République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Yahia Farès de Médéa
Département de Mathématiques et de l'Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Recheche Opérationelle

par
BENAISSA Selma & MBARKI Sarah

Etude du nombre d'alliance puissante globale dans quelques classes de graphes

---

Soutenu publiquement le 29/09/2020 devant le jury composé de

TABLENNEHAS Kamel	*M.A.A*	Université Dr Yahia Farès de Médéa ...	Président.
IKHLEFESCHOUF Noureddine	*M.C.A*	Université Dr Yahia Farès de Médéa ...	Examinateur.
ZAMIME Mohamed	*M.C.B*	Université Dr Yahia Farès de Médéa ...	Examinateur.
BOUZEFRANE Mohamed	*M.A.A*	Uuniversité Dr Yahia Farès de Médéa ...	Encadreur.

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2019-2020

Table des matières

Résumé i

Abstract i

Remerciements i

Introduction générale 1

Introduction générale 1

1 Notions générales sur les graphes 3

1.1 Définitions et notations 3

1.1.1 Graphe non orienté 3

1.1.2 Sous graphe, graphe partiel 4

1.1.3 Graphes isomorphes 4

1.1.4 Degré d'un sommet 4

1.1.5 Voisinages 5

1.1.6 Minimalité et maximalité d'un ensemble 5

1.1.7 Chaînes et cycles 6

1.1.8 Connexité 6

1.1.9 Distance 6

1.1.10 Excentricité 7
1.1.11 Diamètre 7
1.1.12 Graphes particuliers 7
1.1.13 Quelques invariants d'un graphe 13
1.2 Concept de domination dans les graphes 14
1.2.1 Ensemble dominant 14
1.2.2 Quelques types de domination 14
1.3 Classes de complexité 15

2 État de l'art 17
2.1 Historique 17
2.2 Types d'alliances 18
2.2.1 Alliances défensives 18
2.2.2 Bornes sur $\gamma_d(G)$ et $\gamma_{\hat{d}}(G)$ 18
2.2.3 Alliances offensives 19
2.2.4 Bornes sur $\gamma_o(G)$ et $\gamma_{\hat{o}}(G)$ 20
2.2.5 Alliances puissantes 21
2.2.6 Quelques résultats existants sur γ_{ap}, γ_d et γ_o dans les chaînes . . 22
2.2.7 Quelques résultats existants sur γ_{ap}, γ_d et γ_o dans les cycles . . 23
2.2.8 Quelques résultats existants sur γ_{ap}, γ_d et γ_o dans les graphes complets 23

3 Calcul du nombre d'alliance puissante globale dans quelques classe de graphe 24
3.1 Bornes sur γ_{ap} et a_p 24
3.2 Relations entre le nombre d'alliance puissante globale ($\gamma_{ap}(G)$) et le nombre de domination ($\gamma(G)$) 25

3.3 Relations entre le nombre d'alliance puissante globale(γ_{ap}) et le nombre d'alliance défensive globale (γ_d) 25
3.4 Relations entre γ_{ap} et a_p dans les chaînes, les cycles, les graphes complets et les graphes bipartis complets 29
3.5 Relations entre γ_d et γ_o et γ_{ap} dans les graphes complets 30
3.6 Calcul du nombre d'alliance puissante globale(γ_{ap}) pour les graphe milieux 30
3.6.1 Calcul du nombre d'alliance puissante globale(γ_{ap}) pour le graphe milieu d'une chaîne 31
3.6.2 Calcul du nombre d'alliance puissante globale (γ_{ap}) pour le graphe milieu d'un cycle 32
3.6.3 Calcul du nombre d'alliance puissante globale(γ_{ap}) pour le graphe milieu d'une double étoile 34
3.7 Calcul du nombre d'alliance puissante globale(γ_{ap}) pour les grilles . . . 36
3.7.1 Produits cartésien des graphes 37
3.7.2 Les alliances défensives globale(γ_d)pour les grilles 37
3.7.3 Les alliances offensives globale(γ_o) pour les grilles 39
3.8 Les alliances puissantes globale(γ_{ap}) pour les grilles 40
3.9 Relation entre γ_{ap} et γ_d et γ_o pour les chenilles 42

Conclusion **44**

Bibliographie **45**

Table des figures

1.1 Un graphe simple 4
1.2 Un graphe complet K_5. 7
1.3 Un graphe complémentaire de K_5. 8
1.4 Un graphe planaire. 8
1.5 Un graphe discret. 8
1.6 Un graphe 2-régulier d'ordre 5. 8
1.7 Un graphe bipartie. 9
1.8 Un graphe bipartie complet 9
1.9 Un arbre. 10
1.10 Une étoile. 10
1.11 Une double étoile. 11
1.12 Une étoile subdivisée. 11
1.13 Un cactus graphe. 12
1.14 Une couronne. 12

2.1 $\gamma_d(G) = 5$. 18
2.2 $\gamma_o(G) = 2$. 20
2.3 $\gamma_{ap}(G) = 5$. 22

3.1 $\gamma_d(P_4) = \gamma_o(P_4) = \gamma_{ap}(P_4)$ 26

3.2 $\gamma_d(P_6) = \gamma_o(P_6) \neq \gamma_{ap}(P_6)$ 26
3.3 égalité entre γ_d et γ_{ap} 27
3.4 $\gamma_d(C_6) = \gamma_{ap}(C_6) = 2$ 27
3.5 $\gamma_d(C_4) \neq \gamma_{ap}(C_4)$ 27
3.6 $\gamma_d(C_5) \neq \gamma_{ap}(C_5)$ 28
3.7 $\gamma_{ap}(S_{1,3}) = 2 = 1 + \lfloor k/2 \rfloor$ 28
3.8 $\gamma_{ap}(S_{1,5}) = 3 = 1 + \lfloor k/2 \rfloor$. 28
3.9 $\gamma_d(S_{2,2}) = \gamma_{ap}(S_{2,2}) = 4$ 29
3.10 $\gamma_d(S_{3,3}) = 4 = \gamma_{ap}(S_{3,3})$ 29
3.11 $\gamma_d(S_{4,4}) = \gamma_{ap}(S_{4,4}) = 4$ 29
3.12 $(M(P_2)) = P_3$ 31
3.13 $\gamma_d(M(P_2)) = 2$ 32
3.14 $\gamma_o(M(P_2)) = 1$ 32
3.15 Le graphe milieu d'un $P3$ 32
3.16 $\gamma_d(M(P_3))$ et $\gamma_o(M(P_3))$ 32
3.17 $M(S_{3,3})$ 34
3.18 $\gamma_d(M(S_{3,3}))$ 34
3.19 $\gamma_o(M(S_{3,3}))$ 34
3.20 $\gamma_d(M(S_{2,4}))$ 35
3.21 $\gamma_o(M(S_{2,4}))$ 35
3.22 $\gamma_d(M(S_{4,2}))$ 35
3.23 $\gamma_o(M(S_{4,2}))$ 36
3.24 Une chenille $Ch(2, 2.....2, 2)$. 42

Résumé

Le but principal de ce mémoire est l'étude du nombre d'alliance puissante globale dans quelques classes de graphes.

Dans ce mémoire, nous donnons quelques relations entre le nombre d'alliance puissante globale γ_{ap}, le nombre d'alliance défensive globale γ_d et le nombre d'alliance offensive globale γ_o pour quelques graphes particuliers comme les graphes complets et les chenilles.Nous donnons aussi quelques résultats sur le nombre d'alliance puissante globale γ_{ap} dans les graphes milieu et les grilles.

Et nous terminons par une conclusion générale sur nos travaux réalisés, et comme perspective, nous proposons quelques questions pour les recherches futurs.

Abstract

The main goal of this memory is the study of the number of global powerful alliances in some classes of graphs.

In this thesis, we give some relations between the number of global powerful alliance γ_{ap}, the number of global defensive alliance γ_d and the number of global offensive alliance γ_o for some particular graphs like full graphs and caterpillars.

We also give some results on the number of global powerful alliance γ_{ap} in middle and grid graphs.

And we end with a general conclusion on our work done, and as a perspective, we offer some questions for future research.

ملخص

الهدف الرئيسي من هذه المذكرة هو دراسة عدد التحالف العالمي القوي في بعض فئات الرسوم البيانية.

في هذه المذكرة نقدم بعض العلاقات بين عدد التحالف العالمي القوي γ_{ap} وعدد التحالف الدفاعي العالمي γ_d وعدد التحالف الهجومي العالمي γ_o لبعض الرسوم البيانية المعينة مثل الرسوم البيانية الكاملة واليرقات. نقدم أيضا بعض النتائج عن عدد التحالف العالمي القوي γ_{ap} في الرسوم البيانية الوسطى والشبكية. وننتهي باستنتاج عام حول عملنا المنجز، وكمنظور، نقدم بعض الأسئلة للبحث في المستقبل.

Remerciements

Nous remercions en premier lieu ***ALLAH*** *pour la foi, la confiance et la volonté, il nous a dotés pour la réalisation de ce travail .*

Nos remerciements vont à ***Mr BOUZEFRANE*** *sans qui, notre mémoire n'aurait pu voir lieu, nous tenons à lui montrer toute notre reconnaissance pour s'être rendu disponible dans une période très difficile. Ce dernier a su faire preuve de patience, de professionnalisme et de savoir-faire tout au long de la durée de la recherche.*

Nous exprimons nos remerciements chaleureux à Mr TABLENNEHAS qui notre a honoré en acceptant d'être président du jury de notre thèse.

Nos remerciements s'adressent également à Mr IKHLEFESCHOUF Noureddine, Mr ZAMIME Mohamed, qui nous a honorés en acceptant de faire partie de notre jury et d'examiner notre travail..

Enfin, nous remercions tous nos enseignants, et tous ceux qui de près ou de loin, ont contribué à ce travail.

Dédicace

Au nom de dieu qui nous a éclairé les chemins de savoir,je dédie ce modeste travail : A mes très chers parents symbole de douceur,de tendresse et d'amour qui ont consacré leur existence à bâtir la mienne, pour leur soutien, patience et soucis de tendresse et d'affection pour tout ce qu'ils ont fait pour que je puisse arriver à ce stade

A mes chères sœurs : pour leurs encouragements, et l'amour dont elles m'ont entouré.Que Dieu procure bonheur, santé et grand succès.

A tout les membres de ma famille maternelle et paternelle.

A ma chère soeur et binôme Selma qui ma toujours soutenu grâce à sa présence et son amitié,je la souhaite une impeccable vie.

A mes adorables amies : Abla, Fouzia, Nesrine, Soumia, Fatiha, Nabila, asmae, fathia, Samia.

A mes collègues de la promotion de recherche opérationnelle.

A tous ceux qui me sont chers.

Sarah

Dédicace

Au nom de dieu qui a nous a éclairé les chemins de savoir, je dédie ce modeste travail : A mes très chers parents symbole de douceur, de tendresse et d'amour qui ont consacré leur existence à bâtir la mienne, pour leur soutien, patience et soucis de tendresse et d'affection pour tout ce qu'ils ont fait pour que je puisse arriver à ce stade.

A mon bonheur de vie, à ma joie de vivre mon fils Mohamed Abd el mohaimine ; que Dieu procure bonheur, santé et grand succès.

A ma chère sœur Imene pour leur encouragements, et l'amour dont elle m'a entouré.

A mon cher frère Aniss, pour leur encouragements, et l'amour dont il m'a entouré.

A tout les membres de ma famille maternelle et paternelle, spécialement à ma grand mère Mani

A ma chère sœur et binôme Sarah qui ma toujours soutenu grâce à sa présence et son amitié, je la souhaite une impeccable vie.

A mes adorables amies : Abla, Fatima, Imene et Mellina.

A toutes les familles : BENAISSA, BOUKRIBIA, BENMALEK, BOUAMRA SOUNA et sans oublier la famille M'SALLAH.

A mes collègues de la promotion de recherche opérationnelle.

A tous ceux qui me sont chers.

Selma

Introduction générale

La recherche opérationnelle est la discipline des méthodes scientifiques utilisables pour élaborer de meilleures décisions. Elle permet de rationaliser, de simuler et d'optimiser l'architecture et le fonctionnement des systèmes de production ou d'organisation. La naissance comme science se dresse pendant la Seconde Guerre mondiale et l'origine du nom vient pour les opérations militaires, la vraie formation de la Recherche Opérationnelle est beaucoup plus ancienne, vers le XVIIe siècle (du point de vue mathématique). la Recherche Opérationnelle comprend un grand nombre de disciplines comme la Théorie des Graphes (Konig, 1936 puis Berge, 1958),la Programmation Linéaire (Dantzig, 1949)[,la Programmation Dynamique (Bellmann, 1954),la Théorie des Jeux (Von Neumann et Morgestern, 1944). L'optimisation non linéaire.

La théorie des graphes est la plus puissante discpline dans la recherche opérationnelle. L'étude des graphes a commencé depuis le 18iéme siècle par un problème de curiosité mathématique lorsque Euler a posé le célèbre problème du pont de Kønigsberg (Kaliningrad). Ces deux dernières décennies la théorie des graphes a suscité un intérêt exponentiel essentiellement grâce a son rôle comme des modèles d'optimisation et de calculs explicites nécessitant la conception et l'analyse de plusieurs algorithmes. En outre de son rôle éminent dans l'informatique, les mathématiques appliquées (analyse numérique matricielle), la biologie, la physique (circuits electriques), la chimie..., la théorie des graphes est devenue l'un des instruments les plus efficaces pour résoudre de nombreux problèmes discrets que pose de nombreux théories trés utiles . Autrement dit elle contribue à résoudre de nombreux problèmes concrets de la vie courante.

La théorie des graphes est, avec la combinatoire, une des pierres angulaires de ce qu'il est commun de désigner par mathématiques discrètes. Cependant, elle n'a reçu qu'assez tardivement une attention soutenue de la part de la communauté mathématique . Ainsi,

un des premiers ouvrages, si pas le premier, traitant de théorie des graphes Théorie der endlichen und unendlichen Graphen" écrit par Konig remonte à 1936. Depuis cette époque, la théorie des graphes s'est largement développée et fait à présent partie du cursus standard en mathématiques de bon nombre d'universités. Ces notes de cours constituent le support écrit du cours dispensé aux deuxièmes bacheliers en sciences mathématiques de l'université de Liège. Un graphe G = (V,E) est essentiellement défini par une relation binaire $E \subseteq V \times V$ sur un ensemble V le plus souvent ni (nous ne ferons que de brèves incursions dans le monde des graphes innis, ce qui sera d'ailleurs l'occasion de donner un avant-gou^t de la théorie des langages formels), il est impensable de vouloir traiter efficacement un problème réel (i.e de taille non négligeable) sans posséder de solides bases. Ainsi, nos développements seront principalement théoriques.

La technique de domination est devenue donc un outil pour la résolution des problèmes de la théorie des graphes, il s'agit de trouver un ensemble de sommets d'un graphe qui satisfasse certaines conditions.

Dans notre mémoire, nous intéressons d'étudier une notion très dans la théorie des graphes c'est les alliance dans les graphe.l'apparition de cette notion pour la première fois était par Kristiansen et Hedetniemi dans [10] .

Notre mémoire comporte trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions générales de la théorie des graphes.

Dans le deuxième chapitre nous définissons quelques concepts de domination.

Le dernier chapitre comporte une contribution sur les alliances dans les graphes avec quelques résultats existants.

Chapitre 1

Notions générales sur les graphes

1.1 Définitions et notations

1.1.1 Graphe non orienté

Un graphe non orienté G est la donnée d'un couple $G = (V, E)$ tel que V est un ensemble fini de sommets, E est un ensemble de couples non ordonnés de sommets $(v_i, v_j) \in V^2$.

Une paire (vi, v_j) est appelée une arête, et est représentée graphiquement par $v_i - v_j$. On dit que les sommets v_i et v_j sont adjacents. L'ensemble des sommets adjacents au sommet $v_i \in V$ est noté $Adj(v_i) = v_j \in V, v_i, v_j \in E$.

-Une boucle est une arête reliant un sommet à lui-même.

-Un graphe non-orienté est dit simple s'il ne comporte pas de boucle, et s'il ne comporte jamais plus d'une arête entre deux sommets.

-Un graphe non orienté qui n'est pas simple est un multi-graphe. Dans le cas d'un multi-graphe, E n'est plus un ensemble mais un multi-ensemble d'arêtes. On se restreindra généralement dans la suite aux graphes simples.

-On appelle ordre d'un graphe le nombre de ses sommets, i.e c'est $card(V)$ et on appelle taille d'un graphe le nombre de ses arêtes, i.e c'est $card(E)$.

La Figure suivante montre un graphe simple G avec $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ et $E(G) =$

$\{ab, ac, bc, cd\}$.

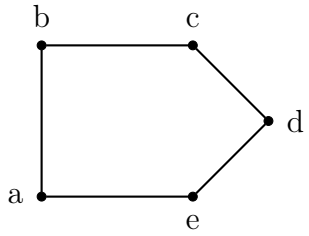


FIGURE 1.1: Un graphe simple

1.1.2 Sous graphe, graphe partiel

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, pour un sous-ensemble $A \in V$, le sous graphe $G[A]$ est le graphe ayant A pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans A.

Un graphe partiel de G est un graphe obtenu en enlevant une ou plusieurs arêtes de G. Autrement dit, un graphe partiel de G est un graphe H ayant le même ensemble de sommets, et ayant comme ensemble d'arêtes, un sous-ensemble de $E(G) : E(H) \subset E(G)$.

1.1.3 Graphes isomorphes

Deux graphes G et G' sont isomorphes s'il existe une bijection $f : V(G)(G')$ telle que pour tous $u, v \frown V(G)$, on a $uv \in E(G)$ si et seulement si $f(u)f(v) \longrightarrow E(G')$. s'il existe un isomorphisme entre G et G', alors G et G' sont dits isomorphes. Un graphe est dit auto-complémentaire s'il est isomorphe à son complémentaire.

1.1.4 Degré d'un sommet

Dans un graphe non-orienté, le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet (une boucle comptant pour 2). Dans le cas d'un graphe simple, on aura $d(v) = |Adj(v)|$. Dans un graphe orienté, le demi-degré extérieur ou demi-degré sortant d'un sommet v, noté $d_+(v)$, est le nombre d'arcs partant de v, i.e. de la forme (v, w)

avec $w \in V$. Dans le cas d'un 1-graphe, on aura $d_+(v) = |Succ(w)|$. De même, le demi-degré intérieur ou demi-degré entrant d'un sommet v, noté $d_-(v)$, est le nombre d'arcs arrivant en v, i.e de la forme (w, v) avec $w \in V$. Dans le cas d'un 1-graphe, on aura $d_-(v) = |Pred(v)|$. Le degré d'un sommet v est alors la somme des degré entrant et sortant : $d(v) = d_+(v) + d_-(v)$ Un sommet de degré nul est dit sommet isolé et un sommet de degré un est dit sommet pendant (feuille) . On note par $L(G)$ l'ensemble des sommets pendants de G. Un sommet adjacent à un sommet pendant est appelé sommet support. l'ensemble des sommets supports de G est noté par $S(G)$.

Le degré maximum d'un graphe G, noté $\Delta(G)$ est le maximum des degrés de ses sommets. De même,le degré minimum d'un graphe G, noté $\delta(G)$ est le minimum des degrés de ses sommets.

1.1.5 Voisinages

Soit $G = (V, E)$ un graphe, pour un sommet u de V on a :

- Le voisinage ouvert d'un sommet u ; noté $N_G(u)$, est l'ensemble des sommets adjacents à défini par : $N_G(u) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$.
- Le voisinage fermé de u, noté $N_G[u]$, est défini par : $N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$.

Pour un sous-ensemble $S \subseteq V(G)$

- Le voisinage ouvert d'un ensemble des sommets S est : $N_G(S) = \cup_{u \in S} N_G(u)$.
- Le voisinage fermé d'un ensemble des sommets S est : $N_G[S] = \cup_{u \in S} N_G(S)$.
- Le voisinage privé d'un sommet $v \in S$ par rapport à un ensemble S, noté $Pn[u, S]$ est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont pas d'autre voisin dans S $\Big(i.e : pn[v, S] = \Big\{u \in V(G) : N[u] \cap S = \{v\}\Big\}\Big)$.

1.1.6 Minimalité et maximalité d'un ensemble

Soit $G = (V; E)$ un graphe, on dit q'un sous-ensemble A de V est minimal (resp. Maximal) par rapport une propriété P, s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq A$ (resp. $B \supseteq A$)

tel que $G[B]$ vérifie P. On dit q'un sous-ensemble A de V est minimum ou de taille minimale (resp. Maximum ou de taille maximale) par rapport une propriété P, s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq V$ tel que $G[B]$ vérifie P et $\mid A \mid > \mid B \mid$(resp.$\mid B \mid > \mid A \mid$) où $\mid A \mid$ est le cardinal de l'ensemble A, c'est à dire le nombre de ses éléments.

1.1.7 Chaînes et cycles

Une chaîne est une liste finie et alternée de sommets et d'arêtes, débutant et finissant par des sommets, telle que chaque deux sommets successifs ont une arête commune. Une chaîne est dite élémentaire (respectivement, simple) si tous ses sommets sont distincts (respectivement, touts ses arêtes sont distincts). La longueur d'une chaîne est le nombre de ses arêtes.

Un cycle C d'un graphe $G = (V; E)$ est une chaîne telle que les extrémités sont confondues. Un cycle simple est une chaîne qui se referme. Un cycle élémentaire est une chaîne élémentaire telle que ses deux extrémités sont confondues. La longueur du cycle est le nombre de ses arêtes.

1.1.8 Connexité

Un graphe $G = (V; E)$; est dit connexe si toute paire de sommets de G et relié par une chaîne. Un graphe connexe à n sommets possède au mois $n-1$ arêtes. Si le graphe G est non connexe, une composante connexe est un sous-graphe maximale connexe.

1.1.9 Distance

La distance entre deux sommets u et v d'un graphe G, notée $d_G(u, v)$, est la longueur d'une plus courte chaîne qui relie u à v. Si aucune chaîne ne relie u et v, on définit par convention $d_G(u; v) = \infty$.

1.1.10 Excentricité

L'excentricité d'un sommet u d'un graphe G, notée $e_G(u)$, est la plus grande des distances $d_G(u,v)$ où $v \in V(G)$, c'est-à-dire $e(u) = \max_{v \in V(G)} d_G(u,v)$.

1.1.11 Diamètre

L'excentricité maximum sur tous les sommets de G est appelée un diamètre de G et est notée $diam(G)$. En d'autres termes, $diam(G)$ représente la plus grande distance entre deux sommets quelconques de G.

1.1.12 Graphes particuliers

★ Graphe complet

Un $1-$ *graphe* orienté élémentaire est dit complet s'il comporte un arc (v_i, v_j) et un arc (v_j, v_i) pour tout couple de sommets différents $v_i, v_j \in V$. De même, un graphe non-orienté simple est dit complet s'il comporte une arête (v_i, v_j) pour toute paire de sommets différents $v, v_j \in V$ (tous les sommets de G sont adjacents). On note K_n un graphe complet d'ordre n.

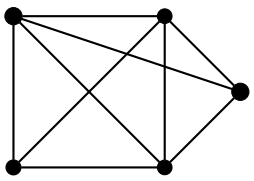


FIGURE 1.2: Un graphe complet K_5.

★ Graphe complémentaire

Le graphe complémentaire d'un graphe $G = (V; E)$ est le graphe noté $\overline{G}$, définit par $V(\overline{G}) = V(G)$ et $E(\overline{G}) = \{uv : u \in V(G), v \in V(G) etuv \in E(G)$

Remarque 1.1.1. *Le complémentaire du graphe $\overline{G}$ est le graphe G*

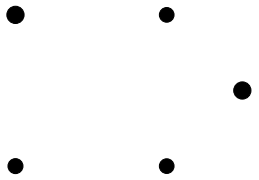


FIGURE 1.3: Un graphe complémentaire de K_5.

★ Graphe planaire

Un graphe G est dit planaire s'il peut être dessiné dans le plan de sorte que ses arêtes ne se croisent pas.

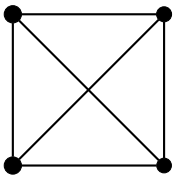


FIGURE 1.4: Un graphe planaire.

★ Graphe discret

Un graphe discret est un graphe sans arêtes.

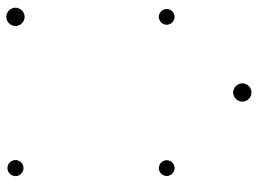


FIGURE 1.5: Un graphe discret.

★ Graphe régulier

Un graphe $G = (V, E)$ est dit d-régulier si tous ses sommets sont de degré d (i.e $\forall x \in V, d_G(x) = d$).

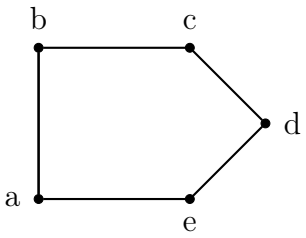


FIGURE 1.6: Un graphe 2-régulier d'ordre 5.

★ Graphe multi-partie

Un graphe $G = (V, E)$ est multi-partie si V peut être partitionné en $k - parties$ stable.

★ Graphe bipartie

Un graphe est dit biparti si l'on peut partitionner l'ensemble de ses sommets en deux sous ensembles V_1 et V_2 tels que les sous-graphes $G[V_1]$ et $G[V_2]$ ne contiennent aucune arête. Un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycles de longueur impaire.

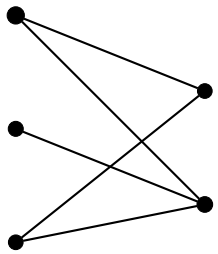


FIGURE 1.7: Un graphe bipartie.

★ Graphe bipartie complet

Un graphe biparti complet est un graphe biparti ayant la propriété supplémentaire suivante : tous les sommets de V_1 sont adjacents à tous les sommets de V_2. Si $\mid V_1 \mid = p$ et $\mid V_2 \mid = q$, alors le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$. Voir la figure suivante :

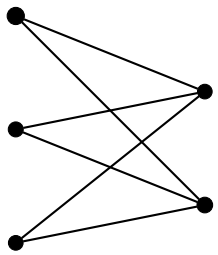


FIGURE 1.8: Un graphe bipartie complet

★ Arbre

On appelle arbre n sommets et on note par T un graphe connexe et sans cycles. Un arbre comporte exactement $(n-1)$ arêtes. Un arbre est dit trivial (resp. Non trivial) s'il contient un seul sommet (resp. Au moins deux sommets). On appelle feuille d'un arbre un sommet de degré 1 (sommet pendant)

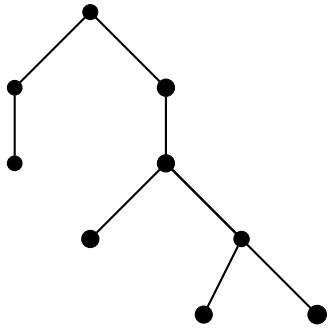


FIGURE 1.9: Un arbre.

★ Forêt

On appelle forêt un graphe non-connexe ou chaque composante connexe est un arbre.

★ Étoile

Une étoile est un cas particulier d'un graphe biparti complet dans lequel $\mid V_1 \mid = 1$ et $\mid V_2 \mid = s$. Dans ce cas elle est notée par $S_{1,k}$. Le sommet de V_1 est appelé centre ou sommet central de l'étoile. Voir la Figure suivante :

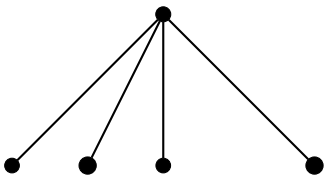


FIGURE 1.10: Une étoile.

★ Galaxie

Une galaxie est une forêt dans laquelle chaque composante connexe est une étoile.

★ Double étoile

Une double étoile, notée $S_{p,k}$, est le graphe obtenu par les deux étoiles $K_{1,r}$ et $K_{1,s}$ en ajoutant une arête reliant les deux centres. Un exemple de ce graphes sont donné dans la Figure suivante :

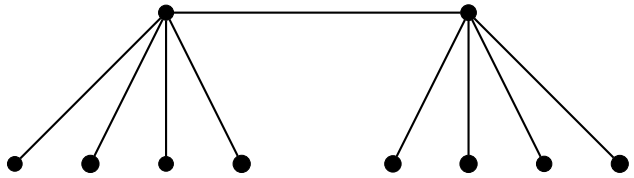


FIGURE 1.11: Une double étoile.

★ Étoile subdivisée

Une étoile subdivisée $K_{1,s}$ est un graphe obtenu partir d'une étoile $K_{1,s}$ en subdivisant chaque arête par exactement un sommet.

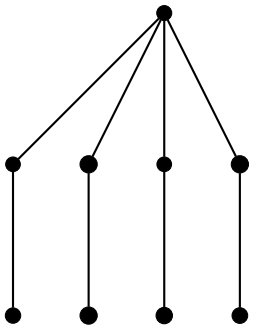


FIGURE 1.12: Une étoile subdivisée.

★ Bloc graphe

Un sommet x d'un graphe G est l'articulation si sa suppression augmente le nombre de composantes connexes.

Un **bloc** dans un graphe G est un sous graphe connexe maximal qui ne contient pas de sommet d'articulation.

Un **bloc graphe** G est un graphe dont tous les blocs sont complets. Si G ne possède pas de sommet d'articulation alors G est lui même un bloc. L'intersection de deux blocs contient au plus un sommet, la Figure 1.1.13, représente un graphe G à 4 blocs.

★ Cactus

Un cactus est un graphe où chaque arête appartient au plus un cycle, de plus un cactus qui contient un seul cycle est dit uni-cycle.

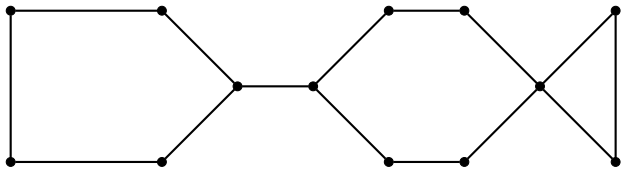


FIGURE 1.13: Un cactus graphe.

★ Couronne

La couronne d'un graphe $G = (V, E)$, est le graphe $G \circ K_1$ obtenu à partir d'une copie de G en attachant chaque sommet de G un nouveau sommet. Il est noté que l'ordre de $G \circ K_1$ est $2 \mid V \mid$.

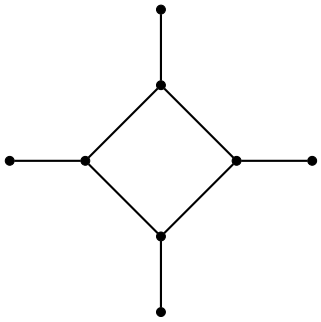


FIGURE 1.14: Une couronne.

Une galaxie est une forêt dans laquelle chaque composante est une étoile.

★ Graphe sans griffe

Un graphe est dit sans griffe (ou sans $K_{1,3}$) s'il ne contient pas $K_{1,3}$ comme sous-graphe induit.

1.1.13 Quelques invariants d'un graphe

★ Couplage

Un couplage dans un graphe G est un ensemble d'arêtes deux à deux non-adjacentes. Un couplage maximum est un couplage de taille maximale. On désigne par $\beta(G)$ la taille d'un couplage maximum dans G. Un sommet d'un graphe est saturé par un couplage de ce graphe lorsqu'il est extrémité d'une arête de ce couplage. Autrement, il est insaturé par ce couplage. Un couplage qui sature tous les sommets de G est parfait. - Le cardinal d'un couplage est au plus $n \div 2$, ceci est du au fait que chaque arête du couplage sature deux sommets. - Un couplage est parfait si et seulement si $\alpha(G) = n\frac{2}{}$. - Tout graphe d'ordre impair ne contient pas de couplage parfait. Egalement, un graphe d'ordre pair ne possède pas nécessairement un couplage parfait. Par exemple, une étoile d'ordre $2n$, n'admet pas un couplage parfait. - Le nombre de sommet insaturé par un couplage C est $n - 2 \mid C \mid$.

★ Stable

Un stable dans un graphe G, appelé aussi (ensemble indépendant), est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents et est noté S. Un stable de G est dit maximum s'il est de taille maximale dans G . Le cardinal d'un stable maximum de G, et est appelé nombre de stabilité de G noté $\alpha(G)$.

★ Clique

une clique d'un graphe G est un sous-graphe (induit) complet de G noté K Une clique est maximum de G s'il est de taille maximale dans G.

1.2 Concept de domination dans les graphes

1.2.1 Ensemble dominant

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple et soit un sous-ensemble $S \subseteq V$. On dit que S est un dominant de G, si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S. Le nombre de domination, noté par $\gamma(G)$. Un ensemble dominant de G de cardinal minimum est appelé γ-ensemble. Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. Voici quelques exemples :

-Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si pour tout $v \in V, \mid N[v] \cap D \mid \geq 1$.

-Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si pour tout $v \in V - D, \mid N(v) \cap D \mid \geq 1$.

-Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si $N[D] = V$.

1.2.2 Quelques types de domination

★ Dominant stable

Un ensemble dominant stable de G est un ensemble dominant $D \subseteq V$ tel que le sous-graphe induit par D est stable. Le nombre de domination stable de G, noté $i(G)$, est le cardinal minimum d'un dominant stable.

★ Dominant total

Soit $G = (V, E)$ un graphe sans sommets isolés et $D \subseteq V$. D est un dominant total de G si tout sommet de V est adjacent à un sommet de D (c'est-à-dire $V = N(D)$). On note par $\gamma_t(G)$ le cardinal minimum d'un dominant total de G.

★ Dominant double

D est un dominant double de G si tout sommet de $V - D$ est adjacent à au moins deux sommets de D, et tout sommet de D doit avoir au moins un voisin dans D. Le nombre de domination double d'un graphe G est le cardinal minimum d'un dominant double. Il est noté $\gamma_{\times 2}(G)$. (Voir Figure 1.4.4)

★ Dominant connexe

Un sous-ensemble D de V est dit dominant connexe de G si D est un dominant et le sous-graphe induit par D est connexe. Le nombre de domination connexe, noté par $\gamma_c(G)$; est la taille minimale d'un ensemble dominant connexe de G.

1.3 Classes de complexité

La théorie de la complexité repose sur la définition de classes de complexité qui permettent de classer les problèmes en fonction de la complexité des algorithmes qui existent pour les résoudre.

Classe P

Un problème Q est dans la classe P s'il existe un algorithme déterministe en temps polynomial qui résout Q.

En revanche, un algorithme non déterministe est un algorithme pour lequel un état peut déterminer de nombreux états suivants simultanément. On peut considérer un algorithme non déterministe ayant la capacité de se ramifier en plusieurs copies de lui-même, un pour chaque état suivant. Ainsi, alors qu'un algorithme déterministe doit explorer un ensemble d'alternatives une à la fois, un algorithme non déterministe examine toutes les alternatives en même temps. Les problèmes dans P correspondent en fait à tous les problèmes facilement solvable.

Classe NP

Un problème Q est dans la classe NP s'il existe un algorithme en temps polynomiale non déterministe ce qui résout Q. clairement que P $\subseteq$ NP.

Parmi les problèmes de NP sont ceux qui sont les plus difficiles dans le sens que si l'on peut être résolu en temps polynomial, alors tout problème peut aussi dans NP. Ce sont des problèmes NP-complets.

* Aucune problème NP-complets peut être résolu par un algorithme polynomial.

Classe NP-complet

Un problème est NP-difficile si ce problème est au moins aussi dur que tous les problèmes dans NP. Par exemple, la détermination de l'alliance globale d'un graphe arbitraire est un NP-difficile dans le cas général.

Chapitre 2

État de l'art

2.1 Historique

L'alliance signifie un lien ou un rapport entre des individus, des familles, des états ou des parties.

Dans le monde réel, les alliances sont trouvées dans beaucoup de variétés, chacune a des propriétés différentes, par exemple :

• alliances entre des nations pour l'appui mutuel dans la guerre *(pour attaquer un ennemi commun ou pour se défendre contre un agresseur)*, dans l'économie, ou pour d'autres intérêts communs.

• alliances entre différentes parties politiques.

• alliances entre des personnes qui s'unissent par l'amitié ou par des obligations.

• alliances entre des compagnies pour des intérêts économiques communs.

Inspirés par les alliances entre les nations en guerre, les alliances dans les graphes ont été présentées la première fois par Kristiansen, Hedetniemi, et Hedetniemi dans[10 Les nations sont représentées par des *sommets* et les *arêtes* correspondent aux relations possibles (d'amitié ou d'hostilité) entre les nations.

Dans ce chapitre, nous étudions les alliances dans les graphes, nous présenterons les différents types d'alliances et leurs variantes avec les paramètres associés et rappelant

les principaux résultats existants.

2.2 Types d'alliances

Considérons un graphe simple $G = (V(G), E(G))$.

2.2.1 Alliances défensives

Définition 2.2.1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe, un ensemble $S \subseteq V(G)$ est dit une alliance défensive si pour chaque sommet $v \in S, \mid N[v] \cap S \mid \geq \mid N[v] \cap (V - S) \mid$. Une alliance défensive S est dite globale si S est un ensemble dominant.*

La figure (2.1) donne un exemple illustratif.

Définition 2.2.2. *γ_d : le nombre minimun d'une alliance.*

Remarque 2.2.1. *Ils existe des sommets supports qui sont dans $\gamma_d - ensemble$.*

Définition 2.2.3. *Un ensemble $S \subseteq V(G)$ est dit une alliance défensive globale forte si pour chaque sommet $v \in S, \mid N[v] \cap S \mid > \mid N[v] \cap (V - S) \mid$.*

Définition 2.2.4. *Le nombre d'alliance défensive $\gamma_d(G)$ (respectivement le nombre d'alliance défensive forte $\gamma_{\hat{d}}(G)$) est le cardinal minimum d'une alliance défensive (respectivement d'une alliance défensive forte).*

La figure suivante représente un graphe avec $\gamma_d(G) = 5$

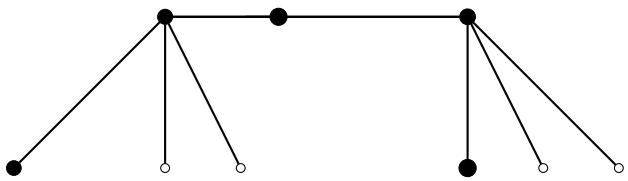


FIGURE 2.1: $\gamma_d(G) = 5$.

2.2.2 Bornes sur $\gamma_d(G)$ et $\gamma_{\hat{d}}(G)$

Dans ce qui suit, nous présentons quelques résultats relatifs aux paramètres $\gamma_d(G)$ et $\gamma_{\hat{d}}(G)$.

Proposition 2.2.1 (Haynes, Hedetniemi et Henning [1] 2003)**.** *Pour tout graphe G d'ordre n on a*

(1) $1 \leq \gamma(G) \leq \gamma_d(G) \leq \gamma_{\hat{d}}(G) \leq n$

(2) $1 \leq a(G) \leq \gamma_d(G) \leq n$

(3) $1 \leq a(G) \leq \hat{a}(G) \leq \gamma_{\hat{d}}(G) \leq n$

Les mêmes auteurs [15] ont donné les valeurs exactes de γ_d et $\gamma_{\hat{d}}$ pour quelques classes de graphes.

Proposition 2.2.2. *(Haynes, Hedetniemi et Henning [1]2003) Pour un graphe complet K_n*

(1) $\gamma_d(K_n) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$

(2) $\gamma_{\hat{d}}(K_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$

Proposition 2.2.3 (Haynes, Hedetniemi et Henning [1] 2003)**.** *Pour un graphe biparti complet $K_{r,s}$*

(1) $\gamma_d(K_{1,s}) = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 1$,

(2) $\gamma_d(K_{r,s}) = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ *si* $r, s \geqslant 2$,

(3) $\gamma_{\hat{d}}(K_{r,s}) = \lceil \frac{r}{2} \rceil + \lceil \frac{s}{2} \rceil$.

Proposition 2.2.4. *Pour toute double étoile complet $S_{r,s}$,$r, s \geqslant 1$*

(1) $\gamma_d(S_{r,s}) = \lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor + 2$

(2) $\gamma_{\hat{d}}(S_{r,s}) = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$

2.2.3 Alliances offensives

Définition 2.2.5. *Un ensemble $S \subseteq V(G)$ est dit une alliance offensive si et seulement si pour chaque sommet $v \in V - S, \mid N(v) \cap S \mid \geq \mid N[v] \cap (V - S) \mid$. Une alliance offensive S est dite globale si S est un ensemble dominant.*

Définition 2.2.6. *Un ensemble $S \subseteq V(G)$ est dit une alliance offensive globale forte si pour chaque sommet $v \in V - S, \mid N[v] \cap S \mid > \mid N[v] \cap (V - S) \mid$.*

Définition 2.2.7. *Le nombre d'alliance offensive $\gamma_o(G)$ (respectivement le nombre d'alliance offensive forte $\gamma_o(G)$ est le cardinal minimum d'une alliance offensive.(respectivement d'une alliance offensive forte) de G.*

Remarque 2.2.2. *Tous les sommets supports sont dans $\gamma_o -$ ensemble.*

La figure suivante représente un graphe avec $\gamma_o(G) = 2$

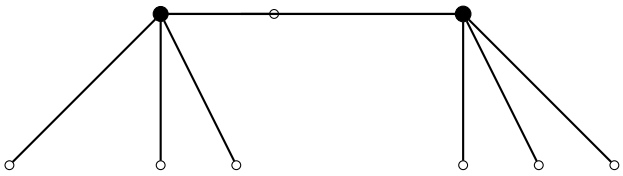


FIGURE 2.2: $\gamma_o(G) = 2$.

2.2.4 Bornes sur $\gamma_o(G)$ et $\gamma_o(G)$

Le résultat suivant établi par Chellali [5], donne une borne inférieure sur γ_o pour tout graphe biparti.

Théorème 2.2.1 (Chellali)**.** *Pour tout graphe biparti G sans sommets isolés, $\gamma_o(G) \leq (n - \ell(G) + s(G))/2$.*

Dans le même article Chellali a fait une caractérisation constructive des arbres extrémaux vérifiant $\gamma_o(T) = (n - l(T) + s(T))/2$.

Sigaretta et Rodriguez donne une borne supérieure et une borne inférieure sur γ_o pour tout graphe G en fonction de l'ordre n, le degré minimum δ et maximum Δ.

Théorème 2.2.2 (Rodriguez et Sigaretta [14]2006)**.** *Pour tout graphe G d'ordre n et de degré minimum δ et maximum $\triangle$ on a :*

$$\frac{2n}{3} \geq \gamma_o(G) \geq \begin{cases} \left\lceil \frac{n(\delta+1)}{2\triangle+\delta+1} \right\rceil & \text{si } \delta \text{ est impair ;} \\ \left\lceil \frac{n\delta}{2\triangle+\delta} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 2.2.3 (Rodriguez et Sigaretta [12]2006)**.** *Pour tout graphe régulier G d'ordre n et de degré δ impair, $\frac{n(\delta+1)}{3\delta+1} \leq \gamma_o(G) \leq \frac{n}{2}$.*

Théorème 2.2.4. *Pour un graphe cubique (3- régulier) on a :* $\frac{2n}{5} \leq \gamma_o(G) \leq \frac{n}{2}$.

Théorème 2.2.5 (Chellali)**.** *Chellali en montrant que : Pour tout graphe biparti G sans sommets isolés,* $\gamma_{\hat{o}}(G) \leq (n + \ell(G))/2$.

A noter aussi qu'une caractérisation constructive des arbres extrémaux atteignant la borne du théorème 2.25 à été donnée par Chellali dans le même article.

Dans [13]. Rodriguez et Sigaretta ont donné une borne supérieure et une borne inférieure sur $\gamma_{\hat{o}}$ pour les graphes cubiques ainsi une caractérisation des graphes extrémaux.

Théorème 2.2.6 (Rodriguez et Sigaretta [13] 2006)**.** *Soit G un graphe cubique d'ordre n.*

1. $\frac{n}{2} \leqslant \gamma_{\hat{o}}(G) \leqslant \frac{3n}{4}$
2. $\gamma_{\hat{o}}(G) = \frac{n}{2}$ *si et seulement si G est un graphe biparti.*
3. $\gamma_{\hat{o}}(G) = \frac{3n}{4}$ *si et seulement si G est isomorphe au graphe complet* K_4.

Théorème 2.2.7. *(Bouzefrane et Chellali [4]) Soit T un arbre, alors*

$\gamma_o(T) = \gamma(T)$ *si et seulement si* $T = K_1$ *ou bien* $T \in F$.

Nous définissons la famille F de tous les arbres T qui peuvent être obtenus à partir d'une séquence $T_1, T_2, ..., T_k (k \geq 1)$ d'arbres, où $T_1 = P_1$, $T = T_K$, et si $k \geq 2T_{+1}$ est obtenu récursivement à partir de T_i.

Théorème 2.2.8. *(Bouzefrane, Chellali [4]) Si T est un arbre d'ordre* $n \geq 2$, *alors* $\gamma_o(T) \leq \frac{n-l(T)+s(T)}{2}$

Théorème 2.2.9. *(Bouzefrane, Chellali[4]) Si T est un arbre d'ordre* $n \geq 3$, *alors* $\gamma_o(T) \leq \frac{3}{2\gamma_d(T)} - 1$.

2.2.5 Alliances puissantes

Définition 2.2.8. *Une alliance est dite puissante si elle est à la fois défensive et offensive. Une alliance puissante globale de G est une alliance puissante qui domine G.*

Définition 2.2.9. *Le nombre d'alliance puissante a_p (respectivement, d'alliance puissante globale γ_{ap}) est le cardinal minimum d'une alliance puissante (respectivement, d'une alliance puissante globale).*

La figure suivante représente un graphe avec $\gamma_{ap}(G) = 5$

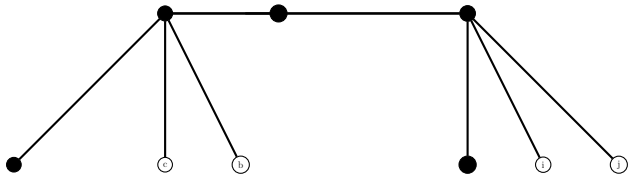


FIGURE 2.3: $\gamma_{ap}(G) = 5$.

Remarque 2.2.3. *De la figure (2.1) et la figure (2.3), on remarque que $\gamma_d(G) = \gamma_{ap}(G)$*

2.2.6 Quelques résultats existants sur γ_{ap}, γ_d et γ_o dans les chaînes

Théorème 2.2.10 (Haynes et al)**.** *Soit une chaîne d'ordre n avec $n \geq 3$, alors*

$$\gamma_{\widehat{d}}(P_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} + 1 \quad Si \quad n \equiv 2[4]. \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil \quad Sinon. \end{cases}$$

Théorème 2.2.11. *Pour toute chaîne P_n on a :*

$$\gamma_{\widehat{o}}(P_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} + 1 \quad Si \quad n \equiv 0[2] \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil \qquad Sinon. \end{cases}$$

Théorème 2.2.12. *Soit une chaîne d'ordre $n \geq 3$, alors*

$\gamma_{\widehat{o}}(P_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$

Théorème 2.2.13. *Pour toute chaîne d'ordre $n \geq 3$, on a :*

1. $\gamma_d(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
2. $\gamma_o(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
3. $\gamma_{ap}(P_n) = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$.

2.2.7 Quelques résultats existants sur γ_{ap}, γ_d et γ_o dans les cycles

Théorème 2.2.14 (Haynes et al)**.** *Soit un cycle d'ordre n avec $n \geq 3$, alors*

$$\gamma_{\widehat{d}}(C_n) = \gamma_d(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} \quad Si \quad n \equiv 0[4]. \\ \frac{n+1}{2} \quad Si \quad n \equiv 1,3[4]. \\ \frac{n}{2}+1 \quad Si \quad n \equiv 2[4]. \end{cases}$$

Théorème 2.2.15. *[5] Soit un cycle d'ordre n avec $n \geq 3$, alors $\gamma_{\widehat{o}}(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

2.2.8 Quelques résultats existants sur γ_{ap}, γ_d et γ_o dans les graphes complets

Théorème 2.2.16. *Pour tout graphe complet K_n on a :*

1. $\gamma_d(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
2. $\gamma_{\widehat{d}}(G) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.
3. $\gamma_o(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
4. $\gamma_{ap}(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Théorème 2.2.17. *Pour tout graphe complet K_n on a :*

1. $\gamma_o(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
2. $\gamma_{\widehat{o}}(G) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

Chapitre 3

Calcul du nombre d'alliance puissante globale dans quelques classe de graphe

Dans ce chapitre, on exposera notre contribution à l'étude des alliances puissantes globales dans quelques classes de graphes.

Nous avons présenté les premiers travaux établis par Brigham et Al et nous donnons quelques bornes ainsi nous calculons quelques valeurs exactes de (γ_{ap}) pour des graphes particuliers tels que les chaînes, les cycles, les étoiles, les doubles étoiles et leurs graphes milieux. Ensuite, nous avons donné quelques bornes supérieures et inférieures sur le nombre d'alliance puissante globale pour les grilles.

Dans leur article introductif Brigham et al, ont donné une borne supérieure sur l'alliance puissante a_p pour les arbres.

3.1 Bornes sur γ_{ap} et a_p

Théorème 3.1.1 (Brigham et al)**.** *Si T est un arbre d'ordre n différent d'une chaîne P_n, alors $a_p(T) \leq \lfloor n + 3/2 \rfloor$; cette borne est atteinte.*

Les mêmes auteurs ont montré aussi les deux résultats suivants :

Proposition 3.1.1 (Brigham et al)**.** *Pour tout graphe G d'ordre n,*

$n \leq \left(\frac{\Delta+\delta+2}{\delta+1}\right) \gamma_{ap}(G)$.

Corollaire 3.1.1 (Brigham et al). *Si G est un graphe régulier d'ordre n, alors $n \leq 2\gamma_{ap}(G)$.*

Ils ont caractérisé aussi les arbres tels que $a_p(T) = \gamma_{ap}(T) = \left\lceil \frac{\Delta+1}{2} \right\rceil$.

Théorème 3.1.2 (Brigham et al). *Un arbre T a $a_p(T) = \gamma_{ap}(T) = \left\lceil \frac{\Delta+1}{2} \right\rceil$ si et seulement si T est une double étoile $S_{2,2}$ ou bien T peut être obtenu d'une étoile $K_{1,t}$ en subdivisant au plus $\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$ de leurs arêtes exactement une seule fois.*

3.2 Relations entre le nombre d'alliance puissante globale ($\gamma_{ap}(G)$) et le nombre de domination ($\gamma(G)$)

Rappelons que $\gamma(G)$ est le nombre de domination d'un graphe.

La proposition suivante donne une relation entre le nombre d'alliance puissante globale $\gamma_{ap}(G)$ et le nombre de domination $\gamma(G)$.

Proposition 3.2.1 (Brigham et al). *Pour tout graphe G, $\gamma(G) + \lfloor \delta(G)/2 \rfloor \leq \gamma_{ap}(G)$.*

Brigham et al ont caractérisé les graphes tels que $\gamma(G) = \gamma_{ap}(G)$ par le théorème suivant :

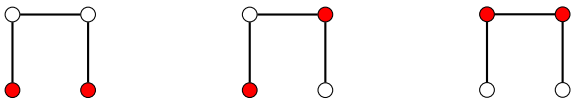
Théorème 3.2.1 (Brigham et al). *Un graphe G vérifie $\gamma(G) = \gamma_{ap}(G)$ si et seulement si $N[v]$ contient au moins $\lceil |N[v]|/2 \rceil$ sommets supports pour tout sommet $v \in V(G)$.*

3.3 Relations entre le nombre d'alliance puissante globale(γ_{ap}) et le nombre d'alliance défensive globale (γ_d)

On commence par donner quelques remarques.

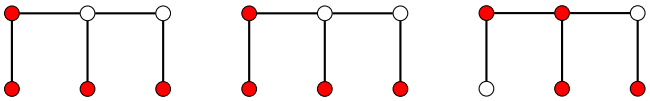
Remarque 3.3.1. *Pour tout graphe G on a $\gamma_{ap}(G) \geq \gamma_d(G)$ et $\gamma_{ap}(G) \geq \gamma_o(G)$ car par définition $\gamma_{ap}(G)$ est défensive et offensive à la fois.*

Il est intéressant de voir quels sont les graphes qui ont $\gamma_{ap}(G) = \gamma_d(G)$ et $\gamma_{ap}(G) = \gamma_o(G)$ Par exemple si $G = P_4$ alors :



$\gamma_d(G) = 2$ $\gamma_o(G) = 2$ $\gamma_{ap}(G) = 2$

FIGURE 3.1: $\gamma_d(P_4) = \gamma_o(P_4) = \gamma_{ap}(P_4)$



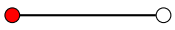
$\gamma_d(G) = 3$ $\gamma_o(G) = 3$ $\gamma_{ap}(G) = 4$

FIGURE 3.2: $\gamma_d(P_6) = \gamma_o(P_6) \neq \gamma_{ap}(P_6)$

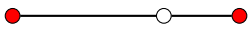
Question :

Quels sont les graphes pour les quelles $\gamma_{ap}(G) = \gamma_d(G)$ et $\gamma_{ap}(G) = \gamma_o(G)$? ? Pour les chaînes on a les résultats suivants :

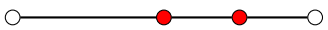
D'après nos calculs de γ_{ap} dans les chaînes on a trouvé que pour toute chaîne $P_n n \geq 2, \gamma_d(P_n) = \gamma_{ap}(P_n)$si et seulement si $P_n = \{P_2, P_3, P_4, P_5, P_7\}$



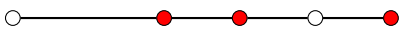
$\gamma_d(P_2) = \gamma_{ap}(P_2) = 1$



$\gamma_d(P_3) = \gamma_{ap}(P_3) = 2$



$\gamma_d(P_4) = \gamma_{ap}(P_4) = 2$



$\gamma_d(P_5) = \gamma_{ap}(P_5) = 3$



$\gamma_d(P_7) = \gamma_{ap}(P_7) = 4$

FIGURE 3.3: égalité entre γ_d et γ_{ap}

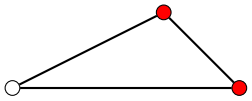
Proposition 3.3.1. *Pour tout* $n \in N \gamma_d(P_n) + \gamma_o(P_n) \geq \gamma_{ap}(P_n)$

Preuve 3.3.1. *D'après le théorème 2-2-13 on a* $\gamma_d + \gamma_o = n > \frac{2}{3}n \geq \lfloor \frac{2}{3}n \rfloor = \gamma_{ap}$ *d'où* $\gamma_{ap} \leq \gamma_d + \gamma_{ap}$ □

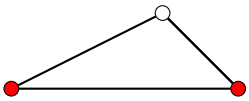
Lors de nos calculs nous avons trouvé des relations entre γ_d et γ_{ap} pour les chaînes alors la question qui se pose existe il des relations de ces derniers paramètres pour les cycles ? ?

D'après nos calculs de γ_d et γ_{ap} dans les cycles on a pu trouvé la relation suivante :

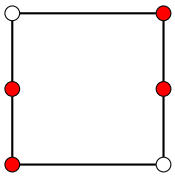
Proposition 3.3.2. *Pour tout cycle* $C_n, n \geq 3, \gamma_d(C_n) = \gamma_{ap}(C_n)$ *si et seulement si* $n = 3$ *ou* $n = 6$ *ce qui est montré dans l'exemple suivant (Figure 3.2).*



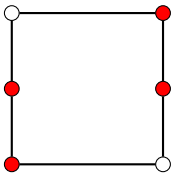
$\gamma_d(C_3) = 2$



$\gamma_{ap}(C_3) = 2$

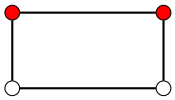


$\gamma_d(C_6 = 4$

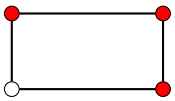


$\gamma_{ap}(C_6) = 4$

FIGURE 3.4: $\gamma_d(C_6) = \gamma_{ap}(C_6) = 2$



$\gamma_d(C_4) = 2$



$\gamma_{ap}(C_4) = 3$
$\gamma_d(C_4) \neq \gamma_{ap}(C_4)$

FIGURE 3.5: $\gamma_d(C_4) \neq \gamma_{ap}(C_4)$

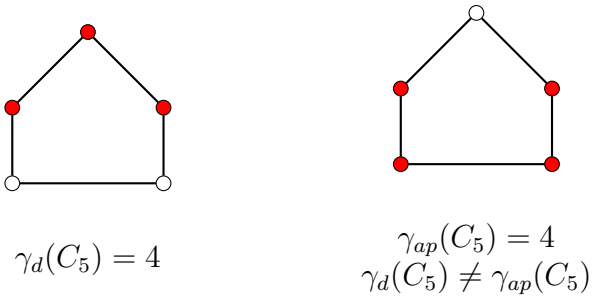


FIGURE 3.6: $\gamma_d(C_5) \neq \gamma_{ap}(C_5)$

Les étoiles sont parmi les graphes qui pour les quels nous avons pu trouvé quelques relations reliant γ_d et γ_{ap}

Remarque 3.3.2. *Pour toute étoile $S_{1,k}, k$ un entier positif $\gamma_d(S_{1,k}) = \gamma_{ap}(S_{1,k}) = 1 + \lfloor k/2 \rfloor$*

C'est que l'on observe dans les exemples suivants :

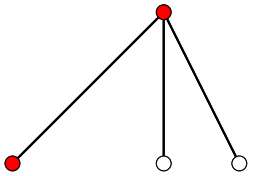


FIGURE 3.7: $\gamma_{ap}(S_{1,3}) = 2 = 1 + \lfloor k/2 \rfloor$

D'où $\gamma_{ap}(S_{1,3}) = 2 = 1 + \lfloor k/2 \rfloor = \gamma_d(S_{1,3}) = 2$

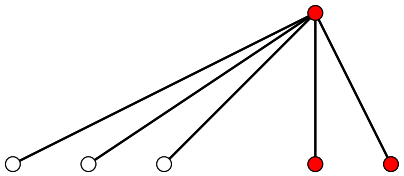


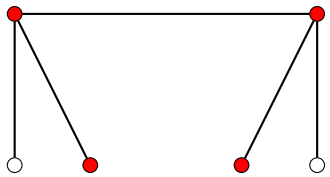
FIGURE 3.8: $\gamma_{ap}(S_{1,5}) = 3 = 1 + \lfloor k/2 \rfloor$.

D'où $\gamma_{ap}(S_{1,5}) = 3 = 1 + \lfloor k/2 \rfloor = \gamma_d(S_{1,5}) = 3$

Nous avons calculé γ_d et γ_{ap} pour les doubles étoiles et nous avons observé la relation suivante :

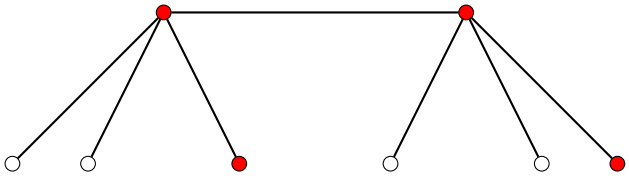
Remarque 3.3.3. *Pour une double étoile $S_{p,q}$, $\gamma_d(S_{p,q}) = \gamma_{ap}(S_{p,q})$*

C'est que l'on observe dans les exemples suivants :



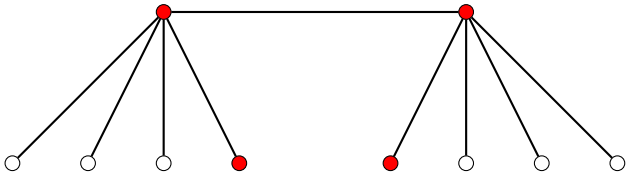
$$\gamma_d(S_{2,2}) = \gamma_{ap}(S_{2,2}) = 4 \ .$$

FIGURE 3.9: $\gamma_d(S_{2,2}) = \gamma_{ap}(S_{2,2}) = 4$



$$\gamma_d(S_{3,3}) = 4 = \gamma_{ap}(S_{3,3}).$$

FIGURE 3.10: $\gamma_d(S_{3,3}) = 4 = \gamma_{ap}(S_{3,3})$



$$\gamma_d(S_{4,4}) = \gamma_{ap}(S_{4,4}) = 4.$$

FIGURE 3.11: $\gamma_d(S_{4,4}) = \gamma_{ap}(S_{4,4}) = 4$

3.4 Relations entre γ_{ap} et a_p dans les chaînes, les cycles, les graphes complets et les graphes bipartis complets

Voici quelques valeurs exactes de $a_p\ (G)$ et $\gamma_{ap}\,(G)$ dans des familles de graphes spécifiques.

1. Pour toute chaine P_n avec $n \geq 2, a_p(P_n) = \gamma_{ap}(P_n) = \lfloor 2n/3 \rfloor$.
2. Pour tout cycle $C_n, a_p(C_n) = \gamma_{ap}(C_n) = \lceil 2n/3 \rceil$ ce résultat établit une borne avec caractérisation dans les arbres par Chellali et Bouzefranne.
3. Pour le graphe complet $K_n, a_p(K_n) = \gamma_{ap}(K_n) = \lceil n/2 \rceil$

4. Pour un graphe biparti complet $K_{r,s}, 1 \leq r \leq s$:

$$p(K_{r,s}) = \gamma_{ap}(C_{r,s}) = \min\{r + \lfloor s/2 \rfloor, \lceil (r+1)/2 \rceil + \lceil (s+1)/2 \rceil\}$$

Les mêmes auteurs ont caractérisé aussi les arbres tels que $a_p(T) = \gamma_{ap}(T) = \lceil \frac{\Delta+1}{2} \rceil$.

Théorème 3.4.1 (Brigham et al 2009). *Un arbre T a $a_p(T) = \gamma_{ap}(T) = \lceil \frac{\Delta+1}{2} \rceil$ si et seulement si T est une double étoile $S_{2,2}$ ou bien T peut être obtenu d'une étoile $K_{1,t}$ en subdivisant au plus $\lfloor \frac{t}{2} \rfloor$ de leurs arêtes exactement une seule fois.*

3.5 Relations entre γ_d et γ_o et γ_{ap} dans les graphes complets

Corollaire 3.5.1. *Pour tout graphe complet K_n d'ordre n on a :*

$$\gamma_d(K_n) = \gamma_o = \gamma_{ap} = \lceil \frac{n}{2} \rceil$$

Preuve 3.5.1. *Par le théorème 2-2-15 on obtient le résultats.* □

3.6 Calcul du nombre d'alliance puissante globale(γ_{ap}) pour les graphe milieux

On commence par donner les définitions suivantes :

★ Graphe milieu

[T.Hamada ,I.Yoshimura [6]]

Soit $G = (V(G); E(G))$ un graphe simple, le graphe milieu de G noté $M(G)$ est défini comme suit : l'ensemble des sommets de $M(G)$ est $V(G) \cup E(G)$:

Deux sommet x, y de $M(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifie :

$*x, y \in E(G)$ et x est adjacent à y dans G.

$*x \in V(G), y \in E(G)$ et x est incident à y dans G.

★ Graphe milieu d'une chaîne

Proposition 3.6.1. *Pour tout graphe milieu G d'une chaîne P_n, on a $\mid V(G) \mid = 2n-1$.*

Preuve 3.6.1. *Posons $G = M(P_n)$, pour $n \geq 3$, il est clair que G contient deux sommets pendants, deux sommets de degrés 3, $n-2$ sommets de degrés 2 et $n-3$ sommets de degrés 4.*

On pose $V(P_n) = x_1, x_2, x_3, ..., x_n, E(P_n) = y_1, y_2, ..., y_{n-1}$.

Par définition on a $V(G) = V(P_n) \cup E(P_n)$.

Donc $\mid V(G) \mid = \mid (P_n) \cup E(P_n) \mid = n + n - 1 = 2n - 1$ □

Voici quelques résultats que nous avons pu obtenir concernant le nombre d'alliance puissante globale (γ_{ap}) pour les graphe milieux.

★ Graphe milieu d'un cycle

Proposition 3.6.2. *Pour tout graphe milieu G d'un cycle C_n, on a $\mid V(G) \mid = 2n$.*

Preuve 3.6.2. *Posons $G = M(C_n)$, et $V(C_n) = x_1, x_2, x_3, ..., x_n$;*

deg $(x_i) = 2$, $E(C_n) = y_1, y_2, ..., y_n$.

deg $(y_j) = 4$, et on a par définition $V(G) = V(C_n) \cup E(C_n)$.

Donc $\mid V(G) \mid = \mid V(Cn) \cup E(C_n) \mid = 2n$. □

3.6.1 Calcul du nombre d'alliance puissante globale(γ_{ap}) pour le graphe milieu d'une chaîne

La proposition suivante donne une relation entre γ_{ap}, γ_o et γ_d dans un graphe milieu d'une chaîne.

Proposition 3.6.3. *Dans un graphe milieu d'une chaîne $M(P_n)$ pour $n \geq 3$ on a :*

$$\gamma_{ap}(M(P_n)) = \gamma_d(M(P_n)) = \gamma_o(M(P_n)) = n - 1$$

Preuve 3.6.3. *Pour $n = 2$ on a le graphe milieu associé à P_2 est*

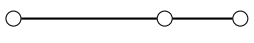


FIGURE 3.12: $(M(P_2)) = P_3$

En appliquant la définition 2.2.1 page 17 on obtient $\gamma_d(M(P_2)) = 2$

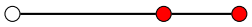


FIGURE 3.13: $\gamma_d(M(P_2)) = 2$

En calculant $\gamma_o(M(P_2))$ *nous trouvons la valeur suivante* $\gamma_o(M(P_2)) = 1$

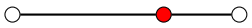


FIGURE 3.14: $\gamma_o(M(P_2)) = 1$

$\gamma_{ap}(M(P_2)) = 2$. *D'où* $\gamma_d(M(P_2)) = \gamma_{ap}(M(P_2)$

Pour $n = 3$, *le graphe milieu associé associé à* p_3 *est représenté à la figure suivante*

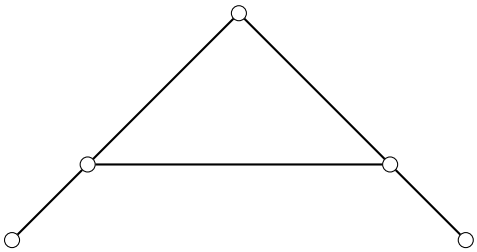
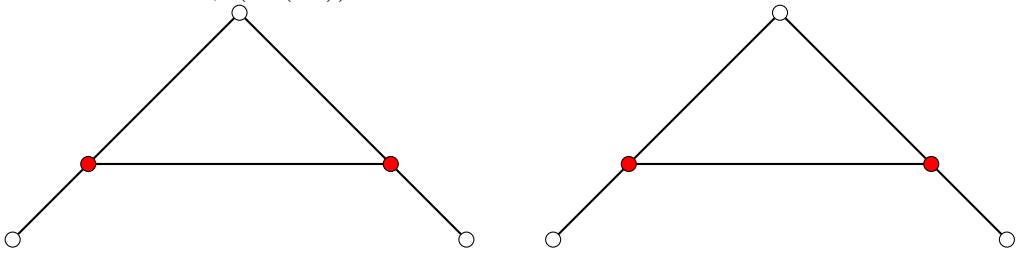


FIGURE 3.15: Le graphe milieu d'un $P3$

Donc on obtient $\gamma_d(M(P_3)) = 2$



$\gamma_d(G) = 2$ $\qquad$ $\gamma_o(G) = 2$

FIGURE 3.16: $\gamma_d(M(P_3))$ et $\gamma_o(M(P_3))$

A partir de la figure précédente, on conclue que :

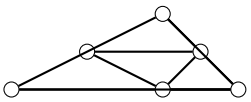
$\gamma_{ap}(M(P_3)) = \gamma_d(M(P_3)) = \gamma_o(M(P_3)) = 2 = 3 - 1 = n - 1$ □

3.6.2 Calcul du nombre d'alliance puissante globale (γ_{ap}) pour le graphe milieu d'un cycle

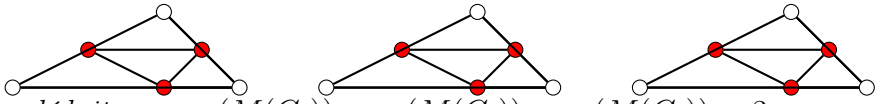
Dans un graphe milieu d'une cycle $M(C_n)$ on a

$\gamma_{ap}(M(C_n)) = \gamma_d(M(C_n)) = \gamma_o(M(C_n)) = n$ pour $n \geq 3$

Preuve 3.6.4. *Pour $n = 3$ on a le graphe milieu associé à C_3 est*

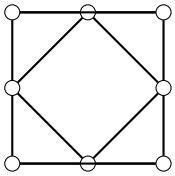


On obtient $\gamma_d(M(C_3)) = 3$:

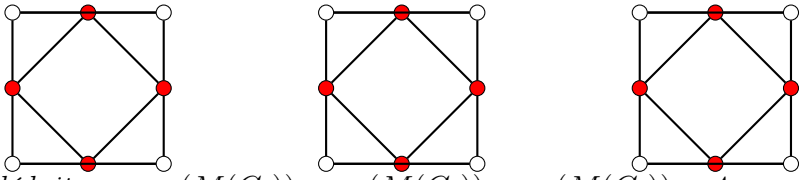


On déduit que $\gamma_{ap}(M(C_3)) = \gamma_d(M(C_3)) = \gamma_o(M(C_3)) = 3$.

Pour n=4 on a le graphe milieu associé à C_4 est :

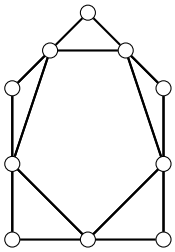


Alors on obtient $\gamma_d(M(C_4)) = 3$.

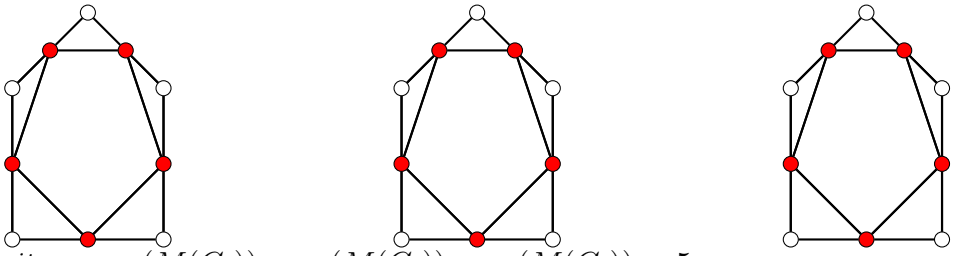


On déduit que $\gamma_{ap}(M(C_4)) = \gamma_d(M(C_4)) = \gamma_o(M(C_4)) = 4 = n$

Pour n=5, le graphe milieu associé à C_5 est :



On obtient $\gamma_d(M(C_5)) = 3$



On déduit que $\gamma_{ap}(M(C_5)) = \gamma_d(M(C_5)) = \gamma_o(M(C_5)) = 5 = n$.

D'ou $\forall n \geq 3 \gamma_{ap}(M(C_{n))=\gamma_d(M(C_n))=\gamma_o(M(C_n))=n}$.

3.6.3 Calcul du nombre d'alliance puissante globale(γ_{ap}) pour le graphe milieu d'une double étoile

Proposition 3.6.4. *Dans un graphe milieu d'une double étoile $M(S_{3,3})$ on a :*

$\gamma_d = \gamma_{ap} = p + q$ *si* $p, q \geq 3$ *et* $\gamma_d = \gamma_{ap} = p + q + 1$ *si* $p = 2$ *ou* $q = 2$.

Preuve 3.6.5. ***Cas 1 :*** *: Pour* $p, q \geq 3$

On a le graphe milieu associé à $S_{3,3}$ est :

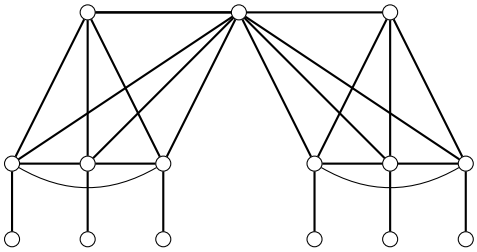


FIGURE 3.17: $M(S_{3,3})$

On va calculer $\gamma_d(M(S_{3,3}))$:

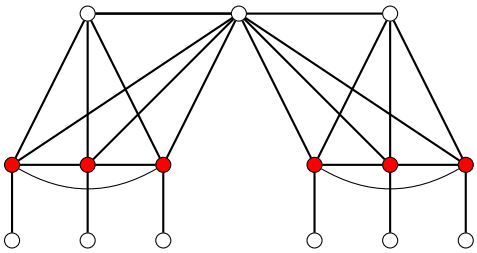


FIGURE 3.18: $\gamma_d(M(S_{3,3}))$

On trouve $\gamma_d(M(S_{3,3})) = 6$.

Nous calculons $\gamma_o(M(S_{3,3}))$, on obtient :

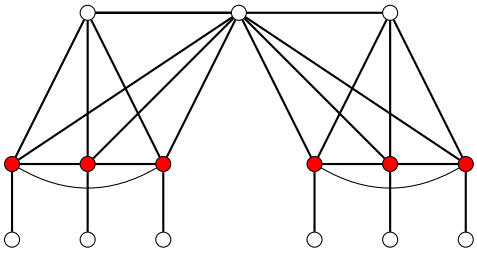


FIGURE 3.19: $\gamma_o(M(S_{3,3}))$

Donc, $\gamma_o(M(S_{3,3})) = 6$.

D'après la figure 3-18 et la figure 3-19, on trouve que $\gamma_{ap}(M(S_{3,3})) = 6$.

On déduit que $\gamma_{ap}(M(S_{3,3})) = \gamma_d(M(S_{3,3})) = \gamma_o(M(S_{3,3})) = 6 = p + q$.

D'où $\gamma_{ap}(M(S_{p,q})) = \gamma_d(M(S_{p,q})) = \gamma_o(M(S_{p,q})) = p + q \forall n \in N$.

Cas 2 : $p = 2$ *ou* $q = 2$ *:*

-Pour ***p=2*** *on a* $\gamma_d(M(S_{2,4})) = 7$.

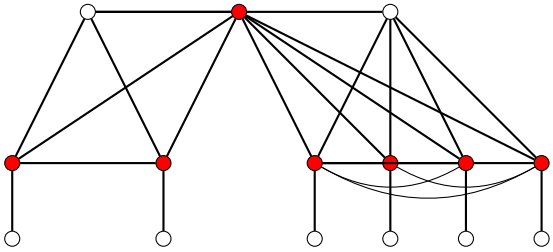


FIGURE 3.20: $\gamma_d(M(S_{2,4}))$

Calcul du $\gamma_o(M(S_{2,4}))$ *:*

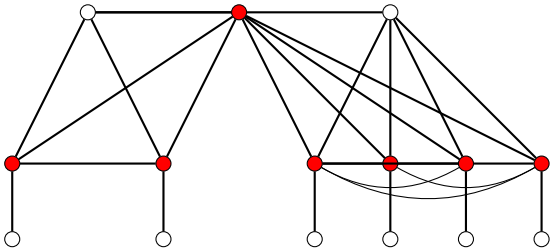


FIGURE 3.21: $\gamma_o(M(S_{2,4}))$

On trouve $\gamma_o(M(S_{2,4})) = 7$.

D'après les deux figures précédentes on obtient que $\gamma_{ap}(M(S_{2,4})) = 7$.

D'où $\gamma_{ap}(M(S_{p,q})) = \gamma_d(M(S_{p,q})) = \gamma_o(M(S_{p,q})) = p + q + 1 \forall n \in N$

- Pour ***q=2*** *on a*

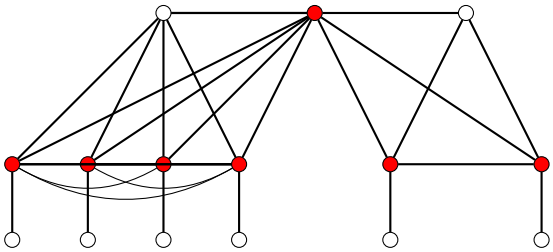


FIGURE 3.22: $\gamma_d(M(S_{4,2}))$

Donc $\gamma_d(M(S_{4,2})) = 7$.

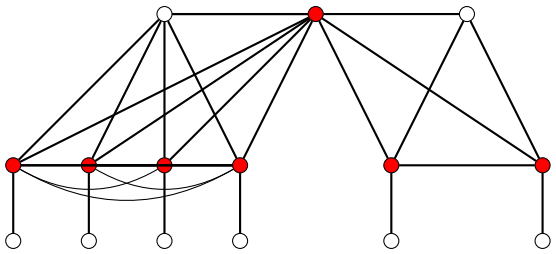


FIGURE 3.23: $\gamma_o(M(S_{4,2}))$

Donc $\gamma_o(M(S_{4,2})) = 7$.

D'après les deux figures précédentes on trouve que $\gamma_{ap}(M(S_{4,2})) = 7$.

D'où $\gamma_{ap}(M(S_{p,q})) = \gamma_d(M(S_{p,q})) = \gamma_o(M(S_{p,q})) = p + q + 1 \forall n \in N$. □

3.7 Calcul du nombre d'alliance puissante globale(γ_{ap}) pour les grilles

Produit cartésien

Le produit cartésien de deux graphes G_1 *et* G_2 *notée par* $G_1 \square G_2$, *est un graphe simple avec* $V(G_1) \times V(G_2)$ *comme ensemble de sommets et deux sommets* (u_1, v_1) *et* (u_2, v_2) *sont adjacents dans* $G_1 \square G_2$ *si et seulement si* $u_1 = u_2$ *et* v_1, v_2 *sont adjacents dans* G_2, *ou* u_1 ,u_2 *sont adjacents dans* G_1 *et* $v_1 = v_2$. *Dans la suite, où* $\mid V(G_1) \mid = m$ *et* $\mid V(G_2) = n$, *on considère l'ensemble de sommets de* $G_1 \square G_2$ *est* $m \times n$, *comme un tableau dans lequel l'entrée* (i, j) *correspond au sommet* $(i; j), i \in V(G_1)$ *et* $j \in V(G_2)$, *et chaque colonne induit une copie du graphe* G_1, *chaque ligne induit une copie de graphe* G_2.

Produit direct

Le produit direct $G \times H$ *est le graphe ayant pour ensemble* $V(G) \times V(H)$ *et dont deux sommets* (x_1, y_1) *et* (x_2, y_2) *sont reliés par une arête si et seulement si*

$x_1x_2 \in E(G)$ *et* $y_1y_2 \in E(H)$.

Produit fort

Le produit fort $G \boxtimes H$ *est le graphe ayant pour ensemble de sommets* $V(G) \times V(H)$ *et dont deux sommets* $(x_1, y_1)6 = (x_2 \neq y_2)$ *sont reliés par une arête si et seulement si* $x_1 = x_2$ *ou* $x_1x_2 \in E(G)$ *et* $y_1 = y_2$ *ou* $y_1y_2 \in E(G)$. *Ceci veut dire que* $E(G \boxtimes H) = E(G\square H) \cup E(G\square H)$.

3.7.1 Produits cartésien des graphes

Dans [8] I.Gonzalez Yero et Al ont établis quelques résultats sur γ_o *et* γ_d *dans les (produit des graphes) tels que les grilles.*

Proposition 3.7.1. *[8] Soit* $P_m\square P_n$ *est un graphe grille*

1. Si m *et* n *sont pairs, alors*

$$\gamma_o(P_m\square P_n) = \frac{mn}{2}$$

2. Si m *est pair et* n *est impair, alors*

$$\gamma_o(P_m\square P_n) = \frac{m(n-1)}{2} + \lceil\frac{mn}{2}\rceil$$

3. Si m *et* n *sont impair, alors*

$$\gamma_o(P_m\square P_n) = \frac{(m-1)(n-1)}{2} + \lceil\frac{m}{3}\rceil + \lceil\frac{n}{3}\rceil \leq \gamma_o(P_m\square P_n) \leq \frac{m(n-1)}{2}\lceil\frac{m}{3}\rceil$$

3.7.2 Les alliances défensives globale(γ_d)pour les grilles

Corollaire 3.7.1. *Si* $G_1 = P_{nj}$ *ou* C_{ni} *pour* $i = 1, 2$ *alors*

$$\gamma_d(G_1\square G_2) = \lceil\frac{n_1n_2}{3}\rceil$$

Théorème 3.7.1. *(Chan-Wei Changa, Fu-Hsing Wangd [5] 2011)*

1- Si $2 \leq m \leq n$, *alors :*

$\gamma_d(p_m\square p_n) = \frac{3m}{3}$ *si* $mn \equiv 0(mod3)$, *et*

$\gamma_d(p_m \Box p_n) \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor m + a$

Si $m \equiv n \equiv 1(mod3)$

$\gamma_d(p_m \Box p_n) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil m$, *si* $m \equiv n \equiv 1(mod3)$;

$\gamma_d(p_m \Box p_n) \leq min\{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor n + \lfloor \frac{m}{3} \rfloor + b, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor m\}$ *si* $m \equiv 1(mod3)$ *et* $n \equiv 2(mod3)$;

$\gamma_d(p_m \Box p_n) \leq min\{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor m + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + a, \lfloor \frac{m}{3} \rfloor n\}$ *si* $m \equiv 2(mod3)$ *et* $n \equiv 1(mod3)$;

avec $a = 1 + \lfloor \frac{m+2}{4} \rfloor - \lfloor \frac{m+2}{4} \rfloor, b = 1 + \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor - \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor$.

2- Si $m \geq 3, n \geq 2$, *alors* $\gamma_d(C_m \Box p_n) = \lceil \frac{mn}{3} \rceil$ *si* $mn \equiv 0(mod3)$ *avec* $m \geq 7, m \equiv 1(mod6)$ *et* $n = 2$ *ou* 4 *alors :*

$\gamma_d(C_m \Box p_n) \leq min\{\lceil \frac{n}{3} \rceil m, \lfloor \frac{m}{3} \rfloor n\}$ *si* $n \equiv 2(mod3) et m \not\equiv 0(mod3)$

Et $\gamma_d(C_m \Box p_n) \leq min\{\lceil \frac{m}{3} \rceil n, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor m + \lceil \frac{m}{2} + a\}$ *si* $n \equiv 1(mod3) et m \not\equiv 0(mod3)$

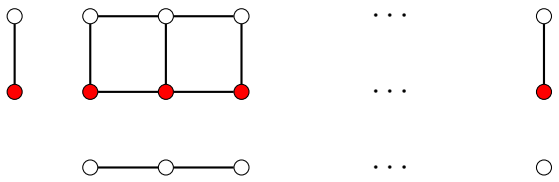
avec $a = 1 + \lfloor \frac{m+2}{4} \rfloor - \lfloor \frac{m+2}{4} \rfloor$

3- Si $m \geq 7, m \equiv 1(mod6)$ *et* $n \equiv 2, 4(mod6)$, *alors* $\gamma_d(C_m \Box p_n) \leq \frac{mn}{3} + min\{\frac{n}{6}, \frac{m}{3}\}$ *si* $n \equiv 2(mod6) \frac{mn}{3} + min\{\frac{n}{6}, \frac{m}{6} + \frac{3}{2} + \lfloor \frac{m+2}{4} \rfloor - \lfloor \frac{m+2}{4} \rfloor\}$ *si* $n \equiv 4(mod6)$

4- Si $3 \leq m \leq n$, *alors* $\gamma_d(C_m \Box C_n) = \lceil \frac{mn}{3}$ *si* $mn \equiv 0(mod3) ou n \geq 7, n \equiv 1(mod6)$ *et* $\gamma_d(C_m \Box C_n) = min\{\lceil \frac{n}{3}, \lceil \frac{m}{3} \rceil$ *si* $m = n \not\equiv 0(mod3)$

Proposition 3.7.2. *Pour tous graphe* P_m, *le produit cartésien de* P_2 *avec* P_m *est :*

$\gamma_d(P_2 \Box p_m) = m$ *si* $m = 2k$ *et* $\gamma_d(P_2 \Box p_m) = m - 1$ *si* $m = 2k + 1$



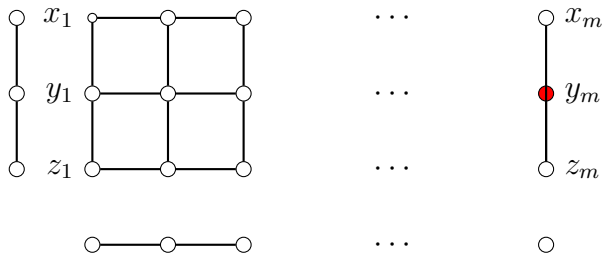
Puisque aucun travail n'était fait jusqu'à maintenant sur les alliances puissantes globales dans le produit des chaînes P_3 *et* P_m *alors on a travailler sur ce produit .*

D'après nos calculs on a trouvé la proposition suivante :

Proposition 3.7.3. *Pour tous* $m \geq 2$ *on trouve :*

$\gamma_d(P_3 \Box p_m) = m$

Preuve 3.7.1. *Le produit cartésien de* P_3 *et* P_m *est*



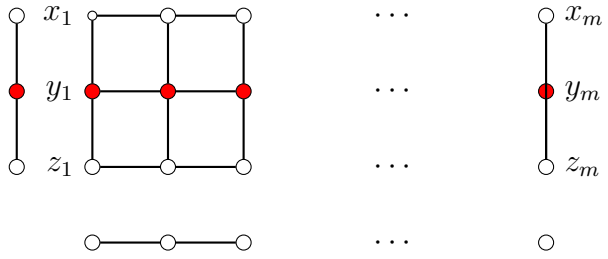
Soit $G = P_3 \square p_m$ *avec* $m \geq 2$

Soit $S = \{y_1, y_2, ..., y_m$ *est le chemin centre de* G.

On a y_1 *et* y_m *sont isomorphes*

Pour $i = \{2, 3, ...m-1\}$ *on a :*

$y_i \in S, \mid N[v] \cap S \mid > \mid N[v] \cap (V - S) \mid$.



3.7.3 Les alliances offensives globale(γ_o) pour les grilles

Corollaire 3.7.2. *Le théorème suivant nous donne une borne inférieure pour le nombre d'alliance offensive globale dans le produit cartésien de deux graphes* G *et* H *en fonction de* $\gamma_o(G)$ *et* $\gamma(G)$

Théorème 3.7.2. *(Ismael G. Yero and Juan A. Rodr guez-Vel azquez [9] 2012)*

Pour tout graphe G *et* H *:*

$\gamma_o(G \square H) \geq \frac{1}{2} max\{\gamma(G)\gamma_o(H), \gamma_o(G)\gamma(H)\}$

Ismael G. Yero and Juan A. Rodr guez-Velazquez ont trouvé un autre résultat entre les chaines et tout graphe G.

Théorème 3.7.3. *(Ismael G. Yero and Juan A. Rodr guez-Vel azquez [9] 2012) Soit* P_n *un graphe d'ordre* n*, pour tout graphe* G *de degré minimum* $\delta \geq 1$ *:*

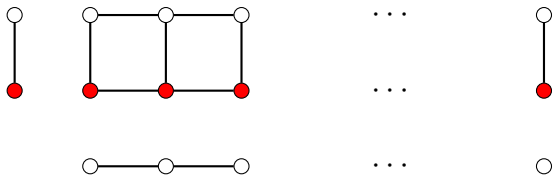
$$\gamma_o(G \square P_n) \geq \lceil \frac{(n-1)\gamma_o(G)}{2} \rceil + \lceil \frac{\delta}{2} \rceil$$

Théorème 3.7.4. *(Ismael G. Yero and Juan A. Rodr guez-Vel azquez [9] 2012) Soit C_n un cycle d'ordre n, pour tout graphe G on a :*

$$\gamma_o(G\Box C_n) \geq \lceil \frac{(n)\gamma_o(G)}{2} \rceil$$

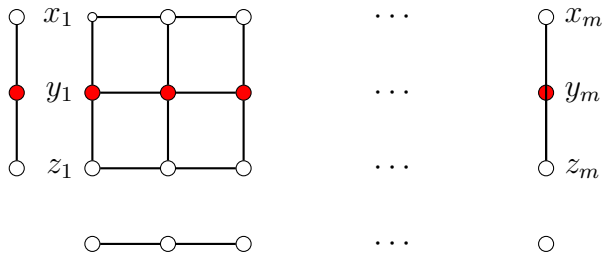
Proposition 3.7.4. *Pour tous graphe P_m, le produit cartésien de P_2 avec P_m est :*

$$\gamma_o(P_2\Box p_m) = m$$



Proposition 3.7.5. *Pour tous m impair on trouve :*

$$\gamma_o(P_3\Box p_m) = \frac{(m-1)(n-1)}{2} + \lceil \frac{n}{3} \rceil + \lceil \frac{n}{3} \rceil$$



3.8 Les alliances puissantes globale(γ_{ap}) pour les grilles

Remarque 3.8.1. *Pour tous $m \geq n$ on trouve :*

$$\gamma_{ap}(P_n\Box p_m) \geq \gamma_{ap}(P_n) + \gamma_{ap}(P_m)$$

Remarque 3.8.2. *Pour tous $m \geq n$ on trouve :*

$$\gamma_{ap}(P_n\Box p_m) \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil + 1$$

.

Remarque 3.8.3. *Pour tous graphe P_m, le produit cartésien de P_2 avec P_m pour $m \leq 5$ est :*

$$\gamma_{ap}(P_2 \square p_m) = m + 1$$

et $\gamma_{ap}(P_2 \square p_m) = m + 2$ si non.

Preuve 3.8.1. *D'après la remarque 3.8.1 on a*

$\gamma_{ap}(P_2 \square p_m) \geq \gamma_{ap}(P_2) + \gamma_{ap}(P_m)$

et comme $\gamma_{ap}(P_m) \leq m$ donc

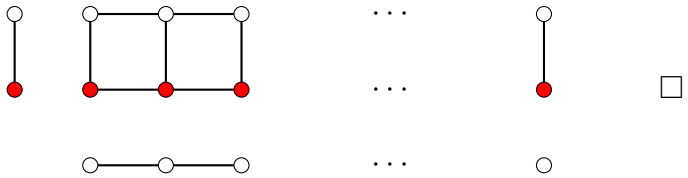
$\gamma_{ap}(P_2 \square p_m) \geq 1 + m$

Et d'après l'observation 1-9 on a

$\gamma_{ap}(P_2 \square p_m) \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil + 1$

Donc :

$\gamma_{ap}(P_2 \square p_m) = m + 1$



□

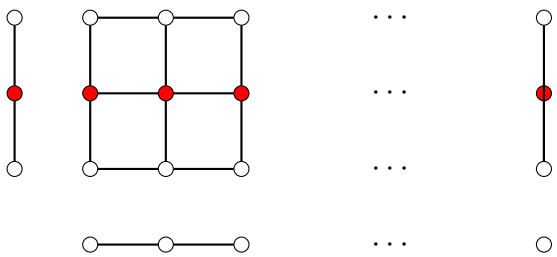
Proposition 3.8.1. *Pour tous $m \geq 2$ on a :*

$\gamma_{ap}(P_3 \square C_m) = m + 1$ *si m est impair.*

$\gamma_{ap}(P_3 \square C_m) = m$ *si m est pair.*

Proposition 3.8.2. *Pour tous $m \geq 4$ on a :*

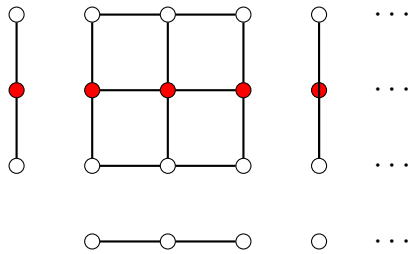
$\gamma_{ap}(P_4 \square p_m) = 2(m + 1)$ *si m est impair.*



Proposition 3.8.3. *Pour tous $m \geq 3$ on a :*

$\gamma_{ap}(P_3 \square p_m) = 2m - 1$ *si m est impair.*

$\gamma_{ap}(P_3 \square p_m) = 2(m-1)$ *si* m *est pair.*



3.9 Relation entre γ_{ap} et γ_d et γ_o pour les chenilles

★ Une chenille

Une chenille est une chaîne tel que chaque sommet de cette chaîne reliée avec certain voisins privés.

Voilà un exemple d'une chenille Ch(2,2.....2,2)

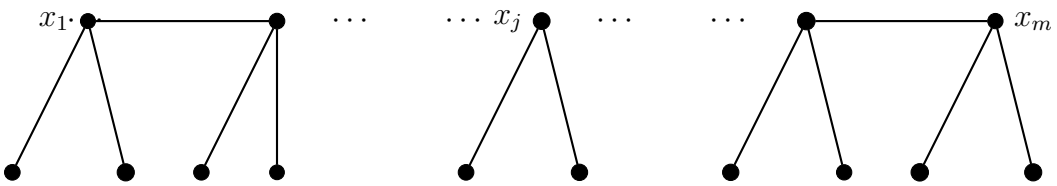


FIGURE 3.24: Une chenille $Ch(2, 2.....2, 2)$.

Proposition 3.9.1. *Soit le graphe chenille* $ch(p, p, .., p)$ *de* m *sommets supports et* (m, p) *sommets pendants, avec* $p \geq 4, m \geq 3$

$\gamma_d = m\frac{p}{2}$ *si* p *est pair.*

Si p *est impair alors :*

$\gamma_d = m + 2 + (m\frac{p-3}{2})$

$\gamma_o = m$

$\gamma_{ap} = \gamma_d$

Preuve 3.9.1. *soit* G *le graphe chenille* $ch(p, p, .., p)$ *de* m *sommets supports et* (m, p) *sommets pendants ,avec* $p \geq 4, m \geq 3$ *et* $S = \gamma_d$ *-ensemble et soit* X_n *et* X_m *les deux sommets supports d'extrémité et soit* X *un sommets supports diffèrent à* X_n *et* X_m

dans la chaine P_n =$\{X_1,...,X_n$ *avec* $1 \leq k \leq p$ *Par la remarque 2-2-1 on a tous les sommets supports sont dans* S *D'une part* $\mid N[x] \cap S \mid = 3et \mid N[x] \cap (V-S) \mid = p$ *d'où* $\mid N[x] \cap S \mid < \mid N[x] \cap (V-S) \mid$, *donc il faut ajouter* k *sommets à* S *pour vérifier légalité donc :* $3 + k = p - k$ *implique* $k = \frac{p-3}{2}$ *si* p *est impair et* $k\lceil\frac{p-3}{2}\rceil = \lceil\frac{p-2}{2}\rceil$ *si* m *est pair D'autre part* $\mid N[x_n] \cap S \mid = \mid N[x_m] \cap S \mid = 2$ *et* $\mid N[x_n] \cap (V-S) \mid = \mid N[x_m] \cap (V-S) \mid = p$ *il suffit d'ajouter* k' *sommets à* S *pour vérifier légalité donc :*

$2 + k = p - k$ *implique* $k = \frac{p-2}{2}$ *si* p *est pair et* $k = \lceil\frac{p-2}{2}\rceil = \frac{p-1}{2}$ *si* p *est impair Finalement si* p *est pair alors :* $|S| = m + (m-2)\frac{p-2}{2} + 2\frac{p-2}{2}$ *si* p *est pair.*

Et $\mid S \mid = m + (m-2)\frac{p-3}{2} + 2\frac{p-1}{2}$ *si* p *est impair. implique* $\mid S \mid = m + m\frac{p}{2}$ *si* p *est pair*

Et implique $\mid S \mid = m + m\frac{p}{2} + 2$ *si* p *est impair*

d'où on obtient γ_d *-ensemble.* □

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressées à étudier les alliances puissantes globales dans quelques classes de graphes. Dans un premier temps, on a rappelé quelques notions fondamentales des alliances. Dans un second temps,on a rappelé quelques résultats des travaux de recherches réalisés au paravant sur les alliances défensives , offensives et puissantes . En dernier lieu, on a déterminé quelques résultats de calcul sur le nombre d'alliance puissantes globales pour des classes particulières de graphes.

Les travaux réalisés dans ce mémoire ouvre plusieurs perspectives de travaux futurs.

1. Etudier les alliances puissantes globales .

2. Déterminer des valeurs exactes des nombres $\gamma_o(G)$, $\gamma_d(G)$ et $\gamma_{ap}(G)$ pour des graphes particuliers.

3. Calculer le nombre d'alliance puissante globale pour d'autres classes de graphes .

Bibliographie

[1] *R.C. Brigham, R.D. Dutton, T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, Powerful alliances in graphs, Discrete Math. 309 (8) (2009) 2140-2147.*

[2] *M. Bouzefrane et M. Chellali, On the global Oensive alliance number of trees. Opus cula Mathematica, 29 (2009) 223-228.*

[3] *M. Bouzefrane et M. Chellali, A note on global alliances in trees.novembre* 2009.

[4] *Global défensive alliance in trees [M. Bouzefrane et M. Chellali 2010]*

[5] *Globale defensive alliance of trees and cartesian product of paths an cycles,2011*

[6] *T. Hamada, I. Yoshimura : Traversabilitiy and connectivitiy of the middle graphe of agraph. Discrete Math. 14 : 247-256, 1976.*

[7] *A.Hansberg et L.Volkmann, On 2-domination and independence domination numbrs of graphs.Ars Combin, Accept*

[8] *G. Ismael Yero, J. A. Rodreguez- VÈlazquez- comuting product graphs. Discrite Apllicad mathematics 161 (2013) 284- 2093.*

[9] *Ismail G.yero and Juan ,Computing global offensive alliances in cartesian product graphs,2012*

[10] *P. Kristiansen, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, Alliances in graphs, J. Combin. Math. Combin. Comput. 48 (2004) 157-177*

[11] J.A. Rodriguez-Velazquez, J.M. Sigarreta, Spectral study of alliances in graphs, Discuss. Math. Graph Theory 27 (1) (2007) 143-157

[12] J.A. Rodriguez-Velazquez, J.M. Sigarreta, Global offensive alliances in graphs, Electron. Notes Discrete Math. 25 (2006) 157-164

[13] J. A. Rodriguez-Velazquez, J. M. Sigarreta, offensive alliances in cubic graphs. International mathematical forum 1 *(*36*) (*2006*)* 1773-1782*.*

[14] J.A. Rodriguez-Velazquez, J.M. Sigarreta, Offensive alliances in cubic graphs, Int. Math. Forum 1 (36) (2006) 1773-1782.

[15] J.M. Sigarreta, J.A. Rodriguez-Velazquez, On defensive alliances and line graphs, Appl. Math. Lett. 19 (2) (2006) 1345-1350.