Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr.Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences -Département de Mathématiques & Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention

du

Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

Par

MANSOURI Hamza & MAMMOUR Abdelkader

Thème

Etude des graphes partiellement sans étoile

Composition du Jury:

M^r.	BOUCHOU Ahmed	M.C.B	U.D.Y.F-Médéa	Président.
M^r.	SAHRAOUI Abdelkader	M.A.A	U.D.Y.F-Médéa	Encadreur.
M^r.	LEMDANI Rachid	M.A.B	U.D.Y.F-Médéa	Examinateur.
M^r.	ZEMIR Mohamed	M.A.A	U.D.Y.F-Médéa	Examinateur.

Date de soutenance: 18/06/2018.

Table des matières

Résumé V

Abstract VI

Remerciement VII

Dedicace VIII

Dedicace IX

Introduction **1**

1 Généralités sur la théorie des graphes **4**

1.1 Définitions et notations relatives à la théorie des graphes 4

1.1.1 Graphes non orientés 4

1.1.2 Voisinages et degrés 5

1.2 Graphes particuliers 6

1.3 Étoile, double étoile, étoile subdivisée 10

1.4 Clique, stable, et couplage 11

1.5 Ensemble dominant 12

1.5.1 Grille 12

2 Résultats existants sur les graphes partiellement sans étoiles **14**

2.1 Graphe hamiltonien 14

2.2 Graphe sans étoile 16

2.3 Connexité, degré, voisinage et cycle hamiltonien 18
2.4 Graphes pancyclique, graphes sommet pancyclique,graphes triangulairement,graphes à cycle plienement prolongeables 21
2.5 Graphe presque sans étoile 22
2.6 Graphe nearly (quasi) sans étoile 23
2.7 Graphe partiellement sans étoile 23

3 Quelques résultats sur les graphes partiellement sans étoile 25
3.1 Etude des graphes complets 25
3.2 Etude des graphes total des chaînes d'ordre n 26
3.3 Etude des graphes milieu des chaîne d'ordre n 26
3.4 Etude des graphes particuliers icosaédrique et skeleton 27
3.5 Etude des roues 29
3.6 Etude des grilles où chaque face intérieure contient une corde 30
3.6.1 Etude des grilles $P_2 \square P_n$ où chaque face intérieure contient une corde 30
3.6.2 Etude des grilles $P_3 \square P_n$ où chaque face intérieure contient une corde 31
3.7 Etude des grilles où chaque face intérieure contient deux corde 33
3.7.1 Etude des grilles $P_2 \square P_n$ où chaque face intérieure contient deux corde 33
3.7.2 Etude des grilles $P_3 \square P_n$ où chaque face intérieure contient deux corde 34
3.7.3 Etude des grilles $P_4 \square P_n$ où chaque face intérieure contient deux corde 36
3.8 Etude le graphe de peterson 38

Conclusion 40

Bibliographie 40

Liste des Figures

1.1.1 Un graphe simple 5
1.2.1 Deux graphes isomorphes 6
1.2.2 Un graphe partiel et sous graphe 7
1.2.3 Un cycle c4 et une chaîne p4. 7
1.2.4 Graphe connexe et non connexe 8
1.2.5 Graphe complet 8
1.2.6 Graphe biparti et graphe biparti-complet 9
1.2.7 Un graphe G et sont complémentaire $\overline{G}$ 9
1.2.8 Graphe 3-régulier 10
1.3.1 Une étoile 10
1.3.2 La Double étoile 10
1.3.3 Une étoile subdivisée $K^*_{1,S}$. 11
1.3.4 Arbre et foret 11
1.5.1 Grille. 13

2.1.1 Un graphe hamiltonien. 15
2.1.2 Un grphe semi-hamiltonien. 15
2.2.1 Graphe H1 et H2. 17
2.5.1 Un graphe prèsque sans étoile. 22
2.6.1 Un graphe quasi sans étoile. 23
2.7.1 Un graphe partiellement sans étoile. 24

3.1.1 Graphes complets. 25

3.2.1 Le graphe total d'une chaîne d'ordre n 26
3.3.1 Le graphe milieu d'une chaîne d'ordre n 27
3.4.1 G est un graphe icosaédrique. 28
3.4.2 Graphe skeleton. 28
3.5.1 Les roues. 29
3.5.2 G le graphe roue d'ordre 7. 30
3.6.1 Grille où chaque face intérieure contient une corde 31
3.6.2 Grille où chaque face intérieure contient une corde. 32
3.6.3 Grille où chaque face intérieure contient une corde. 33
3.7.1 Grille ou chaque face intérieure contient 2 corde. 34
3.7.2 Grille où chaque face intérieure contient 2 corde. 35
3.7.3 Grille où chaque face intérieure contient 2 corde. 36
3.7.4 Grille où chaque face intérieure contient 2 corde. 37
3.7.5 Grille où chaque face intérieure contient 2 corde. 38
3.8.1 Graphe de peterson. 39

Résumé

Le but de ce mémoire est d'étudier les graphes partiellement sans étoile. Un graphe $G = (V, E)$ est dit partiellement sans étoile si pour tout sommet $v \in A$ et A l'ensemble du centre d'étoile, il existe exactement deux sommet $x, y \in V - A$ tel que $N(v) \subset N[x] \cup N[y]$. C'est-à-dire $N(v)$ est double dominé dans $V - A$. Nous nous intéressons en premier lieu à la présentation des résultats antérieurs obtenus dans ce domaine. L'objectif de ce mémoire est étudier quelque graphe partiellement sans étoile pour lesquels nous parvenons plusieurs résultats.

Abstract

The purpose of this memoir is to study the partially star graphs. A graph $G = (V, E)$ is said partially without star if for any vertax $v \in A$, there are exactly two vertax $x, y \in V - A$ such as $N(v) \subset N[x] \cup N[y]$. That is, $N(v)$ is double dominated in $V - A$. We are primarily interested in the presentation of previous results obtained in this area. Our goal is to consider the partially without star graphs for which we obtain several results.

Remerciement

Avant tout nous remercions Allah tout puissant de nous avoir donné le courage et la patience pour terminer ce travail.

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui nous voudrons témoigner toute notre reconnaissances .

En premier lieu, je tiens à exprimer nous profonde reconnaissances à Monsieur **SAHRAOUI Abdelkader** maître Assistant à l'universite Dr: Yahia Farés de Médea d'avoir accepte d'encadrer notre memoire d'avoir été patient sa disponibilité et surtout ses judicieux consigne qui ont contribue à alimenter notre reflexion .

Nous remeçion également Monsieur **BOUCHOU Ahmed**, Maître de conférences à l'université Dr. Yahia Farés de Médéa, pour l'honneure qu'il nous a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

J'adresse un grand remerciement à Monsieur **Rachid LEMDANI**, Maître Assistant à l'université Dr. Yahia Farés de Médéa, Monsieur **ZEMIR Mohamed**, Maître Assistant à l'université Dr. Yahia Farés de Médéa, pour avoir accepté de faire partie du jury de ce mémoire et pour l'intérêt qu'il a porté à nos travaux et leurs remarques judicieuses.

Dedicace

J*e dédie ce mémoire*

A *mes chers parents, ma mère et mon père*

P*our leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements*

A *mes frères et A mes soeurs*

A *mes amies : Lokman, Mohamed, Chaaban, Ilais, Kamel, youssef....*

A *mon chère binôme* ***ABDELKADER*** *et à sa famille*

S*ans oublier tous les enseignant que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.*

HAMZA

Dedicace

J*e dédie ce mémoire*

A *mes chers parents, ma mère et mon père*

P*our leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements*

A *mes frères et A mes soeurs*

A *mes amies : Adel, Abdelhak, Abdelnour, Ismail,mohmed.*

A *mon chère binôme* ***HAMZA*** *et à sa famille*

S*ans oublier tous les ensigent que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.*

ABDELKADER

Introduction

La recherche opérationnelle (RO) est la discipline des mathématiques appliquées qui traite des questions d'utilisation optimale des ressources dans l'industrie et dans le secteur public. Depuis une dizaine d'années, le champ d'application de la RO s'est élargi à des domaines comme l'économie, la finance, le marketing et la planification d'entreprise. Plus récemment, la RO a été utilisée pour la gestion des systèmes de santé et d'éducation, pour la résolution de problèmes environnementaux et dans d'autres domaines d'intérêt public.

La représentation d'un problème par un dessin, un plan, une esquisse contribue souvent à sa compréhension. Le langage des graphes est construit, à l'origine, sur ce principe. Nombres de méthodes, de propriétés, de procédures ont été pensées ou trouvées à partir d'un schéma pour être ensuite formalisées et développées. Chacun d'entre nous a, au moins une fois, vu ou utilisé un plan de métro, une carte de lignes ferroviaires, un plan électrique, un arbre généalogique ou un organigramme d'entreprise; ainsi, tout le monde sait plus ou moins intuitivement ce qu'est un graphe. Toutefois, entre cette notion vague ou des points, représentant des individus, des objets, des lieux ou des situations, sont reliés par des flèches, il y a une longue élaboration des concepts. La première difficulté à laquelle on peut être confronté concerne la terminologie (très abondante en théorie des graphes). La théorie des graphes constitue aujourd'hui un corpus de connaissances très important. Comme son nom l'indique.

Un bref historique de la théorie des graphes, tout le monde s'accorde à considérer que la théorie des graphes est née en 1736 avec la communication d'Euler $(1707 - 1783)$ dans laquelle il proposait une solution au célèbre problème des ponts de Konigsberg (Euler, 1736). Le probléme posé était le suivant. Deux îles A et D sur la rivière Pregel à Konigsberg (alors

capitale de la Prusse de l'Est, aujourd'hui rebaptisée Kaliningrad) étaient reliées entre elles ainsi qu'aux rivages B et C à l'aide de sept ponts (désignés par des lettres minuscules).

Le problème des ponts de Konigsberg est identique à celui consistant à tracer une figure géométrique sans lever le crayon et sans repasser plusieurs fois sur un même trait.

A partir de 1946, la théorie des graphes a connu un développement intense sous l'impulsion de chercheurs motivés par la résolution de problèmes concrets. Parmi ceux-ci, citons de manière privilégiée Kuhn (1955), Ford et Fulkerson (1956) et Roy (1959). Parallèlement, un important effort de synthèse a été opéré en particulier par Claude Berge. Son ouvrage "Théorie des graphes et ses applications" publié en 1958 (Berge, 1958) marque sans doute l'avènement de l'ére moderne de la théorie des graphes par l'introduction d'une théorie des graphes unifiée et abstraite rassemblant de nombreux résultats épars dans la littérature. Depuis, cette théorie a pris sa place, en subissant de trés nombreux développement essentiellement dus à l'apparition des calculateurs, au sein d'un ensemble plus vaste d'outils et de méthodes généralement regroupées sous l'appellation "recherche opérationnelle" ou "mathématiques discrètes".

Parmi les branches les plus étudiées de la théorie des graphes on trouve la classe des graphes sans étoile. Un graphe G est dit sans étoile s'il n'ademet pas de sous-graphe isomorphe à une étoile.

Notre objectif dans ce travail est d'étudier une nouvelle classe de graphes partiellement sans étoile. Un graphe $G = (V, E)$ est dit partiellement sans étoile si pour tout sommet $v \in A$, il existe exactement deux sommet $x, y \in V - A$ tels que $N(v) \subset N[x] \cup N[y]$. C'est-à-dire $N(v)$ est double dominé dans $V - A$.Ce type de coloration a été introduit par M. Abbas et Z. Benmeziane [27], Pour ce faire, nous avons divisé notre mémoire en trois chapitres.

Le premier chapitre présente des définitions et quelques conceptes fondament de la théorie des graphes nécessaires et utilisées tout au long de ce mémoire.

Le chapitre deux est consacré à la présentation des résultats existants pour les graphe hamiltonien, graphes sans étoile, Connexité, degré, voisinage , graphes prèsque sans étoile, graphes quasi sans étoile. Nous nous intéressons sur les graphes partiellement sans étoile.

Dans le chapitre trois, nous présentons quelque graphe partiellement sans étoile.

En dernier, notre mémoire est clôturé par une conclusion dans laquelle on fait le tour du travail accompli.

Chapitre 1

Généralités sur la théorie des graphes

Ce chapitre est consacré aux généralités. Nous y faisons un bref passage sur les notions usuelles de la théorie des graphes. Nous introduisons ensuite quelques concepts généraux des quelques graphes partiellement sans étoile

1.1 Définitions et notations relatives à la théorie des graphes

1.1.1 Graphes non orientés

Un graphe $G = (V,E)$ est défini par deux ensembles finis V et E dits ensembles des sommet et ensembles d'arêtes respectivement. Le cardinal de V est appelé l'ordre de G; noté par $n(G)$, et le cardinal de E est appelé la taille de G; noté par $m(G)$. Une arête e $\in E$ est un couple de sommets (u,v), elle est notée par $e = uv$, ou u et v sont les extrémités de e. On dira dans ce cas que u et v sont adjacents et que e est incidente a u et v. Une arête $e = uv$ est une boucle si les extrémités u et v sont confondues.

Un graphe simple : Un graphe est dit simple s'il est sans boucles est sans arêtes multiples. Dans ce mémoire, tous les graphes considérés sont simples et finis. Par exemple, la figure 1.1.1 montre un graphe simple $G = (V,E)$ avec $V\ (G) = \{a,b,c,d,e,f\}$ et $E(G) = \{ab,bc,cd,de,ea,bd,af\}$.

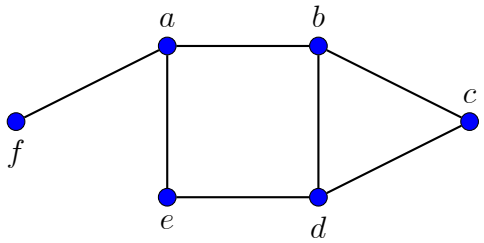


Figure 1.1.1 : Un graphe simple

1.1.2 Voisinages et degrés

- Deux sommets u et v sont *adjacents* si l'arête uv existe dans E. Les sommets u et v sont alors dits *voisins*.

- Deux arêtes sont dites adjacentes si elles ont une extrémité commune.

- Une arête est *incidente* à un sommet v, si v est l'une de ses extrémités de l'arête.

- Le *voisinage ouvert* d'un sommet v de G, noté par $N_G(v)$, est défini par l'ensemble

$$N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E\}$$

- Le *voisinage fermé* de v, noté par $N_G[v]$, est défini par

$$N[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

  L'ensemble $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v)$ (resp. $N[S] = \cup_{v \in S} N_G(v) \cup S$) est le voisinage ouvert (resp. fermé) du sous ensemble $S \subseteq V$. S'il n'y a aucune confusion , les voisinages ouvert et fermé d'un sommet v seront notés par $N(v)$ et $N[v]$ respectivement. De même, nous utiliserons les notations $N(S)$ et $N[S]$ au lieu de $N_G(S)$ et $N[S]$ respectivement.

- Le *degré* d'un sommet v de G , noté par $d(v)$, est le nombre d'arêtes incidentes à u. Dans un graphe simple, $d(v) = |N_G(v)|$. Un sommet de degré nul est dit sommet *isolé,* un sommet de degré un est dit sommet *pendant*, et un sommet qui est adjacent à un sommet pendant est dit *support.* On note par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ le degré maximum et le degré minimum de G respectivement. S'il n'y a aucun risque de confusion, on écrira $d(v)$, Δ, et δ pour désigner $d_G(v)$, $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ respectivement.

1.2 Graphes particuliers

Graphe isomorphe

Deux graphes G et H sont dits isomorphes et on écrit $G \simeq H$ s'il existe une application bijitive f entre les sommet de G et ceux de H, $f : V(G) \longrightarrow V(H)$ telle que pour toute paire de sommets u, v de G, l'arête $uv \in E(G)$ si et seulement si l'arête

$f(u)f(v) \in E(G)$. En d'autre terme, un isomorphisme est un changement de nom des sommet.

- Variant d'un graphe est une propriété préservé par isomorphisme comme le nombre de ses arêtes.



Figure 1.2.1 : Deux graphes isomorphes

Graphe partiel et sous-graphe

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On appelle sous-graphe de G, un graphe $H = (U, F)$ tel que $U \subseteq V$ et $F \subseteq E$. Pour un sous-ensemble $A \subseteq V$, le sous-graphe induit par A, noté $G[A]$ ou simplement $\langle A \rangle$, est le graphe ayant A pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans A. Etant donné un graphe H , on dit que G est sans H si H n'est pas isomorphe á un sous-graphes de G. Un graphe partiel de G est un graphe obtenu en enlevant une ou plusiéurs arêtes de G. Autrement dit, un graphe partiel de G est un graphe $H = (V, F)$ avec $F \subset E$. La figure 1.2.2 contient un graphe partiel et un sous-graphe d'un graphe.

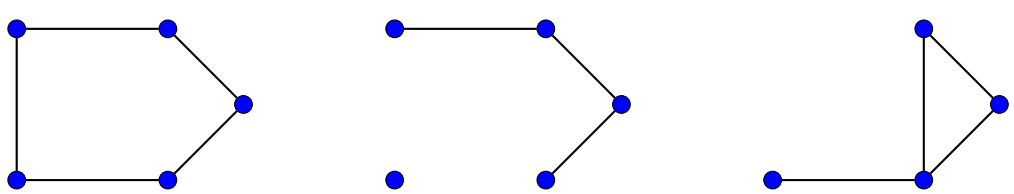


Figure 1.2.2 : Un graphe partiel et sous graphe

Chaîne

Une Chaîne c d'un graphe $G = (V, E)$ est une séquence finie $[v_1, v_2....., v_k]$ de sommets telle que pour chaque $1 \leq i \leq k-1$,v_i v_{i+1} est une arête de G. Les sommets v_1 et v_k sont appelés respectivement extrémité initiale et extrémité finale de la chaîne c. La longueur d'une chaîne est le nombre de ses arêtes ($k-1$ pour la chaîne précédant). Une Chaîne est dite élémentaire (respectivement, simple) si tout ses sommets sont distincts (respectivement, toutes ses arêtes sont distinctes). Une corde est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne minimale induite par n sommets, notée p_n, est une chaîne élémentaire sans cordes.

Cycle

Un cycle est une chaîne dont ses deux extrémités sont confondues. Un cycle élémentaire notée c_n est un cycle de n sommets distincts. On appelle maille d'un graphe G notée $g(G)$ la longueur d'un plus petit cycle dans G. La figure 1.2.3 contient le cycle c_4 et la chaîne p_4.



C_4 P_4

Figure 1.2.3 : Un cycle c4 et une chaîne p4.

Graphe connexe

Un graphe $G = (V, E)$ est dit connexe, s'il existe au moins une chaîne reliant toute paire de sommets $u, v \in V$.

Une composante connexe d'un graphe G est un sous-graphe maximal connexe.

Une arête e est appelée un isthme si le graphe $G - e$ possède plus d'une composante connexe i.e. si G est connexe alors $G - e$ n'est pas connexe. Le graphe G admet l'arête uv comme isthme, car $G - uv$ est non connexe. Voir la figure 1.2.4 .

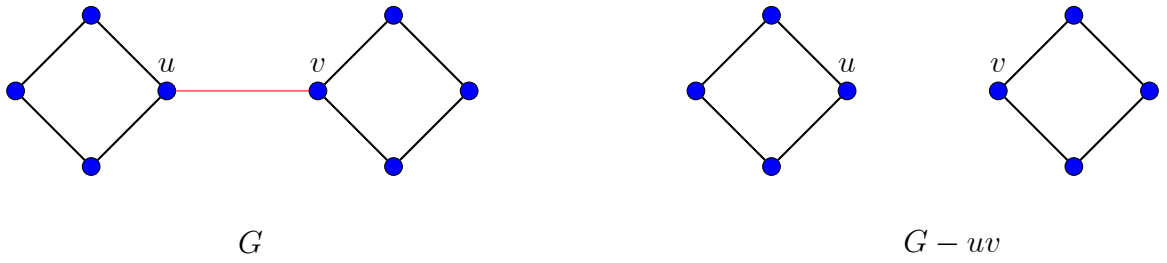


Figure 1.2.4 : Graphe connexe et non connexe

Graphe complet

Le graphe complet d'ordre n, noté par K_n est le graphe dans lequel tous ses sommets sont de degré $n-1$. Ainsi, deux á deux adjacents entres eux . Voir la figure 1.2.5 .

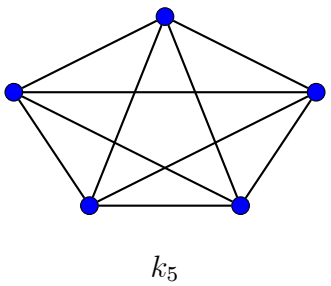


Figure 1.2.5 : Graphe complet

Graphe biparti et graphe biparti-complet

Un graphe $G = (V, E)$ est dit **biparti** si V peut être partitionner en deux stables V_1et V_2 . Un graphe **biparti complet** est un graphe biparti dans chaque sommet de V_1 est relié à tout les sommets de V_2 et inversement , si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$ le graphe biparti complet est noté par $K_{p,q}$, plus généralement, un graphe $G = (V, E)$ est dit k-parti ($k \geq 2$), si V peut être partitionné en k stables V_1 ,V_2 ,...,V_k, il est dit multiparti-complet si, pour tout $i \neq j$, tout sommet de V_i est adjacent à tout sommet de V_j . Voir la figure 1.2.6 .

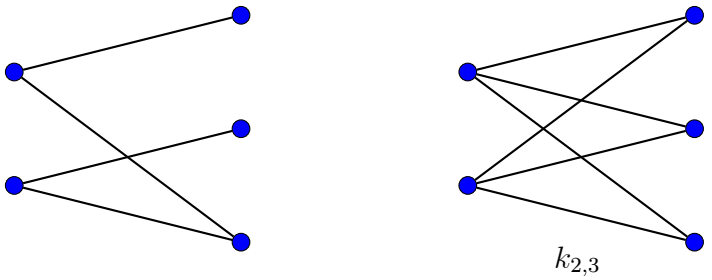


Figure 1.2.6 : Graphe biparti et graphe biparti-complet

Graphe complémentaire

Le complémentaire du graphe $G = (V, E)$, noté $\bar{G} = (V, E)$, est le graphe vérifiant $\bar{V} = V$ et deux sommets sont adjacents dans $\bar{G}$ si seulement s'ils ne le sont pas dans G. Voir la figure 1.2.7 .

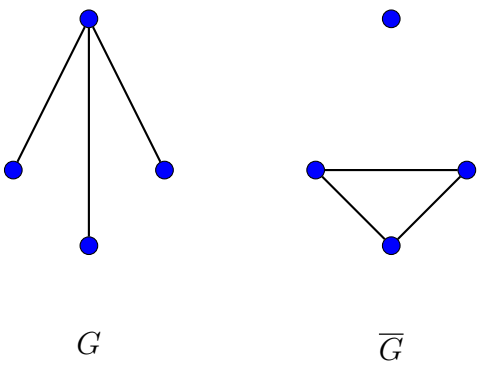


Figure 1.2.7 : Un graphe G et sont complémentaire $\overline{G}$

Graphe régulier

Un graphe G est dit régulier si tous les sommets ont le même degré k est dit k-régulier.

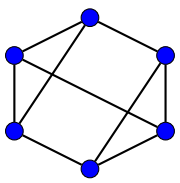


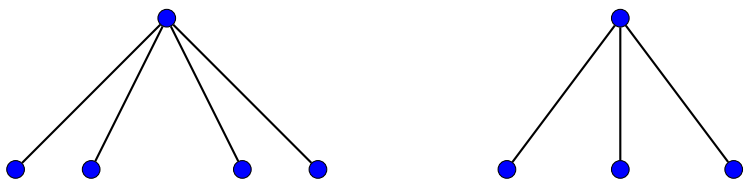
Figure 1.2.8 : Graphe 3-régulier

1.3 Étoile, double étoile, étoile subdivisée

Étoile

Une étoile est le graphe biparti complet $K_{1,S}$ .le sommet de degré S est appelé centre de l'étoile .

Cas particulier si $S = 3$, $K_{1,3}$ est appelé griffe. Voir la figure 1.3.1 .



$L'toile\ (K_{1,4})$ $Lagriffe\ (K_{1,3})$

Figure 1.3.1 : Une étoile

Double étoile

Une double étoile est le graphe formé par les deux étoiles $K_{1,r}$ et $K_{1,s}$, et une arête reliant des deux centres. Voir la figure 1.3.2 .

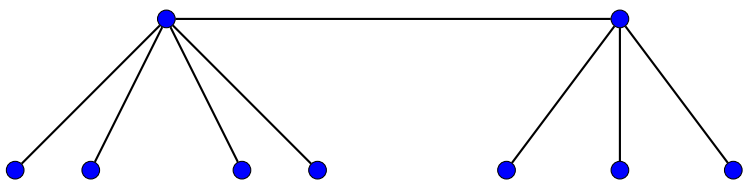


Figure 1.3.2 : La Double étoile

Étoile subdivisée

L'opération de subdivision d'une arête uv d'un graphe G consiste à introduire un nouveau sommet w tel que $E(G \cup\{w\}) = (E(G - \{uv\})) \cup \{uw, wv\}$. Une étoile subdivisée $K^*_{1,s}$ est un arbre obtenu à partit d'une étoile $K_{1,s}$ en subdivisant chaque arête une fois. Voir la figure 1.3.3 .

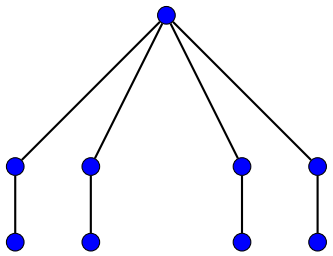


Figure 1.3.3 : Une étoile subdivisée $K^*_{1,S}$.

Foret et Arbre

Un arbre est un graphe connexe sans cycles il contient exactement $(n-1)$ arête. Un graphe sans cycles mais non-connexe est appelé forêt. Voir la figure 1.3.4 .

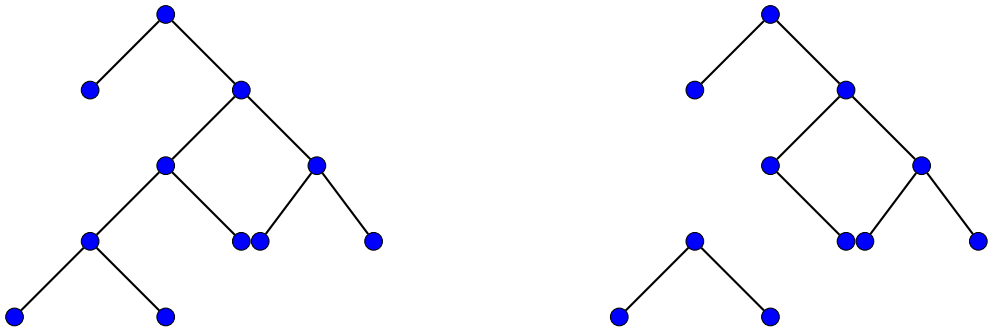


Figure 1.3.4 : Arbre et foret

1.4 Clique, stable, et couplage

- Une *clique* d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-graphe complet. La taille d'une clique est le nombre de ses sommets. Une clique de taille p est notée par K_p. Le cardinal d'une clique maximum de G est noté par $\omega(G)$.

- *Un stable* dans un graphe G (*ensemble indépendant)*, sous-graphe de G dans ses sommets sont deux à deux non adjacents. Le cardinal d'un stable maximum de G , noté $\alpha(G)$, est appelé *nombre de stabilité* de G.

- Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un *couplage* M dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes. On note $\beta(G)$ la taille du couplage maximum dans G. Un sommet x de G est dit *saturé* par le couplage M s'il existe une arête de M incidente à x. Un couplage qui sature tous les sommets de G est appelé un *couplage parfait* dans G.

1.5 Ensemble dominant

Un sous−ensemble de sommets D de V est dit ensemble dominant de G si tout sommet de $V - D$ possède au moins un voisin dans D. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant minimal de G, appelé nombre de domination inferieure et est noté $\gamma(G)$. Tout ensemble dominant de cardinal $\gamma(G)$ est appelé $\gamma(G)-$ensemble .Un graphe G peut avoir plusieurs $\gamma(G)-$ensemble

pour un ensemble dominant D ,on a $|N(v) \cap D| \geq 1$.

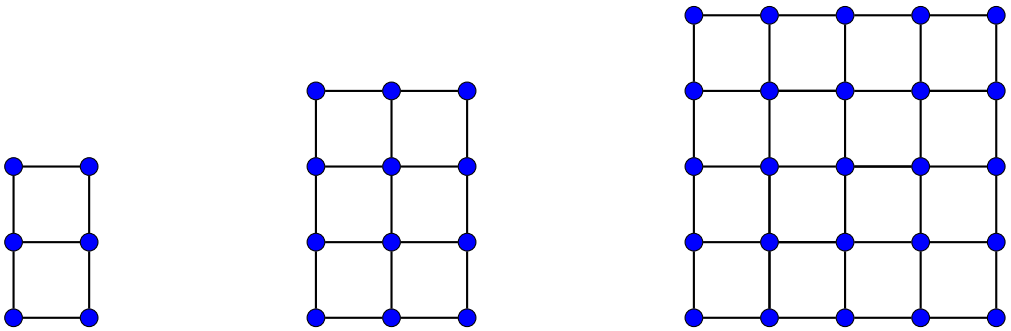
La domination double

Un sous−ensemble D de V est un dominant double(EDD) de G si tout sommet de V est ou bien dans D et possède au moins un voisin dans D, ou bien dans $V - D$ et possède au moins deux voisins dans D . Le nombre de domination double de G, noté $\gamma_{\times 2}(G)$, est le cardinal minimum d'un EDD de G.

1.5.1 Grille

Un grille est le produit cartésien $P_m \square P_n$ de deux chaîne sur P_m et P_n .{\$P_{3}\square{P_{4}}\$};

Soit la figure 1.5.1 , contient des graphes grilles.



$P_2 \square P_3$ $P_3 \square P_4$ $P_5 \square P_5$

Figure 1.5.1 : Grille.

Chapitre 2

Résultats existants sur les graphes partiellement sans étoiles

Ce chapitre est consacré à la présentation des résultats antérieurs obtenus dans le domaine des graphes partiellement sans étoiles.

2.1 Graphe hamiltonien

Définition 2.1.1 *Une chaîne hamiltonienne est une* ***chaîne*** *qui passe une fois et une seule par chaque sommet du graphe .*

Définition 2.1.2 *Un cycle hamiltonien est un chaîne hamiltonienne qui est* ***cyclique,*** *on peut transformer un cycle hamiltonien en chaîne hamiltonien, en enlevant une arête quelconque du cycle, en revanche une chaîne hamiltonienne ne peut être étendue en un cycle hamiltonien que si ses extrémités sont adjacents.*

Définition 2.1.3 *Un graphe qui contient un cycle hamiltonien est appelé graphe hamiltonien. La figure 2.1.1 , Graphe hamiltonien.*

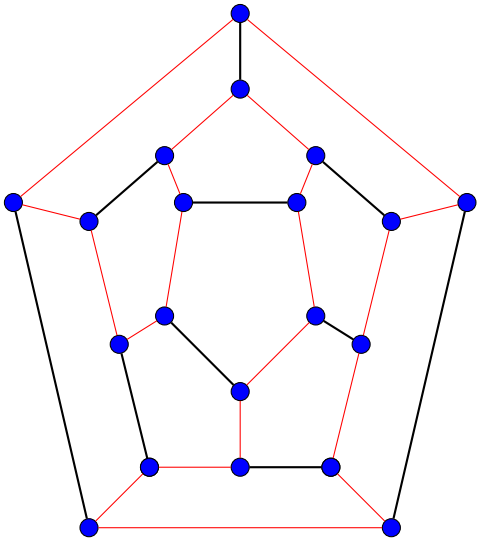


Figure 2.1.1 : Un graphe hamiltonien.

Définition 2.1.4 *Un grphe semi-hamiltonien est un grphe qui contient une chaîne hamiltonienne, mais pas de cycle hamiltonien. La figure 2.1.2 , Graphe semi-hamiltonien.*

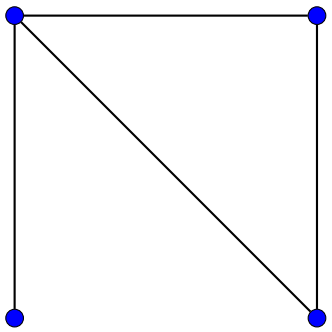


Figure 2.1.2 : Un grphe semi-hamiltonien.

Définition 2.1.5 *Un graphe est dit hamiltonien-connexe chaque deux sommets du graphe, sont reliés par une chaîne hamiltonienne entre ces sommets.*

Théorème 2.1.1 *([1], Cabot, 2008) Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre $n \geq 3$. Si pour toute paire de sommets $\{x, y\}$ non adjacents $d(x) + d(y) \geq n$, alors G est hamiltonien.*

Théorème 2.1.2 *([1], Cabot, 2008) Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre $n \geq 3$. Si pour tout sommet x de G $d(x) \geq n/2$, alors G est hamiltonien.*

Corollaire 2.1.1 *([1], Cabot, 2008)* $d(x) + d(y) \geq n/2 + n/2 = n$.

Théorème 2.1.3 *([1], Cabot, 2008) Tout graphe* 2*-connexe,* K*-régulier d'ordre* $n \leq 3K$ *est un graphe hamiltonien.*

2.2 Graphe sans étoile

Remarque 2.2.1 *Dans ce qui suit, On désigne par étoile le graphe biparti* $K_{1,3}$.

Définition 2.2.1 *Un graphe* G *est dit sans étoile s'il n'admet pas de sous-graphe isomorphe à une étoile.*

Quelques graphe sans étoile

Il y a plusieurs familles célèbres et importantes de graphes sans étoile, donc nous en rappelons maintenant quelques-unes de ces familles.

1. **Graphe adjoint d'un graphe**

   Soit $G = (X, E)$ un graphe. le graphe adjoint $L(G)$ de G est le graphe obtenu en associant un sommet à chaque arête de G et en reliant deux sommet par une arête si les arêtes de G correspondant à ces deux sommets sont adjacents. Beineke a donné une caractérisation de ces graphes par sous-graphes sans $K_{1,3}$.

2. **Complément de graphe sans triangle**

   C'est facile de voir G est un complément d'un graphe sans triangule si et seulement si son nombre d'indepandence satisfait $\alpha(G) < 2$ et que un tel graphe est sans étoile.

3. **Graphe d'inflation**

   Par l'inflation de graphe H nous d'evoir signifions un graphe qui est obtenu en remplacant chaque sommet x par un graphe complet $K_{d(x)}$ et en reliant chaque arête à un sommet différent de $K_{d(x)}$ clairement l'inflation de chaque graphe H est un graphe sans étoile.

4. **Graphe comparable**

   Un graphe simple $G = (X, E)$ est appelé graphe comparable si c'est possible de diriger ses arêtes afin que le résultant graphique 1-Graphe (X, E) satisfaite:

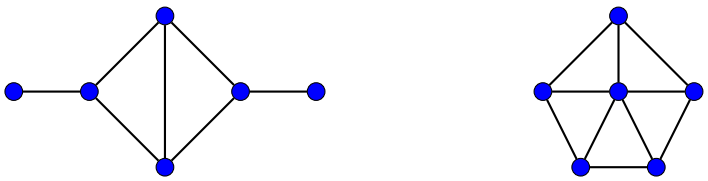
   $(x, y) \in U, (y, z) \in U \quad \Rightarrow (x, z) \in U \quad$ (transitivité)

   $(x, y) \in U \qquad\qquad\quad \Rightarrow (y, x) \notin U \quad$ (anti-symétrique)

   Clairement un graphe bipartie est un graphe comparable autrement chaque sous-graphe d'un graphe comparable est un graphe comparable.

5. **Graphe central**

   Le graphe central d'un graphe H est obtenu en insérant un sommet x dans l'arête e_i, pour tout $i : 1 \leq i \leq |E(H)|$ et en ajoutant l'arête $x_i x_j$ pour tout $i : 1 \leq i \leq j \leq |E(H)|$ si et seulement si e_i et e_j ont un sommet commun. Le graphe central de chaque graphe est un graphe sans étoile, il est facile de voir que tout graphe d'inflation et tout graphe du central sont des graphes adjoints. L'autre côté les graphes H_1 et H_2 dans la figure 2.1.1 sont des exemples d'un graphe complément sans triangule et d'un graphe comparable qui n'est pas des graphes d'adjoints.



H_1 H_2

Figure 2.2.1 : Graphe H1 et H2.

1. **Graphe quasi-adjoint**

   Soit $G = (X, E)$ un graphe. G est dit quasi$-$adjoint si le voisinage de tout sommet peut être partitionné en deux cliques, il est équivalent à dire que le complémentaire du voisinage de tout sommet est un graphe biparti. J.F. Morras a défini un graphe presque biparti comme étant un graphe tel que le sous$-$graphe constitu sur les sommets non voisins d'un sommet quelconque soit biparti. Un graphe quasi$-$adjoint est donc le

complémentaire d'un graphe presque biparti. Graphe quasi-adjoint est un graphe sans étoile. La réciproque n'est pas vraie, le graphe sans étoile de la figure H_1 n'est pas un graphe quasi−adjoint par ailleurs tout graphe adjoint est un graphe quasi−adjoint: en effet, soit $G = (X, E)$ un graphe dont le graphe adjoint est $L(G)$. Soient x un sommet de $L(G)$ et (x_1, x_2) l'arête de G associée à x le voisinage de x est l'ensemble des sommets qui correspondent aux arêtes de G qui sont adjacentes à l'arête (x_1, x_2) il peut donc être partitionée en deux cliques. C'est facile de vérifier que cette famille contient tout graphe adjoint et aussi tout graphe central et d'inflation néanmoins quelques graphes complément sans triangule, le graphe quasi-adjoint de la figure H_2 n'est pas un graphe adjoint. Voir la figure 2.2.1 .

Théorème 2.2.1 ([2], *Allan et al, 1978*) *Si G est un graphe sans étoile alors ,* $\gamma(G) = i(G)$.

Théorème 2.2.2 *([3], Maria et Paul, 2004) Soit G un graphe connexe sans étoile, avec* $\alpha(G) \geq 3$. *Alors* $\chi(G) \leq 2\omega(G)$.

Théorème 2.2.3 *([3], Maria et Paul, 2004) Soit G un graphe connexe sans étoile, avec* $\alpha(G) \geq 3$. *Alors* $\Delta(G) \leq 4(\omega(G) - 1)$. *et par conséquent* $\chi(G) \leq 4(\omega(G) - 1)$.

Théorème 2.2.4 *([3], Maria et Paul, 2004) Soit G un graphe connexe sans étoile, avec* $\alpha(G) \geq 3$. *Alors Then* $\chi(\bar{G}) \leq 2\omega(\bar{G})$.

Corollaire 2.2.1 *([4], Li et Virlouvet, 1990) pour tout graphe G sans étoile d'ordre n on a* $\gamma(G) \leq 2(n - \alpha(G))/\alpha(G)$.

2.3 Connexité, degré, voisinage et cycle hamiltonien

Définition 2.3.1 *La connexité des sommets ou connexité d'un graphe G est le nombre minimum de sommet à supprimer pour que G deviente non-connexe ou soit réduit à un sommet unique. Un graphe est k-connexe, si sa connexité* $K(G) \geq k$.

Définition 2.3.2 *La connexité des arêtes d'un graphe connexe G est le nombre minimum d'arêtes à supprimier pour que G ne soit plus connexe.*

Théorème 2.3.1 *([6], Gernnet et All, 1989) Si G est un graphe 2- connexe sans étoile soit G un graphe d'ordre .n, alors $\gamma(G) \leq \lceil n/3 \rceil$.*

Théorème 2.3.2 *([7], Flandrin et All, 1989) Si G un graphe k-connexe sans étoile, avec $k \geq 3$ et $\alpha(G) \leq 2k$, alors G est un graphe hamiltonien.*

Théorème 2.3.3 *([8], Ryjàcek, 1994) Si G un graphe k-connexe sans étoile, avec $(k \geq 2)$ avec $\gamma(G) \leq k$, alors G est un graphe hamiltonien.*

Lemme 2.3.1 *([9], Diny et All, 1985) Si G est un graphe 4-connexe sans étoile alors G est un hamiltonien.*

Définition 2.3.3 *Pour $1 \leq k \leq n$ on note par $\sigma_k(G)$ le minimum de la somme du degré $d(x_1) + ... + d(x_k)$ et $U_k(G)$ le minimum de l'union de voisinage $|N(x_1) \cup ...N(x_n)|$, où le minimum est pris sur tous les sous-ensembles $\{x_1, ..., x_k\}$ indépendants de k sommets indépendants de $V(G)$, Nous gardons la notation σ pour la valeur commune de σ_k et U_k que les deux paramètres ont fréquemment été utilisés en condition suffisante pour les propriétés de l'hamiltonien dans les graphes.*

Borne sur le minimum de la somme du degré $\sigma_k(G)$ dans Graphe 1-connexe sans étoile:

1. $\sigma \geq \frac{n-2}{3}$ [10], [11].
2. $\sigma_3 \geq n - 2$ [12].

Borne sur le minimum de l'union de voisinage $U_k(G)$ dans Graphe 1-connexe sans étoile:

1. $U_2 > \frac{2n-4}{3}$ [13].
2. $U_2 \geq \frac{2n-5}{3}$ [14].

Quand le graphe suivi G n'est pas trouvable alors, le matthews et sumner [10] ont montré que la plus longue trajectoire a la longueur au moins $2\sigma + 2$, et c'était amélioré à $\sigma_2 + 2$ tian et wi en [12]

Borne sur le minimum de la somme du degré $\sigma_k(G)$ dans Graphe 2-connexe sans étoile:

1. $\sigma \geq \frac{n-2}{3}$ [10].

2. $\sigma_2 \geq \frac{2n-5}{3}$ [11].

3. $\sigma_3 \geq n-2$ [12].

Borne sur le minimum de la somme du degré $\sigma_k(G)$ dans Graphe 3-connexe sans étoile:

1. $\sigma \geq \frac{n+10}{5}$ [15].

2. $\sigma \geq \frac{n+5}{5}$ [16].

3. $\sigma \geq \frac{n+7}{6}$ [17].

4. $\sigma_3 \geq n+1$ [12].

Borne sur le minimum de l'union de voisinage $U_k(G)$ dans Graphe 3-connexe sans étoile:

- $U_2 \geq \frac{11(n-7)}{21}$.

Pour un graphe 3-connexe sans étoile non hamiltonien, les li mingchu [18] en ont vérifié 4σ comme un lien inférieur pour la circonférence et les wang [19] ont montré que la valeur $\sigma_4 - 4$ est aussi un lien inférieur si $\sigma \geq 8$.

Borne sur le minimum de la somme du degré $\sigma_k(G)$ dans Graphe k−connexe sans étoile:

1. $\sigma > \frac{2n}{2k+1} - 2$ [4].

2. $\sigma_{k+1} \geq n-k$ [20].

3. $\sigma_{k+2} \geq n-k-1$ [21].

Borne sur le minimum de l'union de voisinage $U_k(G)$ dans Graphe k−connexe sans étoile:

- $U_t \geq t\frac{n-1}{t+1}, t \leq k$ [13].

Théorème 2.3.4 *([22], Liu et Wu, 1987) Si G est un graphe 2- connexe sans étoile, et $\sigma-$regulier avec $\sigma \geq (n-1)/4$,alors G est un graphe hamiltonien.*

2.4 Graphes pancyclique, graphes sommet pancyclique,graphes triangulairement,graphes à cycle plienement prolongeables

Définition 2.4.1 *Un cycle C dans un graphe $G(V,E)$ est prolongeable dans G si il existe un cycle C' dans G tel que $V(C) \subseteq V(C')$ et $|V(C')| = |V(C)| + 1$, Dans ce cas on dit que C peut être étendu à C' ou C' est une extension de C.*

Définition 2.4.2 *Un graphe $G=(V,E)$ est pancyclique, si pour tout nombre entier K avec $3 \leq K \leq |V(G)|$, G contiet $K-$cycle.*

Définition 2.4.3 *Un graphe $G=(V,E)$ est dit sommet pancyclique si pour tout sommet $v \in V(G)$, et pour tout nombre entier K, avec $3 \leq K \leq v(G)$, G contient $K-$cycle qui contient v.*

Définition 2.4.4 *Un graphe G est dit à cycle prolongeable si G contient au moins un cycle et chaque cycle non hamiltonien dans G est prolongeable.*

Définition 2.4.5 *Un graphe G est dit à cycle pleinement prolongeable si G est un graphe à cycle prolongeable et chaque sommet de G est lié dans un triangle de G.*

Définition 2.4.6 *Un graphe $G = (V,E)$ est dit triangulairement connexe si pour chaque deux arêtes e_1,$e_2 \in E(G)$ il existe une chaine de $3-$cycles C_1, $C_2, ..., C_k$ tel que $e_1 \in C_1$, $e_2 \in C_k$ et $E(C_i) \cap E(C_{i+1}) \neq \varnothing$, pour tout $i : 1 \leq i \leq k-1$.*

Théorème 2.4.1 *([24], Dirac, 1952) Chaque graphe triangulairement connexe sans étoile avec $|E(G)| \geq 3$ est sommet pancyclique.*

Théorème 2.4.2 *([23] [25], Bondy et Chvatal, 1971) Soit $G(V,E)$ un graphe d'ordre $p \geq 3$ tel que $\sigma(G) \geq p$. Alors*

1. G est hamiltonien
2. Si C un cycle non hamiltonien dans G alors il existe un cycle C' dans G tel que $V(C) \subseteq V(C')$ et $|V(C')| = |V(C)| + 1$ ou $|V(C')| = |V(C)| + 2$.

Corollaire 2.4.1 *([26], Clark, 1981) Si G est un graphe d'ordre n vérifiant $\delta(G) \geq (n+1)/2$, alors G est un graphe à cycle plienement prolongeable.*

Corollaire 2.4.2 *([23], Bondy, 1971) Soit G un graphe d'ordre $n \geq 3$ vérifiant $\sigma(G) \geq n$. Alors G est pancyclique et $G = K_{n/2,n/2}$ où $K_{n/2} \times K_2$.*

Corollaire 2.4.3 *([23], Bondy, 1971) Soit G graphe d'ordre $n \geq 3$ vérifiant $\sigma(G) \geq n$ et soit C un cycle dans G de langueur k, avec $3 \leq k \leq n-2$. Alors il existe un cycle $C^{''}$ dans G tel que $V(C) \subseteq V(C^{''})$ et $\left|V(C^{''})\right| = |V(C) + 2.|$*

2.5 Graphe presque sans étoile

Définition 2.5.1 *Soit G un graphe et A l'ensemble des centres d'étoiles de G. Le graphe G est appelé presque sans étoile si A est un ensemble indépendant (un stable) et pour chaque sommet $v \in A$ il existe deux sommet $x, y \in V - A$ tels que $N(v) \subset N[x] \cup N[y]$. $N(v)$ est double dominé dans $V - A$.*

Dans la figure 2.5.1 , un graphe presque sans étoile.

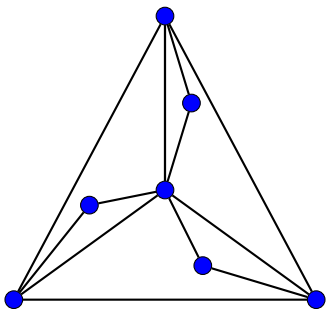


Figure 2.5.1 : Un graphe prèsque sans étoile.

Théorème 2.5.1 *([8], Ryjàcek, 1994) Si G est un graphe connexe, presque sans étoile ayant un nombre paire de sommet alors, G admet un couplage parfait.*

Théorème 2.5.2 *([29], Broesma et Ryjàcek et All, 1999) Si G est un graphe 2-connexe presque sans étoile d'ordre n tel que $\delta(G) \geq (n-2)/3$, alors G est hamiltonien.*

2.6 Graphe nearly (quasi) sans étoile

Définition 2.6.1 *Soit G un graphe et A l'ensemble des centres d'étoiles de G. Le graphe G est appelé nearly sans étoile si pour chaque sommet $v \in A$, il y a deux sommet $x, y \in N(v)$ tels que $x, y \notin A$ et $N(v) \subset N(x) \cup N(y) \cup \{x, y\}$.*

Dans la figure 2.6.1 , un graphe quasi sans étoile.

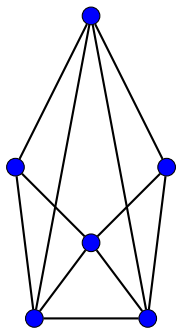


Figure 2.6.1 : Un graphe quasi sans étoile.

Théorème 2.6.1 *([28], Ainouche, 1998) Soit G un graphe $2-$connexe d'ordre n, si $d(x, y) = 2 \Rightarrow \max\{d(x), d(y)\} \geq n/2$, alors G est hamiltonien.*

Théorème 2.6.2 *([28], Ainouche, 1998) Si G est un graphe connexe, quasi sans étoile ayant nombre pair de sommet, alors G admet un couplage parfait.*

Corollaire 2.6.1 *([28], Ainouche, 1998) Si G un graphe $2-$connexe, quasi sans étoile, G est hamiltonien si $\gamma(G) \leq 2$.*

2.7 Graphe partiellement sans étoile

Définition 2.7.1 *Soit G un graphe et soit A l'ensemble des sommet centres d'étoiles de G. Le graphe G appelé partiellement sans étoile si pour tout sommet $v \in A$, il existe deux sommet $x, y \in V - A$ vérifiant: $N(v) \subset N[x] \cup N[y]$. C'est-à-dire $N(v)$ est double dominé dans $V - A$.*

Dans la figure 2.7.1 , un graphe partiellement sans étoile.

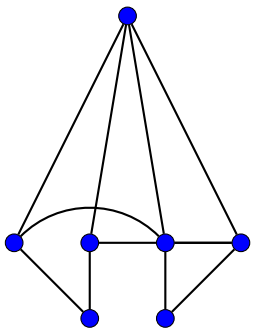


Figure 2.7.1 : Un graphe partiellement sans étoile.

Théorème 2.7.1 *([27], Abbas et Benmeziane, 2009) Si G est un graphe connexe, partiellement sans étoile ayant un nombre paire de sommet alors, G admet un couplage parfait.*

Théorème 2.7.2 *([27], Abbas et Benmeziane, 2009) SI G est un graphe 2-connexe partiellement sans étoile avec $\delta(G) \geq (n-2)/3$, alors G est hamiltonien.*

Théorème 2.7.3 *([27], Abbas et Benmeziane, 2009) SI G est un graphe 2-connexe partiellement sans étoile avec $\sigma_3(G) \geq n$, alors G est hamiltonien.*

Remarque 2.7.1 *La classe des graphes partiellement sans étoile contient la classe des graphes prèsque sans étoite définit par Ryjacek [8] .*

Remarque 2.7.2 *Tout graphe sans étoile est un graphe quasi sans étoile. Alors la classe des graphes quasi sans étoile contient la classe des graphes sans étoite introduire par Ainouche [28].*

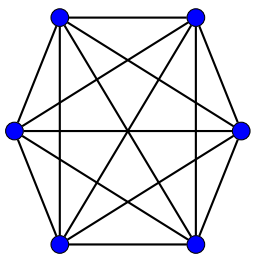
Chapitre 3

Quelques résultats sur les graphes partiellement sans étoile

Nous avons présenté dans le deuxième chapitre des résultats pour les graphes partiellement sans étoile. Ce troisième chapitre comporte quelques résultats que nous avons pu obtenir sur les graphes partiellement sans étoile.

3.1 Etude des graphes complets

Dans la figure 3.1.1 , K_6 est un graphes completes.



K_6

Figure 3.1.1 : Graphes complets.

Proposition 3.1.1 *Les graphes complets sont des graphes partiellement sans étoile.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe complet, et soit A l'ensemble des centres d'étoiles de G. Comme G n'admet pas de sous-graphe isomorphe à $K_{1,3}$, i.e $A = \Phi$. Par la contraposé

montrons l'éxistence d'un sommet $v \in A$ Vérifiant que $\forall x, y \in V - A$ tel que $N(v) \nsubseteq N[x] \cup N[y]$ (c'est-à-dire G est non partiellement sans étoile). Mais comme $A = \Phi$ alors G est partiellement sans étoile. ■

3.2 Etude des graphes total des chaînes d'ordre n

Définition 3.2.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Le graphe total de G, noté $T(G)$, est défini comme suit. l'ensemble des sommets de $T(G)$ est $V(G) \cup E(G)$, et deux sommets x, y de $T(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

1. $x, y \in V(G)$ et x, y sont adjacents dans G.
2. $x, y \in E(G)$ et x est adjacent à y dans G.
3. $x \in V(G), y \in E(G)$ et x est incident à y dans G.

Dans la figure 3.2.1 Le graphe total d'une chaîne d'ordre n .

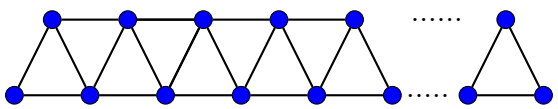


Figure 3.2.1 : Le graphe total d'une chaîne d'ordre n .

Proposition 3.2.1 *Les graphes total des chaînes d'ordre n sont des graphes partiellement sans étoile.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ la chaîne d'ordre n, et $T(G)$ le graphe total de G. Et soit A l'ensemble des centres d'étoile de $T(G)$. Comme $T(G)$ n'admet pas de sous-graphe isomorphe à $K_{1,3}$, $A = \Phi$. D'aprés la proposition 3.1.1, le graphe $T(G)$ est partiellement sans étoile. ■

3.3 Etude des graphes milieu des chaîne d'ordre n

Définition 3.3.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Le graphe milieu de G, noté $M(G)$, est défini comme suit. l'ensemble des sommets de $M(G)$ est $V(G) \cup E(G)$, et deux sommets x, y de $M(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

1. $x, y \in E(G)$ *et* x *est adjacent à* y *dans* G.

2. $x \in V(G), y \in E(G)$ *et* x *est incident à* y *dans* G.

Dans la figure 3.3.1 Le graphe milieu d'une chaîne d'ordre n .

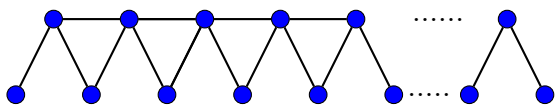


Figure 3.3.1 : Le graphe milieu d'une chaîne d'ordre n .

Proposition 3.3.1 *Les graphes milieu des chaîne d'ordre* n *sont des graphes partiellement sans étoile.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ la chaîne d'ordre n, et $M(G)$ Le graphe milieu de G. Et soit A l'ensemble des centres d'étoile de $M(G)$. Comme $M(G)$ n'admet pas de sous-graphe isomorphe à $K_{1,3}$, $A = \Phi$. D'aprés la proposition 3.1.1, le graphe $M(G)$ est partiellement sans étoile. ■

3.4 Etude des graphes particuliers icosaédrique et skeleton

- Graphe icosaédrique:

Dans la figure 3.4.1 , le graphe G est icosaédrique:

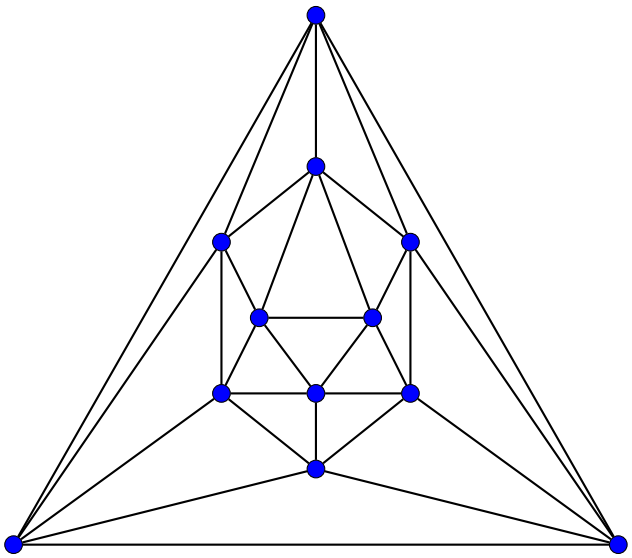


Figure 3.4.1 : G est un graphe icosaédrique.

Proposition 3.4.1 *Le graphe icosaédrique est partiellement sans étoile.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe icosaédrique, et soit A l'ensemble des centres d'étoile de G. Comme G n'admet pas de sous-graphe isomorphe à $K_{1,3}$, $A = \Phi$. D'après la proposition 3.1.1, le graphe G est partiellement sans étoile. ■

- Graphe skeleton:

Soit la figure 3.4.2 , contient un graphe skeleton:

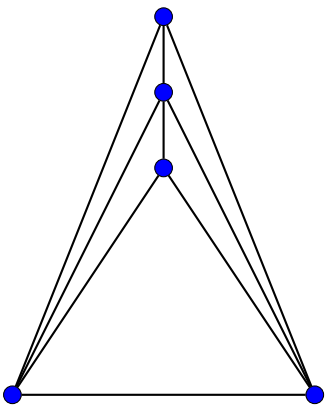


Figure 3.4.2 : Graphe skeleton.

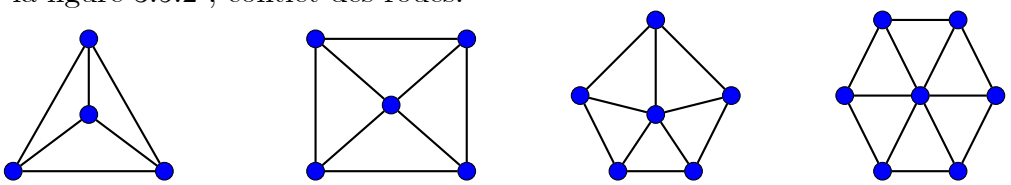
Proposition 3.4.2 *Le graphe skeleton est partiellement sans étoile.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe skeleton, et soit A l'ensemble des centres d'étoile de G. Comme G n'admet pas de sous-graphe isomorphe à $K_{1,3}$, $A = \Phi$. D'après la proposition 3.1.1, le graphe G est partiellement sans étoile. ■

3.5 Etude des roues

Définition 3.5.1 *Le roue W_n est un graphe d'ordre $n \geq 4$ formé en ajoutant un sommet centre connecté à tous les sommets du graphe cycle C_{n-1}. La notation W_n provient du nom anglais wheel graph mais n'est pas universelle. Certains auteurs préfèrent W_{n-1}.*

Soit la figure 3.5.2 , contiet des roues.



W_4 W_5 W_6 W_7

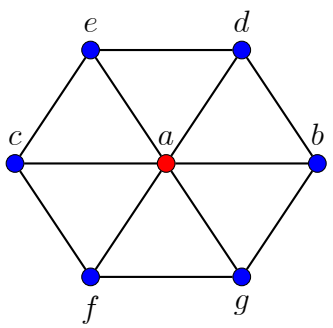
Figure 3.5.1 : Les roues.

Proposition 3.5.1 *Les roues d'ordre $n \prec 7$ sont des graphes partiellement sans étoile.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un roue d'ordre $n \prec 7$ et A son ensemble de centres, il est claire que $A = \Phi$. D'aprés la proposition 3.1.1, le graphe G est partiellement sans étoile. ■

Proposition 3.5.2 *le roue d'ordre 7est un graphe partiellement sans étoile.*

Dans la figure 3.5.2 , G est le roue d'ordre 7.



W_7

Figure 3.5.2 : G le graphe roue d'ordre 7.

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un roue d'ordre $n = 7$.On a $A = \{a\}$. Voir la figure 3.5.2 $N_G(a) = \{e, d, b, g, f, c\}$. Pour $b, c \in V - A$ on a: $N[b] = \{b, a, d, g\}$ et $N[c] = \{c, a, e, f\}$. D'où $N(a) \subset N[b] \cup N[c]$. Alors $N(a)$ est double dominé dans $V - A$. Donc W_7 est un graphe partiellement sans étoile. ■

Proposition 3.5.3 *Les roues d'ordre $n \succ 7$ ne sont pas des graphes partiellement sans étoile.*

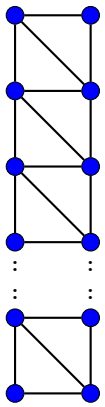
Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe roue d'ordre $n \succ 7$, et A son ensemble de centres. Clairement les $A = \{v\}$ avec $d(v) = n - 1$. Alors $|N(v)| = n - 1$, tous les sommet de cycle C_{n-1} de degré égale à 2 dans $V - A$, et soit $x, y \in V - A$ tel que $N[x] = \{x, N(x)\}$ et $N[y] = \{y, N(y)\}$, alors $\forall x \in V(G) : d(x) = 3$ et $|N(v)| = 2$ dans $V - A$ alors $N[x] = |N[y]| = 3$ mais si G d'ordre $n \succ 7$ alors $|N(v)| \geq 7$ donc $|N(v)| \succ |N[x] \cup N[y]|$ donc $N(v) \nsubseteq N[x] \cup N[y]$ car il y a toujours au moins un sommet dans $N(v)$ qui n'existe pas dans $\{N_G[x] \cup N_G[y]\}$. $N(v)$ n'est pas double dominé dans $V - A$. Donc les graphes roues d'ordre $n \succ 7$ ne sont pas des graphes partiellement sans étoile. ■

3.6 Etude des grilles où chaque face intérieure contient une corde

3.6.1 Etude des grilles $P_2 \square P_n$ où chaque face intérieure contient une corde

On considère que les grilles où chaque face intérieure contient une corde.

Soit la figure 3.6.1 , contient une grille $P_2 \square P_n$ où chaque face intérieure contient une corde.



$P_2 \square P_n$

Figure 3.6.1 : Grille où chaque face intérieure contient une corde .

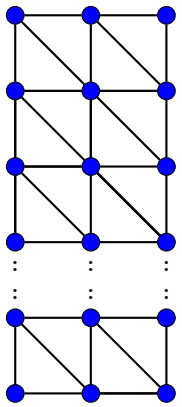
Proposition 3.6.1 *Les grilles $P_2 \square P_n$ où chaque face intérieure contient une corde sont des graphes partiellement sans étoile.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ la grille $P_2 \square P_n$ où chaque face intérieure contient une corde, et A son ensemble des centres d'étoile. Il est claire que G n'admet pas de sous-graphe isomorphe à $K_{1,3}$, $A = \Phi$. D'après la proposition 3.1.1 le graphe G est partiellement sans étoile. ■

3.6.2 Etude des grilles $P_3 \square P_n$ où chaque face intérieure contient une corde

On considère que les grilles où chaque face intérieure contient une corde.

Soit la figure 3.6.2 , contient une grille $P_3 \square P_n$ où chaque face intérieure contient une corde.



$P_3 \square P_n$

Figure 3.6.2 : Grille où chaque face intérieure contient une corde.

Proposition 3.6.2 *Les grilles $P_3 \square P_n$ où chaque face intérieure contient une corde sont des graphes partiellement sans étoile.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ une grille $P_3 \square P_n$où chaque face intérieure contient une corde, et soit A l'ensemble des centres d'étoile de G, soit $v \in A$, on à 2 cas:

Cas 1 : Supposons $n = 3$. Alors $|N(v)| = 6$ dans $V - A$ et les 6 sommet qui sont adjacents à v sont de degré au moins 2 dans $V - A$. On a pour tout $x \in V - A, |N[x]| \geq 3$. Considerant $y \in V - A$ tel que $N[x] \cap N[y] = \Phi$. On a: $|N[x] \cup N[y]| = |N[x]| + |N[y]| \geq 6$ et $N(v) \subset N[x] \cup N[y]$. Alors $N(v)$ est 2 dominé dans $V - A$.

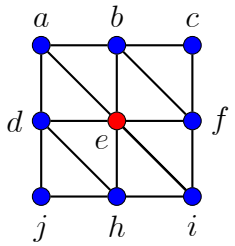
Cas 2 :supposons $n \geq 4$:

Sous cas 1 : si v est adjacent a un sommet de A, alors $|N(v)| = 5$ dans $V - A$ et les 5 sommet qui adjacent a v sont de degré au moins 2 dans $V - A$, on a $\forall x \in V - A, |N(x)| \geq 3$ on considère $y \in V - A$ tel que $N[x] \cap N[y] = \Phi$, et on a: $|N[x] \cup N[y]| = |N[x]| + |N[y]| \geq 6$, donc $N(v) \subset N[x] \cup N[y]$ alors $N(v)$ est 2 dominé dans $V - A$.

Sous cas 2 : si v est adjacent a 2 sommet de A, alors $|N(v)| = 4$ dans $V - A$ et les 4 sommet qui adjacent a v sont de degré au moins 2 dans $V - A$, on a $\forall x \in V - A, |N(x)| \geq 3$ on considère $y \in V - A$ tel que

$N[x] \cap N[y] = \Phi$, et on a: $|N[x] \cup N[y]| = |N[x]| + |N[y]| \geq 6$, donc $N(v) \subset N[x] \cup N[y]$ alors $N(v)$ est 2 dominé dans $V - A$, alors le graphe G est partiellement sans étoile. ■

Exemple 3.6.1 *Soit La grille $P_3 \square P_3$ où chaque face intérieure contient une corde* :



$P_3 \square P_3$

Figure 3.6.3 : Grille où chaque face intérieure contient une corde.

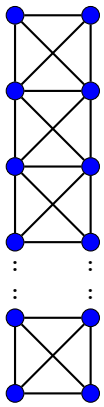
D'aprés la figure 3.6.3 le graphe G contient un seul centre d'étoiles avec $A = \{e\}$, et $N(e) = \{a, b, d, f, i, h\}$, il existe deux sommet $f, d \in V - A$ tel que $N[f] = \{f, e, c, b, i\}$ et $N[d] = \{d, b, a, h, e\}$ donc $N(e) \subset N[f] \cup N[d]$ alors $N(e)$ est double dominé dans $V - A$. D'où G est partiellement sans étoile.

3.7 Etude des grilles où chaque face intérieure contient deux corde

3.7.1 Etude des grilles $P_2 \square P_n$ où chaque face intérieure contient deux corde

On considère que les grilles où chaque face intérieure contient 2 corde.

Soit la figure 3.7.1 , contient une grille $P_2 \square P_n$ où chaque face intérieure contient 2 corde.



$P_2 \square P_n$

Figure 3.7.1 : Grille ou chaque face intérieure contient 2 corde.

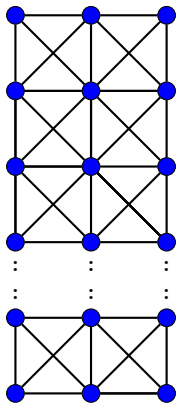
Proposition 3.7.1 *Les grilles $P_2 \square P_n$ où chaque face intérieure contient deux corde sont des graphes partiellement sans étoile.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ une grille $P_2 \square P_n$ où chaque face intérieure contient 2 corde, et soit A l'ensemble des centres d'étoile de G, il est claire que G n'admet pas de sous-graphe isomorphe à $K_{1,3}$. D'après la proposition 3.1.1 le graphe G est partiellement sans étoile. ■

3.7.2 Etude des grilles $P_3 \square P_n$ où chaque face intérieure contient deux corde

On considère que les grilles où chaque face intérieure contient 2 corde.

Soit la figure 3.7.2 , contient une grille $P_3 \square P_n$ où chaque face intérieure contient 2 corde.



$P_3 \square P_n$

Figure 3.7.2 : Grille où chaque face intérieure contient 2 corde.

Proposition 3.7.2 *Les grilles $P_3 \square P_n$ où chaque face intérieure contient deux corde sont des graphes partiellement sans étoile.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ une grille $P_3 \square P_n$ où chaque face intérieure contient 2 corde , et soit A l'ensemble des centres d'étoile de G, soit $v \in A$, on à 2 cas:

Cas 1 : supposons $n = 3$. Alors $|N(v)| = 8$ dans $V - A$ et les 8 sommet qui sont adjacents à v sont de degré au moins 2. On a pour tout $x \in V - A$, $|N[x]| = 4$ ou 6. On choisit x et y tel que $|N[x]| = |N[y]| = 6$ et $xy \notin E(G)$ On a: $|N[x] \cap N[y]| = 3$ et $|N[x] \cup N[y]| = |N[x]| + |N[y]| - |N[x] \cap N[y]| = 6 + 6 - 3 = 9$.

Donc $N(v) \subset N[x] \cup N[y]$. Alors $N(v)$ est 2 dominé dans $V - A$.

Cas 2 :Supposons $n \geq 4$:

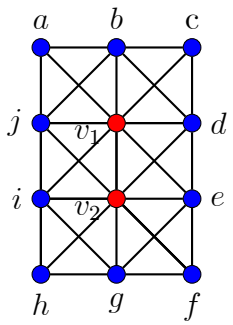
Sous cas 1 : si v est adjacent a un sommet de A, alors $|N(v)| = 7$ et les 7 sommet qui adjacent a v sont de degré au moins 2 dans $V - A$, on choisit x et y tel que $|N[x]| = |N[y]| = 6$ et $xy \notin E(G)$ On a: $|N[x] \cap N[y]| = 3$ et $|N[x] \cup N[y]| = |N[x]| + |N[y]| - |N[x] \cap N[y]| = 6 + 3 = 9$.

Donc $N(v) \subset N[x] \cup N[y]$. Alors $N(v)$ est 2 dominé dans $V - A$.

Sous cas 2 :si v est adjacent a deux sommet de A, alors $|N(v)| = 6$ dans $V - A$ et les 6 sommet qui sont adjacents à v sont de degré au moins 2 dans $V - A$. On a pour

tout $x \in V - A$, $|N[x]| \geq 3$. Considèrons $y \in V - A$ tel que $N[x] \cap N[y] = \Phi$. On a: $|N[x] \cup N[y]| = |N[x]| + |N[y]| \geq 6$ et $N(v) \subset N[x] \cup N[y]$. Alors $N(v)$ est 2 dominé dans $V - A$. Donc G est partiellement sans étoile. ■

Exemple 3.7.1 *Soit La grille $P_3 \square P_4$ où chaque face intérieure contient 2 corde :*



$P_3 \square P_4$

Figure 3.7.3 : Grille où chaque face intérieure contient 2 corde.

D'après la figure 3.7.3 le graphe G contient 2 centre d'étoile, avec $A = \{v_1, v_2\}$, et $N(v_1) = \{a, b, c, d, e, i, j, v_2\}, N(v_2) = \{d, e, f, g, h, i, j, v_1\}$.

- Pour v_1 :

Il éxiste deux sommet $d, j \in V - A$ tel que $N[d] = \{b, c, d, e, v_1, v_2\}$ et $N[j] = \{a, b, i, j, v_1, v_2\}$ alors $N(v_1) \subset N[d] \cup N[j]$, donc $N(v_1)$ est 2 dominé dans $V - A$.

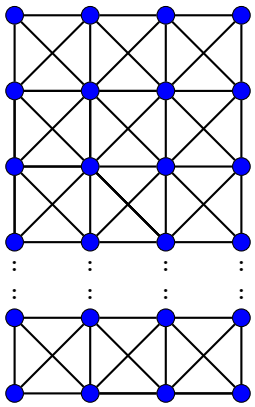
- Pour v_2 :

Il éxiste deux sommet $e, i \in V - A$ tel que $N[e] = \{d, e, f, g, v_1, v_2\}$ et $N[i] = \{g, h, i, j, v_1, v_2\}$. Alors $N(v_2) \subset N[e] \cup N[i]$ donc $N(v_2)$ est 2 dominé dans $V - A$.

Donc G est partiellement sans étoile.

3.7.3 Etude des grilles $P_4 \square P_n$ où chaque face intérieure contient deux corde

Soit la figure 3.7.4 , contient une grille $P_4 \square P_n$ où chaque face intérieure contient 2 corde.



$P_4 \square P_n$

Figure 3.7.4 : Grille où chaque face intérieure contient 2 corde.

Proposition 3.7.3 *Les grilles $P_4 \square P_n$ où chaque face intérieure contient deux corde sont des graphes partiellement sans étoile.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ une grille $P_4 \square P_n$ où chaque face intérieure contient 2 corde, et soit A l'ensemble des centres d'étoile de G, soit $v \in A$, on à 2 cas:

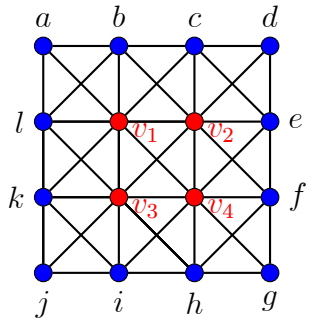
Cas 1 : Supposons que $n = 4$. Alors $|N(v)| = 5$ dans $V - A$ et les 5 sommet qui adjacent a v sont de degré au moin 2 dans $V - A$. On a pour tout $x \in V - A, |N[x]| \geq 3$. Considérant $y \in V - A$ tel que $N[x] \cap N[y] = \Phi$. On a: $|N[x] \cup N[y]| = |N[x]| + |N[y]| \geq 6$ et $N(v) \subset N[x] \cup N[y]$. Alors $N(v)$ est 2 dominé dans $V - A$.

Cas 2 : Supposons que $n \geq 5$:

Sous cas 1 : si v est adjacent a 3 sommet de A. Alors $|N(v)| = 5$ dans $V - A$. On a montres sur la première cas.

Sous cas 2 : si v est adjacent a 5 sommet de A. Alors $|N(v)| = 3$ dans $V - A$. Les 3 sommet qui adjacent a v sont de degré au moin 1 dans $V - A$. On a pour tout $x \in V - A, |N[x]| \geq 2$. Considérant $y \in V - A$ tel que $N[x] \cap N[y] = \Phi$. On a: $|N[x] \cup N[y]| = |N[x]| + |N[y]| \geq 4$ et $N(v) \subset N[x] \cup N[y]$. Alors $N(v)$ est 2 dominé dans $V - A$. Donc G est partiellement sans étoile. ■

Exemple 3.7.2 *Soit la grille $P_4 \square P_4$ où chaque face intérieure contient 2 corde* :



$P_4 \square P_4$

Figure 3.7.5 : Grille où chaque face intérieure contient 2 corde.

D'aprés la figure 3.7.5 le graphe G contient 4 centre d'étoile, avec $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, et $N(v_1) = \{a, b, c, k, l, v_2, v_3, v_4\}, N(v_2) = \{b, c, d, e, f, v_1, v_3, v_4\}, N(v_3) = \{e, f, g, h, i, v_1, v_2, v_4\}, N(v_4) = \{h, i, j, k, l, v_1, v_2, v_3\}$

- Pour v_1 :

  Il existe deux sommet $b, i \in V - A$ tel que $N[b] = \{a, b, c, l, v_1, v_2\}$ et $N[i] = \{h, i, g, k, v_3, v_4\}$ alors $N(v_1) \subset N[b] \cup N[i]$, donc $N(v_1)$ est double dominé dans $V - A$.

- Pour v_2 :

  Il existe deux sommet $e, l \in V - A$ tel que $N[e] = \{c, d, e, f, v_2, v_3\}$ et $N[l] = \{a, b, k, l, v_1, v_4\}$ alors $N(v_2) \subset N[e] \cup N[l]$, donc $N(v_2)$ est double dominé dans $V - A$.

- Pour v_3 :

  Il existe deux sommet $c, h \in V - A$ tel que $N[c] = \{b, c, d, e, v_1, v_2\}$ et $N[h] = \{f, g, h, i, v_3, v_4\}$ alors $N(v_3) \subset N[c] \cup N[h]$, donc $N(v_3)$ est double dominé dans $V - A$.

- Pour v_4 :

  Il existe deux sommet $f, k \in V - A$ tel que $N[f] = \{e, f, g, h, v_2, v_3\}$ et $N[k] = \{i, j, k, l, v_1, v_4\}$ alors $N(v_4) \subset N[f] \cup N[k]$, donc $N(v_4)$ est double dominé dans $V - A$.
  Donc G est partiellement sans étoile.

3.8 Etude le graphe de peterson

Soit la figure 3.8.1 , représent un graphe de peterson.

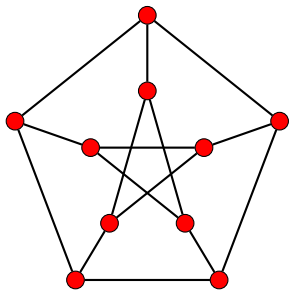


Figure 3.8.1 : Graphe de peterson.

Proposition 3.8.1 *Le graphe de peterson est un graphe non partiellement sans étoile.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un un graphe peterson, et soit A l'ensemble des centres d'étoile de G, d'après la figure 3.8.1 tout les sommet de G sent des centres d'étoile, alors $A = V$, Par la contraposé montrons l'existant d'un sommet $v \in A$ vérifié que $\forall x, y \in V - A$ tel que $N(v) \nsubseteq N[x] \cup N[y]$, comme $V - A$ est vide alors $N[x] \cup N[y] = \Phi$ et $N(v) \nsubseteq \Phi$ donc $N(v)$ n'est pas double dominé dans $V - A$, alors G non partiellement sans étoile. ■

Lemme 3.8.1 *.Pour tout $G = (V, E)$ Si $A = \Phi$ alors est partiellement sans étoile.*

Lemme 3.8.2 *Pour tout $G = (V, E)$ Si $A = V$ alors G non partiellement sans étoile.*

Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce mémoire à l'étude de quelques graphes partiellement sans étoile. Les plus importants résultats obtenus ce travail ont été notre objectif. On a vérifié que les graphes complet, les graphes total et milieu des chaîne d'ordre n, les graphes roues d'ordre $n \leq 7$, les graphes grille $P_2 \square P_n$ et $P_3 \square P_n$ où chaque face intérieure contient une corde, Les graphes grilles $P_2 \square P_n$, $P_3 \square P_n$, $P_4 \square P_n$ où chaque face intérieure contient deux corde sont des graphes partiellement sans étoile.

Remarque 3.8.1 *1. Les cycles sont des graphes partiellement sans étoile.*

2. Un arbre contient un sommet de degré supérieure ou égale à 3 *est un graphe partiellement sans étoile.*

Bibliographie

[1] Cabot, Sébastien. dans le cadre du cours "Théorie des graphes" donné à l'Université de Montréal durant la session d'hiver 2008.

[2] Allan, R.B.; Lasker, R.: On domination and independent domination numbers of a graph. Discree Math. 23 (1978) 73-76.

[3] Chundnovsky Maria adaul Seymour, "Claw-free graphs VII. Colouring claw-freegraphs", manuscript, 2004.

[4] Li, Hao; Virlouvet, C.: Neighborhood conditions for claw-free hamiltonian graphs. Ars combin. 29A(1990) 109-116.

[5] Jackson, Bill: Hamilton cycles in regular 2-connected graphs. J. Combin. Theory Ser. B 29(1980) 27-46.

[6] Gernert, D.: Forbidden and una voidable subgraphs. Ars Combin. 27(1989) 165-176.

[7] Flandrin, E.; Li, Hao: Chvátal-Erdos condition in 3-connected claw-free graphs. Rapp ort de Rec herc he L.R.I. No. 500, Univ. P aris-Sud, Orsa y , 1989.

[8] Ryjácek, Z.: Almost claw-free graphs. J. Graph Theory 18(1994) 469-477.

[9] Diny , D.A.; Harary , F .; McMorris, F .R.: A surv ey of results on a graph with specied hereditary properties. Ars Combin. 20B(1985) 193-205.

[10] Matthews, M.M.; Sumner, D.P .: Longest paths and cycles in $K_{1,3}$-free graphs. J.Graph Theory 9(1985) 269-277.

[11] Broersma, H.J.: Sucient conditions for hamiltonicity and traceability of $K_{1,3}$-free graphs. Preprint, 1986 (unpublished).

[12] Liu, Yiping; Tian, Feng; Wu, Zhengshen: Some results on longest paths and cycles in $K_{1,3}$-free graphs. J. Changsha Railway Inst. 4(1986) 105-106.

[13] Faudree, R.J.; Gould, R.J.; Lindquester, T .E.: Hamiltonian properties and adjacency conditions in $K_{1,3}$-free graphs. Proc. of the 6th Int. Conf. on Theory and Applications of Graphs, Kalamazoo, 1988; Graph Theory , Com bin. Appl. 1(1991) 467-479.

[14] Bauer, D.; Fan, G; V eldman, H.J.: Hamilton properties of graphs with large neighb orhood unions. Discrete Math. 96(1991) 33-49.

[15] Flandrin, E.; Fouquet, J.L.; Li, Hao: On hamiltonian claw-free graphs. Discrete Math. 111 (1993) 221-229.

[16] Li, Mingchu: Hamiltonian cycles in 3-connected claw-free graphs. J. Graph Theory (1993) 303-313.

[17] Li, Guojun; Liu, Zhenhong; Lu, Mei: Hamiltonian cycle in 3-connected claw-free graph. Preprint.

[18] Li, Mingchu: A note on circumfere nces of 3-connected cla w-free graph. J. Nanjing. Univ. Nat. Sci., Sp ec. Issue on Graph Theory , V ol. 27 (1991) 98-105.

[19] Wang, Jianglu: Longest cycles in 3-connected and cla w-free graphs (Chinese, English summary). J. Nanjing Univ. Nat. Sci., Sp ecial Issue on Graph Theory , V ol. 27 (1991) 110-122.

[20] Zhang, C.-Q.: Hamilton cycles in claw-free graphs. J. Graph Theory 12(1988) 209-216.

[21] Ainouc he, A.: Hamiltonian and traceable claw-free graphs. Preprint.

[22] Liu, Yiping; Wu, Zhengsheng: Hamilton cycles in 2-connected regular K1;3-free graphs. Preprin t, Nanjing University, China, 1987.

[23] J.A. Bondy, Pancyclic graphs I, J. Combin. Theory 11 (1971) 80-84.

[24] G.A. Dirac, Some theorems on abstract graphs, Proc. London Math. Sot. 2 (1952) 69-81.

[25] J.A. Bondy and V. Chvatal, A method in graph theory, Discrete Math. 15 (1976) 111-135.

[26] L. Clark, Hamiltonian properties of connected locally connected graphs, Congr. Numer. 32 (1981) 199-204.

[27] M.Abbas and Z.Benmeziane, Hamiltonicity in Partly Claw-free Graphs. RAIRO-Oper.Res. 43(2009) 103-113.

[28] Ainouche.A, Quasi-claw-free graphs. Discrete Mathematics. 179(1998) 13-26.

[29] H.J. Broesma, Z. Ryjacek and E.F. Schiermeyer. Toughnes and Hamiltonicity in almost claw-free graphs. J. Graph theory 21 (1999) 431-439.