convection
- ✓ Une diminution des paramètres rhéologiques$a$et$d$éclenche une convection sous-critique, bien en dessous du seuil de convection supercritique. Cependant, l'effet de ces paramètres est moins important en comparaison avec ceux de $n$ et.
- ✓ Une transition rapide vers un écoulement oscillatoire est observée pour les faibles valeurs du paramètre, $n$ ,et les fortes valeurs du paramètre, $E$ .
- ✓ Pour les fluides rhéfluidifiants obéissant au modèle de Carreau-Yasuda, le seuil de la convection supercritique est le même que celui des fluides Newtoniens.

**Recommandations et perspectives**

Les perspectives envisagées sont nombreuses :

- En dépit de l'originalité des résultats obtenus, ce travail reste académique en l'absence des résultats expérimentaux. Il serait donc souhaitable de conduire des expériences avec des fluides non-Newtoniens (obéissant au modèle de Carreau-Yasuda) afin de rendre réaliste les conclusions de cette étude.
- Il serait aussi intéressant de considérer des configurations géométriques autres que celles étudiées dans ce mémoire. Nous proposons à titre indicatif le cas d'une cavité inclinée en gardant le même type de fluide et les mêmes conditions aux frontières. Ceci nous permettra de voir de près le rôle de l'inclinaison, combiné avec celui du comportement rhéologique et des conditions aux frontières, sur la convection.
- Etudier l'effet stabilisateur d'un champ magnétique sur la convection des fluides non Newtoniens.
- Elaborer un code numérique en 3D afin d'étudier l'effet tridimensionnel.
- Une étude de la stabile transitoire est souhaitable afin de déterminer les modes stables instables et oscillants.

# RÉFÉRENCES


[1]. Cross, M.M., "Rheology of Non-Newtonian Fluids. A new flow equation for pseudo-plastic systems ", J. of Colloid Sciences,V.20,(1965), 417-437.

[2] Coelho, P.M., Pinho, F.T., "Vortex shedding in cylinder flow of shear-thinning fluids. III Pressure measurements", J. Non-Newtonian Fluid Mech,V.121,(2004), 55-68.

[3] Parmentier, E.M., Turcotte, D.L., "Studies of finite amplitude non-Newtonian thermal convection with application to convection in the earth mantle", J. Geophys. Res. :Solid Earth Planets,V.81,(1976), 1839-1846.

[4] Christensen, U., "Convection in a variable viscosity fluid: Newtonian versus power-law rheology", Earth planet. Sci. Lett.,V.64,(1983), 153-162.

[5] Pierre, C.S., Tien, C., "Experimental investigation of natural convection heat transfer in confined space for non-Newtonian fluid", Can. J. Chem. Eng.,V.41,(1963), 122-127.

[6] Ozoe, H., Churchill, S.W., "Hydrodynamic stability and natural convection in Ostwald–de Waele and Ellis fluids: The development of a numerical solution", AIChE J.,V.18,(1972), 1196-1207.

[7] Tien, C., Tsuei, H.S., Sun, Z.S., "Thermal instability of a horizontal layer of non-Newtonian fluid heated from Below", Int. J. Heat Mass Transfer,V.12,(1969), 1173-1178.

[8] Tsuei, H.S., Tien, C., "Free convection heat transfer in a horizontal layer of non-Newtonian fluid", Can. J. Chem. Eng.,V.51,(1973), 249-251.

[9] Liang, S.F., Acrivos, A., "Experiments on buoyancy-driven convection in non-Newtonian fluid", Rheol. Acta,V.9,(1970), 447-455.

[10] Khayat, R.E., "Chaos in the thermal convection of weakly shear-thinning fluids", J. Non-Newtonian Fluid Mech.,V.63,(1996), 153-178.

[11] Solomatov, V.S., "Scaling of temperature- and stress-dependent viscosity convection", Phys. Fluids,V.7,(1995), 266.

[12] Solomatov, V.S., Barr, A.C., "Onset of convection in fluids with strongly temperature-dependent, power-law viscosity", Phys. Earth Planet. Inter.,V.155,(2006), 140–145.

[13] Solomatov, V.S., "Localized subcritical convective cells in temperature-dependent viscosity fluids", Phys. Earth Planet. Inter.,V.200-201,(2012), 63–71.

[14] Inaba, H., Dai, C., Horibe, A., "Numerical simulation of Rayleigh-Bénard convection in non-Newtonian phase-changematerial slurries", Int. J. Therm. Sci. ,V.42,(2003), 471–480.

[15] Li, Z., Khayat, R.E., "Finite-amplitude Rayleigh-Bénard convection and pattern selection for viscoelastic fluids", J. Fluid Mech.,V.529,(2005), 221-251.

[16] Lamsaadi, M., Naimi, M., Hasnaoui, M., "Natural convection of non-Newtonian power law fluids in a shallow horizontal rectangular cavity uniformly heated from below", Heat Mass Transfer,V.41,(2005), 239-249.

[17] Sekhar, G.N., Jayalatha, G., "Elastic effects on Rayleigh-Bénard convection in liquids with temperature-dependent viscosity ", Int. J. Therm. Sci.,V.49,(2010), 67–75.

[18] Albaalbaki, B., Khayat, R.E., "Pattern selection in the thermal convection of non-Newtonian fluids", J. Fluid Mech.,V.668,(2011), 500-550.

[19] Turan, O., Chakraborty, N., Poole, R.J., "Laminar Rayleigh-Bénard convection of yield stress fluids in a square enclosure", J. Non-Newtonian Fluid Mech.,V.171-172,(2012), 83–96.

[20]. Kaddiri, M., Naimi, M., Raji, A., Hasnaoui, M., "Rayleigh-Bénard convection of non-newtonian power-law fluids with temperature-dependent viscosity", ISRN Thermodyn.,V.2012,( 2012), 614712-614722.

[21] Ben Khelifa, N., Alloui, Z., Beji, H., Vasseur, P., "Natural convection in a horizontal porous cavity filled with a non-Newtonian binary fluid of power-law type", J. Non-Newtonian Fluid Mech.,V.169-170,(2012), 15–25.

[22] Alloui, Z., Ben Khelifa, N., Vasseur, P., Guizani, A., "The onset of convection of power-law fluids in a shallow cavity heated from below by a constant heat flux", J. Non-Newtonian Fluid Mech. ,V.196,(2013), 70–82.

[23] Boussinesq, J., "Théorie analytique de la chaleur", Gauthier-Villars, Paris, (1903), 666 p.

[24] Bois, P.A., "Mécanique théorique des fluides", Ellipses, (2000), p.

[25] Demir, H., "Rayleigh-Bénard convection of viscoelastic fluid", Appl. Math. Comput.,V.136,(2003), 251–267.

[26]. Metivier, C., "instabilites thermoconvectives pour les fluides viscoelstiques", Institut National Polytechnique de Lorraine,these de doctorat,(2006).

[27] Introduction â la mécanique des fluides; auteur: Renée Gatignol; Editeur: Cépadué

Une introduction a la dynamique des fluides; auteur: Maurice Rieutord; Editeur: De Boeck

[28] Mécanique des fluides en 20 fiches; Auteur: Pascal Bigot; Richard Mauduit; Eric Wenner;Editeur: Dunod

[29] Mécanique des fluides Auteur: Yunus A.Cengel; John M.Cimbala ; Editeu: De Boeck

[30] Processus de transfert; transferts massiques; dynamiques et énergétiques Auteur: Daniel Morvan; Editeur Ellipses

[31] Transfert de chaleur et de masse en milieux fluides et poreux; Editeur: Editions universitaires européennes.

[32] Modélisation des transferts couplés de masse et de chaleur; Editeur:Editions universitaires européenne.

[33] Convection naturelle de chaleur et de masse; Editeur: Editions universitaires européenne.

[34] Transfert thermique; Auteur: Ana-Maria Bianchi Yves Fautrelle; Jacqueline Etay; Editeur: Presses Polytechniques et Universitaire Romandes ( PPUR )

[35] Développementdes modélesdetransferts massiques et thermiques; Editeur: Editions universitaires européennes.